多目的最適設計法を用いたコンプライアントメカニズムのロバストトポロジー最適設計

多目的最適設計法を用いたコンプライアントメカニズムの ロバストトポロジー最適設計

西野 敦 *1, 小木曽 望 *2, 乙守 正樹 *3, 山田 崇恭 *4, 西脇 眞二 *5

Robust topology optimization of compliant mechanism using multiobjective optimization method

Atsushi NISHINO*1, Nozomu KOGISO*2, Masaki OTOMORI*3, Takayuki YAMADA*4 and Shinji NISHIWAKI*5

*1,*2 Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University
1-1 Gakuen-Cho, Naka-Ku, Sakai-Shi, Osaka 599-8531, JAPAN
*3 Scientific Analysis Engineering Department, AISIN AW Co., LTD.
10 Takane, Fujii-Cho, Anjo-Shi, Aichi 444-1192, Japan
*4,*5 Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University
Kyoto-Daigaku Katsura, Nishikyo-Ku, Kyoto-Shi, Kyoto 615-8530, Japan

Received 19 April 2016

Abstract

This study evaluates a robust optimum design of a compliant mechanism considering uncertainty of the load direction. For the topology optimization, this study adopts a level set based approach incorporating a fictitious interface energy term. The method is known to have several advantages such as the allowance of topological as well as shape changes, and the ability to qualitatively control the geometrical complexity of the obtained optimum configurations. The design objectives are to maximize the displacement at the gripping position and the robustness under variations of the applied load direction. In addition, the eigenfrequency maximization is considered to acquire the structural stiffness. The design problem is formulated as a multiobjective design problem. Conventionally, the robust design problem has been formulated as a weighted sum of the mean value and the standard deviation of the performance index. Integrating the multiobjective optimization to the level set-based topology optimization method, this study adopts the l_p-norm method that can obtain the Pareto solution even when the Pareto frontier is a non-convex form. Through numerical examples of a compliant mechanism design, validity of the proposed method is verified. Then, the robustness of the obtained optimum configuration is discussed.

Key words : Robust multiobjective optimization, Topology optimization, Compliant mechanism, Level set, Uncertainty

1. 緒　　論

コンプライアントメカニズムは，剛体とジョイントで構成される従来の機構とは異なり，適切な位置に柔軟性を付与することでジョイントの機能を実現する一体構造型メカニズムである (Howell, 2001). このコンプライアントメカニズムの形態設計法として，トポロジー最適設計法が有力な手法として知られていて，いくつかの手法が提

No.16-00178 [DOI: 10.1299/transjsme.16-00178]
*1 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1)
*2 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野
*3 正員, アイシン・エィ・ダブリュ(株) 解析技術部 (〒 444-1192 愛知県安城市藤井町高根 10)
*4 正員, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻 (〒 615-8530 京都府京都市西京区京都大学桂)
*5 正員, フェロー, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻
E-mail of corresponding author: kogiso@aero.osakafu-u.ac.jp

案されている (Sigmund, 1997, Frecker et al., 1997, Nishiwaki et al., 2001, Yamada et al., 2010, Otomori et al., 2011).

一方，最適設計で得られた設計解は，荷重や材料物性などの設計パラメータの変動の影響を受けやすいことが知られている．そのような変動に対して影響の少ない構造を設計する手法としてロバスト設計法が広く利用されている．近年，そのロバスト設計法とトポロジー最適設計を融合するロバストトポロジー最適設計の研究が行われている (Seepersad et al., 2006, Chen et al., 2010, Takezawa et al., 2011)．われわれは，コンプライアントメカニズムの形態設計において入力荷重方向の不確定性がある場合に，ロバストな構造形態を求めるロバストトポロジー最適設計を提案している (Kogiso et al., 2008).

一般に，コンプライアントメカニズムの形態設計では，入力変位に対する出力変位の比を最大化するように最適設計問題を定式化する．しかし，それでは全体の剛性が低下する可能性があるため，本研究では，剛性確保のために構造の固有振動数も最大化することを考える．さらに，荷重方向の変動の影響も考慮したロバスト設計を考えることにする．つまり，設計問題は，3 個の目的関数からなる多目的最適設計問題となる．

多目的最適設計としては，複数の目的関数を重み付き加重和によって単一の目的関数に変換する方法が広く用いられている．しかし，この方法では，Pareto 面が非凸である場合に Pareto 解が正しく得られないという問題点がある．Pareto 解を正確に求める手法として満足化トレードオフ法が提案されていて (Nakayama and Sawaragi, 1984)，最近では近似最適化問題への応用されている (Kitayama and Yamazaki, 2014)．著者の一人は，ロバスト設計を多目的最適問題として定式化する方法を提案し，これに満足化トレードオフ法を適用している (Toyoda and Kogiso, 2015).

さて，本研究では，トポロジー最適設計法として，レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法 (Yamada et al., 2010) を用いる．この手法は，滑らかな形状境界が得られるばかりではなく，穴の創出が可能で，初期形態の影響を受けにくいといった利点がある．さらに，構造の複雑さを定性的に変化させることができる．

本研究では，このトポロジー最適設計法と多目的設計問題を統合する．そのために，まずは満足化トレードオフ法を採用することを考えた．満足化トレードオフ法は各目的関数に対して希求水準を考慮した重み係数を乗じた値の最大値を最小化するように定式化する．これを単一目的問題に置き換えるために，スラック変数を導入することが必要となる．一方，レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法はレベルセット関数を設計変数として，それを時間発展させることで最適な構造形態を求めるものである．そこにスラック変数を必要とする満足化トレードオフ法を導入することは，困難であった．また，Pareto 面が非凸であっても効果的な手法として，イプシロン制約法 (Miettinen, 1999b) が知られている．これは複数の目的関数の中の一つだけを目的関数とし，他の目的関数に上下限値を設定して制約条件として，単一目的関数問題として定式化する手法であり，広く用いられている．しかしながら，これには適切な上下限値が設定できることが不可欠である．本研究の問題は，事前にその上下限値を適切に設定することが困難なため，イプシロン制約法は採用しないこととした．そこで，本研究では，ロバスト多目的最適設計手法として，Pareto 面が非凸であっても正しく Pareto 解を求めることができる重み付き l_p ノルム法 (Miettinen, 1999a) を採用することとした．

そして，数値計算により，コンプライアントメカニズムの変動を考慮したロバスト多目的最適設計の最適形態を比較するとともに，提案手法の妥当性を検証するとともに，得られた設計解のロバスト性を示す．さらに，ロバスト設計法の実効性について議論する．

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適設計

2·1 レベルセット関数を用いた形状表現と最適設計問題の定式化

物体により占められている領域 Ω(以下，物体領域) を含む固定領域 D(以下，固定設計領域) において，物体領域の構造形態最適化について考える．レベルセット法では，図 1 に示すように，レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を用いて，そのゼロ等位面によって物体境界を陰的に表現する．つまり，次式に示すように，レベルセット関数の値が正の領域を物体領域，負の領域を空洞領域，その間のゼロが物体の境界とみなす．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \le 1 & \text{if} \quad {}^\forall \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if} \quad {}^\forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ -1 \le \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if} \quad {}^\forall \boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{1}$$

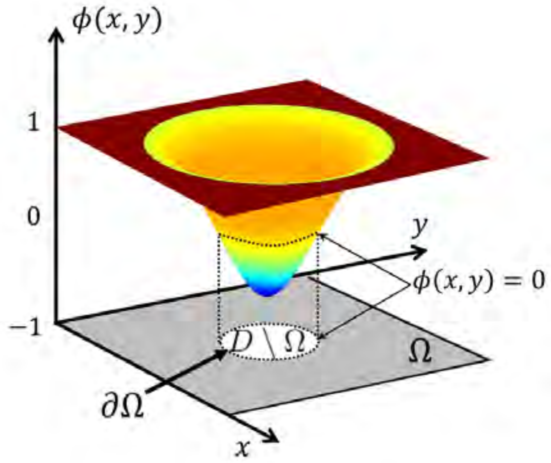


Fig. 1　Level set function and design domain

なお，レベルセット関数に上下限値を導入しているが，これは目的汎関数に付加する界面エネルギーをレベルセット関数により表現するために導入したものである．

このレベルセット法による形状表現にフェーズフィールド理論の定式化で利用されている界面エネルギーを導入し，目的汎関数を F，体積制約の制約汎関数を G で表す構造最適化問題を次式で定義する．

$$\underset{\phi}{\text{Minimize}}:\ F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{D} \frac{1}{2}\tau|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{2}$$

$$\text{subject to}:\ G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega - V_{\max} \le 0 \tag{3}$$

ここで，$f(\boldsymbol{x})$ は目的汎関数の被積分関数で，$V_{\max}$ は体積制約の上限値である．また，τ は界面エネルギーと目的汎関数の比を示すパラメータである．この値を適切に設定する事により，得られる最適形態の複雑さを定性的に調整することが可能となる．

この問題をラグランジュ未定乗数法を用いて，無制約問題に置き換える．すなわち，ラグランジアンを $\bar{F}$，式 (3) に関するラグランジュ乗数を λ とすれば，上述の最適化問題は次式となる．

$$\underset{\phi}{\text{Minimize}}:\ \bar{F}(\Omega(\phi),\phi) = \int_{\Omega}(f(\boldsymbol{x})+\lambda)\,\mathrm{d}\Omega + \int_{D}\frac{1}{2}\tau|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

なお，上式ではラグランジアンの密度関数として

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda \tag{5}$$

と置くことができる．本研究では上式を解くことにより最適構造を得る．本手法の詳細は，(Yamada et al., 2010) を参照されたい．

2·2　時間発展問題

レベルセット関数 ϕ を時間発展させることで設計変数を更新するために，式 (6) に示すように，ラグランジアン $\bar{F}$ の勾配に比例するものと仮定する．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -K(\phi)\frac{\delta\bar{F}}{\delta\phi} \tag{6}$$

ここで，$K(\phi)(>0)$ は比例定数，$\delta\bar{F}/\delta\phi$ はラグランジアン $\bar{F}$ の変分を表す．この関係式を式 (4) に代入し，次式を得る．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -K(\phi)\left(\bar{F}' - \tau\nabla^2\phi\right) \tag{7}$$

ここで，$\bar{F}'$ は $\bar{F}$ のトポロジー導関数である．また境界条件については，あらかじめ物体領域境界であることが指定されている境界 ∂D_N(以下，非設計境界) においてはディリクレ境界条件，その他の境界においてはノイマン境界条件を与える．これにより，時間発展方程式は次式で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi)\left(\bar{F}' - \tau \nabla^2 \phi\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \tag{8}$$

式 (3) の制約条件が活性である時,

$$\frac{dG(\phi)}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{9}$$

となる．したがって，式 (4)，式 (7)，式 (9) よりラグランジュ乗数 λ は次式で与えられる．

$$\lambda = -\frac{\int_\Omega K(\phi)(f(\boldsymbol{x}) + \tau \nabla^2 \phi)\, \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega K(\phi)\, \mathrm{d}\Omega} \tag{10}$$

また，制約条件が非活性である時はラグランジュ乗数 $\lambda = 0$ となる．以上より，ラグランジュ乗数 λ の値を求め，式 (8) に基づいてレベルセット関数 ϕ を初期値から更新させていき，ラグランジアン $\bar{F}$ が収束した時のレベルセット関数 ϕ の分布が最適構造の候補を与える．

本研究では，多目的最適設計における重み係数の影響について検証するため，得られる最適形態の体積が体積上限値と厳密に等しくなるように設定する．そのために，繰り返し過程において，レベルセット関数を調整する体積修正法を用いている．

3. 重み付き l_p ノルム法による多目的最適設計

r 個の目的関数の最小化する多目的最適設計問題を次式で示す.

$$\begin{aligned} \text{Minimize :} \quad & \boldsymbol{F}_{\text{multi}}(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}), \cdots, F_r(\boldsymbol{x})) \\ \text{subject to :} \quad & g_j(\boldsymbol{x}) \le 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \\ & \boldsymbol{x}^L \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^U \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$F_i(\boldsymbol{x})$ は i 番目の目的関数，r は考慮する目的関数の個数，また，$g_j(\boldsymbol{x})$ は制約条件で，m はその個数である．多目的最適設計問題では，目的関数値のいずれかを改善させようとした場合に他の目的関数値が改悪されてしまうような状態の解の集合である Pareto 解集合を求めることとなる．

本研究では，複数の目的関数を単一目的関数に変換する手法の一つである重み付き l_p ノルム法 (Miettinen, 1999a) を採用する．この手法は，重み付き加重和法と重み付き Tchebychev ノルム法の統一的な手法であり，式 (12) で定義する重み付き l_p ノルム関数を用いて，単一目的関数に変換する．

$$F_{l_p} = \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|_p^{\boldsymbol{w}} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{r} (w_i F_i(\boldsymbol{x}))^p\right]^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \displaystyle\max_{i=1,\cdots r}\ w_i F_i(\boldsymbol{x}) & p = \infty \end{cases} \tag{12}$$

ここで，p は探索できる Pareto 解の形状に関連したパラメータである．$p = 1, 2$ および ∞ の場合に，この目的関数が 2 点の Pareto 解の間で求めることができる Pareto 面の形状を図 2 に示す．$p = 1$ の場合は 2 点の Pareto 解を結ぶ直線上が Pareto 解として認識され，重み付き加重和に対応する．これに対し，$p = 2$ ではが非凸の曲線上の Pareto 解を求めることができる．さらに，$p = \infty$ ではその区間が矩形となる．

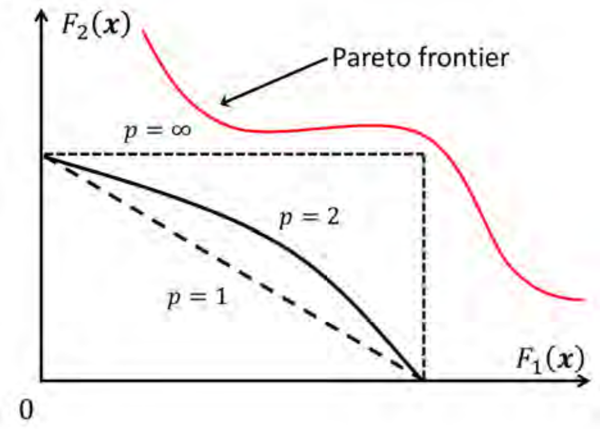
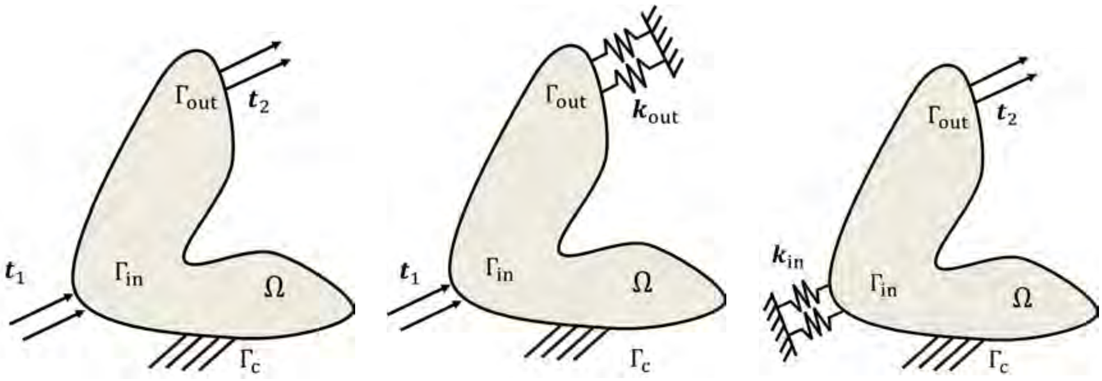


Fig. 2　Weighted l_p norm method



(a) Design condition　　(b) Case 1　　(c) Case 2

Fig. 3　Model of compliant mechanism

4.　コンプライアントメカニズムのロバスト多目的トポロジー最適設計

4·1　コンプライアントメカニズム

この節では，コンプライアントメカニズムに求める設計要件を明確化し，その目的関数を定式化する．図 3(a) に示す設計領域 Ω をもつ等方性線形弾性体からなるコンプラアイントメカニズムを考える．この設計領域は，境界 Γ_{c} で完全固定され，境界 Γ_{in} に表面力 $\boldsymbol{t}_1$ を入力荷重として作用させる．このとき，コンプライアントメカニズムは，境界 Γ_{out} に設定した変形 $\boldsymbol{t}_2$ を最大化するように設計する．

本研究では，このコンプライアントメカニズムに求められる機能として次の三項目を考える．

(a) 表面力 $\boldsymbol{t}_1$ を作用させたときに，変形 $\boldsymbol{t}_2$ を最大化し，コンプライアントメカニズムの機能を有していること．

(b) 表面力 $\boldsymbol{t}_1$ を作用させたときにも形状が維持することができるための剛性があること．

(c) ワークからの反力荷重が作用した場合でも，変形形状を維持できるための剛性があること．

これらの機能を実現するための目的関数を定式化するために図 3(b)，(c) に示す二つのケースを考える．

それぞれのケースで示す静的なつり合い状態を考える．まず，Case1 では，境界 Γ_{out} に単位長さあたりのばね定数 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{out}}$ を設置し，この時に表面力 $\boldsymbol{t}_1$ を作用させた場合の変位場を $\boldsymbol{u}_1$ とする．また，Case2 では，境界 Γ_{in} に単位長さあたりのばね定数 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{in}}$ を設定している．境界 Γ_{out} に表面力 $\boldsymbol{t}_2$ を作用させた場合の変位場を $\boldsymbol{u}_2$ としている．

まず機能 (a) については，相互平均コンプライアンスの考えに基づいて定式化する．

$$l^2(\boldsymbol{u}_1) = \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 \, \mathrm{d}\Gamma \tag{13}$$

この $l^2(\boldsymbol{u}_1)$ を最大化することで，入力荷重である表面力 $\boldsymbol{t}_1$ を作用させた場合の境界 Γ_{out} における $\boldsymbol{t}_2$ 方向の変形を

最大化することができる．

次に機能 (b)，(c) の剛性について考える．本研究では，Sigmund(Sigmund, 1997) の考え方を導入し，これら二つの剛性については明示的に定式化は行わず，図 3 (b), (c) に示すようにそれぞれの境界にばね定数を設定することで生じる荷重反力を用いて考慮する．Case 1 では境界 Γ_{out} から反力が生じ，式 (13) の最大化に伴い境界 Γ_{out} からの反力に対する剛性が最大化され，機能 (c) を満足することになる．また，Case 2 では同様に境界 Γ_{in} から反力が生じ，式 (13) の最大化に伴い機能 (b) を満足することになる．ばね定数の剛性 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{out}}$ を変化させることで与えるべき剛性を変化させることができ，結果として入力荷重位置の変位と出力変位の比を変化させることが可能となる．

以上の目的関数の定式化に基づき，体積制約のもと，最適設計問題を次式で定式化する．

$$\begin{aligned}
&\underset{\phi}{\text{Maximize}}: && F_1 = l^2(\boldsymbol{u}_1) = \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 \mathrm{d}\Gamma \\
&\text{subject to}: && a(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) = l^1(\boldsymbol{u}_1) \\
& && a(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = l^2(\boldsymbol{u}_2) \\
& && G(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}\Omega - V_{\max} \leq 0 \\
& && \text{for } {}^\forall \boldsymbol{v} \in U, \quad \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，

$$a(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_i) : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega \qquad (i = 1, 2) \tag{15}$$

$$l^1(\boldsymbol{u}_1) = \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} \boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1\, \mathrm{d}\Gamma \tag{16}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル，$\boldsymbol{E}$ は弾性テンソル，U は変位関数空間 $U = \{\boldsymbol{v} = v_i e_i : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{c}}\}$，$V_{\max}$ は許容される体積の最大値である．また，最適化問題 Case 1 の随伴問題が Case 2 となるように定義すれば，式 (13) は次式のように記述できる．

$$l^2(\boldsymbol{u}_1) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2) : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1) \mathrm{d}\Omega \tag{17}$$

次に，上の最適化問題に関する KKT 条件を導くとともに，レベルセット関数の時間発展方程式を解くために必要な目的汎関数の感度を求める．上述の定式化より，ラグランジアン F_{CM} はラグランジュ乗数 λ を用いて以下のように記述される．

$$\bar{F}_1(\Omega) = l^2(\boldsymbol{u}_1) + \lambda G(\Omega) = \int_\Omega \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2) : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1) + \lambda \right) \mathrm{d}\Omega \tag{18}$$

4·2　最小固有値最大化問題

前節では，コンプライアントメカニズムの剛性を確保するために，入出力部にばね定数を導入する方法を示した．しかしながら，その剛性は荷重に対する剛性であり，構造としての剛性とは一致しない．そこで，本研究では，特にコンプライアントメカニズムがワークを保持する場合を考慮して，固有振動数を最大化することも考える．

本研究では，トポロジー最適設計で広く用いられている固有モードの入れ替わりを考慮した平均固有値 (Ma et al., 1995) を用いる．このとき，最適設計問題は次式で表される．

$$\begin{aligned}
&\underset{\phi}{\text{Maximize}}: && F_2 = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-1} \\
&\text{subject to}: && a(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) = \lambda_k b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) \\
& && G(\Omega) \leq 0 \\
& && \text{for } {}^\forall \boldsymbol{v} \in U, \quad \boldsymbol{u}_k \in U, \quad k = 1, \ldots, q
\end{aligned} \tag{19}$$

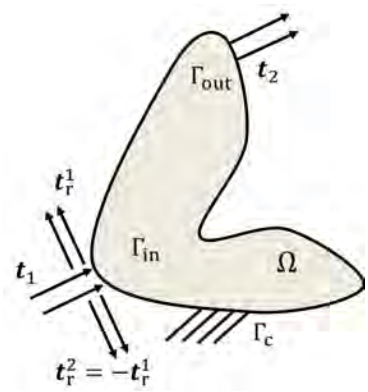


Fig. 4　Modeling of variable load direction

ここで，λ_k，$\boldsymbol{u}_k$ は，それぞれ，最低次から k 番目の固有値を固有振動モード，q は考慮するモード数である．本研究では予備解析の結果を踏まえ，$q = 6$ と設定する．

$$a(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_k) : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega \tag{20}$$

$$b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \rho \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Omega \tag{21}$$

ただし，ρ は質量密度，U は変位関数空間 $U = \{\boldsymbol{v} = v_i e_i \ :\ v_i \in H^1(D)\}$ with $\boldsymbol{v} = 0$ on Γ_c である．

なお，レベルセット関数の時間発展方程式を解くために必要な目的汎関数の被積分関数 f_2 は，随伴変数法を用いて求める．

$$f_2 = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^{q} \left(-\frac{1}{\lambda_k^2} \right) \delta\lambda_k \tag{22}$$

ここで，$\delta\lambda_k$ は次式で表される．

$$\delta\lambda_k = \delta a(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k) - \lambda_k \delta b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{23}$$

4·3　荷重方向の変動を考慮したロバスト最適設計問題

本研究では，コンプライアントメカニズム最適設計において，入力荷重方向 $\boldsymbol{t}_1$ に対して垂直な方向に荷重方向が変動する場合のロバスト最適設計 (Kogiso et al., 2008) を考える．入力荷重方向の変動は，図 4 に示すような入力方向に垂直な荷重 $\boldsymbol{t}_\mathrm{r}$ を設定することで表現する．垂直方向の荷重を含んだ入力荷重 $\boldsymbol{t}_1^\mathrm{r}$ は以下の関係式で表される．

$$\boldsymbol{t}_1^\mathrm{r} = \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_\mathrm{r} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{t}_\mathrm{r} = 0 \tag{25}$$

入力荷重 $\boldsymbol{t}_1$ は一定とみなし，変動荷重 $\boldsymbol{t}_\mathrm{r}$ の平均値は 0 と設定すると，それぞれの平均値の分散は以下のように示す.

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{t}_1^\mathrm{r}] = \boldsymbol{t}_1, \qquad \mathrm{Var}[\boldsymbol{t}_1] = 0, \tag{26}$$

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{t}_\mathrm{r}] = 0, \qquad \mathrm{Var}[\boldsymbol{t}_\mathrm{r}] = \sigma_r^2 \tag{27}$$

この仮定のもと，モデルに $\boldsymbol{t}_1^\mathrm{r}$ を作用させたときの変位場を $\boldsymbol{u}_1^\mathrm{r}$ とする時，目的関数となる相互平均コンプライアンス $l^2(\boldsymbol{u}_1^\mathrm{r})$ の平均値，分散はそれぞれ以下のように表される．

$$\mathrm{E}[l^2(\boldsymbol{u}_1^\mathrm{r})] = l^2(\boldsymbol{u}_1) \tag{28}$$

$$\mathrm{Var}\left[l^2(\boldsymbol{u}_1^\mathrm{r})\right] = \left(\sigma_r \cdot \frac{\partial l^2(\boldsymbol{u}_1)}{\partial \boldsymbol{t}_1^\mathrm{r}} \right)^2 \tag{29}$$

上式において，$\boldsymbol{u}_1$ は，$\boldsymbol{t}_1$ を作用させたときの変位場を表す．式 (29) の分散は，テイラー展開の二次以上の項の値が比較的小さいという仮定のもと無視し，一次の項を採用することで得られる．

相互平均コンプライアンス $l^2(\boldsymbol{u}_1)$ の $\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{r}}$ についての導関数は以下のように示すことができる．

$$\frac{\partial l^2(\boldsymbol{u}_1)}{\partial \boldsymbol{t}_1^{\mathrm{r}}} = u_1^{\mathrm{r}} \tag{30}$$

$\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{r}}$ は，変動荷重 $\boldsymbol{t}_{\mathrm{r}}$ を作用させたときの変動分を表す．式 (30) を式 (29) に代入するとスカラーな問題として考えることができる．

$$\mathrm{Var}\left[l^2(\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{r}})\right] = \left(\sigma_r u_1^{\mathrm{r}}\right)^2 \tag{31}$$

u_1^{r} は，$\boldsymbol{t}_{\mathrm{r}}^1$ と $\boldsymbol{t}_{\mathrm{r}}^2$ をそれぞれ作用させた場合の相互平均コンプライアンスの平均を採用することで得られる．

$$u_1^{\mathrm{r}} = \frac{l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^1) + l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^2)}{2} \tag{32}$$

$$l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^i) = \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \boldsymbol{t}_2 \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^i \mathrm{d}\Gamma, \qquad (i = 1, 2) \tag{33}$$

図 4 に示すように，$\boldsymbol{t}_{\mathrm{r}}^1$ と $\boldsymbol{t}_{\mathrm{r}}^2$ はそれぞれ反対方向の荷重である．これを式 (29) に代入すると，分散は次式で表すことができる．

$$\mathrm{Var}\left[l^2(\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{r}})\right] = \left(\sigma_r \cdot \frac{l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^1) + l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^2)}{2}\right)^2 \tag{34}$$

この平方根を変動を示す目的関数として用いる．なお，この目的関数は変動の影響を表し，最大化ではなく最小化することに注意されたい．

4·4 多目的最適設計問題と感度解析

本研究では，コンプライアントメカニズム最適設計として，固有値，荷重方向の変動を考慮したロバスト最適設計の三つの目的関数からなる設計問題を考える．そこで，重み付き l_p ノルム法を用いて，その三つの目的関数を一つの目的関数に変換する．

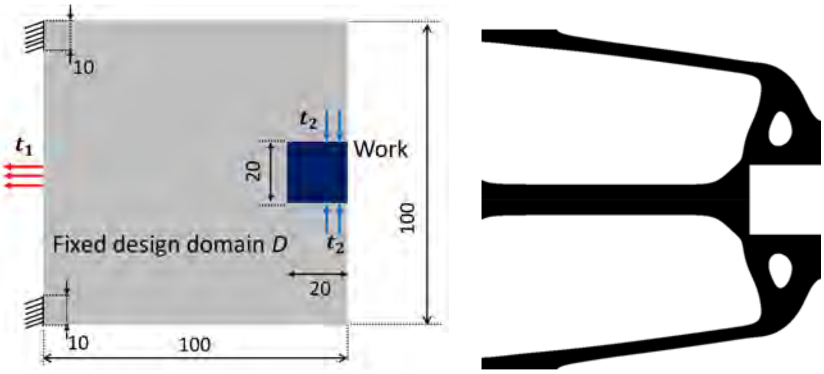
$$\begin{aligned}
\text{Maximize :}\quad & F_{\mathrm{3obj}} = \left[(w_{\mathrm{cm}}F_{\mathrm{cm}})^p + (w_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}})^p + (w_{\mathrm{ev}}F_{\mathrm{ev}})^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
\text{where :}\quad & F_{\mathrm{cm}} = l^2(\boldsymbol{u}_1) \\
& F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}} = -\sigma_r \cdot \frac{l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^1) + l^2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}^2)}{2} \\
& F_{\mathrm{ev}} = \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{35}$$

上式において，F_{cm} は確定的なコンプライアントメカニズム最適設計目的関数，$F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}$ は荷重方向の変動を考慮したロバスト項，F_{ev} は平均固有値最大化問題の目的関数である．w_{cm}，$w_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}$，$w_{\mathrm{ev}}$ はそれぞれの目的関数についての重み係数である．なお，確定的な 2 目的は最大化が目的で，ロバスト項は最小化が目的なので，全体を最大化問題として定式化し，ロバスト項 $F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}$ は -1 を乗じていることに注意する．

そして，最適化過程で形状更新に用いる目的関数の感度として，次式を用いる．

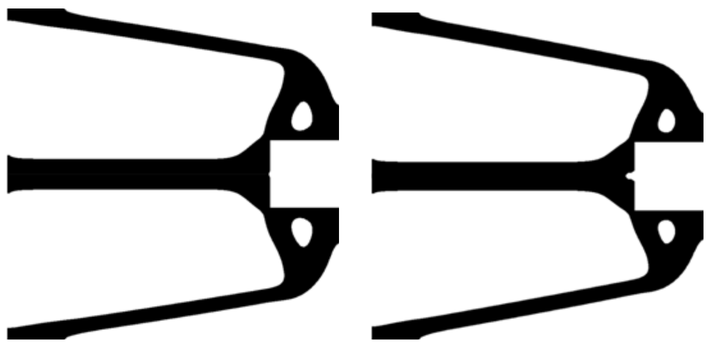
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{\mathrm{3obj}}}{\partial \phi} =& \left[(w_{\mathrm{cm}}F_{\mathrm{cm}})^p - (w_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}})^p + (w_{\mathrm{ev}}F_{\mathrm{ev}})^p\right]^{1-\frac{1}{p}} \\
&\cdot \left[(w_{\mathrm{cm}}F_{\mathrm{cm}})^{p-1}\left(w_{\mathrm{cm}}\frac{\partial F_{\mathrm{cm}}}{\partial \phi}\right) - (w_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}})^{p-1}\left(w_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}\frac{\partial F_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{r}}}{\partial \phi}\right) + (w_{\mathrm{ev}}F_{\mathrm{ev}})^{p-1}\left(w_{\mathrm{ev}}\frac{\partial F_{\mathrm{ev}}}{\partial \phi}\right)\right]
\end{aligned} \tag{36}$$

なお，ロバスト最適設計問題としては，上記に示したトポロジー最適設計問題と同様に体積の上限制約のもとで，重み係数を変化させながら Pareto 解を求める．

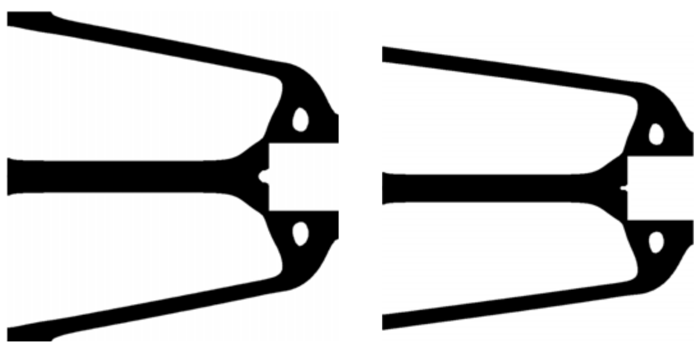


(a) Design domain (b) Optimum configuration

Fig. 5 Design domain of compliant mechanism and deterministic optimum configuration of the single objective optimization without considering eigenfrequency



(a) w_{ev}=0.25 (b) w_{ev}=0.35



(c) w_{ev}=0.38 (d) w_{ev}=0.40

Fig. 6 Multiobjetive optimum configurations

5. 数 値 計 算 例

5·1 設計モデル

本研究で用いるコンプライアントメカニズムの設計領域を図 5(a) に示す．一辺 100mm，厚さ 10mm の正方形領域に対し，左辺の上下端 10mm 部を固定する．そして，左辺中央の 10mm 部分を左方向に t_1 で引っ張り，右辺中央部の 20mm×20mm の領域で 40g のワークをつかむように，この上下辺を変形させるものとする．なお，この領域は非設計領域とする．トポロジー最適設計においては，$\tau = 10^{-5}$，体積制約は 25%と設定する．また，材料定数は，ヤング率 210GPa，ポアソン比 0.31, 密度 7.85g/mm^3 とし，正方形領域を 100×100 の 10000 要素に分割する．

また，重み付き l_p ノルム法のパラメータ p は，事前の予備計算による検討結果，$p = 3$ 程度に設定すると妥当な結果が得られることがわかったため，$p = 3$ と設定している．

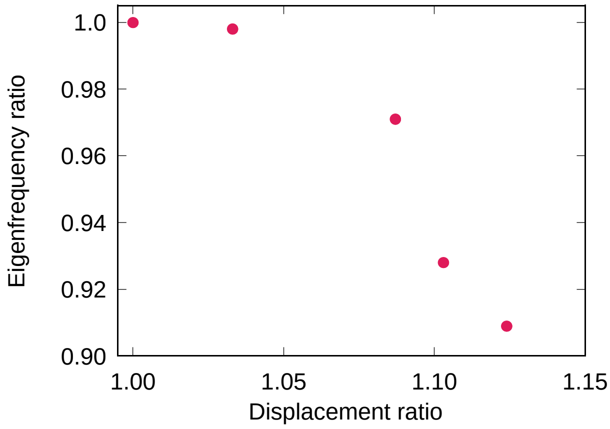
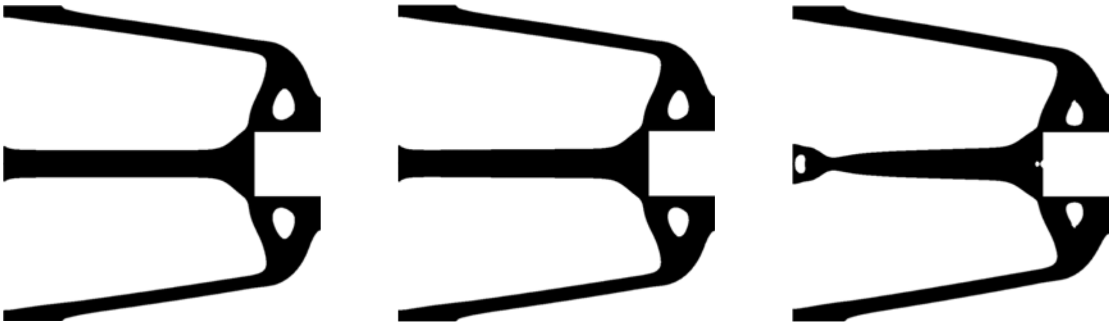


Fig. 7　Pareto solution for deterministic multiobjective optimization

Table 1　Comparison of mean eigenfrequency and displacement ratio

w_{ev}	0.0	0.25	0.35	0.38	0.40
Mean eigenfrequency ratio	1.000	1.033	1.087	1.103	1.124
Maximum displacement ratio	1.000	0.998	0.971	0.928	0.909



(a) $(w_{\mathrm{cm}}, w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}, w_{\mathrm{ev}}) = (0.6, 0.3, 0.1)$　(b) $(w_{\mathrm{cm}}, w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}, w_{\mathrm{ev}}) = (0.4, 0.5, 0.1)$　(c) $(w_{\mathrm{cm}}, w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}, w_{\mathrm{ev}}) = (0.2, 0.7, 0.1)$

Fig. 8　Robust optimum configurations as three-objective optimization

5·2　確定的最適設計問題

まず，固有振動数最大化を考慮しない単一目的最適設計における確定的な最適形態を図 5(b) に示す．

次に，重み係数を $w_{\mathrm{ev}} = 0.25, 0.35, 0.38, 0.40$ の 4 パターンに対する最適形態を図 6(a)-(d) に示す．形態自体に大きな変化はないが，w_{ev} の値が大きくなるにつれて，先端部分が細くなっている傾向がある．また，$w_{\mathrm{ev}} = 0.40$ では左辺の外側部材が内側に配置されている．

これらの最適形態に対して，$w_{\mathrm{ev}} = 0.0$ の単一目的解に対する性能に対して正規化した最大変位および最大固有値の比を表 1 に示す．w_{ev} の値を大きくすると固有振動数が上昇するが，入力に対する出力の比が小さくなるようなトレードオフの関係があることがわかる．$w_{\mathrm{ev}} = 0.35$ あたりまでは固有振動数の上昇に対して変形量の減少は小さいが，重み係数がそれより大きくなると，変形量が急激に減少することもわかる．図 7 に，そのプロットを示す．性能指標は両方の目的関数とも最大化なので，グラフの右上が理想方向となる．非凸の Pareto 解 ($w_{\mathrm{ev}} = 0.38$) を探索できている点から，重み付き l_p ノルム法の効果があると言える．

5·3　ロバスト最適設計問題

前節で示した問題に対し，入力荷重に垂直方向の変動がある場合のロバスト最適形態を考える．

平均固有値最大化問題についての重み係数 $w_{\mathrm{ev}} = 0.1$ の時に，ロバスト項の重み $w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}} = 0.3, 0.5, 0.7$ の 3 パターンに対して得られた最適形態を図 8(a)-(c) に示す．$w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}$ が大きくなるにつれて，上下のフレーム部材が少し太くなり，代わりに荷重を負荷する中央部材の荷重端側が細くなる傾向がみられ，図 8(c) ではくびれが見られるが，それぞ

Table 2　Comparison of mean eigenfrequency and mean maximum displacement ratio

w_{cm}	$w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}$	w_{ev}	Mean maximum displacement ratio	Mean eigenfrequency ratio
0.6	0.3	0.1	0.988	1.020
0.4	0.5	0.1	0.966	1.028
0.2	0.7	0.1	0.965	1.073

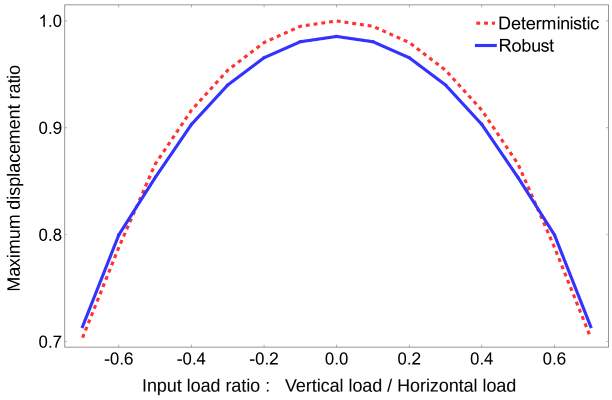


Fig. 9　Change of maximum displacement in terms of vertical input load

れの形態にさほど大きな違いは見られない．前節の図 6 に示した確定的な最適形態ともほぼ同じ形態である．つまり，変動の影響を考慮することで寸法が多少変化するけれども，形態が大きく変化するほどの影響は見られない．これは，確定的な最適形態も変動に対するロバスト性が高いことを意味する．

このときの最大変位の平均値，平均固有値の前節で示した $w_{\mathrm{cm}} = 1$ の確定解に対する比を表 2 に示す．構造形態に大きな差が見られないため，性能も大きな差はないが，荷重方向の変動に対する重みを大きくするにしたがって，最大変位の平均値は減少し，平均固有値が大きくなる傾向があることがわかる．

5·4　ロバスト性の考察

次に，得られた最適形態のロバスト性を検証する．$(w_{\mathrm{cm}}, w^{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm}}, w_{\mathrm{ev}}) = (0.4, 0.5, 0.1)$ の最適形態と，変動を考慮していない確定形態に対して，垂直方向の荷重を変化させた場合の入力部の最大変位の変化を図 9 で比較する．変動を大きくした場合，ロバスト最適形態の入力に対する出力の比が確定形態の比よりも大きくなり，性能が逆転していることが確認できる．これより，得られた解はロバストではあると言えるけれど，その違いはわずかである．形態の違いも小さいことからも，そのことは推測できる．

ただし，このことは，得られた確定的な最適解自体が，変動に対してロバストな形態であったということであり，変動を考慮しなくてもよいということを意味しているわけではない．

さて，このように，確定的な解とロバスト解の比較を通してしか，ロバスト性が確認できないとすると，常にその両者の最適形態を求める必要があることになってしまう．これは，確定的な最適設計に比べて，2 倍以上の計算コストがかかることとなる．計算効率の向上をめざす上で，確定解とロバスト解を比較しなくても，ロバスト解のロバスト性が保証できるような指標が必要である．そうしなければ，ロバスト最適設計を実際の問題に用いることが困難であり，今後，これをめざした研究が必要である．

6.　結　　論

本論文では，コンプライアントメカニズムの最適形態問題に対し，固有振動数の最大化と荷重方法の変動を考慮したロバスト性を加えた 3 個の目的関数からなる多目的ロバストトポロジー最適設計問題として定式化を行った．数値解法として，レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法に重み付き l_p ノルム法を統合する手法を用いた．

そして，数値計算例を通して，この手法で非凸の Pareto 面に対する Pareto 解が得られ，重み付き l_p ノルム法が有効に機能することを示した．そして，得られた最適形態に対するロバスト性を確認することができた．ここで示した数値計算例では，結果として確定的な最適形態のロバスト性が高かったことから，ロバスト最適形態との差は小さかった．このことは変動を考慮しなくてもよいというわけではない．

しかしながら，確定解とロバスト解との比較を通してしか，ロバスト性の有効性を確認できないということは，計算コストの点から非効率である．このことから，ロバスト性に対する新たな指標が必要と考えられる．これについては，今後の課題とする．

References

Chen, S., Chen, W. and Lee, S., Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainties, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 41, No. 4 (2010), pp. 507-524.

Frecker, M. I., Ananthasuresh, G. K., Nishiwaki, S., Kikuchi, N. and Kota, S., Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization, Journal of Mechanical design, Vol. 119, No. 2 (1997), pp. 238-245.

Howell, L. L., Compliant Mechanisms (2001), John Wiley & Sons, Inc.

Kitayama, S. and Yamazaki, K., Sequential approximate robust design optimization using radial basis function network, International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 10, No. 3 (2014), pp. 313-328.

Kogiso, N., Ahn, W. J., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., Robust topology optimization for compliant mechanisms considering uncertainty of applied loads, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, Vol. 2, No.1 (2008), pp. 96-107.

Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Cheng, H. C., Topological design for vibrating structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 121 (1995), pp. 259-280.

Miettinen, K. M., Nonlinear multiobjective optimization (1999a), pp. 67-71, Springer Science & Business Media.

Miettinen, K. M., Nonlinear multiobjective optimization (1999b), pp. 85-95, Springer Science & Business Media.

Nakayama, H. and Sawaragi, Y., Satisficing trade-off method for multiobjective programming, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 229 (1984), pp. 113-122.

Nishiwaki, S., Min, S., Yoo, J. and Kikuchi, N., Optimal structural design considering flexibility, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190 (2001), pp. 4457-4504.

Otomori, M., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S., Level set-based topology optimisation of a compliant mechanism design using mathematical programming, Mechanical Sciences, Vol. 2 (2011), pp. 91-98.

Seepersad, C., Allen, J. K., Mcdowell, D. L. and Mistree, F., Robust design of cellular materials with topological and dimensional imperfections, Journal of Mechanical Design, Vol. 128 (2006), pp. 1285-1297.

Sigmund, O., On the design of compliant mechanisms using topology optimization, Mechanics Based Design of Structures and Machines, Vol. 25 (1997), pp. 493-524.

Takezawa, A., Nii, S., Kitamura, M. and Kogiso, N., Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 200 (2011), pp. 2268-2281.

Toyoda, M. and Kogiso, N., Robust multiobjective optimization method using satisficing trade-off method, Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 29, No. 4 (2015), pp. 1361-1367.

Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199 (2010), pp. 2876-2891.