



## 縮約された線形システムを用いた不確定荷重に対するロバストトポロジー最適化

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-01-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 新居, 悟, 竹澤, 晃弘, 北村, 充, 小木曾, 望 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15703">http://hdl.handle.net/10466/15703</a>

# 縮約された線形システムを用いた 不確定荷重に対するロバストトポロジー最適化\*

新居 悟<sup>\*1</sup>, 竹澤 晃弘<sup>\*2</sup>, 北村 充<sup>\*2</sup>, 小木 曾 望<sup>\*3</sup>

## Robust topology optimization based on an aggregated linear system and eigenvalue analysis

Satoru NII<sup>\*1</sup>, Akihiro TAKEZAWA, Mitsuru KITAMURA and Nozomu KOGISO

<sup>\*1</sup> Hiroshima Univ. Dept. of Transportation and Environmental Systems  
1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8527 Japan

This paper proposes a robust topology optimization method for a linear elasticity design problem subjected to an uncertain load. The robust design problem is formulated to minimize a robust compliance that is defined as the maximum compliance induced by the worst load case of an uncertain load set. Since the robust compliance can be formulated as the scalar product of the uncertain input load and output displacement vectors, the idea of “aggregation” used in the field of control research is introduced to evaluate the value of the robust compliance. The aggregation is applied to provide the direct relationship between the uncertain input load and output displacement using a small linear system composed of these vectors and the reduced size of a symmetric matrix in the context of a discretized linear elasticity problem using the finite element method. The robust compliance minimization problem is formulated as the minimization of the maximum eigenvalue of the aggregated symmetric matrix subject to the constraint that the Euclidean norm of the uncertain load set is fixed. Moreover, the worst load case is easily established as the eigenvector corresponding to the maximum eigenvalue of the matrix. The proposed robust structural optimization method is implemented using the topology optimization method, sensitivity analysis and the method of moving asymptotes (MMA). The numerical examples provided illustrate mechanically reasonable structures and establish the worst load cases corresponding to these optimal structures.

**Key Words** : Robust design, Worst case design, Topology optimization, Finite element method, Eigenvalue analysis, Sensitivity analysis

### 1. 緒 言

ある条件下における機械構造物の最適設計案を創出することは、機械設計者及び研究者にとって非常に重要な課題である。このような設計問題に対して、数値計算により力学的に最適な構造を導出する構造最適化法は設計支援法として非常に有効である。ただし、現実の設計問題においては、作用荷重や材料特性、最適化における制約条件等が必ずしも厳密に定まるとは限らない。そのため、実際の設計に構造最適化法を用いる際には、これらの不確定性に対し十分に安全な値を設定して最適化が成され、それがしばしば過剰に安全な設計へと繋がる。このような問題を解決するために、これらの不確定性を理論的に扱った最適化が可能なロバスト最適化法が提案されている（例えば<sup>(1)(2)</sup>）。

ロバスト最適化法の対象は非常に多岐に渡るが、本研究ではその一種として、荷重が作用する位置は定まっているが、その値や分布が不定な場合に、想定される最も危険な荷重に対して（以降最悪荷重と表記する）、構造物の剛性を最大化する構造最適化法を考える。このような問題に対して、Cherkaev らは、剛性最大化問題における代表的な目標関数であるコンプライアンス（作用荷重による仕事）の概念を、不定荷重に対して拡張したロバ

<sup>\*1</sup> 広島大学大学院工学研究科 輸送・環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

<sup>\*2</sup> 正員, 広島大学大学院工学研究院 機械システム・応用力学部門 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

<sup>\*3</sup> 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科 航空宇宙海洋系専攻 航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市中央区学園町 1-1)

Email: akihiro@hiroshima-u.ac.jp

ストコンプライアンスを提案し，上記の最悪荷重に対する剛性最大化問題を，対象の系の固有値最適化問題に帰着させた<sup>(3)(4)</sup>．この方法では最悪荷重を解析的に導出することができるため，確率的手法を用いる方法<sup>(1)(2)</sup>と比較し，より厳密な最適化が行われる方法であるといえる．しかし，これらの論文では数学的理論にのみ重きが置かれ，数値計算の実装方法等は具体的に論じられておらず，有限要素法に基づく構造最適化法への展開も未だされていない．そこで，本研究では，Cherkaev らの提案したロバストコンプライアンスの概念に基づき，さらに制御工学分野で古くから用いられているシステムの縮約 (Aggregation)<sup>(5)(6)</sup>を用いた，最悪荷重に対する新たな構造最適化法を提案する．すなわち，最初に有限要素法で離散化された線形弾性体の釣り合い方程式から，荷重作用位置における荷重ベクトル・荷重作用位置における変位ベクトル・それらを関連づける対称正方行列から構成される縮約された線形システムを導く．不確定荷重のノルムを制限する場合，ロバストコンプライアンスは，この線形システムの最大固有値として表されることが Rayleigh-Ritz の定理より求められる．それに従い，最悪荷重に対する作成した線形システム内の行列の固有値問題として定式化する．さらに，SIMP 法<sup>(7)(8)</sup>と MMA(The method of moving asymptotes)<sup>(9)</sup>を用いてトポロジー最適化法として実装する．最後に簡単な数値例を用いて本手法の妥当性を検証する．

## 2. 定式化

### 2.1 ロバストコンプライアンス

ある線形弾性体において，有限要素法で離散化された釣り合い方程式を考える．

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1)$$

ただし， $\mathbf{K}$  は剛性マトリクス， $\mathbf{U}$  は変位ベクトル， $\mathbf{F}$  は荷重ベクトルである．このとき，コンプライアンス（荷重によって成される仕事）は以下のように定式化される．

$$l = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (2)$$

式 (2) において，不定荷重の集合があり  $\mathbf{F}$  をその中の元と考えると，これは Cherkaev らの提案するロバストコンプライアンスを離散化した形と考えられる．以下，文献<sup>(3)(4)</sup>で関数解析に基づく数学的理論のみが述べられているロバストコンプライアンスを，有限要素法に基づく構造最適化に適用するため，行列解析で再解釈を試みる．本研究の目的である不定荷重の中で最も危険な荷重に対する剛性最大化を行うには，式 (2) を最大化する危険荷重に対する値を最小化すればよい．このとき，式 (2) に (1) を代入し， $l = \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$  と剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  の二次形式で表すことで，その最大値は剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  の最小固有値の逆数で得られる．そのため，最終的に最適化問題は剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  の最小固有値最大化問題に帰着すると考えられる．しかし，この方法は  $\mathbf{F}$  を完全に不定と扱っており，すなわち，構造全体に不定荷重が作用すると考えているため，部分的に不定荷重が作用する構造の設計問題には適用することができない．

そこで，不定荷重の作用する領域が構造の一部である場合に，最も危険な荷重に対する剛性最大化を行う問題を考える．このとき，不定荷重  $\mathbf{F}$  の成分は，荷重作用領域に対応する部分以外は 0 となるので，荷重作用領域に対応する成分を抜き出した局所荷重ベクトルと局所変位ベクトル  $\mathbf{F}_l$  と  $\mathbf{U}_l$  を用いて，ロバストコンプライアンスは以下のようにも表される．

$$l = \mathbf{F}_l^T \mathbf{U}_l \quad (3)$$

### 2.2 縮約された線形システムの導出

本研究では，不定荷重が局所的に作用し，それにより成される最悪の仕事に対する剛性を最大化する最適化問題を考える．その指標となるロバストコンプライアンスは式 (3) のように，荷重作用領域における局所荷重ベクトルと局所変位ベクトルで表される．そこで，荷重作用領域における局所的な荷重と変位の関係を表す式を，式 (1) の全体剛性方程式より導く．

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{F}_l, \mathbf{F}_l = \mathbf{H}^T \mathbf{F} \quad (4)$$

ここで， $\mathbf{H}$  は  $\mathbf{F}_l$  と  $\mathbf{F}$  を関連付ける行列である．これを用いて， $\mathbf{U}_l$  も以下のように表す．

$$\mathbf{U}_l = \mathbf{H}^T \mathbf{U} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{F}_l = \mathbf{C} \mathbf{F}_l \quad (5)$$

ただし、

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} \quad (6)$$

式(5)が縮約された線形システムであり、荷重作用領域における局所的な荷重と変位の関係を表す。これを用いることで大規模な式で状態が表される系においても、局所的な値同士の関係を明確に解析することが容易になる。このように、大規模システムから局所的な状態の関係を示す小さなシステムを導出することは、制御工学分野で古くから用いられており<sup>(5)(6)</sup>、例えばロボット用多軸ロードセルの性能評価等に用いられている<sup>(10)</sup>。

### 2.3 最適化問題の設定

式(3)に式(5)を代入して、ロバストコンプライアンスは以下のようにも表される。

$$l = \mathbf{F}_l^T \mathbf{C} \mathbf{F}_l \quad (7)$$

ここで、不定荷重  $\mathbf{F}_l$  に対して  $\|\mathbf{F}_l\| = 1$  という条件を設ける。このとき、 $l$  の値域は、Rayleigh-Ritz の定理より(例えば文献<sup>(11)</sup>の4章)以下のように求められる。

$$\lambda_{\max}(\mathbf{C}) = \max \frac{\mathbf{F}_l^T \mathbf{C} \mathbf{F}_l}{\mathbf{F}_l^T \mathbf{F}_l} = \max_{\|\mathbf{F}_l\|=1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{C} \mathbf{F}_l = \max_{\|\mathbf{F}_l\|=1} l \quad (8)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{C}) = \min \frac{\mathbf{F}_l^T \mathbf{C} \mathbf{F}_l}{\mathbf{F}_l^T \mathbf{F}_l} = \min_{\|\mathbf{F}_l\|=1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{C} \mathbf{F}_l = \min_{\|\mathbf{F}_l\|=1} l \quad (9)$$

ここで、 $\lambda_{\max}(\mathbf{C})$  と  $\lambda_{\min}(\mathbf{C})$  はそれぞれ行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値と最小固有値である。すなわち、 $\|\mathbf{F}_l\| = 1$  の条件の下で、 $\lambda_{\min}(\mathbf{C}) \leq l \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C})$  が成り立ち、ロバストコンプライアンスの最大値は行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値に等しい。ロバストコンプライアンスの最大値は最悪荷重に対するコンプライアンスと考えられ、目標関数は以下のように定義できる。

$$\text{minimize } \lambda_{\max}(\mathbf{C}) \quad (10)$$

### 2.4 最悪荷重の導出

前節では、 $\|\mathbf{F}_l\| = 1$  の条件の下で、行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値が最悪荷重に対するコンプライアンスに等しくなることを述べた。本手法ではさらに、その最悪荷重を容易に求めることができる。最初に、式(5)のユークリッドノルムを以下のように考える。

$$\|\mathbf{U}_l\| = \|\mathbf{C} \mathbf{F}_l\| \leq \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{F}_l\| = \|\mathbf{C}\| \quad (11)$$

ここで、 $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムに対応する行列ノルムである。定義より、この行列ノルムはその行列の最大固有値より求められる。そのため、式(11)は以下のように表される。

$$\|\mathbf{U}_l\| \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}) \quad (12)$$

これは、局所変位ベクトルのノルムが行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値以下になることを示し、最大値をとる場合にはそれが最悪荷重に対応する変位と考えることができる。最悪荷重に対応する局所変位を  $\mathbf{U}_{l\text{worst}}$  とおき、ノルムが1の任意のベクトル  $\mathbf{X}$  を用いて以下のように表す。

$$\mathbf{U}_{l\text{worst}} = \lambda_{\max}(\mathbf{C}) \mathbf{X}, \|\mathbf{X}\| = 1 \quad (13)$$

ここで、最悪荷重ベクトル  $\mathbf{F}_{l\text{worst}}$  を導入し、式(13)に式(5)を代入すると、次式が得られる。

$$\mathbf{C} \mathbf{F}_{l\text{worst}} = \lambda_{\max}(\mathbf{C}) \mathbf{X} \quad (14)$$

ここで  $\mathbf{F}_{l\text{worst}} = \mathbf{X}$  となるとき、上式は行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値に対する固有方程式となる。このとき、最悪荷重  $\mathbf{F}_{l\text{worst}}$  は行列  $\mathbf{C}$  の最大固有値に対応する固有ベクトルに等しい。

## 2.5 トポロジー最適化

トポロジー最適化の基本的な考え方は，固定設計領域と次式に示す特性関数  $\chi_\Omega$  の導入にある．すなわち，最適構造となるべき（本来の）設計領域  $\Omega_d$  を包括する固定設計領域  $D$  を最初に設け，その固定設計領域と特性関数  $\chi_\Omega$  を用いて，最適化問題を材料分布問題に置き換えることにある．

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (15)$$

上式の  $\chi_\Omega$  を用いれば，固定設計領域  $D$  内の座標  $\mathbf{x}$  の点の， $\chi_\Omega$  内での有無を判断することにより，最適構造を決定することができる．しかし，この式に基づいて最適化を行う場合には，固定設計領域  $D$  内において関数  $\chi_\Omega$  の値について無限個の不連続性を許容することになり，即ち，要素配置が無限個の不連続を含む形態で得られる可能性があり，数学的に最適解が存在しないことが証明されている．この問題を解決して，特性関数に関する最適化問題を，大域的な意味で，連続な密度関数の最適化問題に置き換え，均質化法を用いた緩和法<sup>(12)</sup>や，それを簡易に定式化した SIMP 法<sup>(8)</sup>が提案されている．これらの方法では，緩和された最適化問題は，空孔を模した非常に弱い材料と母材とで構成される複合材料における，母材の体積含有率の最適化問題と解釈できる．このような最適化問題においては，構造か空孔か判断が困難なグレーの領域がしばしば生じるが，SIMP 法はこの複合材料における体積含有率を示す密度関数と物性値との関係の非線形性をパラメータにより調整でき，明確な構造を得易いという利点があるため，多くの研究で用いられている．本研究でもトポロジー最適化法として SIMP 法を用いるとし，密度関数  $\rho$  と複合材料のヤング率  $E^*$  との関係を以下のように表す．

$$E^* = \rho^p E \quad (16)$$

ここで， $p$  はペナライゼーションパラメータで，本研究では 3 とする． $E$  は原材料のヤング率を表す．

## 3. 数値計算法の実装

### 3.1 行列 $C$ の計算

ここでは，式 (6) で表される行列  $C$  の計算方法について述べる．式 (6) の定式化では全体剛性マトリクスの逆行列  $K^{-1}$  が含まれるため，数値計算には適さない．そこで，随伴変数ベクトル  $Z$  を導入し， $C$  を以下のように表す．

$$C = H^T K^{-1} H = Z^T H = Z^T K Z \quad (17)$$

ただし，

$$K Z = H \quad (18)$$

### 3.2 感度解析

行列  $C$  の最大固有値を  $i$  番の有限要素における密度関数  $\rho_i$  で微分した式は以下ようになる．

$$\frac{\partial \lambda_{\max}(C)}{\partial \rho_i} = \phi_{\max}^T \frac{\partial C}{\partial \rho_i} \phi_{\max} \quad (19)$$

ただし， $\phi_{\max}$  は最大固有値に対応する固有ベクトルである．さらに，行列  $C$  を  $\rho_i$  で微分した式を求める．式 (17) から随伴変数ベクトル  $L$  を乗じた式 (18) を減じて以下の式が得られる．

$$C = Z^T K Z - L^T (K Z - H) \quad (20)$$

上式を  $\rho_i$  で微分して，

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = (H^T - L^T K) \frac{\partial Z}{\partial \rho_i} - L^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} Z \quad (21)$$

ここで，随伴変数ベクトル  $L$  が以下の随伴方程式を満たすとき，第一項の値は 0 となる．

$$K L = H \quad (22)$$

この式は式 (18) に等しいので，随伴変数ベクトル  $L$  の代わりに  $Z$  を用いることができる．よって， $C$  を  $\rho_i$  で微分した式は以下で得られる．

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -Z^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} Z \quad (23)$$

式 (23) を式 (19) に代入することにより，求める感度が得られる．なお，式 (23) における剛性マトリクスの微分は，式 (16) の微分を物性定数として用いて計算した当該要素の要素剛性マトリクスとして得られる．

### 3.3 フィルタリング法の導入

本研究ではトポロジー最適化法として SIMP 法を用いる．しかし，この方法を二次元問題に使用した際に，しばしばチェッカーボードと呼ばれる不安定構造を生じることが知られている<sup>(13)(14)</sup>．この問題を回避するための一般的な方法として，離散化された密度関数もしくは感度を平滑化するフィルタリング法の適用が挙げられる<sup>(15)</sup>．本研究ではフィルタリング法としてプロジェクション法<sup>(16)</sup>を用いる．この方法は設計変数と密度関数を独立に設定し，任意に定義した関数を介してそれらを関連付ける．この関数に値の平滑化機能を持たせることにより，チェッカーボードが回避される．なお，本来の手法では有限要素メッシュの節点に設計変数が設定されているが，本研究では各有限要素の中心に設計変数を設定した．

本来の密度関数  $\rho$  を設計変数とした場合，新たな  $i$  番目の有限要素の密度関数  $\rho_{fi}$  は以下の式で表される．

$$\rho_{fi} = \frac{\sum_{j \in S_i} \rho_j w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\sum_{j \in S_i} w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \quad (24)$$

ただし，

$$S_i = \{j \mid \mathbf{x}_j \in \Omega_{p_i}\} \quad (25)$$

$$\Omega_{p_i} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq r_{\min}, \mathbf{x} \in D\} \quad (26)$$

ここで， $\mathbf{x}_i$  は  $i$  番目の有限要素中心の座標であり， $\Omega_{p_i}$  は  $i$  番目の設計変数が影響する円形の領域である． $S_i$  は  $\Omega_{p_i}$  内に中心が存在する要素のインデックス集合である． $r_{\min}$  はプロジェクション関数の影響半径であり，この値を適切に設定することによりチェッカーボードの発生を防ぐことができる．また， $i$  番目の要素に対応する関数  $w_i$  は以下の線形関数とする．

$$w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{r_{\min} - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{r_{\min}} & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_{p_i} \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_{p_i} \end{cases} \quad (27)$$

### 3.4 アルゴリズム

以上の議論をふまえ，最適化アルゴリズムを以下のように構築する．

1. 密度関数の初期値を決定する．
2. 目標関数が収束するまで以下のループを繰り返す．
  - (a) 剛性マトリクス  $K$  を計算し，式 (17) と式 (18) より行列  $C$  を計算する．
  - (b) 目標関数（行列  $C$  の固有値）と体積制約を計算する．
  - (c) 目標関数と制約条件の感度を計算する．
  - (d) 感度に基づき MMA(The method of moving asymptotes) を用いて密度関数の値を更新する．

## 4. 数 値 例

簡単な数値例により，本手法の妥当性を検証する．なお，構造物の材料はヤング率  $E$  が 1.0 でポアソン比  $\nu$  が 0.3 の仮想材料を想定する．すべての問題において，正方形の構造メッシュを使用し，要素の定式化はアイソパラメトリック要素とする．全ての最適解は，プロジェクション法を適用した後の密度関数分布で表すものとする．また，プロジェクション法の式 (26) と (27) で使用される変数  $r_{\min}$  はメッシュサイズの 1.5 倍とし，当該要素の周囲 8 要素にプロジェクション関数の影響が及ぶようにする．

#### 4.1 集中荷重に対する最適化

最初に、集中荷重が作用する構造の最適化を行う。本手法では、荷重ベクトルはノルムが1で各成分は不定という条件の下で最悪荷重に対する剛性最大化が行われるため、集中荷重の問題は大きさが1の荷重が構造のある点に最悪な方向から作用する場合の剛性最大化問題となる。すなわち、最悪な方向からの荷重とは構造の最も弱い方向に作用する荷重であり、それに対して最適化が成されるため、構造の最も弱い方向の剛性を向上させるという問題になる。図1に設計領域を示す。構造上部を完全拘束し、荷重点を左下側面中央に設定する。また、体積制約は総体積の50%とする。なお、SIMP法においては、式(16)の $p$ の値が3の際、既に密度関数 $\rho$ が0と1の値に明確に分かれた初期解について依存性を有することが知られているため、本例題では密度関数の初期値は均一に0.5とする。また、設計領域を大きさ $0.02 \times 0.02$ の正方形構造メッシュで離散化し、計7500個の要素で計算を行う。

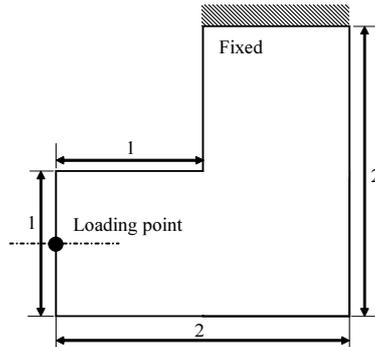


Fig. 1 A reverse L shaped design domain

図2に100回の繰り返し計算で得られた最適解を示し、図3に目標関数である行列 $C$ の固有値の収束履歴を示す。なお、制約条件である体積は、初期解から収束に至るまで上限値をとっていた。このことより本問題における最適解では、通常の剛性最大化問題と同様に体積制約が活性となることがわかる。図4に $\|F_l\| = 1$ を満たす $F_l$ の集合と、式(5)で表されるそれらに対応する変位ベクトル $U_l$ の集合を、初期構造と最適構造について示す。なお、実線の矢印は最も弱い方向を表す、最大固有値に対応する固有ベクトルを示し、破線の矢印は最も強い方向を表す、最小固有値に対応する固有ベクトルを示す。図5には、最大固有値に対応する固有ベクトルの変化履歴を示す。図5に示すように、最も弱い方向は初期解と最適解でわずかに異なり、最適化の過程で徐々に変化したことがわかる。本手法はこの最も弱い方向の変化を追跡し、常にその方向への最適化を行うことができる。

さらに、得られた最適構造を、同じ荷重点に水平荷重と垂直荷重とをそれぞれ作用させ、通常のコンプライアンス最小化を行って得られた最適構造と比較する。目標関数以外の最適化の条件は、先の例題と同じとする。図6にそれらの最適構造を示す。それらの最適構造について、行列 $C$ とその固有ベクトルを計算し、最も弱い方向を求めた。図6(a)と(b)の最も弱い方向はそれぞれ $(-0.0982, -0.9952)^T$ と $(0.8223, -0.5690)^T$ になり、図6(a)においては明らかに垂直荷重に弱いことがわかる。また、それらの構造のロバスト性を確認するため、図2と図6の最も強い方向と弱い方向に単位荷重を作用させ、それぞれに対するコンプライアンスの値を求めた。表1にそれらの結果を示す。本手法で求めた最適解が最悪荷重に対して最も高い剛性を有することが分かる。さらに、最も強い方向についても単位荷重を作用させ、その場合のコンプライアンスを計算した。最悪荷重に対するコンプライアンスと最も安全な荷重に対するコンプライアンスとの比はロバスト性を計る重要な指標であり、本手法で得られた解が最も小さく、最も優れたロバスト性を有することがわかる。



Fig. 2 Optimal configurations of the reverse L example

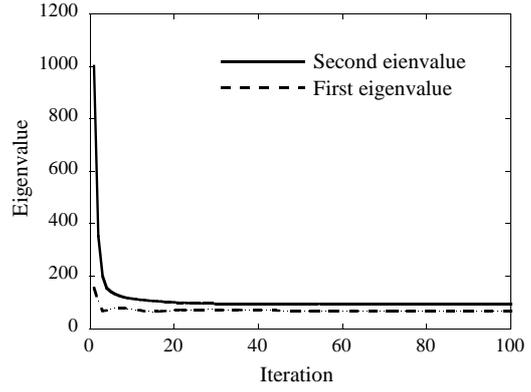
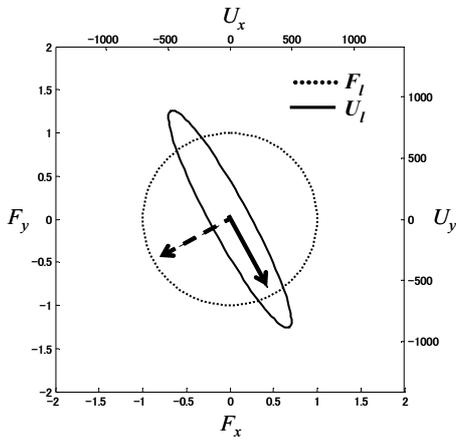
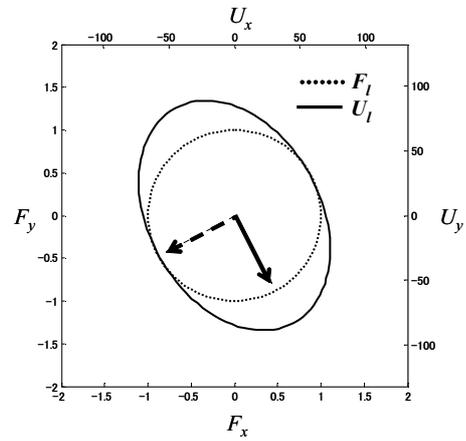


Fig. 3 The convergence history of the eigenvalues



(a) Initial configuration



(b) Optimal configuration

Fig. 4 Illustrations of mapping from  $F_l$  to  $U_l$  by matrix  $C$

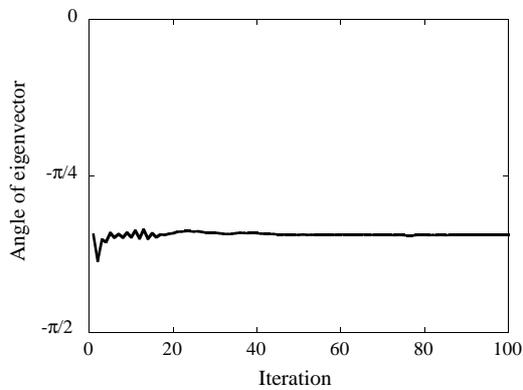


Fig. 5 The history of the angle of the second eigenvector (the eigenvector corresponding to the most dangerous load direction).

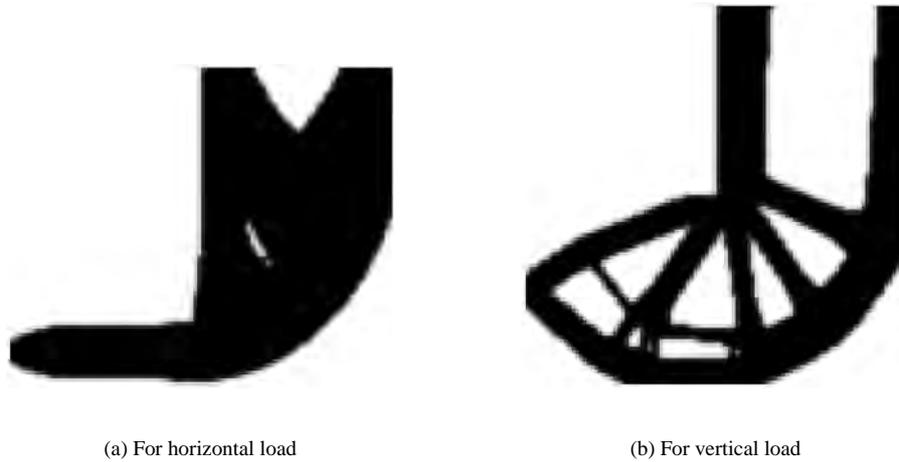


Fig. 6 Optimal configuration obtained by the conventional deterministic approach.

Table 1 Compliances of optimal configurations for the worst load cases and the most undeformable load cases

Optimal configuration in	Fig.2	Fig.6(a)	Fig.6 (b)
For the worst load case	95.7652	342.8997	123.4389
For the most undeformable load case	74.7486	24.4768	63.9296
Ratio of these compliances	1.2812	14.0092	1.9309

#### 4.2 分布荷重に対する最適化

次に，構造に分布荷重が作用する場合の最適化を行う．すなわち，指定された領域にノルムが1の不定分布荷重が作用し，その中の最悪荷重に対して剛性最大化が行われる．図7に設計領域を示す．構造下部両端を支持し，その間の境界に分布荷重が作用するものとする．設計領域は $100 \times 50$ の正方形メッシュで分割し，計5000個の要素で計算を行う．このとき，荷重作用領域は99個の節点を含み，行列 $C$ は $99 \times 99$ の対称行列となる．体積制約は総体積の50%とし，密度関数の初期値は0.5とする．

図8に50回の繰り返し計算で得られた最適解を示す．実際の橋のような構造が得られていることがわかる．図9は行列 $C$ の目標関数である固有値の履歴を示す．集中荷重の場合と同様に滑らかな収束が得られていることがわかる．また，体積制約も集中荷重の場合と同様に活性となった．図10に初期解と最適解のそれぞれに対する最悪荷重分布を示す．これより，最適化過程で最悪荷重分布が変化していることがわかる．

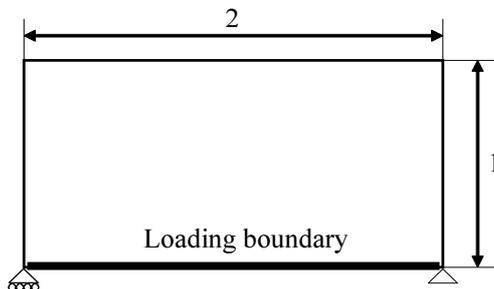


Fig. 7 A bridge design domain



Fig. 8 Optimal configurations of the bridge example

前数値例と同様に，図8の最適解を通常のコンプライアンス最小化で得られた最適解と比較する．図11に構造下端中央の集中荷重に対するコンプライアンス最小化で得られた最適解と，構造下端への均等分布荷重に対するコンプライアンス最小化で得られた最適解を示す．さらに，これらの構造に対する最悪荷重分布を図12に示す．図10(b)と比較し，図11(a)は下端中央と左右端との間に大きな荷重が分布する場合に弱く，図11(b)は中央に大きな荷重が作用する場合に弱いことがわかる．表2に図8と図11とに示す最適解に対して，それぞれの最悪荷重

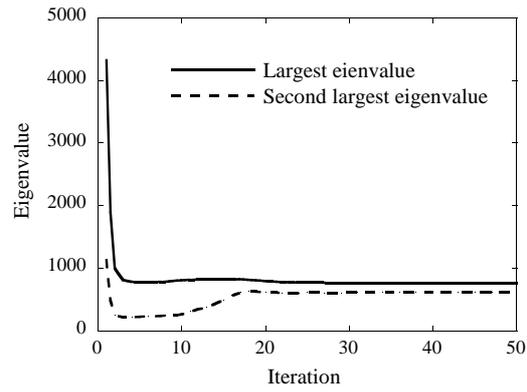
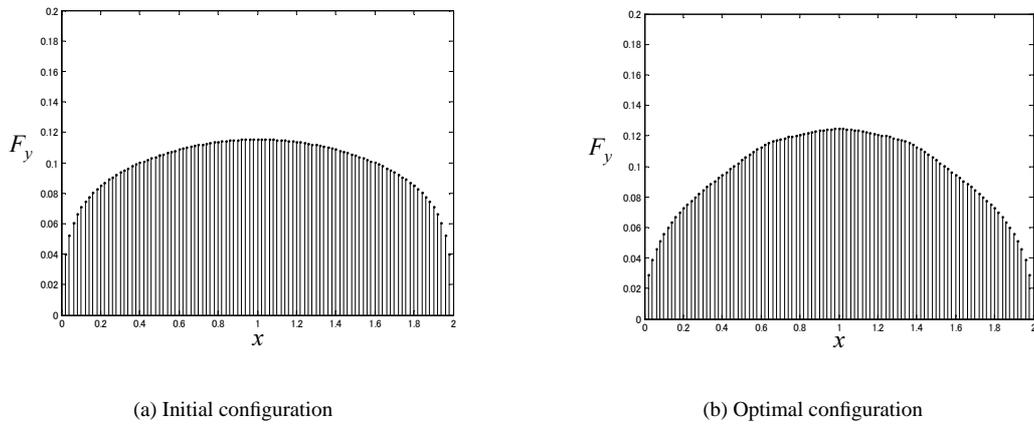


Fig. 9 The convergence history of the eigenvalues



(a) Initial configuration

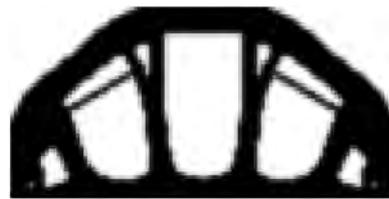
(b) Optimal configuration

Fig. 10 Illustrations of the worst load distributions

を作用させた場合のコンプライアンスの値の比較を示す．これより，本手法で得られた最適解が最悪荷重に対して最も高い剛性を有することがわかる．

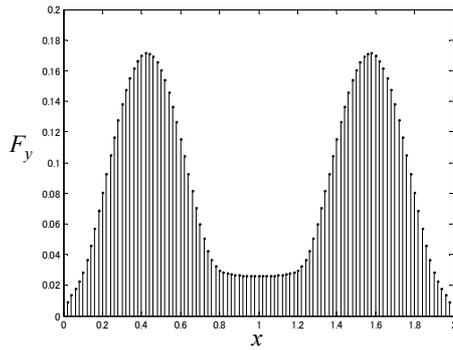


(a) For vertical point load at the bottom center

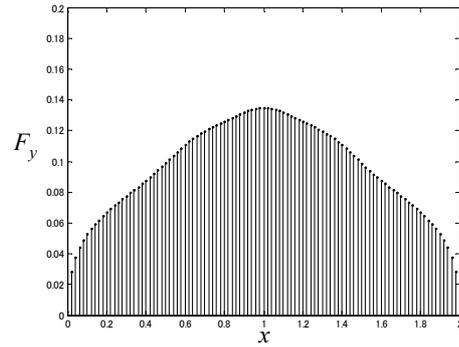


(b) For vertical uniform distributed load on the bottom side

Fig. 11 Optimal configurations obtained by the deterministic approach



(a) The worst load distribution of Fig.11(a)



(b) The worst load distribution of Fig.11(b)

Fig. 12 The worst load cases for optimal configurations obtained by the deterministic approach

Table 2 Compliances of optimal configurations for the worst load cases

Optimal configuration in	Fig.8	Fig.11(a)	Fig.11(b)
Compliance	0.3089	1.1350	0.3139

## 5. 結 言

本研究では、Cherkaev らの提案したロバストコンプライアンスの概念に基づき、システムの縮約 (Aggregation) と固有値解析を用いたロバストトポロジー最適化法を提案した。すなわち、最初に、有限要素法で離散化された系において、行列解析に基づきロバストコンプライアンスの理論を再解釈し、Cherkaev らの方法が実際の設計問題へ必ずしも適用できないと考察した。そして、より実用的な問題として、荷重が作用する位置は定まっているが、その値や分布が不定な場合に、想定される最も危険な荷重ケースに対しての剛性最大化問題を考えた。そして、有限要素法で離散化された線形弾性体の釣り合い方程式から、荷重作用位置における荷重ベクトルと荷重作用位置における変位ベクトル、それらを関連づける対称正方行列から構成される簡易線形システムを導いた。そして、Rayleigh-Ritz の定理より、最悪荷重に対する剛性最大化問題を、作成した線形システム内の行列の固有値問題として定式化した。さらに、その行列の固有値の感度を導出し、SIMP 法と MMA(The method of moving asymptotes) を用いてトポロジー最適化法として実装した。最後に、二次元の簡単な数値例を用いて、不定な集中荷重と不定な分布荷重とがそれぞれ作用する荷重条件の下、最も危険な荷重に対して最大の剛性を持つ力学的に妥当な最適解が本手法により得られることを検証した。

## 文 献

- (1) Beyer, H.G. and Sendhoff, B., "Robust optimization—a comprehensive survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.196, No.33-34 (2007), pp.3190–3218.
- (2) Schuëller, G.I. and Jensen, H.A., "Computational methods in optimization considering uncertainties—an overview", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, No.1 (2008), pp.2–13.
- (3) Cherkaev, E. and Cherkaev, A., "Principal compliance and robust optimal design", *Journal of Elasticity*, Vol.72, No.1 (2003), pp.71–98.
- (4) Cherkaev, E. and Cherkaev, A., "Minimax optimization problem of structural design", *Computers & Structures*, Vol.86, No.13-14 (2008), pp.1426–1435.
- (5) Aoki, M., "Control of large-scale dynamic systems by aggregation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.13, No.3 (1968), pp.246–253.
- (6) Sandell, N., Varaiya, P., Athans, M. and Safonov, M., "Survey of decentralized control methods for large scale systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.23, No.2 (1978), pp.108–128.

- (7) Bendsøe, M.P., "Optimal shape design as a material distribution problem", *Structural Optimization*, Vol.1, No.4 (1989), pp.193–202.
- (8) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., "Material interpolation schemes in topology optimization", *Archives of Applied Mechanics*, Vol.69, No.9 (1999), pp.635–654.
- (9) Svanberg, K., "The method of moving asymptotes- a new method for structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, No.2 (1987), pp.359–373.
- (10) Uchiyama, M., Bayo, E. and Palma-Villalon, E., "A systematic design procedure to minimize a performance index for robot force sensors", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.113 (1991), pp.388–394.
- (11) Horn, R.A. and Johnson, C.R., *Matrix Analysis* (1985), Cambridge University Press.
- (12) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, No.2 (1988), pp.197–224.
- (13) Diaz, A. and Sigmund, O., "Checkerboard patterns in layout optimization", *Structural Optimization*, Vol.10, No.1 (1995), pp.40–45.
- (14) Sigmund, O. and Petersson, J., "Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima", *Structural Optimization*, Vol.16, No.1 (1998), pp.68–75.
- (15) Sigmund, O. "Morphology-based black and white filters for topology optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.33, No.4 (2007), pp.401–424.
- (16) Guest, J.K., Prévost, J.H. and Belytschko, T., "Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.61, No.2 (2004), pp.238–254.