



地震波に関するウェブレット解析

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2013-12-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 宮脇, 幸治郎 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007835

地震波に関するウェブレット解析*

宮 脇 幸治郎**

Wavelet Analysis in the Study of Seismic Waves

Kojiro MIYAWAKI

ABSTRACT

This paper deals with the analysis of seismic waves with non-stationary and random properties with the use of wavelets as an alternative to the standard Fourier analysis. Although the Fourier analysis is one of the effectual approaches for any random phenomena, there is the defect of deletion to the informations of the time at which different phenomena arise, because the integrand kernel of the Fourier spectra have the periodic and homogeneous characters. The theory of wavelets is an effective method to improve the defect. We explain the relationship between the finite discrete wavelet transform and the running Fourier spectra for seismic waves. In addition, we investigate the relation of wavelet spectra, response Fourier spectra and earthquake response spectra.

In the numerical evaluation of wavelet transform, we have used the pyramidal algorithm. The results obtained are as follows. (1) Wavelet transforms behave themselves, in the operation against any data, like a kind of bandpass filter, and the central frequencies are determined by the Nyquist frequency and scale factor j . (2) The spectrum of wavelets is a good correlation to -7 of scale factor j with that of the earthquake response and response Fourier.

Key Word: Wavelet Transform, Running Fourier Spectrum, Earthquake Response Spectrum

1. はしがき

複雑な現象を把握する手法としてフーリエ解析が、種々の形で多方面に用いられている¹⁾が、この手法には問題もある。すなわちフーリエスペクトルは積分核が周期性と相似性の両方の性質を持っていることによる現象の生じた時刻に関する情報の欠落という欠点を持っている。これを改善する手法として最近ウェブレット解析が注目されるようになってきている^{2), 3), 4), 5)}

ウェブレット解析が扱う対象としては、種々あるが、たとえば、R. Kronland-Martinet⁶⁾は、ウェブレット変換を扱い、任意の信号の分解はスケールパラメータによって標準化された。その方法の特徴は簡単な数学的な例を通して説明され、そして会話や音楽的な音の特徴を認識し、視覚化した。非定常の不規則過程に関する解析として、P. Flandrin⁷⁾はフーリエ解析を超えた手法が必要として、time-frequencyの表現、time-scaleの説明等に重点を置いた取り扱いを行った。そこで、ガボール展開、ウェブレット変換、アンビグイテ関数の関

係が、検波推定問題として信号を分解することによって処理された。F. B. Tuteur⁸⁾は、過渡的信号として心電図の波形を対象にし、これをウェブレット解析によって心電図の波形の遅れに応用した例を扱った。G. Saracco⁹⁾は、空気と水の2媒体での音波の伝播をポテンシャルとしてフーリエ変換の形式で求め、これをウェブレット変換の形式で表現し、数値計算例で視覚的に表示した。J. L. Larssonneur¹⁰⁾は、弾性波探査における波動のウェブレット変換表示を試み、その特性を調べた。V. Perrier¹¹⁾は、ウェブレット関数を用いて、偏微分方程式を解く方法を示した。計算例としては、周期的なヘビサイド関数に対する結果をフーリエ級数展開の結果と対比して示し、ウェブレット関数表示の有効性を示した。

また、ウェブレット変換における関数は、かなり自由度をもって定義される。M. Holschneider¹²⁾は、連続ウェブレット変換に対してその変換に伴う基本的な演算法をまとめて示している。さらに、P. Dutilleul¹³⁾は同様に合積に関する演算法を示し、具体的なクラニネットの音の波形からオクターブごとのウェブレット変換を図式化した。離散ウェブレット変換の演算法は、S. G. Mallet¹⁴⁾が2次元の具体的な説明を加え、これを画像データに適用したものを示した。

1992年4月10日受理

* 土木学会関西支部平成4年度年次学術講演会にて一部発表(1992.5)

** 建設工学科 (Department of Civil Engineering)

本研究は、非定常な不規則振動として地震波記録のデータを採り、これを従来のフーリエ解析と対比しながらウェーブレット解析を行った。ウェーブレット解析は有限ウェーブレット変換を用いて、その基礎的な特性について数値シミュレーションを行い、その結果に対して若干の考察を加えた。すなわち、フーリエ解析において、時刻と振動数の特性を同時に表示するには、一般に適当な時間幅のウィンドウを時間軸に掛けたランニングスペクトルで扱われる。これと対比して分解係数ごとのウェーブレット係数を表示した。さらに、耐震工学上よく用いられる地震応答スペクトルと比較するためウェーブレットスペクトルを定義して表示し、検討した。

2. ウェーブレット変換によるデータ処理

(1) ベクトル空間に関する直交正規基底

本研究においては、S. G. Mallat¹⁵⁾の定義したウェーブレット変換における直交正規基底を用いることにする。

まず、可測的で、可積分な関数群 $L^2(R)$ に属するベクトル空間における直交正規基底として、スケール関数 $\phi(x)$ を用いた、

$$e_m^j = 2^{-j/2} \phi_{2^j}(x - 2_m^j) \quad (2.1)$$

ここに、任意の整数 j に対して、

$$\phi_{2^j}(x) = 2^j \phi(2^{-j}x) \quad (2.2)$$

が、ひとつ定義される。基底 e_m^j はパラメータ m 、 j をもっており、この分解係数 j を用いて 2^{-j} はダイレクشنを意味し、 m は並進を意味している関数となっている。

同様に、ウェーブレット関数 $\psi(x)$ を用いた、

$$g_m^j = 2^{-j/2} \psi_{2^j}(x - 2_m^j) \quad (2.3)$$

ここに、

$$\psi_{2^j}(x) = 2^j \psi(2^{-j}x) \quad (2.4)$$

が定義される。基底 g_m^j も基底 e_m^j と同様のパラメータの意味をもった関数となっている。

ところで、式(2.1)は、任意のベクトル空間 V_{2^j} の直交正規基底が係数 2^{-j} をもった関数 $\phi(x)$ の拡大と間隔が 2^{-j} に比例する格子点上への関数の並進によって表わされることを示している。

式(2.2)は、任意のベクトル空間 V_{2^j} と直交なベクトル空間 O_{2^j} を考え、この空間 O_{2^j} への直交写像を計算するための直交正規基底を表わしている。

(2) 有限リゾリューション変換および有限ウェーブレット変換

いま、有限リゾリューション変換を考えてみる。データ数 $2N$ を 2^n なる偶数として、離散データ $f(x)$ をつぎのように表示できる。

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{-1} 2^{-j} \sum_{m=-2^j N}^{2^j N} A_{2^j}^m f \phi_{2^j}(x - 2^j m) \quad (2.5)$$

ここに、

$$A_{2^j}^m f = \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^j m) \rangle \quad (2.6)$$

式(2.5)の係数 $A_{2^j}^m f$ は、式(2.6)に示されるように、与えられたデータ $f(x)$ と関数 $\phi_{2^j}(u - 2^j m)$ との内積によって定義される。 m は整数値であり、変数 u は、 $2^j m$ ほどの整数値をとる離散値となっている。したがって、式(2.6)によって定義される係数 $A_{2^j}^m f$ が有限リゾリューション変換した値に相当している。これを計算するには、次のような、アルゴリズムを用いて行うことができる。

まず、式(2.6)は、 V_{2^j} なるベクトル空間の基底で表示したものであるがこれを $V_{2^{j+1}}$ なるベクトル空間の基底を用いて表示すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^j m) \rangle \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(2m - k) \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u - 2^{j-1} k) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここに、

$$\tilde{h}(m) = \langle \phi_{2^{-1}}(u), \phi(m - u) \rangle \quad (2.8)$$

式(2.7)における離散量に対してフーリエ変換を両辺に施すと、次式のような関係式を得る。

$$F(Y) \Phi_{2^j}(Y) = F(Y) \Phi_{2^{j+1}}(Y) \tilde{H}(2^{-j-1}Y) \quad (2.9)$$

ここに、 $F(Y)$ 、 $\Phi_{2^j}(Y)$ 、 $\Phi_{2^{j+1}}(Y)$ 、 $\tilde{H}(Y)$ はそれぞれ $f(u)$ 、 $\phi_{2^j}(u)$ 、 $\phi_{2^{j+1}}(u)$ 、 $h(u)$ に関するフーリエ変換を意味する。

式(2.9)において $j = -1$ のとき、右辺における $\Phi_{2^{j+1}} = \Phi_1$ 、 $H(2^{-j-1}Y) = H(Y)$ となり、 $\Phi_1(Y)$ は、式(2.2)における $\phi_{2^j} = \phi(x)$ のフーリエ変換した値となっている。したがって、スケール関数 $\phi(x)$ のフーリエ変換 $\Phi(Y)$ が定まっていれば Y のデータは 2^n の離散量として定められる。式(2.9)の右辺が定まれば、左辺の離散量が求まったことになる。

次にこの値を用いて $j = -2$ のステップを計算する場合、式(2.9)の右辺は、 H の変数 $2Y$ となるので、 F 、 $\Phi_{2^{-1}}$ の変数 Y のデータは $2^n/2$ の離散量として求められ

表-1 スケール関数 $\Phi(\omega)$ およびウェブレット関数 $\Psi(\omega)$

$\Phi(\omega)$	$\left\{ \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right\}^8 \cdot \sqrt{\left(\frac{638512875}{A_1} \right)}$
$\Psi(\omega)$	$\cos(\omega/2)H_d\Phi_d - i\sin(\omega/2)H_d\Phi_d$ ここに $\Phi_d = \left\{ \frac{4\sin(\omega/4)}{\omega} \right\}^8 \cdot \sqrt{\left(\frac{638512875}{A_2} \right)}$ $H_d = \sin^8\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{B_1}{A_1} \right)}$
$A_1 = 8\cos^{14}(\omega/2) + 65476\cos^{12}(\omega/2) + 6715896\cos^{10}(\omega/2) + 88951490\cos^8(\omega/2) + 273021880\cos^6(\omega/2) + 225028452\cos^4(\omega/2) + 43800104\cos^2(\omega/2) + 929569$ $A_2 = 8\cos^{14}(\omega/4) + 65476\cos^{12}(\omega/4) + 6715896\cos^{10}(\omega/4) + 88951490\cos^8(\omega/4) + 273021880\cos^6(\omega/4) + 225028452\cos^4(\omega/4) + 43800104\cos^2(\omega/4) + 929569$ $B_1 = 8\sin^{14}(\omega/4) + 65476\sin^{12}(\omega/4) + 6715896\sin^{10}(\omega/4) + 88951490\sin^8(\omega/4) + 273021880\sin^6(\omega/4) + 225028452\sin^4(\omega/4) + 43800104\sin^2(\omega/4) + 929569$	

る。

同様の過程を $j = -n$ まで行うことにより、全計算過程が終了し有限リゾリューションスペクトル値に相当する量が求められる。これらの逆フーリエ変換を施すことによりスペクトル値としての係数が求められる。

つぎに、有限ウェブレット変換について考えてみる。この場合も有限リゾリューション変換と同様に、離散量 $f(x)$ をつぎのように表示できる。

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{-1} 2^{-j} \sum_{m=-2^j N}^{2^j N} D_{2^j}^m f \psi_{2^j}(x-2^{-j}m) \quad (2.10)$$

ここに、

$$D_{2^j}^m f = \langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}m) \rangle \quad (2.11)$$

式(2.11)の係数 $D_{2^j}^m$ がウェブレット変換した量に相当する。式(2.11)を計算するためのアルゴリズムは、 $A_{2^j} f$ の場合と同様のステップを踏めばよい。すなわち、 $\psi_{2^j}(x-2^{-j}m)$ がベクトル空間 V_{2^j+1} の包含関係にある O_{2^j} のベクトル空間を意味するので、式(2.11)は、つぎのように表示できる。

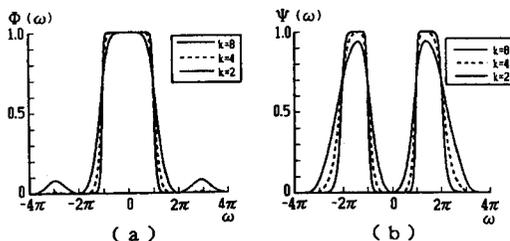


図-1 スケール関数 $\Phi(\omega)$ およびウェブレット関数 $\Psi(\omega)$

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}m) \rangle$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(2m-k) \langle f(u), \phi_{2^j+1}(u-2^{-j-1}k) \rangle \quad (2.12)$$

ここに、

$$\tilde{g}(m) = \langle \psi_{2^{-1}}(u), \phi(m-u) \rangle \quad (2.13)$$

式(2.12)の離散量に対してフーリエ変換を両辺に施すと、次式のような関係を得る。

$$F(Y)\Psi_{2^j}(Y) = F(Y)\Psi_{2^j+1}(Y)\tilde{G}(2^{-j-1}Y) \quad (2.14)$$

ここに、 $\tilde{G}(Y)$ は $\tilde{g}(u)$ に関するフーリエ変換を意味する。

式(2.9)より、有限リゾリューション変換のスペクトルを求めたように、式(2.14)より有限ウェブレット変換のスペクトルが求められる。

3. 数値シミュレーションによる検討

本研究では、式(2.2)、(2.4)の関数は自由度をもって決定されるが、P.G.Lemarieの方法¹⁶⁾により、表-1のような関数を作成して用いた。作成したスケール関数 Φ およびウェブレット関数 Ψ は図-1に示す関数の逆フーリエ変換で示される。それぞれのフーリエ変換された関数は矩形近似のフィルタが1ないし2つある関数となっているのがわかる。なお、図中のパラメタ k は作成した関数が区間 $[n, n+1]$ (n : 整数) を $k-1$ 回微分可能で、 $2k-1$ 次の多項式表示の関数となっているこ

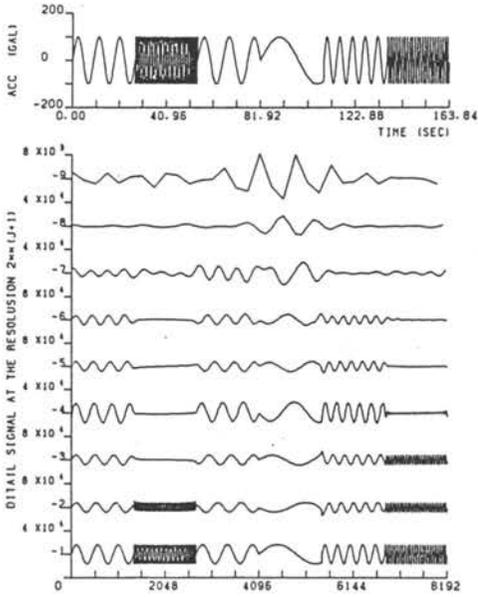


図-2 区間定正弦波に対するリゾーション変換

とを示している。波形解析には $k=8$ を用いている。

まず、異なった振動数を区間ごとにもった正弦波の波形データに対するリゾリューション変換の結果を図-2に示す。波形データは、時間刻み0.02秒の $2^{13}=8192$ 個であり、この継続時間を6等分して振幅を一定にして振動数を変化させている。図の横軸はデータ数に相当する整数の離散量であり、縦軸は分解係数 j が $-1 \sim -9$ に対するリゾリューション係数の値を示している。各 j に対する縦軸のスケールが異なるが、 j の負の次数が小さいほど元の波形の高次の振動数を含めた波形の変換となって

いるが、負の次数が大きくなると低次の振動数成分のみが卓越した変換となっている。このことは、リゾリューション変換が j の負の次数の小から大に変化することによってローパスフィルターの振動数の高次から低次に変化していくことに対応している。

つぎに同じ波形に対するフーリエ変換とウェブレット変換の結果を図-3(a), (b)に示す。時間毎の波形の情報を示すためにフーリエ変換は時間領域で約5秒間のデータをもったランニングフーリエスペクトルで表示している。図からわかるようにランニングフーリエスペクトルは時間軸上にかけるウィンドウを少しずつずらせば時間軸上で波形の性質が変化する時刻が確認できるが、ウィンドウ幅によってそのスペクトルの分解能が大きく左右される。一方、ウェブレット変換は、分解係数 j ごとに時間軸に相当する整数値に対する値を表示している。この場合、分解係数 j ごとの時間に対する変動は、 j の負の次数が低いほど不連続となる時刻を明確に表わしている。すなわち、高振動数域でのバンドパスフィルターを掛けたことにより、変動の不連続を生じる時刻でのウェブレット係数が大きく現われている。なお、振動数成分に関する情報は少なくなるが、ウェブレット係数の大きい値を示す分解係数の中心振動数が原波形の卓越振動の情報量となっている。

いま、対象とする地震波記録¹⁷⁾は表-2に示す地震規模の比較的大きい1968年十勝沖地震を中心とした7個の加速度記録を取り上げる。図-4は、観測地青森での1968年十勝沖地震 ($M=7.8$) に対して同様の変換を施した結果である。対象とした地震は、約20秒以後に主要動が生じ、約1.0~0.5 Hz 付近にスペクトルピークをもつ波動を示している。一方、分解係数 j ごとのウェブレッ

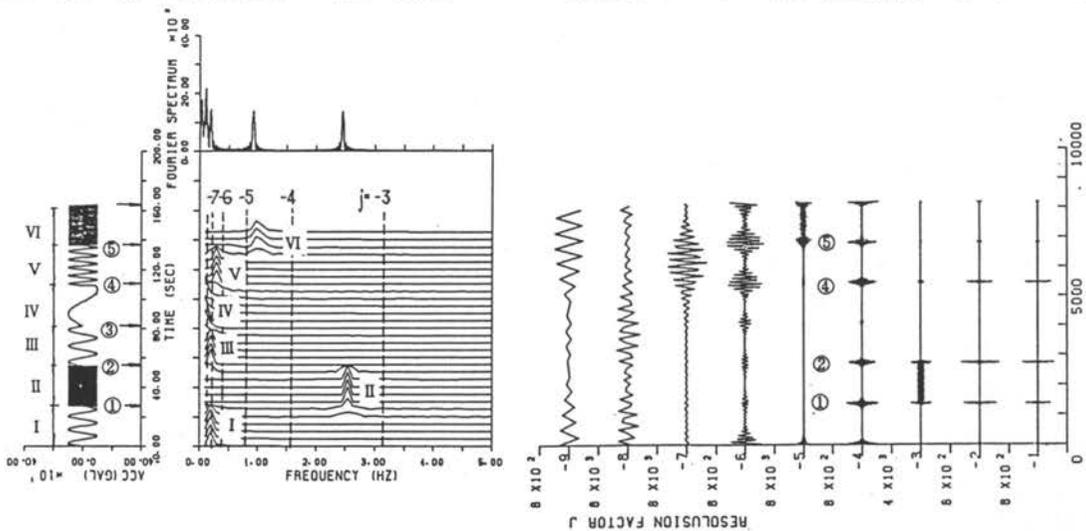


図-3 区間定正弦波に対するウェブレット変換

表-2 対象地震波の諸元

No	観測地	地震名	発生年月日	M _s	成分	震央		地盤 種別	最大加速度 (cms/s/s)
						北緯	東経		
1	高知	日向渡	1968-4-1	7.5	E W	32-18	132-36	4	-104.261
2	室蘭	十勝沖	1968-5-16	7.8	E W	40-42	143-42	2	245.136
3	青森	十勝沖	1968-5-16	7.8	E W	40-42	143-42	3	191.861
4	宮古	十勝沖	1968-5-16	7.8	E W	40-42	143-42	1	160.272
5	青森	十勝沖	1968-5-16	7.4	E W	41-06	143-18	3	-98.606
6	大船渡	十勝沖	1968-5-18	5.1	E W	39-36	143-36	3	61.003
7	鋼路	根室	1973-6-17	7.4	E W	43-00	146-00	2	-135.006

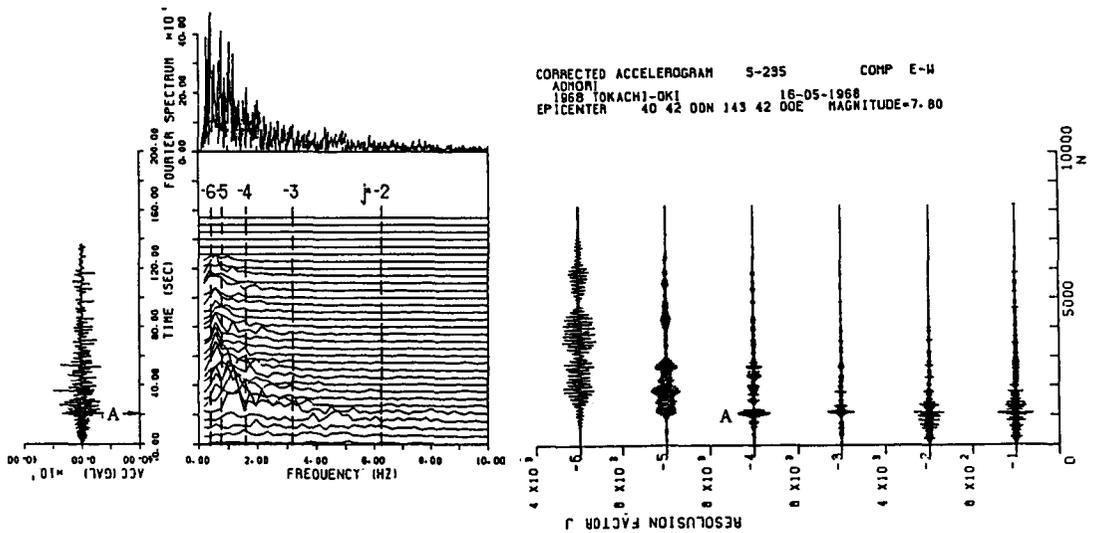


図-4 十勝沖地震記録に対するウェブレット変換(青森)

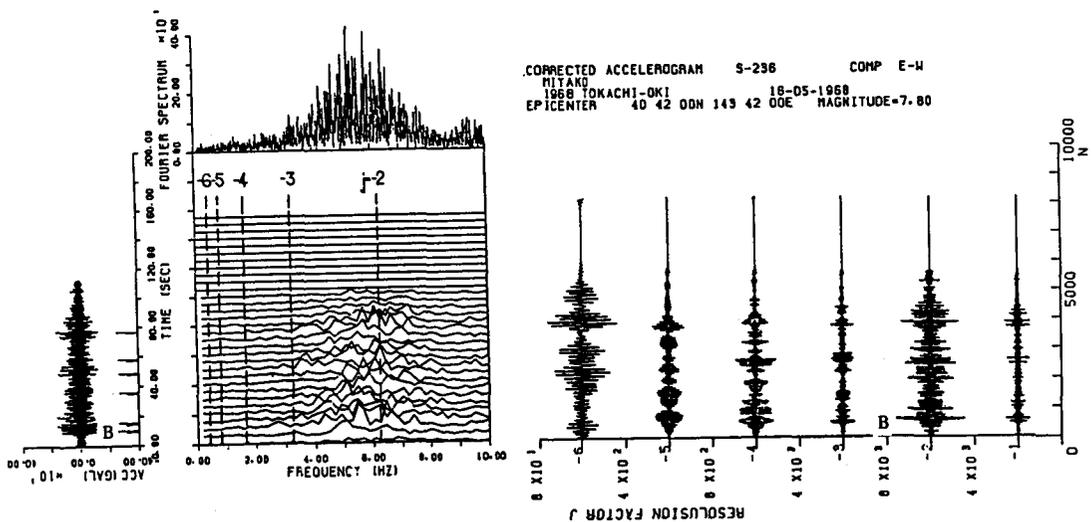


図-5 十勝沖地震記録に対するウェブレット変換(宮古)

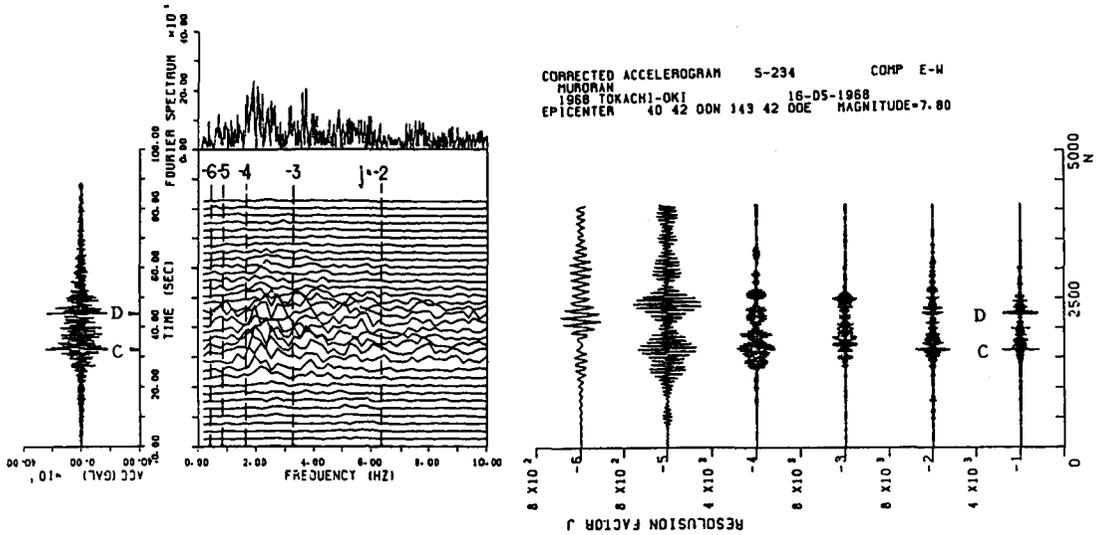


図-6 十勝沖地震記録に対するウェブレット変換 (室蘭)

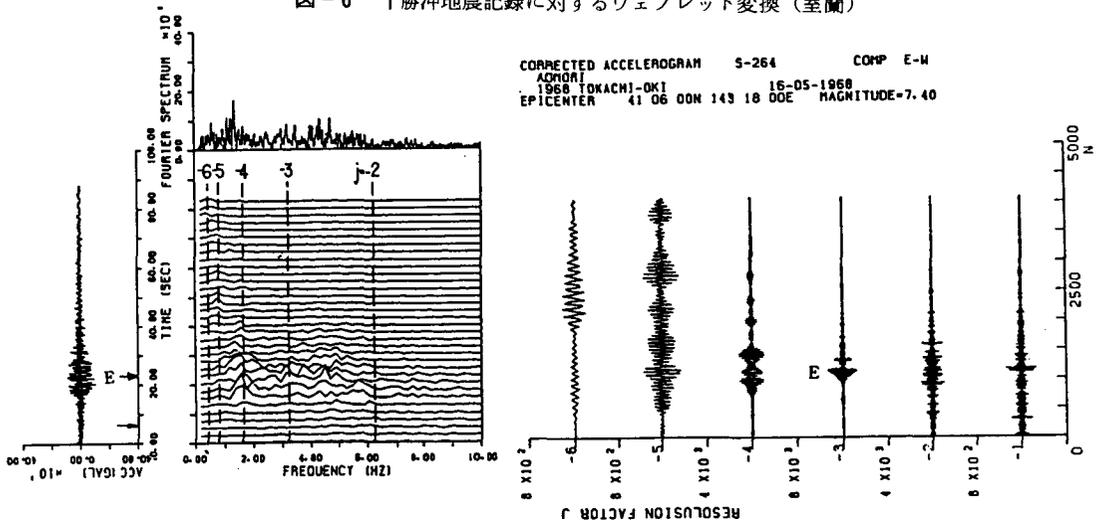


図-7 十勝沖地震記録に対するウェブレット変換 (青森, 余震)

ト変換の結果は、 j が $-1 \sim -4$ において元の波動の最初の急激な振幅の生じる時刻 A にピークを生じている。特に $j = -3, -4$ のところでは、主要動の生じる時刻でのピークが大きくなっている。さらに $j = -5$ 、すなわち、中心振動数 0.78125 Hz のバンドパスフィルターに相当する結果と $j = -6$ の中心振動数 0.390625 Hz のバンドパスフィルターに相当する結果をみると、元の波形から高振動数のノイズを除いたそれぞれの帯域での包絡線に相当する結果となっている。この結果はランニングスペクトルのピーク領域が約 $1.0 \sim 0.5 \text{ Hz}$ 付近を時間と共に推移している状態に対応している。一方、観測地宮古の地震記録の結果 (図-5) を見ると、約 $4.0 \sim 8.0 \text{ Hz}$ の振動数領域にスペクトルのピークをもつ波動となって

いる。ウェブレット変換の結果は、 j が -2 のときウェブレット係数の変動が大きな値となっている。これは、 $j = -2$ で中心振動数が 6.25 Hz でのバンドパスフィルター処理した結果に相当している。また、この場合にも微動から主要動に変化する時刻 B にウェブレット係数の変動がピークを生じている。

つぎに、観測地室蘭と青森との結果を図-6, 7に示す。図-6より、同様の特徴が読み取れる。すなわち、継続時間の中間部分で2ヶ所の大きな振幅を持つ記録で、 $1.0 \sim 10 \text{ Hz}$ 帯域に振動数成分が分布している波動は、ウェブレット変換により2ヶ所の対応する時刻に大きな値を持ち、 j が $-1 \sim -4$ のウェブレットの係数の応答値が元の波形特性を構成している。さらに、青森の記録

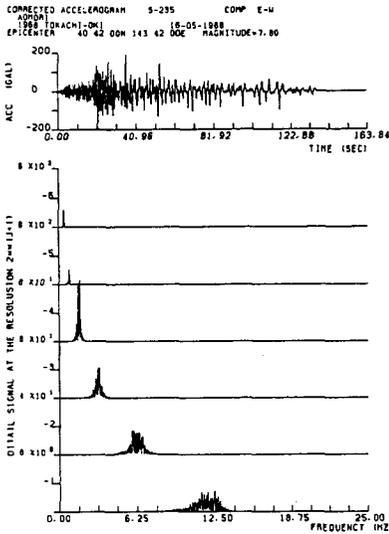


図-8 ウェーブレットフーリエスペクトル

は図-4の地震の余震である。この場合、約10~30秒の区間で振動数帯域 1.0~5.0 Hz になだらかなピークをもち、30秒以後は約 0.5~1.0 Hz ピークを持った記録であるが、図-4の本震の場合に似た特性を示している。

ところで、図-4の地震記録に対する分解係数 j におけるウェーブレット変換された変動のフーリエスペクトルは、図-8のようになる。この場合の中心振動数は、地震記録データの時間刻みが 0.02秒であるので、Nyquist 振動数 $1/(2\Delta t) = 25\text{Hz}$ より $25 \cdot (2^j)\text{Hz}$ と計算される。この総和をウェーブレットスペクトル (WSP) としたときの結果を表示したのが図-9である。図の横軸は分解係数 j にとり、縦軸は WSP: $\text{Sp}[\text{gal} \cdot \text{Hz}]$ の対数を取ったものである。7地震記録は地震規模が大船渡記録を除いてほぼ同じで、最大加速度も極端な差違の無いものが選ばれているため WSP は大きな差違が生じていない。また、この結果を比較するため固有振動数を分解係数 j に相当する値にとり、減衰定数 5% においたときの構造物の地震応答を求め、そのフーリエスペクトルの総和を応答フーリエスペクトル (RFS: $[\text{gal} \cdot \text{Hz}]$) とし、また同様に地震応答スペクトル (ERS: $[\text{gal}]$) を求めた結果は、図-10に示す。

なお、ERS は WSP と RFS と物理的な意味が違う情報量である。すなわち、WSP は地震の原波形にほぼ矩形に近いバンドパスフィルターを通過したエネルギー量に相当し、RFS は 5% の減衰を持った 1 自由度構造物の応答の振動数応答関数のバンドパスフィルターを通過したエネルギー量に相当しているが、ERS は 5% の減衰を持った 1 自由度構造物の最大応答値であり、いわ

ゆる極値分布に関係する量である。

図より、WSP の特徴は、 $-6 < j < -1$ において RFS、ERS の特性と非常によく対応を示しているが、 $j = -7$ で WSP の傾きが大きくなっている。 $j = -7$ において RFS、ERS も曲線の勾配が少し大きくなるが、WSP の場合その勾配が極端に変化している。これは、ウェーブレット変換による波形データの分解が分解係数 $j = -7$ で大きく変化する特性をもっているということの意味する。

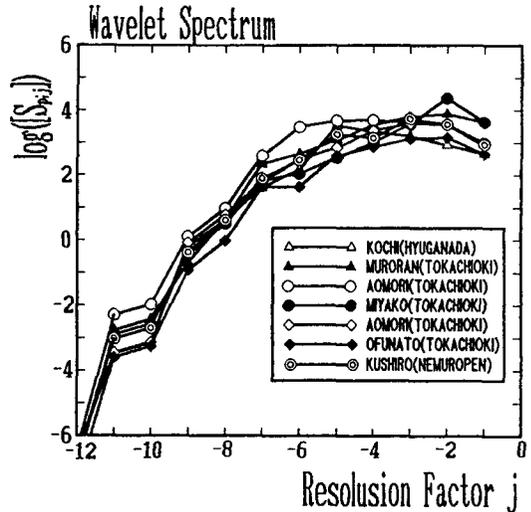


図-9 地震波に対するウェーブレットスペクトル

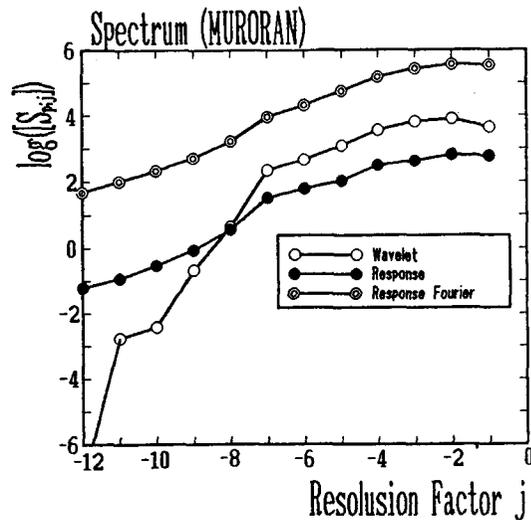


図-10 ウェーブレットスペクトル
一応答フーリエスペクトル—
地震応答スペクトル

4. まとめ

本研究は、非定常な不規則振動として地震波記録のデータを解析の対象に採り、フーリエ解析とウェーブレット解析を対比しながら若干考察を加えた。さらに、耐震工学上よく用いられる地震応答スペクトルと比較するためウェーブレットスペクトルを定義して表示した。

ウェーブレット解析は、ローパスフィルタ-的特性をもった離散的な有限リゾリューション変換より誘導された有限ウェーブレット変換により行った。

一方、比較検討するためのフーリエ解析は、時刻と振動数の特性を同時に表示するために、適当な時間幅のウィンドウを時間軸に掛けたランニングスペクトルで行った。これと対応するかたちで分解係数ごとのウェーブレット係数を表示した。

ウェーブレット変換による基礎的な特性を把握するため数値計算を行い、つぎのような結果を得た。

(1) 離散的な有限ウェーブレット変換は、データにバンドパスフィルタ-の演算子の処理を施したものとなり、各バンドの中心振動数は元のデータの時間刻みによって定まる Nyquist 振動数と分解係数 j によって決まる。

(2) ランニングスペクトルは時間軸でのウィンドウ幅によって振動数軸の分解能が変化し、ウィンドウの時間軸の移動量を小さくすることによって、ある程度時間軸上での波形の変化を把握できるが、正確に決定しにくい。

(3) 一方、ウェーブレット変換は、データの急激な変動量の生じる時刻は、負の分解係数が小さい場合のウェーブレット係数の結果より正確に把握できるが、振動数に関する情報が少なくなる。

(4) ウェーブレット変換による卓越振動数の情報は、正確に把握できないが、ウェーブレット係数が卓越している分解係数での中心振動数に対応している。

(5) 各分解係数におけるウェーブレット係数のフーリエ変換のスペクトルの総和をウェーブレットスペクトルと定義した場合、耐震工学上の地震応答スペクトルが負の分解係数 7 ぐらいまでよい対応を示している。

最後に、本研究に際して貴重な文献の提供をいただいた本校システム制御工学科片山登揚助教授と地震記録データをいただいた京都大学防災研究所亀田弘行教授に深く感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) D.E. Newland 著, 坂田勝・木村康治訳: 「不規則振動とスペクトル解析」, オーム社, 1991. 7.
- 2) 山口昌哉・山田道夫: “ウェーブレット解析”, 科

- 学, 岩波書店, Vol. 60, No.6, 1990. 6, pp. 398-405
- 3) 山田道夫・大木谷耕司: “ウェーブレット解析”, CAS 90-126, NLP 90-66, 盛文社, pp. 35-41.
- 4) I. Daubechies: “The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis”, IEEE Trans. on information theory, Vol. 36, No. 5, Sep., 1990, pp. 961-1005.
- 5) A. Grossmann R. Kronland-Martinet, and J. Morlet: “Reading and Understanding Continuous Wavelet Transforms”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 2-20.
- 6) R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and A. Grossmann: “Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transforms”, Int Jour. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol. 1 No. 2, 1987, pp. 97-126.
- 7) P. Flandrin: “Some Aspects of Non-Stationary Signal Processing with Emphasis on Time-Frequency and Time-Scale Methods”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 68-98.
- 8) F. B. Tuteur: “Wavelet Transformations in Signal Detection”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 132-138.
- 9) G. Saracco, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian: “Use of Wavelet Transforms in the Study of Propagation of Transient Acoustic Signals Across a Plane Interface Between Two Homogeneous Media”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 139-146.
- 10) J. L. Larssonneur and J. Morlet: “Wavelets and Seismic Interpretation”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 126-131.
- 11) V. Perrier: “Towards a Method for Solving Partial Differential Equations Using Wavelet Bases”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 269-283.
- 12) M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and Ph. Tchamitchian: “A Real-Time Algorithm for Signal Analysis with the Help of the Wavelet Transform”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 286-297.
- 13) P. Dutilleux: “An Implementation of the “algorithme a trous” to Compute the Wavelet Transform”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 298-304.
- 14) S. G. Mallat: “Multiresolution Approach to Wavelets In Computer Vision”, Wavelets, Springer-Verlag, 1989, pp. 313-327.

- 15) S. G. Mallat: "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Trans. on Patter Analysis Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, 1989. 7, pp. 674-693.
- 16) 前述 15), pp. 689-690.
- 17) 亀田弘行: "強震地震動の非定常パワースペクトルの算出法に関する一考察", 土木学会論文集, Vol. 235, 1975. 3, pp. 55-62.