



## 応答曲面を利用した複合材料の面内強度に関する信頼性に基づく最適設計

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-01-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 小木曾, 望, 中川, 周哉 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15702">http://hdl.handle.net/10466/15702</a>

# 応答曲面を利用した複合材料の面内強度に関する 信頼性に基づく最適設計\*

小木曾 望\*<sup>1</sup>, 中川 周哉\*<sup>2</sup>

## Reliability-Based Optimization of Laminated Composite Plate Subject to In-Plane Strength Using Response Surface Method

Nozomu KOGISO\*<sup>1</sup> and Shuuya NAKAGAWA\*<sup>2</sup>

Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University,  
1-1 Gakuen-Cho, Sakai, Osaka, 599-8531 Japan

In this study, the response surface method is applied to the reliability-based optimum design of a laminated composite plate subject to in-plane loads in order to improve the calculation efficiency. The reliability is approximated by polynomials in terms of the lamination parameters. Where the authors have already clarified that the reliability is distributed smoothly in the lamination parameter space for the symmetric balanced laminate consisting of  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  and  $90^\circ$  plies. Using the response surface method, the reliability-based optimization problem is transformed from a duplicated-loop iteration problem into a single-loop iteration problem. In constructing the response surfaces, several experimental points are selected based on the D-optimality criterion using genetic algorithms. The efficiency of the response surface approximation on the reliability-based optimization is demonstrated through the two dual problems; the reliability-maximized design of the constant-thickness plate and the thickness-minimized design under the reliability constraint.

**Key Words** : Structural Reliability, Optimum Design, Laminated Construction, Composite Material, Lamination Parameter, Response Surface Method, Reliability-Based Optimization, First Order Reliability Method, First Ply Failure

### 1. 緒 論

本研究では、複合材料積層板の積層構成設計問題において、材料特性や荷重条件の変動を考慮した信頼性に基づく最適設計<sup>(1)</sup>に対して、計算効率向上のために応答曲面法<sup>(2)~(4)</sup>を適用し、その有効性を検証する。

まず、信頼性に基づく最適設計が一般に二重最適化問題として定式化されることが、計算効率における問題点である。信頼性評価には一次信頼性法(First Order Reliability Method; FORM)<sup>(1)</sup>が広く用いられている。これは、確率変数を独立な標準正規確率変数に変換し、その変数空間 ( $U$ -空間) における原点から限界状態面までの最短距離によって破損確率を評価する手法である。これは等式制約付きの最適化問題として定式化される。そのため、信頼性に基づく最適設計は二重最適化問題として定式化されることになり、計算コストが高くならざるを得ない。

一方、複合材料の積層構成設計問題において、信頼性を考慮することの重要性はこれまでの研究<sup>(5) (6)</sup>から明らかにされている。面内荷重を受ける対称積層板の初期プライ破損に対する信頼性は繊維軸数が多くなるほど高く評価されること、さらに確定的な強度最大化設計が合力方向に繊維を配向させた一方向材に近づくのに対して信頼性最大化設計では準等方性積層に近づくことが明らかにされている。

複合材料積層板の最適設計問題の計算効率向上のために、確定的な最適設計問題では設計変数に積層パラメータが用いられている<sup>(7) (8)</sup>。積層パラメータは面内、面外の8個からなり、複合材料積層板の特性と積層構成とに対応している<sup>(9)</sup>。特に、対称バランスト積層の場合には、面内、面外変形を独立に考えることができ、それぞれ2個の積層パラメータによってすべての積層構成を表すことができる。これらの積層パラメータ空間においては、複合材料積層板の構造応答の非線形性が弱い場合、設計変数として用いることで最適設計の収束性が高まることが知られている<sup>(9)</sup>。

著者らはこれまでに、信頼性に基づく最適設計の計

\* 原稿受付 年月日

<sup>1</sup> 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科機械系専攻航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市学園町 1-1)

<sup>2</sup> 大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程  
Email: kogiso@aero.osakafu-u.ac.jp

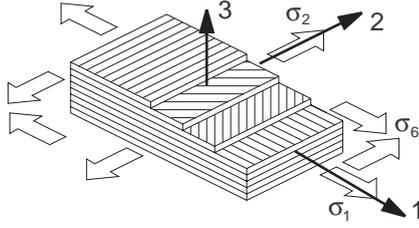


Fig. 1 Symmetric laminated composite plate.

算効率向上のために設計変数として積層パラメータを適用した<sup>(10)</sup>．ここでは， $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる対称バランス積層板の面内荷重を受ける複合材料積層板の初期プライ破損に対する信頼性が積層パラメータ空間において滑らかに分布することを示すとともに，板厚一定の積層板に対する信頼性最大化問題および信頼性制約のもとでの板厚最小化問題のどちらに対しても設計変数に積層パラメータを適用することでスムーズに最適解に収束することを明らかにしている．

しかしながら，二重最適化問題としての定式化に対する問題は依然として残っている．本研究では，これをさらに効率化するために，応答曲面法<sup>(3)</sup>を適用する．積層パラメータ空間における信頼性分布を単純な高次多項式として近似する．その近似関数に対して最適化を行なうことで，計算効率の向上を図る．さらに，近似精度を向上させるために，応答曲面法を二段階で適用する<sup>(4)</sup>．

数値計算例として， $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる対称バランス積層板の面内荷重を受ける複合材料積層板の初期プライ破損に対する信頼性を最大化する最適設計問題<sup>(5)</sup>および信頼性に基づいた積層板の板厚最小化問題に本提案手法を適用し，その有効性を明らかにする．

## 2. 対称積層板の強度解析

**2.1 対称積層板の面内剛性** 対称積層板は中心面に対して積層構成が対称であるため，面内変形と曲げ変形は独立して考えることができる．よって，図1に示す一般軸系(1-2-6系)における板厚が $h$ の対称積層板の面内における応力-ひずみ関係は，合応力 $N = h\sigma$ および面内剛性マトリクス $A$ を用いて次式で表わすことができる<sup>(11)</sup>：

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで，面内剛性マトリクスを板厚 $h$ で正規化した値 $A_{ij}^* = A_{ij}/h$ は，材料不変量 $U_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ )および面内積層パラメータ $V_j^*$  ( $j = 1, \dots, 4$ )を用いて次式で

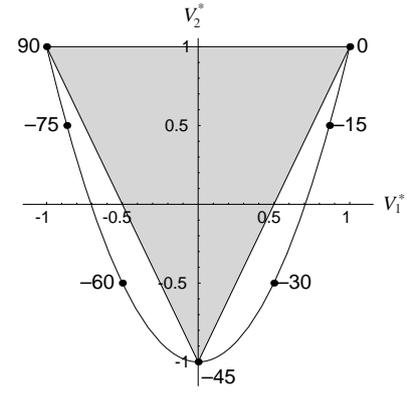


Fig. 2 In-Plane lamination parameter of symmetric balanced laminate. Shaded area: feasible region of  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  laminate.

表わすことができる：

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^* \\ A_{22}^* \\ A_{12}^* \\ A_{66}^* \\ A_{16}^* \\ A_{26}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_1^* & V_2^* \\ U_1 & -V_1^* & V_2^* \\ U_4 & 0 & -V_2^* \\ U_5 & 0 & -V_2^* \\ 0 & V_3^*/2 & V_4^* \\ 0 & V_3^*/2 & -V_4^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

材料不変量 $U_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ )は各層の材料定数のみに依存し，積層構成とは独立に定められる<sup>(11)</sup>．

面内積層パラメータは対称積層板の中心面から $i$ 番目の層の繊維配向角 $\theta_i$ ，体積含有率 $v_i$ および積層数 $N$ を用いて次式で定義される：

$$\begin{Bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N/2} v_i \begin{Bmatrix} \cos 2\theta_i \\ \cos 4\theta_i \\ \sin 2\theta_i \\ \sin 4\theta_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

この4つの面内積層パラメータを用いてあらゆる対称積層板の面内剛性を表わすことができる．

さらに， $+\theta$ 層と $-\theta$ 層が等量存在する対称バランス積層板では，式(3)の定義から積層パラメータ $V_3^* = V_4^* = 0$ となるため，二つのパラメータ $V_1^*$ および $V_2^*$ ですべての積層構成を表すことができ，その許容領域は次式で表される<sup>(9)</sup>：

$$V_2^* \geq 2V_1^{*2} - 1, \quad V_2^* \leq 1 \quad (4)$$

その許容領域を図2に示す．二種類以上の配向角からなる一般的な対称バランス積層板 $[\pm\theta_{1v_1} / \pm\theta_{2v_2} / \dots / \pm\theta_{N/2v_{N/2}}]_s$ に対応する積層パラメータ値は，各層の体積含有率に対応して許容領域内の一点で表される．

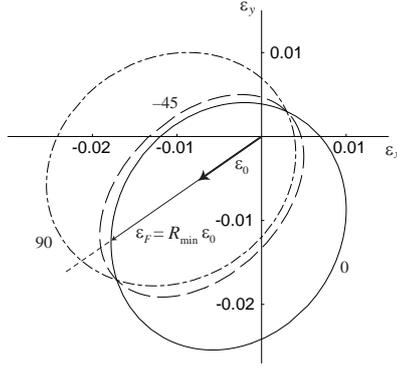


Fig. 3 Failure envelope of  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$  laminate in the strain space.

$0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる対称バランスト積層板に対する積層パラメータの許容領域は、図2の灰色部で示されるように、 $(-1, 1), (0, -1), (1, 1)$  を頂点とする三角形領域となる<sup>(9)</sup>:

$$V_2^* \geq 2V_1^* - 1, \quad V_2^* \geq -2V_1^* - 1, \quad V_2^* \leq 1 \quad (5)$$

**2.2 対称積層板の強度解析** 対称積層板の各層の破損規準として Tsai-Wu 規準を用いる<sup>(11)</sup>. Tsai-Wu 規準による破損包絡面は楕円体で表される<sup>(11)</sup>:

$$F_{xx}\sigma_x^2 + 2F_{xy}\sigma_x\sigma_y + F_{yy}\sigma_y^2 + F_{ss}\sigma_s^2 + F_x\sigma_x + F_y\sigma_y - 1 = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s)^T$  は各層のプライ応力である. これは面内応力-ひずみ関係の式 (1) から求められる面内ひずみを各層の配向角に沿った材料軸系 ( $x$ - $y$ - $s$  系) に変換したプライひずみ  $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_s)^T$  から、各層における応力-ひずみ関係 ( $\sigma = Q\epsilon$ ) を用いて求めることができる. また、 $F_{ij}, F_i (i, j = x, y, s)$  は強度のパラメータであり、次式で定義される:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{1}{X_t X_c}, & F_{yy} &= \frac{1}{Y_t Y_c}, \\ F_{xy} &= F_{xy}^* (F_{xx} F_{yy})^{\frac{1}{2}}, & F_{ss} &= \frac{1}{S^2}, \\ F_x &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, & F_y &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $X_t, X_c$  は繊維方向の引張および圧縮強度、 $Y_t, Y_c$  は繊維直角方向の引張および圧縮強度、 $S$  はせん断強度を表す. また  $F_{xy}^*$  は強度間の相関を表す定数であり、通常  $-0.5$  を用いる<sup>(11)</sup>.

一方、ひずみ空間における Tsai-Wu 規準は各層のプライひずみを用いて次式で表わされる:

$$G_{xx}\epsilon_x^2 + 2G_{xy}\epsilon_x\epsilon_y + G_{yy}\epsilon_y^2 + G_{ss}\epsilon_s^2 + G_x\epsilon_x + G_y\epsilon_y - 1 = 0 \quad (8)$$

ここで、 $G_{ij}, G_i (i, j = x, y, s)$  はひずみ空間における強度のパラメータであり、式 (7) で示した強度パラメータおよび各層の応力-ひずみ関係から求めることができる. 本研究では、信頼性解析での数値的な安定性の観点から、ひずみ空間の Tsai-Wu 規準を用いる<sup>(12)</sup>.

各層の強度の評価には強度比  $R$  を導入する. これは、負荷荷重のもとでのプライひずみ  $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_s)^T$  に対して、荷重を比例的に増加させ破損包絡面に到達したとき生じるひずみ、すなわち破損ひずみ  $\epsilon_F$  との比であり<sup>(11)</sup>、次式の関係が成り立つ (図3 参照):

$$\epsilon_F = R\epsilon \quad (9)$$

これを式 (8) に代入して得られる次の方程式を解くことで、強度比  $R$  が得られる:

$$(G_{xx}\epsilon_x^2 + 2G_{xy}\epsilon_x\epsilon_y + G_{yy}\epsilon_y^2 + G_{ss}\epsilon_s^2) R^2 + (G_x\epsilon_x + G_y\epsilon_y) R - 1 = 0 \quad (10)$$

この強度比が 1 以上であればその層は安全、1 より小さいときは破損することを意味する. 本研究では、最も弱い層が破損したときに積層板が破損したとみなす初期プライ破損 (FPF) を適用する.

### 3. 信頼性解析

本研究では、材料定数および負荷荷重に変動がある場合の面内強度に対する対称積層板の信頼性を一次信頼性法 (FORM) により評価する.

FORM は、確率変数  $X$  を標準正規変数  $U$  に変換し、 $U$ -空間での原点から限界状態面までの最短距離である信頼性指標  $\beta$  を求める方法である (Fig. 4 参照)<sup>(1)</sup>. 第  $i$  層の強度に対する信頼性指標  $\beta_i$  を求める問題は次の最適化問題に帰着する:

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & \beta_i = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \\ \text{subject to : } & h_i(\mathbf{u}) = R_i(\mathbf{u}) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで等式制約は限界状態関数を表し、 $R_i(\mathbf{u})$  は第  $i$  層の強度比である. なお、解法として大域的最適化手法のひとつであるトンネル法を用いる<sup>(13)</sup>.

各層の破損確率  $P_i$  は次式により評価される:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) = \int_{-\infty}^{-\beta_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (12)$$

さらに、初期プライ破損に対する信頼性を評価するために、積層板の破損を各層の破損からなる直列システムでモデル化する. そして、システムの信頼性をディトレプセン限界値<sup>(14)</sup>で近似する. その上限値  $P_U$  に対

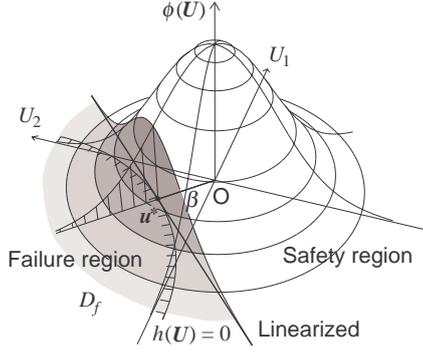


Fig. 4 First order reliability method (FORM).

応する信頼性指標  $\beta_U$  を積層板の信頼性指標とみなす:

$$\beta_U = -\Phi^{-1}(P_U), \quad P_U = \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} P_{ij} \quad (13)$$

ここで  $P_i$  は第  $i$  層の破損確率,  $P_{ij}$  は第  $i$  層と第  $j$  層の同時破損確率,  $m$  は破損モードの数を表す.  $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる対称バランスト積層板では  $m = 4$  となる.

#### 4. 信頼性に基づく最適設計

$0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる板厚一定 (1mm) の対称積層板の信頼性を最大化する積層構成を求める問題<sup>(5)</sup>は積層パラメータを設計変数として次式で定式化する:

$$\begin{aligned} \text{Maximize : } & \beta_U(V_1^*, V_2^*) & (14) \\ \text{subject to : } & V_2^* \geq 2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \geq -2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \leq 1 \end{aligned}$$

この制約条件は積層パラメータの許容領域を意味する.  $u$  は標準正規化された確率変数を表す. 本研究では, 材料特性および荷重を確率変数として取り扱う.

もう一つは, 強度に関する信頼性の下限値を与えたときの積層板の板厚最小化問題であり, 板厚  $h$  を設計変数として加え, 次式で定式化できる:

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & h & (15) \\ \text{subject to : } & \beta(V_1^*, V_2^*, h) \geq \beta_a \\ & h \geq 0 \\ & V_2^* \geq 2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \geq -2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \leq 1 \end{aligned}$$

なお,  $\beta_a$  は信頼性指標の許容値であり, 本研究では  $\beta_a = 3.0$  とする.

信頼性指標は応答曲面法による近似関数を用いて評価し, 数値解法には逐次二次計画法<sup>(15)</sup>を用いる.

#### 5. 信頼性応答曲面

**5.1 応答曲面の作成** 応答曲面法とは, 強度や座屈荷重などの応答を影響因子の近似関数で表わす手法であり, 近年, 大規模な問題を扱う最適設計で広く利用されている<sup>(2)~(4)</sup>. 一般的に, 影響因子  $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$  に対する応答  $y$  を次式の多項式として近似する:

$$y \approx b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \epsilon \quad (16)$$

ここで,  $b_i (i = 0, 1, \dots, k)$  は未知係数を,  $\epsilon$  は誤差を表す. 応答式は多項式以外の形式でもよいが, 多項式を用いると最小2乗法などの統計的な手法を用いて未知係数を推定することが可能になるなどの利点が多い.

この  $k+1$  個の未知係数の推定のために用いる実験点の組の総数を  $n$  個 ( $n \geq k+1$ ) とするときの応答式を以下のように行列表記する:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{X}\mathbf{b} + \epsilon \quad (17)$$

これを要素で表すと, 次式となる:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_k \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

最小2乗法では誤差2乗和を最小にするように近似関数の係数  $\mathbf{b}$  を推定する. したがって, 推定値  $\hat{\mathbf{b}}$  は次式で求めることができる:

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (18)$$

**5.2 実験計画の利用** 精度のよい応答曲面を得るための手法が実験計画である. 最小2乗法において得られた回帰式の良否は, 推定された係数  $\hat{\mathbf{b}}$  の値によって判断される. また, 推定された係数の良否は分散共分散行列から判断され, その値が小さければ小さいほどよい推定値が得られていると判断される. 分散共分散行列は応答の誤差分散  $\sigma^2$  と選択された実験点により得られる行列  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  の積で得られるため, これら2つのうちいずれかの値を小さくすることで, 相対的に分散共分散行列の値が小さくできる. 一般的には, 実験点のみから得られる行列  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  の対角

成分を最小化する  $D$  最適規準がよく用いられ、本研究でもこれを用いる。 $D$  最適規準は  $X^T X$  のモーメント行列  $M$  の行列式を最大化する最適規準である<sup>(2)</sup>:

$$\text{Maximize : } |M| = \left| \frac{X^T X}{n} \right| \quad (19)$$

$D$  最適規準により得られた実験点の組み合わせの優劣を表わすのが  $D$  最適性 ( $D_{\text{eff}}$ ) であり、変数の範囲が  $(-1, 1)$  のとき、その最大値は 1 となる:

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\text{Det}[X^T X])^{1/(k+1)}}{n} \quad (20)$$

**5.3 GA による実験点組み合わせの決定** 候補点の中から得られる実験点の組み合わせは膨大な数となるため、計算の効率化の点からも非常に不利である。そこで、本研究では遺伝的アルゴリズム (以下 GA) を用いて、効率的に  $D$  最適規準を満たすような組み合わせを見つけることにする。

まず、実験点の候補は積層パラメータ空間上での許容領域における 0.1 刻みの格子点 221 個とする。この点に対して、まず、強度解析を行い、積層板の強度比が 1.0 より小さな格子点は候補から削除する。そのような点は信頼度が低く、近似式の構築に対するメリットが小さいからである。そして、残った候補点に順番を振り、その組み合わせを遺伝子でコード化する。ここで、実験点の数は未知係数の 2 倍とする<sup>(3)</sup>。これらの遺伝子に対し、式 (19) で定めた  $D$  最適規準がもっとも大きくなる実験点の組み合わせを求める。

手法としては単純 GA にエリート保存主義を採用した基本的な手法を用いる。この GA は実験点の組み合わせを決めるだけであり、計算時間は信頼性解析に比べて十分に小さい。

**5.4 近似式の検定** 得られた回帰モデルの良否を比較するために、自由度調整済み決定係数  $R_{\text{ad}}^2$  を用いる<sup>(2)(3)</sup>:

$$R_{\text{ad}}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-k-1)}{S_{yy}/(n-1)} \quad (21)$$

ここで、 $SSE$  は残差平方和、 $S_{yy}$  は応答  $y$  の平均値まわりの変動であり、次式で定義される:

$$\begin{aligned} SSE &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \\ S_{yy} &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \end{aligned} \quad (22)$$

また、回帰モデル中の各係数の有意性を  $t$  検定で判断する。すなわち、回帰式の  $j$  番目の項が回帰式に寄与していないという仮説をたて、次式で定義される検

Table 1 Material properties of T300/5208.

Stiffness (GPa)	$E_x$	$E_y$	$E_S$	$\nu_x^*$	
Mean	181.0	10.7	7.17	0.28	
COV	0.05	0.05	0.05	0.01	
(* dimensionless)					
Strength (MPa)	$X_t$	$X_c$	$Y_t$	$Y_c$	$S$
Mean	1500.0	1500.0	40.0	246.0	68.0
COV	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

Table 2 Applied load cases.

Load (MN/m)	$N_1$	$N_2$	$N_6$	
Mean	Case 1	0.1	0.1	0.0
	Case 2	0.1	0.05	0.04
Standard deviation		0.03	0.03	0.03

定値で判断する:

$$t_0 = \hat{b}_j \left( \hat{\sigma}^2 C_{jj} \right)^{-1/2} \quad (23)$$

ここで、 $C_{jj}$  は正方行列  $(X^T X)^{-1}$  の  $jj$  成分である。この仮説係数  $b_j = 0$  は  $t_0$  の絶対値が  $t_{\alpha/2, n-k-1}$  より大きいときに否決される。すなわち  $j$  番目の係数が有効と判定される。なお、 $t_{\alpha/2, m}$  は自由度  $m$ 、信頼係数  $1-\alpha$  の  $t$  分布の値である。また、 $\hat{\sigma}^2$  は応答  $y$  の誤差分散  $\sigma^2$  の最尤推定値であり、 $n$  が十分に大きいとき、残差平方和を用いて次式で求められる:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-k-1} \quad (24)$$

この検定により、変数を近似式から削除したり、追加したりすると各係数に対する  $t_0$  の値は変化する<sup>(3)</sup>。本研究では、検定により不要な係数を削除する減少法を用いて  $R_{\text{ad}}^2$  を満足させるような係数  $\hat{b}$  を得る。

## 6. 数値計算例

材料は T300/5208 とし、その材料定数は正規分布にしたがう変動を有すると仮定する。これらの平均値および変動係数を表 1 に示す。荷重条件としては、表 2 に示す 2 つの荷重ケースを考える。いずれも正規分布にしたがうものと仮定する。

**6.1 信頼性最大化**  $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる厚さ 1mm の対称パランスト積層板に対して、信頼性が最大となる積層構成を求める。

積層板の信頼性指標  $\beta$  の応答曲面を積層パラメータ  $V_1^*, V_2^*$  を変数とする近似関数として、線形関数に変換が可能な 4 次までの多項式を考える:

$$\begin{aligned} \beta_U \approx & b_0 + b_1 V_1^* + b_2 V_2^* + b_3 V_1^{*2} + b_4 V_2^{*2} + b_5 V_1^* V_2^* \\ & + b_6 V_1^{*3} + b_7 V_1^{*2} V_2^* + b_8 V_1^* V_2^{*2} + b_9 V_2^{*3} + b_{10} V_1^{*4} \\ & + b_{11} V_1^{*3} V_2^* + b_{12} V_1^{*2} V_2^{*2} + b_{13} V_1^* V_2^{*3} \\ & + b_{14} V_2^{*4} + \epsilon \end{aligned} \quad (25)$$

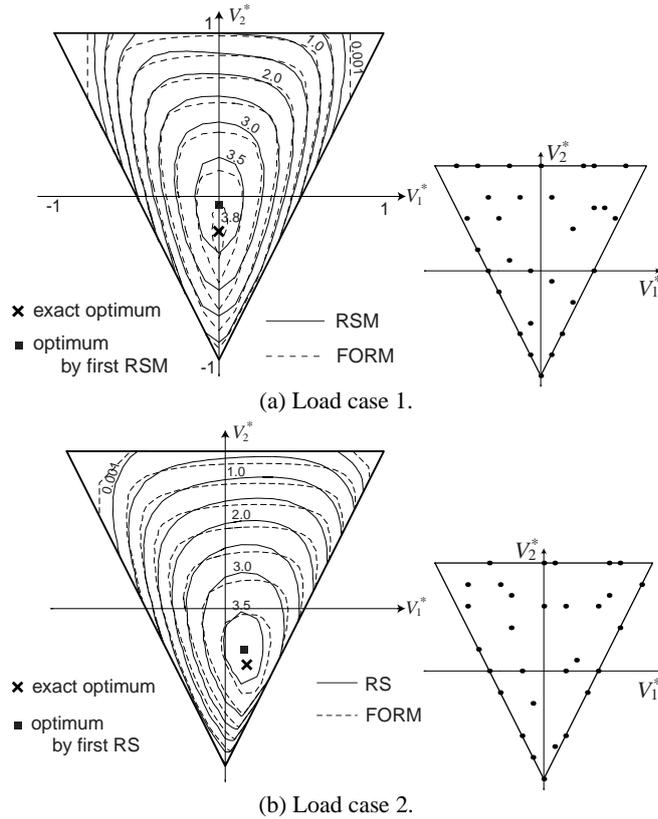


Fig. 5 Reliability contour and selected experimental points in lamination parameter space.

ここで、 $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 14$ ) は未知係数であり、この値を推定することで信頼性指標の応答曲面が得られる。このとき、式 (25) の係数  $b_i$  に対応する変数を  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 14$ ) と置き換えると、式 (25) は次式に示す線形関数で表され、最小 2 乗法を用いた未知係数の推定が可能になる:

$$\beta_U = b_0 + \sum_{i=1}^{14} b_i x_i + \epsilon \quad (26)$$

応答曲面法で得られた積層パラメータ空間における信頼性分布を図 5 に示す。実線は一段回目の応答曲面による等高線、破線は積層パラメータ許容領域内部の 221 個の格子点において信頼性解析を実施して作成した等高線である。なお、“Exact optimum” はこれまでの手法<sup>(10)</sup>による解である。これより、信頼性の応答曲面が領域全体にわたって精度よく構築できていることがわかる。右図はその応答曲面構築のために選択された実験点の分布を示す。実験点の候補は積層パラメータ空間上での許容領域における 0.1 刻みの格子点 221 個であり、その中から D 最適規準 (式 (20)) が最大となる 30 点の組み合わせを選択している。どちらの荷重ケースにおいても実験点は領域内に均等に分布していることがわかる。

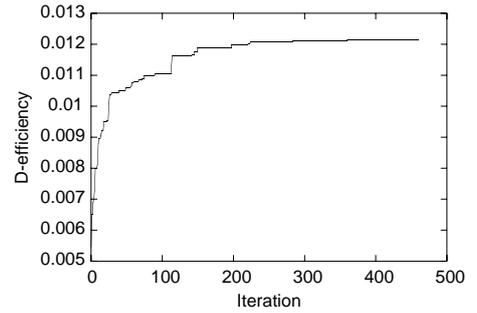


Fig. 6 Convergence history of the experimental point selection in load case 1.

Table 3 Comparison of optimum design.

(a) Load case 1.				
	$V_1^*$	$V_2^*$	$\beta_{\text{RSM}}$	$\beta_{\text{FORM}}$
Exact optimum <sup>(10)</sup>	0.0	-0.212	—	3.928
First RSM	0.0	-0.052	3.762	3.831
Second RSM	0.0	-0.200	3.898	3.927
(b) Load case 2.				
	$V_1^*$	$V_2^*$	$\beta_{\text{RSM}}$	$\beta_{\text{FORM}}$
Exact optimum <sup>(10)</sup>	0.139	-0.358	—	3.965
First RSM	0.119	-0.261	3.683	3.892
Second RSM	0.133	-0.359	3.955	3.964

荷重ケース 1 における GA による式 (20) の D 最適規準の収束履歴を図 6 に示す。なお、100 世代にわたって目的関数の最大値が変化しない時に収束と判断している。

ところで、図 5 に示したように、応答曲面で得られる最適解は真の解とずれている。より精度の高い解を求めるために、最初の応答曲面で得られた最適解の近傍で再度応答曲面を構築する二段解法を適用する。この二段階目では信頼性解析の回数を減らすために、最初の応答曲面で得られた最適解の近傍の一边 0.3 の正方形領域に対して 3 次式で近似する。つまり、式 (25) の第 10 項までを用いて、応答曲面を作成する。なお、実験点の数は未知係数の 2 倍である 20 点とする。その実験点は、領域内の 0.02 刻みの格子点 256 点から GA により選択した 19 点に、第一段階で求められた最適解を加えたものとしている。

図 7 に、二段階目応答曲面による信頼性等高線図およびその応答曲面構築のために選択された実験点の分布を示す。選択した小領域では信頼性を高精度に近似できていることがわかる。なお、領域外での信頼性分布の精度は悪いが、この近傍領域を制約領域と設定して最適化を行なうので問題はない。得られた最適解を表 3 で比較する。二段階の応答曲面を用いることで、精度の高い最適解が得られていることがわかる。

荷重ケース 1 に対する応答曲面法で構築された近似式の係数および  $t$  検定値を表 4 に示す。ここで、 $t$  値

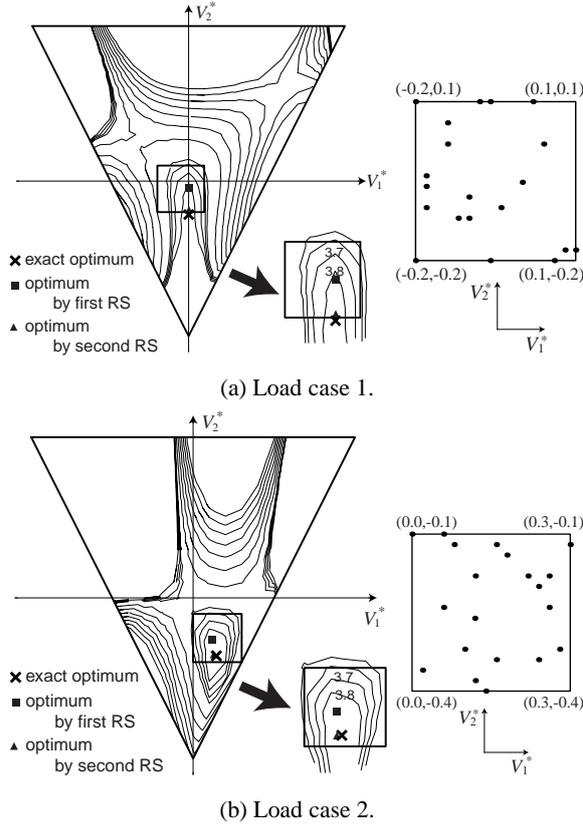


Fig. 7 Reliability contour and selected experimental points obtained by the second step.

Table 4 Coefficients and  $t$ -test value of response surface in load case 1.

Term	First step		Second step	
	$b_i$	$ t $ -value	$b_i$	$ t $ -value
1	3.754	72.21	3.788	1128
$V_1^*$	0.0	—	-0.209	5.018
$V_2^*$	-0.317	7.744	-1.150	40.32
$V_1^{*2}$	-10.33	30.93	-15.62	23.87
$V_2^{*2}$	-3.033	15.53	-4.434	14.65
$V_1^*V_2^*$	0.0	—	-1.085	3.212
$V_1^{*3}$	0.0	—	-8.799	3.259
$V_1^{*2}V_2^*$	16.30	20.29	40.86	22.60
$V_1^*V_2^{*2}$	-0.407	2.908	0.0	—
$V_2^{*3}$	0.0	—	-7.203	4.080
$V_1^{*4}$	-4.047	6.586		
$V_1^{*3}V_2^*$	0.660	2.525		
$V_1^{*2}V_2^{*2}$	-5.405	9.124		
$V_1^*V_2^{*3}$	0.0	—		
$V_2^{*4}$	0.604	3.415		

が記述されていない項は  $t$  検定によって棄却されたことを意味する。

最後に、計算効率に関しては、これまでの手法と比較して信頼性解析の実行回数が 80 回から 50 回へと減少し、CPU 時間 (Alpha 21164A/500MHz) が 1352 秒から 753 秒と約 45% 向上している。現段階では応答曲面

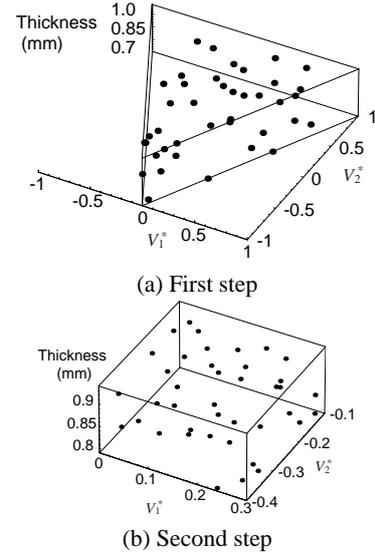


Fig. 8 Experimental points.

法の効果が十分であるとは言えないが、多項式以外の近似式を選択するなどの工夫によって、さらなる効率化が期待できる。

**6.2 板厚最小化設計**  $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$  からなる対称バランスト積層板に対して、信頼性指標の上限値を  $\beta_a = 3.0$  とした場合の板厚が最小となる積層構成を積層パラメータおよび板厚を設計変数として求める。

信頼性最大化問題と同様に、二段階の応答曲面法を用いる。この問題では、積層パラメータに加え、板厚も設計変数として扱うため、信頼性の近似関数として 3 次までの多項式を両段階で採用する：

$$\begin{aligned} \beta \approx & b_0 + b_1V_1^* + b_2V_2^* + b_3h + b_4V_1^{*2} + b_5V_2^{*2} \\ & + b_6h^2 + b_7V_1^*V_2^* + b_8V_2^*h + b_9V_1^*h + b_{10}V_1^{*3} \\ & + b_{11}V_2^{*3} + b_{12}h^3 + b_{13}V_1^{*2}V_2^* + b_{14}V_1^*V_2^{*2} \\ & + b_{15}V_2^{*2}h + b_{16}V_2^*h^2 + b_{17}V_1^*h^2 + b_{18}V_1^{*2}h \\ & + b_{19}V_1^*V_2^*h + \epsilon \end{aligned} \quad (27)$$

3 次式を用いた理由として、4 次式では未知係数の数が非常に多くなるために応答曲面を作成するための信頼性解析の実行回数が多くなり、計算の効率化に対して不利であるということ、および後述するように 3 次式を用いてもある程度の精度の高い近似解を得ることが確認できたことにある。

積層パラメータの実験点候補は信頼性最大化問題と同様とする。板厚の実験点候補としては、一段階目では下限値を 0.7mm とし、その値から 0.025 刻みで 1.075mm までの範囲の 16 個の離散値を、二段階目では一段階目で得られた最適な板厚の近傍の範囲 (本研究では最適な板厚から  $\pm 0.07$  (mm) の範囲) を均等に

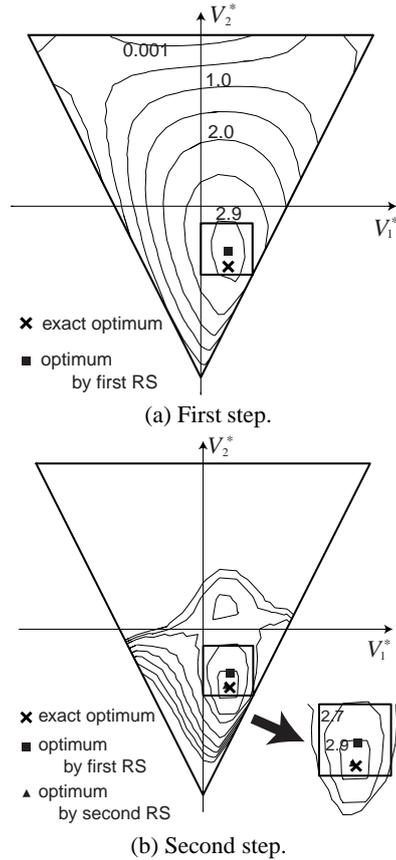


Fig. 9 Reliability contour at the optimum thickness in load case 2.

15個に分割して得られる16個の離散値を考える。この組み合わせを候補点として、各段階で未知係数の2倍である40点を実験点として選択する。なお、一段階目で板厚の下限値を0.7 (mm)としたのは、この値より板厚が小さい積層板では強度比が1以上となる領域が非常に小さくなるからである。

荷重ケース2に対して、各段階で選択された実験点の分布を図8に示す。板厚方向、積層パラメータ方向ともに実験点が均等に分布していることが分かる。

また、この実験点により構築された積層パラメータ空間での信頼性近似値の最適板厚における等高線図を図9に示す。信頼性最大化と異なり、第一段階では三次式を用いているため、積層パラメータ領域全体における近似精度は図5(b)と比べて良くない。しかし、二段階目の近傍領域では十分高い精度で近似が構築されていることがわかる。

応答曲面法によって得られた最適解と通常の手法で得られた最適解<sup>(10)</sup>とを表5で比較する。二段階の応答曲面法を用いることで、精度の高い解が得られていることがわかる。

最後に計算効率を比較する。応答曲面法を用いるこ

Table 5 Thickness-minimized design (Load case 2).

	Exact optimum <sup>(10)</sup>	First RSM	Second RSM
$V_1^*$	0.156	0.160	0.150
$V_2^*$	-0.356	-0.246	-0.349
$h_{opt}$ (mm)	0.814	0.867	0.815
$\beta_{RSM}$	—	3.0	3.0
$\beta_{FORM}$	3.0	3.233	3.002

とで信頼性解析の実行回数が241回から80回となり、計算効率が大幅に向上する。信頼性最大化問題と同様、現段階では応答曲面法の効果が十分であるとは言えないが、多項式以外の近似式を選択するなどの工夫によって、さらなる効率化が期待できる。

## 7. 結 論

本研究では、初期プライ破損に対する複合材料積層板の信頼性に基づく最適設計問題に応答曲面法を適用した。積層パラメータ空間で多項式による応答曲面を二段階で適用することで、高精度で計算効率の高い信頼性に基づく最適設計が実現できることを、数値計算により明らかにした。

しかし、信頼性解析の実行回数は依然として多く、近似関数の選択を工夫するなど信頼性解析の回数をさらに減少させる必要がある。また、今後の課題として、座屈など他の破損モードに対する信頼性設計問題への展開、さらには大規模な積層構造システムへの展開があげられる。

## 文 献

- (1) 室津, 米澤, 邵: システム信頼性工学, 共立出版 (1996) .
- (2) Myers, R. H. and Montgomery, D. C.: *Response Surface Methodology Process and Product Optimization Using Design Experiments*, John Wiley & Sons Inc., (1995).
- (3) 轟: “応答曲面法”, 機械学会講習会 99-73 応答曲面による非線形問題の最適設計入門 (1999).
- (4) 柏村, 白鳥, 于: 実験計画法による非線形問題の最適化, 朝倉書店, (1998).
- (5) S. Shao, et al.: *AIAA J.*, **31** (1993), 919-920.
- (6) 室津: 材料, **45-5** (1996), 588.
- (7) 轟, Haftka: 機論, **64-618**, A (1998), 514.
- (8) 亀山ら: 第43回構造強度に関する講演会 (2001), 229.
- (9) 三木: 材料システム, **3** (1984), 83.
- (10) 小木曾, 中川: 機論, **68-676**, A (2002), 1726
- (11) Tsai, S. W. and Hahn, H. T.: *Introduction to Composite Materials*, Technomic, (1980).
- (12) H. Nakayasu and Z. Maekawa: *Reliability Engineering and System Safety*, **56-3**, (1997), 209.
- (13) 小木曾, 中川, 室津: 材料, **51-1** (2002) 74.
- (14) Ditlevsen, O.: *J. Struct. Mech.*, **7** (1979), 453.
- (15) 茨木, 福島: FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, (1991).