レベルセット法に基づく熱構造連成問題のトポロジー最適設計に対する不確定性を考慮したロバスト設計法

レベルセット法に基づく熱構造連成問題のトポロジー最適設計に対する不確定性を考慮したロバスト設計法 *

平野佑享 *1，山田崇恭 *2，小木曽望 *1，泉井一浩 *3，西脇眞二 *3，伊賀淳郎 *4，

Level Set-Based Robust Topology Optimization for Coupled Thermal and Structural Problems Considering Uncertainty

Yutaka HIRANO, Takayuki YAMADA, Nozomu KOGISO, Kazuhiro IZUI,
Shinji NISHIWAKI, and Atsuto IGA

*5 Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University
1-1 Gakuen-Cho, Naka-ku, Sakai, Osaka, 599-8531 JAPAN

In this paper, a robust design method is applied to the topology optimization for coupled thermal and structural problem. For the robust topology optimization, the objective function is defined as a combination of maximizing total potential energy for the thermal and structural stiffness and minimizing variation in the total potential energy under uncertainties on design parameters such as conduction of heat, heat transfer coefficient, Young's modulus and applied load. The variation in the total potential energy is evaluated using the first-order derivation under assumption that uncertainties are relatively small. As the topology optimization method, the formulation of a level set boundary expressions based on the concept of the phase field method is applied. This method allows topological changes with clearly boundary expressions during the optimization procedure. Furthermore, the geometrical complexity of the obtained optimal configurations can be controlled by adjusting a regularization factor, and the obtained optimal configurations are free of checkerboards and grayscales. Through numerical examples, the effect that uncertain conduction of heat, heat transfer, Young's modulus and applied load have upon the obtained configurations is investigated by comparing with deterministic optimum topology design results.

Key Words : Optimum Design, Robustness, Heat Conduction, Structural Analysis, Finite Element Method

1. 緒　　言

エンジンやボイラーのような熱負荷の作用する機械構造物においては，剛性や振動特性などの機械的な性能の向上だけでなく，高温時の材料強度低下，熱による応力や変形を防止するための温度低減が重要となる．本研究では，このような熱と構造の連成設計問題に対する設計法として，近年，発展してきたレベルセット法に基づくトポロジー最適設計法[(1)(2)]に対して，パラメータの変動を考慮したロバストトポロジー最適設計法を提案する．

レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法は，スカラー場であるレベルセット関数場の等位面を用いて物体の外形形状を陰的に表現し，その関数を時間発展させることにより，形状変更を表現する方法である．この方法では，従来の SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 法に基づく手法[(3)(4)]や均質化に基づく手法[(5)~(7)]と異なり，グレイスケールを含まない明確な境界を有する構造形態が得られる利点がある．

しかしながら，従来までに提案されているレベルセット法に基づく手法は，ハミルトンヤコビ方程式を用いて対象構造の境界を変動させるようにレベルセット関数の更新を行うために，設計領域に穴が創出されるような形

---

* 原稿受付 2010 年??月??日
*1 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1)
*2 正員, 京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)
*3 正員, 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)
*4 正員, ヤンマー株式会社 研究センター (〒 521-8511 滋賀県米原市梅ヶ原 1600-4)
Email: kogiso@aero.osakafu-u.ac.jp

態変更が許容されない．これに対して，山田らは，レベルセット関数による形状表現を行いながら，境界移動と形態変更とを可能としたトポロジー最適設計法を提案している[8]．この方法では，フェーズフィールド法[9][10]の考え方を導入することにより，最適設計問題を仮想的な表面張力項を含むエネルギー汎関数の最小化問題に帰着させることで，最適化問題の正則化を行っている．この正則化の度合いを調整することにより，構造の幾何学的な複雑さを定性的に表すことが可能である．さらに，この方法では，上記正則化から得られる反応拡散方程式を用いてレベルセット関数の更新を行っており，レベルセット関数の滑らかさを保証することができる利点をもつ．

また，レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法では構造境界が明確に表現できるため，その境界上に物理的な境界条件を課すことができる利点もある．すなわち，物体境界に熱伝達境界条件を設定する必要のある設計問題を容易にモデル化することができる．この利点を用いて，熱拡散問題[11]や，熱と構造の連成問題[12]へ適用されている．

さて，実際の設計問題においては，荷重や温度などの環境条件，ヤング率や熱伝導率，熱伝達係数などの材料定数には不確定性が生じる．そのような不確定性を考慮するために，信頼性に基づく最適設計[13]やロバスト設計[14]~[17]が用いられている．信頼性に基づくトポロジー最適設計 (RBTO: Reliability-Based Topology Optimization) は[18][19]では，剛性や固有値などの規準値に対する信頼性制約のもとで体積を最小化する問題として定式化できる．規準値が定められる場合には不確定性を考慮する最適設計問題として優れた手法である．一方，ロバストトポロジー最適設計[20]は，設計パラメータの変動により，剛性や固有値などの性能指標の低下を最小とする設計手法である．性能指標を目的関数として定式化する場合で，規準値が明確でない場合にはロバスト設計が用いられる傾向が強い．

本論文では，設計パラメータの変動に対して，剛性や熱拡散性能が低下しにくい構造形態を求める手法として，ロバストトポロジー最適設計を選択し，その手法として，レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適設計に対して，設計パラメータの変動を考慮した熱拡散および剛性の連成問題に対するロバスト設計法を提案し，最適化アルゴリズムを構築する．

以下 2 章では，レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適設計の定式化について簡単に説明する．次に，3 章では，ロバスト設計の考え方とその定式化について述べる．そして，4 章では，熱構造連成問題のロバストトポロジー最適設計法の定式化を行うとともに，ロバスト設計法のアルゴリズムを示す．最後に，5 章において簡単な数値計算例により，本論文で提案する方法論の妥当性を検証する．

2. レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化

2·1 最適化問題の定式化

物体が占めている領域を物体領域 Ω，物体領域が存在することが許容される固定領域を固定設計領域 D と定義し，物体領域の構造最適化について考える．最初に，図 1 に示すように，物体領域で正，物体の境界で 0，空洞領域で負をとるスカラー場 $\phi(\boldsymbol{x})$ を，レベルセット関数として次式で定義する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \le 1 & \text{if} \quad {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if} \quad {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ -1 \le \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if} \quad {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は固定設定領域の座標である．なお，上式において，レベルセット関数に上限値と下限値をそれぞれ，1 と -1 に設定しているが，これは後述の目的汎関数に付加する仮想的な界面エネルギーをレベルセット関数により表現するために導入したものである．これにより，レベルセット関数は通常設定される符号付き距離関数の性質をもたず，図 1 に示すように，空洞領域では -1, 物体領域では 1 をとり，境界近傍において滑らかに分布する関数となる．

次に，式 (1) で定義されるレベルセット法による形状表現を用いて，目的汎関数を F，体積制約に対する制約汎

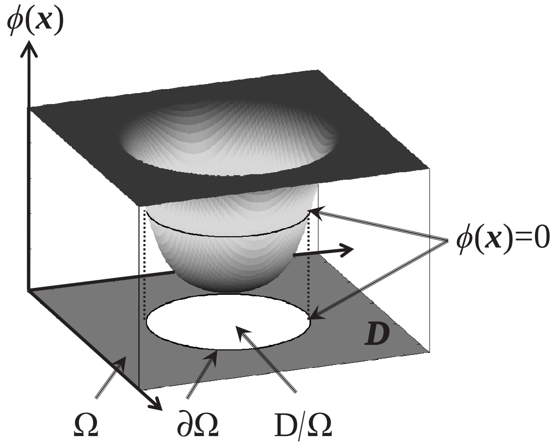


Fig. 1　Fixed design domain D and level set function ϕ

関数を G で表す構造最適化問題を次式で定義する．

$$\underset{\phi}{\text{Minimize}} \ : \ F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) d\Omega \tag{2}$$

$$\text{subject to} \ : \ G(\Omega(\phi)) \leq 0 \tag{3}$$

ここで，$f(\boldsymbol{x})$ は目的汎関数の被積分関数である．上式の構造最適化問題においては，レベルセット関数 ϕ は固定設計領域 D 内の至る所で不連続性を持つことを許容している．その結果，得られる最適構造が，至るところで不連結となる解を許容する，いわゆる不適切な (ill-posed) 問題となるため，何らかの方法で最適化問題を適切な (well-posed) 問題にする正則化を必要とする．この問題を解決する正則化方法として，均質化法[(5)~(7)]が利用されている．しかしながら，形状を表現する関数の相違により，本最適化手法にこの正則化の方法を適用することができない．

そこで，本手法では，フェーズフィールド理論[(9)(10)]の定式化で利用されている界面エネルギーの導入により，問題の正則化を行う．この方法の基本的な考え方は，次式に示すように，目的汎関数を，目的汎関数とレベルセット関数の勾配の大きさによって表現される仮想的な界面エネルギーとの和への置き換えである．

$$F_R(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) d\Omega + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \tag{4}$$

ここで，F_R は，正則化された目的汎関数，τ は，仮想的な界面エネルギーの大きさの寄与度を決定するパラメータであり，正則化係数と呼ぶ．正則化係数の設定値により，最適構造の幾何学的な複雑さを定性的に設定することが可能となる．詳細は文献[(8)]を参照されたい．

次に，この構造最適設計問題にラグランジュ未定乗数法を適用し，次の無制約問題に置き換える．

$$\bar{F}_R(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) d\Omega + \lambda G(\Omega(\phi)) + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \tag{5}$$

ここで，$\bar{F}_R$ はラグラジュアン，λ はラグランジュ未定乗数である．本研究では，上式を解くことにより，最適構造を得る．

2·2　設計変数の更新方法

本研究では，最適化問題を時間発展方程式を解く問題へと置き換えることにより，設計変数であるレベルセット関数を更新する．まず，仮想的な時間 t を導入し，レベルセット関数を変動させる駆動力はラグラジュアンの勾配に比例するものと仮定する．すなわち，レベルセット関数の時間発展方程式を次式で与える．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{\delta \bar{F}_R}{\delta \phi} \tag{6}$$

ここで，$K(\phi)(>0)$ は比例定数，$\delta \bar{F}_R / \delta \phi$ はラグラジュアン $\bar{F}_R$ の汎関数微分を表す．式 (6) に式 (5) を代入し，境界条件として，物体領域境界であることが指定されている境界 ∂D_N はディリクレ境界条件，それ以外の境界はノ

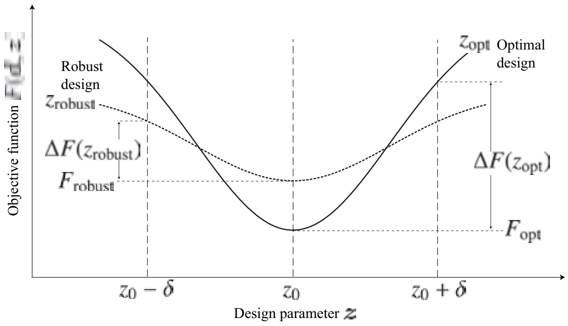


Fig. 2　Concept of robust optimization

イマン境界条件を与え，固定設計領域外部からの干渉がないことを表現する．以上より，時間発展方程式は反応拡散方程式系として，次式で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi)\left(\dfrac{\delta \bar{F}}{\delta \phi} - \tau \nabla^2 \phi\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \qquad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \tag{7}$$

3. ロバスト設計の定式化

ロバスト設計は，設計変数や設計パラメータの不確定性が目的関数や制約条件におよぼす影響を考慮した最適設計法である．ロバスト設計は，一般的に，設計パラメータ等の変動が目的関数や制約条件におよぼす影響をそれらの分散として表し，目的関数および制約条件をその期待値および分散の重み付きの加重和として表す．本研究では，ロバスト設計法として，感度解析に基づく手法[14]を用いる．これは，目的関数および制約条件の平均値まわりの変動を，設計変数および設計パラメータの一次近似として表し，その分散を感度解析によって評価する方法である．

トポロジー最適設計問題の場合，設計変数は構造境界を表す (本研究ではレベルセット関数) ため，その変動を考慮せず，負荷荷重や温度などの環境条件やヤング率や熱伝達係数などの材料条件の変動，すなわち，設計パラメータの変動のみを考慮する．また，本研究では制約条件として構造の体積制約のみを考える．これは構造形態にのみ関係するため，その変動は考慮しないものとする．

設計変数を $\boldsymbol{d} = [d_1, \cdots, d_{n_d}]^T$($n_d$ は設計変数の数)，設計パラメータを $\boldsymbol{z} = [z_1, \cdots, z_{n_z}]^T$($n_z$ は設計パラメータの数) と表し，目的関数の平均値を $\mathrm{E}[\cdot]$，その分散を $\mathrm{Var}[\cdot]$ とすると，ロバスト性を考慮した目的関数は次式で定式化できる．

$$\text{Minimize :} \quad F_{\mathrm{robust}}(\boldsymbol{d}) = \mathrm{E}[F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})] + \alpha \sqrt{\mathrm{Var}[F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})]} \tag{8}$$

ただし，α は正の重み係数である．このロバスト性を考慮した目的関数を最小化することで，目的関数の平均値および分散の加重和を最小化することをめざす．図 2 にその概念図を示す．z_{opt} と z_{robust} はそれぞれ確定的手法とロバスト設計で得られた目的関数の値を示している．設計パラメータ d が δ だけ変化したとき，z_{opt} と z_{robust} を比較すると，z_{robust} の方が目的関数の変化が小さくなっていることがわかる．このように，ロバスト性を考慮した目的関数を用いることで，設計パラメータの変動に対して頑強な設計解を求めることをめざす．

一次近似を用いると目的関数の平均値と分散は次式で近似できる．

$$\mathrm{E}[F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})] \approx F(\mathrm{E}[\boldsymbol{d}], \mathrm{E}[\boldsymbol{z}]) \tag{9}$$

$$\mathrm{Var}[F(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})] \approx \sum_{i=1}^{n_z} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)^2 \mathrm{Var}[z_i] \tag{10}$$

この一次近似は感度解析を用いるために計算コストを低く抑えられる利点があるが，分散が大きい場合は近似精度が悪化する可能性がある．本研究では，分散が比較的小さい場合のみを考慮しているため，大きな問題とはならない．

4. 熱構造連成問題へのロバストトポロジー最適設計

図 3 に示すような線形熱弾性体で構成される物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域 D に対して，境界 Γ_t において温度 T_0 で温度規定，境界 Γ_q において熱流束 q の熱流束境界，境界 Γ_h において熱伝達係数 h の熱伝達境界が与えられ，さらに境界 Γ_u において変位 $\boldsymbol{u}_0$ で変位固定，境界 Γ_f に荷重 $\boldsymbol{t}$ が与えられている問題について考える．ただし，境界 Γ_t，Γ_q，Γ_u，Γ_f は，固定設計領域の境界 ∂D 上に設定しているものとする．また，境界 Γ_h は固定設計領域内部において，物体領域の境界上で設定され，レベルセット関数の値に依存して決定される設計変数依存性の境界条件となる．このとき，熱拡散最大化と剛性最大化に対する二目的最適化問題の目的関数を，重み付き総和法により，次式に示す剛性問題と熱拡散問題に対する各々のポテンシャルエネルギーの和として定式化する[12]．

$$\inf_{\phi} \quad F(\Omega(\phi),\phi) = -w\left(\frac{1}{2}a_t(T,T) - L_t(T)\right) - (1-w)\left(\frac{1}{2}a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - L_u(\boldsymbol{u})\right) \tag{11}$$

$$\text{s. t.} \quad a_t(T,\widetilde{T}) = L_t(\widetilde{T}) \quad \text{for } {}^{\forall}\widetilde{T} \in U_t \tag{12}$$

$$a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = L_u(\boldsymbol{v}) + p(T,\boldsymbol{v}) \quad \text{for } {}^{\forall}\boldsymbol{v} \in U_u \tag{13}$$

$$G(\Omega(\phi)) \leq 0 \tag{14}$$

ただし，w は熱拡散最大化と剛性最大化の重みを決定するパラメータで，$0 \leq w \leq 1$ となる値をとる．また，上式中の各表記は次式で定義される．

$$a_t(T,\widetilde{T}) = \int_{\Omega(\phi)} \nabla T \boldsymbol{\kappa} \nabla \widetilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} hT\widetilde{T} d\Omega \tag{15}$$

$$L_t(\widetilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q\widetilde{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_{h(\phi)}} hT_{\mathrm{amb}} \widetilde{T} d\Gamma \tag{16}$$

$$a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) d\Omega \tag{17}$$

$$L_u(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} d\Gamma \tag{18}$$

$$p(T,\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega(\phi)} \boldsymbol{E} : \delta \alpha_t \Delta T : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\Omega \tag{19}$$

$$G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \tag{20}$$

ここで，$\boldsymbol{\kappa}$ は熱伝導テンソル，T_{amb} は周囲温度，$\boldsymbol{\sigma}$ は構造物の変形により生じるコーシー応力を示す．本研究では，この設計領域は均質な等方線形弾性体で構成され，かつ熱弾性体の応力-ひずみ関係には，式 (19) が成り立つと仮定する．$\boldsymbol{E}$ は弾性テンソル，$\boldsymbol{\delta}$ はクロネッカーのデルタ，α_t は熱膨張係数，ΔT は温度差を表し，U_t および U_u は以下の式にて定義される関数空間である．

$$U_t = \{\widetilde{T} \in H^1(D) \text{ with } \widetilde{T} = T_0 \text{ on } \Gamma_t\} \tag{21}$$

$$U_u = \{\widetilde{v} \in H^1(D) \text{ with } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_0 \text{ on } \Gamma_u\} \tag{22}$$

次に，上の最適化問題に関する KKT 条件を導くとともに，目的汎関数 $F(\Omega)$ の感度解析を行う．上述の定式より，ラグラジュアン $\bar{F}(\Omega)$ はラグランジュ乗数 λ，随伴温度場 $\widetilde{T}$ および随伴変位場 $\boldsymbol{v}$ を用いて以下のように記述される．

$$\begin{aligned} F(\Omega(\phi)) = &-w\left(\frac{1}{2}a_t(T,T) - L_t(T)\right) - (1-w)\left(\frac{1}{2}a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - L_u(\boldsymbol{u})\right) \\ &+ w\big(a_t(T,\widetilde{T}) - L_t(\widetilde{T})\big) + (1-w)\big(a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - L_u(\boldsymbol{v})\big) + \lambda G(\Omega) \end{aligned} \tag{23}$$

式 (23) を用いて KKT 条件を導けば，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\delta \bar{F}(\Omega) = 0, \quad a_t(T,\widetilde{T}) - L_t(\widetilde{T}) = 0 \\ &a_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - L_u(\boldsymbol{v}) - p(T,\boldsymbol{v}) = 0, \\ &\lambda G(\Omega) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad G(\Omega) \leq 0 \end{aligned} \tag{24}$$

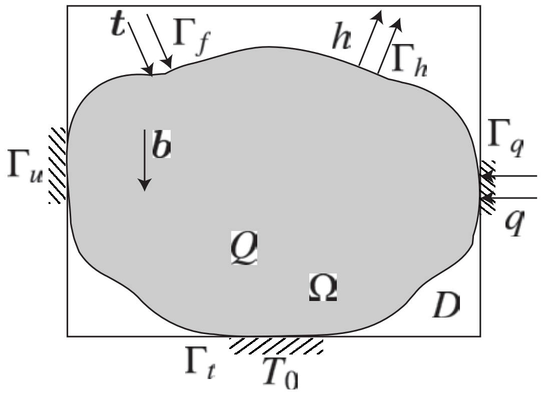


Fig. 3　Fixed design domain

随伴温度場 $\widetilde{T}$，T' および随伴変位場 $\boldsymbol{v}$ を次式で定義することにより，最適化問題を自己随伴問題とする．

$$a_t(\widetilde{T},T)=L_t(T) \qquad \text{for } {}^\forall T\in U_t \tag{25}$$

$$a_t(T',T)=p(T',\boldsymbol{v}) \qquad \text{for } {}^\forall T\in U_t \tag{26}$$

$$a_u(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=L_u(\boldsymbol{u}) \qquad \text{for } {}^\forall \boldsymbol{u}\in U_u \tag{27}$$

式 (23)，(25)，(26)，(27) から，ラグラジュアン $\bar{F}(\Omega)$ は次式となる．

$$\bar{F}(\Omega)=\int_D\left[\frac{1}{2}w\left(\nabla T\kappa\nabla\widetilde{T}+hT\widetilde{T}\right)+\frac{1-w}{2}\{\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{E}:\delta\alpha_t\Delta T):\varepsilon(\boldsymbol{v})+\nabla T\kappa\nabla T'\}+\lambda\right]d\Omega \tag{28}$$

したがって，ラグラジュアンの感度となる $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ は次式となる．

$$\bar{f}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}w\left(\nabla T\kappa\nabla\widetilde{T}+hT\widetilde{T}\right)+\frac{1-w}{2}\{\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{E}:\delta\alpha_t\Delta T):\varepsilon(\boldsymbol{v})+\nabla T\kappa\nabla T'\}+\lambda \tag{29}$$

さらに，本研究では，ヤング率 E，荷重 t，熱伝導テンソル κ，熱伝達係数 h が変動すると仮定するため，これらのパラメータに対する目的関数の勾配がロバスト設計には必要となる．目的関数をこれらのパラメータで微分すると次式で表される．

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial E}=\int_D\frac{1-w}{2E}\{\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{E}:\delta\alpha_t\Delta T):\varepsilon(\boldsymbol{v})\}d\Omega \tag{30}$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial t}=\int_D(1-w)\boldsymbol{u}d\Omega \tag{31}$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\kappa}=\int_D\left(\frac{1}{2}w\nabla T\nabla\widetilde{T}+\frac{1-w}{2}\nabla T\nabla T'\right)d\Omega \tag{32}$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial h}=\int_D\frac{1}{2}wT\widetilde{T}d\Omega \tag{33}$$

よって，ロバスト項は次式で表される．

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\bar{F}]}=\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial E}\right)^2\mathrm{Var}[E]+\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial t}\right)^2\mathrm{Var}[t]+\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\kappa}\right)^2\mathrm{Var}[\kappa]+\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial h}\right)^2\mathrm{Var}[h]} \tag{34}$$

さらに，この式を設計変数で微分すると次式で表される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathrm{Var}[\bar{F}]}{\partial\phi}=&\left[\frac{\partial\bar{F}}{\partial E}\frac{1-w}{2E}\{\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{E}:\delta\alpha_t\Delta T):\varepsilon(\boldsymbol{v})\}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial t}\int_D(1-w)\boldsymbol{u}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\kappa}\left(\frac{1}{2}w\nabla T\nabla\widetilde{T}+\frac{1-w}{2}\nabla T\nabla T'\right)\right.\\&\left.+\frac{\partial\bar{F}}{\partial\kappa}\frac{1}{2}wT\widetilde{T}\right]/\mathrm{Var}[\bar{F}]\end{aligned} \tag{35}$$

式 (29)，(35) から，ラグラジュアンの感度が得られる．

図 4 にレベルセット法を形状表現に用いたロバストトポロジー最適設計のフローチャートを示す．

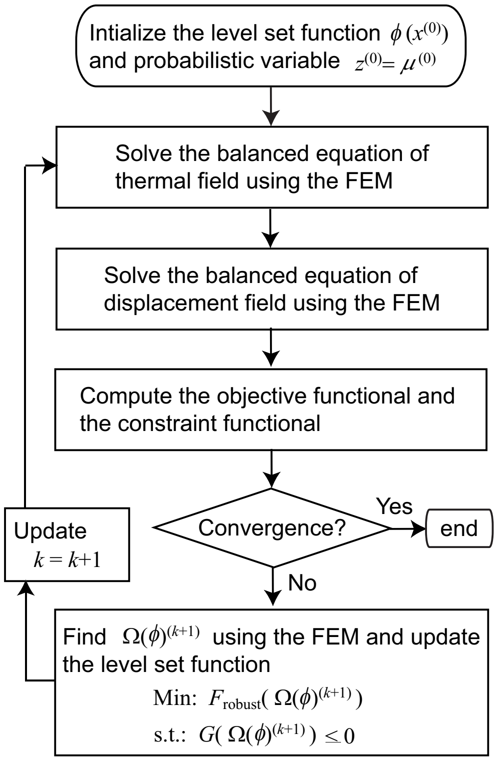


Fig. 4 Flowchart of optimization procedure

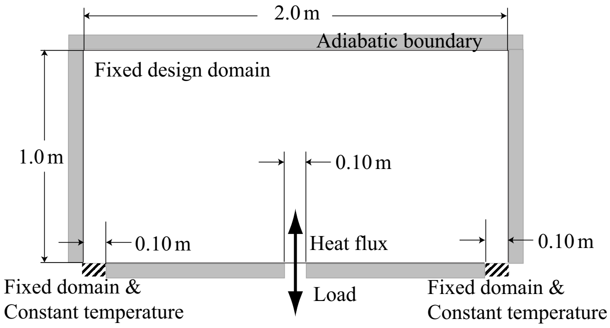


Fig. 5 Design domain and boundary conditions in example 1

5. 数 値 数 値 例

5·1 計算例 1

図 5 で表される 2.0m × 1.0m の長方形設計領域 D を考える．なお，板厚は 1.0×10^{-2}m で一定としている．境界 Γ_t において温度 $T_0 = 0$°C の温度規定，境界 Γ_q において熱流速 $q = 1.0\mathrm{W/m^2}$ の熱流速境界，物体境界 Γ_h において熱伝達係数 $h = 100\mathrm{W/m^2K}$ の熱伝達境界が与えられ，さらに境界 Γ_u において変位固定，境界 Γ_f で荷重 $\boldsymbol{t} = 10$N が与えられているとする．解析においては，要素の一辺の長さを 1×10^{-2}m(20000 要素) とし，また，複雑度係数は $\tau = 10^{-5}$ とする．

まず，体積制約は設計領域の 25%とした場合の確定的な最適形態を求める．重み係数を $w = 0$，$w = 0.5$ および $w = 1.0$ の場合の最適形態を図 6 に示す．$w = 0$ が剛性最大化，$w = 1$ が熱拡散最大化，$w = 0.5$ が剛性と熱の連成問題に相当する．これらの最適形態から，$w = 0$ のときは剛性を高めるためにアーチ状の形態となり，$w = 1.0$ のときは熱が伝達しやすいような形態になっている．$w = 0.5$ の場合は，剛性最大化で得られた形態よりも高さが低く，剛性を保持しながらも熱を伝えやすい構造になっていることがわかる．

次に，ヤング率 E，荷重 t，熱伝導テンソル κ，熱伝達係数 h のバラツキを表 1 で仮定した場合の連成問題 ($w = 0.5$) のロバストトポロジー最適化で得られた最適形態を図 7 に示す．なお，体積制約は設計領域の 25%である．図 6(c)

(a) $w = 0$

(b) $w = 1.0$

(c) $w = 0.5$

Fig. 6　Deterministic optimum configurations in example 1

Table 1　Uncertain parameters in example 1

	Mean Value μ	Standard deviation σ
E [Pa]	2×10^{11}	$\mu_E \times 0.05$
t_y [N]	10	$\mu_{t_y} \times 0.05$
κ [W/mK]	40	$\mu_\kappa \times 0.05$
h [W/m^{2}K]	100	$\mu_h \times 0.05$

Fig. 7　Robust optimum configuration under $w = 0.5$ in example 1

Table 2　Comparison of sensitivity terms in example 1

	Deterministic design	Robust design
$\partial\bar{F}/\partial E$ $(\times10^{-13})$	1.646	1.566
$\partial\bar{F}/\partial t_y$ $(\times10^{-13})$	6.150	7.060
$\partial\bar{F}/\partial \kappa$ $(\times10^{-13})$	1.111	1.599
$\partial\bar{F}/\partial h$ $(\times10^{-11})$	1.032	0.847
$\sqrt{\mathrm{Var}[F]}$ $(\times10^{-11})$	1.066	0.914

で示した確定的な最適化で得られた最適形態よりも，高さがあることがわかる．これは荷重が大きくバラついたときに，荷重点での変位を小さく抑えるロバスト項の影響のためだと考えられる．

確定的な最適形態とロバスト最適形態に対して，式 (30)∼(33) に示したヤング率，荷重，熱伝導テンソル，熱伝達係数に関する目的関数の感度および式 (34) に示したロバスト項の値を表 2 に示す．いずれの設計に関しても，熱伝導係数 h に関する感度が支配的である．この値は，確定設計と比べてロバスト設計における値が小さく，ロバスト構造では熱伝導係数の変動に対する熱拡散エネルギーの変動が小さな構造となっていることを意味する．一方で，その他のパラメータに対しては確定設計の方が変動の影響が小さくなっているが，この例ではそれらのパラメータの変動の影響は，熱伝導係数に比べて一桁以上小さいため，その影響は現れていない．結果として，ロバスト設計では確定的最適設計に比べて，ロバスト項の値は優れていることから，バラツキに頑強な構造が得られていることがわかる．

このように，各設計パラメータの影響が検証できることは，感度解析に基づくロバスト設計法の利点である．

5·2　計算例 2

次に，図 8 で表される設計領域 D を考える．境界 Γ_t において温度 $T_0 = 0$°C の温度規定，境界 Γ_q において熱流速 $q = 1.0\mathrm{W/m^2}$ の熱流速境界，物体境界 Γ_h において熱伝達係数 $h = 100\mathrm{W/m^2K}$ の熱伝達境界が与えられ，さらに境界 Γ_u において変位固定，境界 Γ_f で荷重 $\boldsymbol{t} = 10$N が与えられているとする．ただし，固定設計領域は 2.0m × 1.0m の長方形領域で，要素の一辺の長さを 1×10^{-2}m(20000 要素) とした．なお，板厚は 1.0×10^{-2}m で一定としている．また，複雑度係数は $\tau = 10^{-5}$ とする．

まず，確定的な問題に対して最適化を行う．体積制約を設計領域の 25%，重み係数を $w = 0.5$ として得られた最

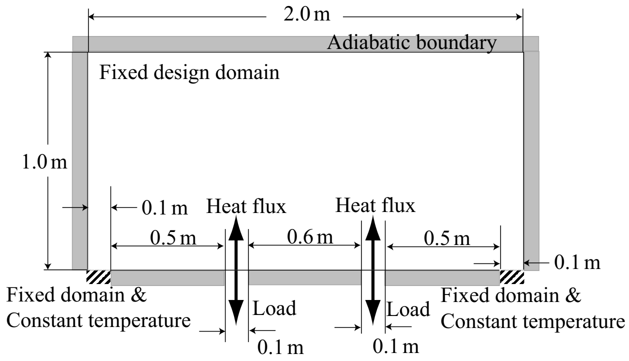
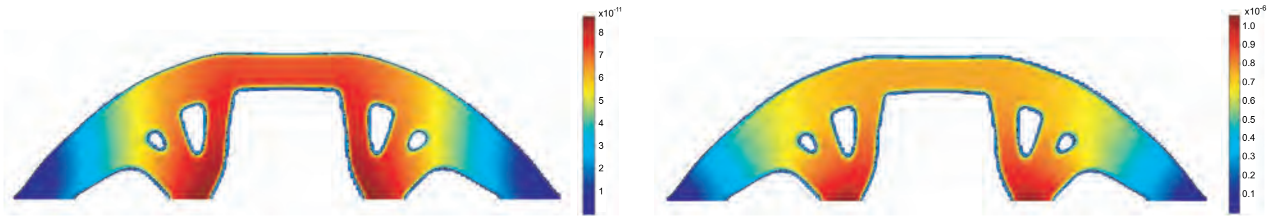


Fig. 8　Design domain and boundary conditions in example 2

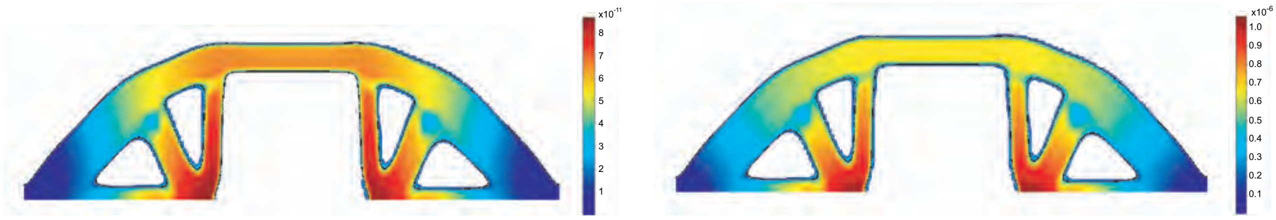
Table 3　Uncertain Parameters in example 2

	Mean Value μ	Standard deviation σ
E [Pa]	2×10^{11}	$\mu_E \times 0.05$
t_x [N]	0	$\mu_{t_y} \times 0.05$
t_y [N]	10	$\mu_{t_y} \times 0.05$
κ [W/mK]	40	$\mu_\kappa \times 0.05$
h [W/m^{2}K]	100	$\mu_h \times 0.05$



(a) Displacement distribution　　(b) Temperature distribution

Fig. 9　Displacement and temperature distributions in deterministic design ($w = 0.5$) of example 2



(a) Mean displacement distribution　　(b) Mean temperature distribution

Fig. 10　Mean displacment and temperature distributions in robust design ($w = 0.5$) of example 2

適形態に，変位分布と温度分布を重ねて，図 9 に示す．

次に，表 3 に示すような不確定性を考慮したロバスト最適設計を求める．この例では，荷重方向の変動を考慮するために，x 方向荷重 t_x, y 方向荷重 t_y を考慮する．また，2 箇所の荷重はそれぞれ独立とする．ロバスト最適設計で得られた最適形態に，平均変位分布と平均温度分布を重ねた図を図 10 に示す．固定領域と荷重点とを結ぶ構造要素が直線上になっていて，確定的な手法で得られた最適形態と形状が異なっていることがわかる．これは，x 方向の荷重の変動に対応するためだと考えられる．

確定的な最適形態における分布図と比較すると，ロバスト設計では荷重点周辺の変位が小さくなっているが，熱流束境界付近の温度は高くなっていることがわかる．これは荷重の変動によるひずみエネルギーの変化を小さくしようとしたロバスト項の影響だと考えられる．

確定的な最適形態とロバスト最適形態に対して，式 (30)~(33) に示したヤング率，荷重，熱伝導テンソル，熱伝達係数に関する目的関数の感度および式 (34) に示したロバスト項の値を表 4 に示す．いずれの設計に関しても，熱伝導係数 h に関する感度が支配的であり，ついで y 方向荷重 t_y が大きい．ロバスト設計では目的関数の期待値は確定的最適設計よりも大きいが，ロバスト項の値は優れていることから，バラツキに頑強な構造が得られていることがわかる．

6. 結　　言

本論文では，荷重，ヤング率，熱伝導テンソルおよび熱伝達係数などの設計パラメータの変動を考慮した剛性と熱拡散を同時に考慮する連成設計問題に対するロバストトポロジー最適設計手法を提案した．トポロジー最適

Table 4　Comparison of sensitivity terms in example 2

	Deterministic design	Robust design
$\partial\bar{F}/\partial E$ ($\times 10^{-13}$)	3.901	3.838
$\partial\bar{F}/\partial t_x$ ($\times 10^{-13}$)	1.207	0.9706
$\partial\bar{F}/\partial t_y$ ($\times 10^{-12}$)	1.851	2.230
$\partial\bar{F}/\partial \kappa$ ($\times 10^{-13}$)	2.627	2.618
$\partial\bar{F}/\partial h$ ($\times 10^{-11}$)	1.406	1.219
$\sqrt{\mathrm{Var}[F]}$ ($\times 10^{-11}$)	1.595	1.475

設計においては，構造境界からの熱の出入りを考える問題として明確な境界形状が必要となるために，レベルセット法に基づくトポロジー最適設計法を採用している．一方，ロバスト設計は感度解析に基づく手法を採用している．構築した設計手法に対して，数値計算例を通して，確定的な最適形態とロバスト最適形態を比較し，本手法の妥当性を検証した．

文　献

(1) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A Level Set Method for Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2 (2003), pp. 227-246.

(2) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A., Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1 (2004), pp. 363-393.

(3) Rozvany, G. I. N.，Aims，Scope，Methods，History and Unified Terminology of Computer-Aided Topology Optimization in Structural Mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization*，Vol. 21 (2001), pp. 90-108.

(4) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O.，Material Interpolation Schemes in Topology Optimization，*Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69 (1999), pp. 635-654.

(5) Cherkaev, A., *Variational Methods for Structural Optimization*, (2000), pp. 117-141, Springer-Verlag.

(6) Allaire, G., *Shape Optimization by The Homogenization Method*, (2002), pp. 189-257, Springer-Verlag.

(7) Haslinger, J., Hillebrand, A., Kärkkäinen, T. and Miettinen, M., Optimization of Conducting Structures by Using the Homogenization Method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24, No. 2 (2002), pp. 125-140.

(8) 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 竹澤晃弘, レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 75, No. 753 (2009), pp. 550-558.

(9) Cahn, J. W. and Hilliard, J. E., Free Energy of A Nonuniform System, I. Interfacial Free Energy, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 28, No. 2 (1958), pp. 258-267.

(10) Allen, S. M. and Cahn, J. W., A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening, *Acta Metallurgica*, Vol. 27 (1979), pp. 1085-1095.

(11) 山田崇恭, 西脇眞二, 伊賀淳郎, 泉井一浩, 吉村允孝, レベルセット法に基づく熱拡散最大化問題のトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 75, No. 758（2009), pp. 2868-2876.

(12) 伊賀淳郎, 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, レベルセット法を用いた熱構造連成問題に対するトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 76, No. 761（2010), pp. 36-43.

(13) Thoft-Christensen, P., and Murotsu, Y., *Application of Structural Systems Reliability Theory*, Springer-Verlag, (1986)

(14) Sundaresan, S., Ishii,K., and Houser, D. R., A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints, *Engineering Optimization*, Vol. 24, No. 2 (1995), pp. 101-117.

(15) Park, G. J., Lee, T. H., Lee, K. H., and Hwang, K. H., Robust Design: An Overview, *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 1 (2006), pp. 181-191.

(16) Beyer, H., and Sendhoff, B., Robust Optimization - A Comprehensive Survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 33-34 (2007), pp. 3190-3218.

(17) Schuëller, G. and Jensen, H., Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties - An Overview, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 1 (2008), pp. 2-13.

(18) Allen, M., Raulli, M., Maute, K. and Frangopol, D. M., Reliability-Based Analysis and Design Optimization of Electrostatically Actuated MEMS, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. 13-14 (2004), pp. 1007-1020.

(19) 平野佑享, 山田崇恭, 小木曽望, 西脇眞二, レベルセット法による形状表現を用いた信頼性に基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 75, No. 758, (2009), pp. 2633-2641.

(20) Kogiso, N., Ahn, W.-J., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Robust Topology Optimization for Compliant Mechanisms Considering Uncertainty of Applied Loads, *JSME Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, Vol. 2, No. 1 (2008), pp. 96-107.