保存力学系の数値解析について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2013-11-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 片山, 登揚, 水上, 幸三 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007894

保存力学系の数値解析について

片 山 登 揚* 水 上 幸 三**

On Numerical Analysis of Conservative Dynamical Systems.

Noriaki KATAYAMA* Kouzou MIZUKAMI**

ABSTRACT

This paper deals with numerical analysis of central force problem with two degrees of freedom, which is one of conservative dynamical systems. It is aimed to show the growth of the accuracy of numerical calculation by considering conservative quantities in computation. This paper makes trials of extension of developed method in one dimensional case to two dimensional central force systems.

Key Words: Numerical Calculation, First Integral, Central Force Problem, Two Degrees of Freedom.

第1節．はじめに

物理系においては，その多くは常微分方程式系で系の状態が記述される．系の状態を定量的に知るためには，その常微分方程式系を解析的に解かねばならないが，多くの場合解析的な解を得ることは難しい．そこで計算機による数値解法が考えられ，多くの解法が開発されてきた．たとえば，Runge-Kutta法は優れた解法として多用されている．ところが，常微分方程式系のもつ特徴のひとつに，第一積分（保存量）を許容する場合がある．たとえば，Newtonの運動方程式におけるエネルギー積分が，ひとつの第一積分の例である．

そこで，Greenspanは1次元の常微分方程式 $\ddot{x}=f(x)$ の数値解法において，エネルギー積分を考慮したアルゴリズムを開発した[1]．さらに，前田，和田らは，Runge-Kutta法をひとつの予測子として用いGreenspanの考えを発展させてエネルギー積分を満たすように修正する方法を開発した[2]．そして，系のもつ軌道相が従来方法では定性的に不正確であったものが，エネルギー積分を考えることにより，正確に求められることを示した．

本論文では，上記の方法を2次元中心力系に適用できるように拡張することを目的とする．つまり，よく知られているように中心力系のうちで，調和振動子とケプラー運動は任意の有界軌道がすべて閉軌道となり，しかもエネルギー積分以外に固有な2次保存量が存在する[3]．ここで，固有な2次保存量とは等方的調和振動子においては，Fradkinテンソルであり，ケプラー運動ではRunge-Lenzベクトルである．そこで，これらの保存量が一定となるような数値解法をあたえることを目的とした．第2節ではこれまでに開発された方法を準備として与え，第3節では2次元中心力系への上記アルゴリズムの拡張を示す．そのため，上記の2つの力学系の保存量について考察したのち，拡張されたアルゴリズムを与える．第4節では数値例および結果についての考察を与える．

平成元年4月10日受理

* 機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

** 川崎重工業 (Kawasaki Heavy Industries)

第2節．準　　備

本節では，前田らによる保存量を考慮した1次元系のNewtonの運動方程式の計算アルゴリズムについて，後節の準備として簡単にふれる．

まず，独立変数を t，従属変数を x とし x の t による微分を $\dot{x}$ で表す．このとき，1次元の次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\ddot{x}=f(x), \tag{1}$$

$$x(0)=x_0,\ \ \dot{x}(0)=v_0. \tag{2}$$

これは，Newtonの運動方程式と同じ形式である．(1)の微分方程式は v を導入することにより，つぎの1階の連立常微分方程式系(3)に変換される．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= v,\\ \dot{v} &= f(x).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

この力学系は，次式 E_0 を保存量として許容することは良く知られている．

$$E_0 = \frac{1}{2}v^2 + U(x). \quad (4)$$

ここで，$U(x)$ と $f(x)$ の関係は，

$$U(x) = -\int f(x)\,dx \quad (5)$$

であたえられ，$U(x)$ は力学的にはポテンシャルエネルギーとよばれる．また，E_0 はエネルギー積分とよばれる．

さて，数値計算において時間差分幅を h として，時刻 $t = kh\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ における x, v の値を，x_k, v_k で表すものとする。いま，x_k, v_k があたえられたとし，x_{k+1}, v_{k+1} を求めることを考える。例えば, Runge-Kutta 法で求められた，$t = (k+1)h$ における値を x, v とすると，x, v におけるエネルギー値はかならずしも，一定値 E_0 と一致するとは限らない．そこで，x, v は予測値とみなし修正値 e_x, e_v を導入する．

つまり，次式(6)，(7)により修正された x_{k+1}, v_{k+1}, を決定し，より真に近いと考えられる数値解を求めるものである．

$$x_{k+1} = x + e_x, \quad (6)$$

$$v_{k+1} = v + e_v. \quad (7)$$

次に，修正値 e_x, e_v を決定する方法であるが，前田らは２つの方法を述べている．詳細は文献［２］に譲りここでは結果のみを示すことにする．

（方法１）．x_{k+1}, v_{k+1} におけるエネルギー値が E_0 となるための条件は，

$$\frac{1}{2}(v+e_v)^2 + U(x+e_x) = E_0, \quad (8)$$

を満足することである．これを，e_v についてとくと，

$$e_v = \pm\sqrt{2\cdot\{E_0 - U(x+e_x)\}} - v, \quad (9)$$

を得る．(9)式の複号は．e_v の絶対値が小さくなるように v の符号に一致するように選ぶ．

また，e_x については，例えば２次の Runge-Kutta 公式による予測の場合には，

$$e_x = [v_k\{f(x) - f(x_k)\}h^3]/\{6(x - x_k)\}, \quad (10)$$

であたえられ，３次の Runge-Kutta公式による予測の場合には

$$e_x = [f(x_k)\{f(x) - f(x_k)\}h^4]/\{24(x - x_k)\}, \quad (11)$$

であたえられる．これは，補正まで含めた近似次数が予測子の近似次数よりも高くなるように，修正値を決めることにより導出された式である．

（方法２）．第２の方法は，予測子の形式に依存しない方法である．方法１と同様に(8)式をまず考える．(8)式を Taylor 展開し e_x, e_v の２次以上の項を無視すると，

$$ve_v - f(x)e_x = E_0 - \left\{\frac{v^2}{2} + U(x)\right\} \quad (12)$$

を得る．さらに，e_v, e_x の満たすべき条件として，次式(13)を仮定する．

$$(v - v_k)e_v + (x - x_k)e_x = 0 \quad (13)$$

これは，位相平面（x, v）平面上で予測子による代表点の動きのベクトルは，（$x - x_k$, $v - v_k$）で与えられるが，修正ベクトル（e_x, e_v）がそれに対して直角方向に修正することを意味している．

従って，(12)と(13)を e_x, e_v の連立方程式とみなすことにより，修正値は次式(14)，(15)，(16)式で与えられる．

$$D = v(x - x_k) + f(x)(v - v_k), \quad (14)$$

$$e_x = \frac{v_k - v}{D}\left[E_0 - \left\{\frac{v^2}{2} + U(x)\right\}\right], \quad (15)$$

$$e_v = \frac{x - x_k}{D}\left[E_0 - \left\{\frac{v^2}{2} + U(x)\right\}\right]. \quad (16)$$

但し，$D \neq 0$ のもとで考えるものとする．

方法１，および方法２は，Greenspan が提案した修正値を繰り返し計算で求める方法に比べて，計算時間が少なくてすむという特徴がある．

第3節．2次元中心力系への拡張

3．1　第一積分について

本論文で考察する2次元中心力系の運動方程式は，直交座標（x, y）をもちいて，

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U(r)}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial U(r)}{\partial y} \tag{17}$$

であたえられる．ここで

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{18}$$

であり，極座標（r, θ）に変換すると，運動方程式は

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - U(r) \tag{19}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} \tag{20}$$

但し，

$$x = r\cdot\cos(\theta) \tag{21}$$

$$y = r\cdot\sin(\theta) \tag{22}$$

である．ここで，(19)，(20)式は連立2階の常微分方程式のかたちになるように変形したものである．(19)，(20)式の解に沿って一定値をとる関数（第一積分）としてしられているものに，各運動量 L

$$L = r^2\dot{\theta}, \tag{23}$$

と，エネルギー積分 E

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+U(r), \tag{24}$$

がある．一般のポテンシャル関数 $U(r)$ においては，$\dot{r}$ と $\dot{\theta}$ についての1次式および2次式までの範囲での第一積分は，(23)，(24)および L^2 に限られることが知られている[3]．

特に，調和振動子の運動の場合には，$U(r)$ は(25)式であたえられ，固有な2次保存量としては，(26)式であたえられるFradkin テンソルの成分 $f1$, $f2$, $f3$が存在する．ただし，Kは定数である．

$$U(r) = \frac{K}{2}r^2 \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} f1 &= \dot{x}^2+K\cdot x^2. \\ f2 &= \dot{y}^2+K\cdot y^2. \\ f3 &= \dot{x}\cdot\dot{y}+K\cdot x\cdot y. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

また，ケプラー運動においては，$U(r)$ は(27)式であたえられ，固有な2次保存量としては，(28)式であたえられる，Runge-Lenz ベクトルの各成分 $A1$, $A2$が存在する．

$$U(r) = -\frac{K}{r} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} A1 &= L\cdot\dot{y}-\frac{K}{r}x \\ A2 &= -L\cdot\dot{x}-\frac{K}{r} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

これらの，保存量の物理的な意味としては，次のように考えられる．Fradkin テンソルについては，対称テンソルなので，その成分からなる対称行列を考えることができ，対称行列の固有ベクトルの2方向が，配位空間における楕円軌道の長軸および短軸の方向を表している．また，Runge-Lenz ベクトルについては，楕円軌道の長軸に平行な一定ベクトルをあたえる．逆に，これらの保存量が存在することにより，配位空間において閉軌道をなすことが特徴づけられる．

今後は，2次元中心力系の中で固有な保存量を許容する上記2つの力学系のみを考察対象とする．ところで，上に述べた保存量は，一般化速度の2次形式までの範囲で1次独立な保存量の観点から導かれたものであるが，今後，我々は1次独立なものでなく，関数的独立な保存量について考察しなければならない．なぜならば，保存量を数値解が満たすべき制約条件という立場で，修正値を決めるために用いるからである．そこで，上記の2つの力学系それぞれについて考察する．

＜1．調和振動子の場合＞

(23)，(24)，(26)の各式で与えられる保存量の間には，次の関係式(29)，(30)の各式が成立することは容易に示される．

$$2\cdot E = f1+f2. \tag{29}$$

$$K^2\cdot L^2 = f1\cdot f2+(f3)^2. \tag{30}$$

そこで，行列 J_1 を

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}, & \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial E}{\partial x}, & \frac{\partial E}{\partial y}, & \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial f3}{\partial x}, & \frac{\partial f3}{\partial y}, & \frac{\partial f3}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial f3}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix} \tag{31}$$

とおき，J_1 の階数を求めると $\mathrm{rank}(J_1)=3$が成立する．従って，関数的独立な保存量の組として，$\{L, E, f3\}$ をもちいることができる．もちろん，同様に他の保存量の組み合わせも考えることができる．

＜2．ケプラー運動の場合＞

＜1＞と同様に，保存量 L, E, $A1$, $A2$ の間には，次式(32)が成立する．

$$(A1)^2+(A2)^2 = K^2+2\cdot E\cdot L^2 \tag{32}$$

そこで，行列 J_2を

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}, & \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial E}{\partial x}, & \frac{\partial E}{\partial y}, & \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial A1}{\partial x}, & \frac{\partial A1}{\partial y}, & \frac{\partial A1}{\partial \dot{x}}, & \frac{\partial A1}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}$$

とおき，行列 J_2 の階数を求めると $\mathrm{rank}(J_2)=3$ となり $\{L, E, A1\}$ が，関数的独立な保存量の組であることが示される．

3．2　計算アルゴリズム

第2節において，1次元の場合のエネルギー積分を考慮した計算アルゴリズムをしめした．ここでは，調和振動子とケプラー運動に対して適用するために，方法1の拡張を考える．まず，時刻 $t=kh\ (k=0, 1, 2, \cdots)$ における r_k, $\dot{r}_k$, θ_k, $\dot{\theta}_k$ があたえられたとする．2次の Runge-Kutta 公式，または3次の Runge-Kutta 公式により求められた，時刻 $t=(k+1)h$ における値を r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ であらわし，これらを予測値とみなす．そこで，修正値 e_r, $e_{\dot{r}}$, e_θ, $e_{\dot{\theta}}$ を次式(34)であたえられる r_{k+1}, $\dot{r}_{k+1}$, θ_{k+1}, $\dot{\theta}_{k+1}$ が保存量を一定に保つように決定する．

$$\left.\begin{array}{ll} r_{k+1}=r+e_r, & \dot{r}_{k+1}=\dot{r}+e_{\dot{r}}, \\ \theta_{k+1}=\theta+e_\theta, & \dot{\theta}_{k+1}=\dot{\theta}+e_{\dot{\theta}} \end{array}\right\} \tag{34}$$

すなわち，修正値を求める計算手順はつぎのようである．ケプラー運動を例にとって示すが調和振動子についても同様である．

[1]．初期条件 $r(0)$, $\dot{r}(0)$, $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ より関数的独立な3個の保存量 L, E, $A1$ の値を求める．

[2]．r についての運動方程式(19)において，$\dot{\theta}$を消去して Lを用いて書き直すと

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{r^3} - \frac{dU(r)}{dr} = \frac{L^2}{r^3} - \frac{K}{r^2}, \tag{35}$$

となり，第2節で述べた(10)式，または(11)式を適用することができる．ただし，(10)式および(11)式における関数 f は

$$f(r) = \frac{L^2}{r^3} - \frac{K}{r^2}, \tag{36}$$

となる．(10)式を用いた時の e_r の具体的な表現は

$$e_r = -\frac{L^2\dot{r}_k h^3}{6r^3 r_k^3}(rr_k+r^2+r_k^2) - \frac{K\dot{r}_k h^3}{6}, \tag{37}$$

であたえられる．また，(11)式に対しては，

$$e_r = \frac{(L^2-Kr_k)h^4}{24r^3 r_k^6} \times \{Krr_k(r+r_k) - L^2(r_k^2+r^2+rr_k)\} \tag{38}$$

であたえられる．

[3]．次に，$e_{\dot{r}}$ については(9)式より

$$e_{\dot{r}} = \pm\sqrt{2\left\{E - \frac{L^2}{2(r+e_r)^2} + \frac{K}{(r+e_r)}\right\}} - \dot{r} \tag{40}$$

で求められる．

[4]．さらに，$e_{\dot{\theta}}$については，角運動量保存則より

$$e_{\dot{\theta}} = \frac{L}{(r+e_r)^2} - \dot{\theta} \tag{41}$$

であたえられる．

[5]．最後に，e_θ についてであるが，保存量 $A1$ より

$$A1 = L\cdot\{\dot{r}_N\cdot\sin(\theta+e_\theta) + r_N\cdot\cos(\theta+e_\theta)\cdot\dot{\theta}_N\} - K\cdot\cos(\theta+e_\theta) \tag{42}$$

が成立する．ここで，

$$\left.\begin{array}{ll} r_N = r+e_r, & \dot{r}_N = \dot{r}+e_{\dot{r}} \\ \dot{\theta}_N = \theta+e_{\dot{\theta}} & \end{array}\right\} \tag{43}$$

とする．いま，角度 e_θ が小さいとして sin, cos を展開して2次以上の項を無視すると，e_θ についての1次式が得られ e_θ について解くと

$$e_\theta = \frac{A1 - L\dot{r}_N \sin\theta - Lr_N\dot{\theta}_N\cos\theta + K\cos\theta}{L\dot{r}_N\cos\theta - Lr_N\dot{\theta}_N\sin\theta + K\sin\theta} \tag{44}$$

と求められる．

つまり，以上 [1] − [5] でもとめられる修正値をもちいて，(34)式で修正された $t=(k+1)h$ における数値解は保存量 L, E, $A1$ を一定とするように，求められたことになる．実際の数値計算例を，次節第4節にあたえる．

第4節．数値例およびまとめ

前節で考察したケプラー運動の力学系と調和振動子の力学系で，各パラメータを次の様に設定して数値計算を行った．

$$\left.\begin{aligned} &K = 0.5,\quad r(0) = 1.0,\quad \dot{r}(0) = 0.0,\\ &h = 0.01,\quad \theta(0) = 0.0,\quad \dot{\theta}(0) = 1.0 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

これらの初期条件のもとで，各保存量の値はつぎのようになる．

<ケプラー運動の場合>

$$L = 1.0,\quad E = 0.0,\quad A1 = 0.5,\quad A2 = 0.0 \tag{46}$$

<調和振動子の場合>

$$\left.\begin{aligned} &L = 1.0,\quad E = 0.75,\quad f1 = 0.5,\\ &f2 = 1.0,\quad f3 = 0.0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

2次の Runge-Kutta 法によるケプラー運動の数値計算結果を表1に示し，修正値をくわえる方法による結果を表2に示す．さらに，3次の場合については表3および表4にあたえる．また，調和振動子の数値計算結果についても，同様に表5から表8にあたえる．ここで，I はステップ数を表し，その他の記号については本文中に用いた記号の意味と同じである．また計算精度のチェックとして，保存量の値がどの程度一定に保たれるかをみることにより，従来方法との比較を行うものとする．

以上の結果より，ケプラー運動においては従来方法では初期値から決定される(46)式の一定値を表していないが，新方法では，L, $A1$, E については，保存量の満たすべき条件を満足していることが分かる．但し，$A2$ については一定値を示していないが，これは修正値を求めるときに保存量 $A1$ を用いたためと考えられる．$A2$ の計算には(28)式を用いたが，(32)式を用いるならば E, $A1$, L と同程度の精度で一定値を示すものと考えられる．また，調和振動子の系についても同様に，従来方法では L, E, $f1$, $f2$, $f3$ の保存されるべき関数は一定値を示していないが，修正値を加えることによりすべて(47)式であたえられる一定値を示していることがわかる．つまり，高次の Runge-Kutta 法を用いなくても2次の Runge-Kutta 法によりだいたいの近似値を求め，修正値を加えることで真の値により近い数値が得られることがわかった．

さて，ここで取り上げた2つの例は第1節でも述べたように，一般化速度についての低次の保存量が知られている例である．ところが，保存量が陽な形で得られる例は少ない．しかし，あたえられた力学系の保存量を何らかの方法で見いだすことができれば，それを数値計算の際に積極的に用いることにより，より正確な数値解が得られることがわかる．さらに，自由度が n の力学系においても，たとえば変数分離によりある1個の座標変数のみについての運動方程式が得られ，そのうえ $2n-1$ 個の関数的独立保存量が見いだされる場合には，本論文で示した方法は容易に拡張できると，結論される．

最後に，付録1に本計算で用いた2次の Runge-Kutta 公式および3次の Runge-Kutta 公式をあたえる．また付録2には，ケプラー運動を対象とした3次の場合の Runge-Kutta 法と，さらに本論文で示した修正値を加える新方法の2つの方法を計算する，Basic 言語によるプログラム例をあたえる．

表 1　2次の Runge-Kutta 法によるケプラー運動の数値解

I = 500	L = 1.00000579632	$A1$ = 0.49997933546	$A2$ = 0.00224810997	E = −0.00000780497
I = 1000	L = 1.00000767062	$A1$ = 0.49997869054	$A2$ = 0.00241371173	E = −0.00000774138
I = 1500	L = 1.00000802076	$A1$ = 0.49997850318	$A2$ = 0.00245460144	E = −0.00000773552
I = 2000	L = 1.00000813967	$A1$ = 0.49997842192	$A2$ = 0.00247163122	E = −0.00000773420
I = 2500	L = 1.00000819331	$A1$ = 0.49997837831	$A2$ = 0.00248061652	E = −0.00000773376
I = 3000	L = 1.00000822186	$A1$ = 0.49997835172	$A2$ = 0.00248604603	E = −0.00000773357
I = 3500	L = 1.00000823880	$A1$ = 0.49997833408	$A2$ = 0.00248962913	E = −0.00000773347
I = 4000	L = 1.00000824965	$A1$ = 0.49997832165	$A2$ = 0.00249214475	E = −0.00000773342
I = 4500	L = 1.00000825700	$A1$ = 0.49997831250	$A2$ = 0.00249399382	E = −0.00000773349
I = 5000	L = 1.00000826221	$A1$ = 0.49997830551	$A2$ = 0.00249540189	E = −0.00000773337

表 2　2次の Runge-Kutta 法＋修正法によるケプラー運動の数値解

I = 500	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000076328	E = 0.00000000000
I = 1000	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000013493	E = 0.00000000000
I = 1500	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000004856	E = 0.00000000000
I = 2000	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000002310	E = 0.00000000000
I = 2500	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000001247	E = −0.00000000000
I = 3000	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000000675	E = 0.00000000000
I = 3500	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000000328	E = 0.00000000000
I = 4000	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000000139	E = 0.00000000000
I = 4500	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000000207	E = 0.00000000000
I = 5000	L = 1.00000000000	$A1$ = 0.50000000000	$A2$ = 0.00000000185	E = −0.00000000000

表 3　3次の Runge-Kutta 法によるケプラー運動の数値解

I = 500	L = 1.00000001635	$A1$ = 0.50000001398	$A2$ = 0.00000003561	E = 0.00000000699
I = 1000	L = 1.00000001612	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 1500	L = 1.00000001610	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 2000	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 2500	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 3000	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 3500	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 4000	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 4500	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701
I = 5000	L = 1.00000001609	$A1$ = 0.50000001401	$A2$ = 0.00000003566	E = 0.00000000701

表 4　3次の Runge-Kutta 法＋修正法によるケプラー運動の数値解

$I=$ 500	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000000470	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 1000	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000000952	$E=-$0.00000000000
$I=$ 1500	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=-$0.00000000211	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 2000	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000001557	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 2500	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000000174	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 3000	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=-$0.00000000188	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 3500	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000000709	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 4000	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=-$0.00000000458	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 4500	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=$ 0.00000000298	$E=$ 0.00000000000
$I=$ 5000	$L=$ 1.00000000000	$A1=$ 0.50000000000	$A2=-$0.00000000139	$E=$ 0.00000000000

表 5　2次の Runge-Kutta 法による調和振動子の数値解

$I=$ 500	$L=$0.99999636521	$f1=$0.49999980075	$f2=$0.99999325623	$f3=$-0.00025228141	$E=$0.74999652849
$I=$1000	$L=$0.99999632445	$f1=$0.50000283291	$f2=$0.99998798638	$f3=$-0.00070824403	$E=$0.74999540965
$I=$1500	$L=$0.99999932618	$f1=$0.50000677370	$f2=$0.99998698691	$f3=$-0.00096999057	$E=$0.74999688030
$I=$2000	$L=$1.00000048977	$f1=$0.50000779510	$f2=$0.99998743560	$f3=$-0.00101144895	$E=$0.74999761535
$I=$2500	$L=$0.99999883598	$f1=$0.50000520746	$f2=$0.99998871590	$f3=$-0.00085402843	$E=$0.74999696168
$I=$3000	$L=$0.99999538889	$f1=$0.50000002417	$f2=$0.99999118150	$f3=$-0.00047541967	$E=$0.74999560283
$I=$3500	$L=$0.99999507829	$f1=$0.499999632893	$f2=$0.99999751929	$f3=$ 0.00010141008	$E=$0.74999692411
$I=$4000	$L=$0.99999813433	$f1=$0.499999585124	$f2=$1.00000502059	$f3=$ 0.00047663950	$E=$0.75000043592
$I=$4500	$L=$0.99999441354	$f1=$0.49999519232	$f2=$0.99999853041	$f3=$ 0.00020970193	$E=$0.74999686136
$I=$5000	$L=$0.99999454459	$f1=$0.49999745566	$f2=$0.99999429669	$f3=$-0.00024375861	$E=$0.74999587618

表 6　2次の Runge-Kutta 法＋修正法による調和振動子の数値解

$I=$ 500	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$1000	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$1500	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$2000	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$2500	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$-0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$3000	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$-0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$3500	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$-0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$4000	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$4500	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000
$I=$5000	$L=$1.00000000000	$f1=$0.50000000000	$f2=$1.00000000000	$f3=$ 0.00000000000	$E=$0.75000000000

表 7　3 次の Runge-Kutta 法による調和振動子の数値解

I = 500	L = 1.00000009107	$f1$ = 0.50000020843	$f2$ = 0.99999976527	$f3$ = −0.00000001303	E = 0.74999998685
I = 1000	L = 1.00000015999	$f1$ = 0.50000039790	$f2$ = 0.99999952419	$f3$ = −0.00000002065	E = 0.74999996104
I = 1500	L = 1.00000023321	$f1$ = 0.50000058148	$f2$ = 0.99999930345	$f3$ = −0.00000002655	E = 0.74999994247
I = 2000	L = 1.00000031039	$f1$ = 0.50000076739	$f2$ = 0.99999908599	$f3$ = −0.00000002763	E = 0.74999992669
I = 2500	L = 1.00000038745	$f1$ = 0.50000095314	$f2$ = 0.99999886862	$f3$ = −0.00000002167	E = 0.74999991088
I = 3000	L = 1.00000046027	$f1$ = 0.50000113637	$f2$ = 0.99999864782	$f3$ = −0.00000001110	E = 0.74999989209
I = 3500	L = 1.00000052921	$f1$ = 0.50000132591	$f2$ = 0.99999840661	$f3$ = 0.00000000177	E = 0.74999986626
I = 4000	L = 1.00000062129	$f1$ = 0.50000153418	$f2$ = 0.99999817422	$f3$ = 0.00000002002	E = 0.74999985420
I = 4500	L = 1.00000071160	$f1$ = 0.50000174234	$f2$ = 0.99999793853	$f3$ = 0.00000000662	E = 0.74999984044
I = 5000	L = 1.00000078042	$f1$ = 0.50000193137	$f2$ = 0.99999769810	$f3$ = −0.00000000083	E = 0.74999981474

表 8　3 次の Runge-Kutta 法＋修正法による調和振動子の数値解

I = 500	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 1000	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 1500	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 2000	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = −0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 2500	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = −0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 3000	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 3500	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = −0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 4000	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 4500	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000
I = 5000	L = 1.00000000000	$f1$ = 0.50000000000	$f2$ = 1.00000000000	$f3$ = 0.00000000000	E = 0.75000000000

参 考 文 献

[1]. Greenspan; "Conservative numerical method for $\ddot{x} = f(x)$", J. Compt. Phys., 56, 1, 28-41(1984).

[2]. 前田　茂，和田聖治；"エネルギー保存を考慮したある種の常微分方程式の数値積分スキームについて"，信学論(A)，J 71-A，3，778-784 (1988).

[3]. 池田峰夫；現代ベクトル解析とその応用，275-315，コロナ社．(1975).

付録 1.

＜2 次の Runge-Kutta の公式＞

1 変数の場合については，

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

の微分方程式の数値解を，次の漸化式で逐次求める．

$$x_{k+1} = x_k + f\{x_k + f(x_k)\cdot h/2\}$$

＜3 次の Runge-Kutta の公式＞

1 変数の場合，微分方程式（＊）の数値解を次の漸化式で求める

$$x_{k+1} = x_k + (s_1 + 4\cdot s_2 + s_3)/6$$

ただし，ここで，

$$s_1 = h\cdot f(x_k)$$

$$s_2 = h\cdot f(x_k + s_1/2)$$

$$s_3 = h\cdot f(x_k - s_1 + 2\cdot s_2)$$

とする．

特に，3 次の場合は漸化式にあらわれる係数に任意性があるが，本文中の計算ではここに示した係数の組み合わせを用い，同時にこれらの公式を 4 変数の場合に拡張して計算を行った．

付録2. 3次の Runge-Kutta 法と保存量を考慮した数値計算プログラム例

```
10 REM************************************************************************
20 REM      RUNGE-KUTTA  METHOD     4ｹﾞﾝ ﾚﾝｼﾞﾂ ----  3ｼﾞ ﾉ RUNGE-KUTTA       *
30 REM                                  1989.3.13                           *
40 REM      U(R)=-K/R         -----  Kepler   motion           K=0.5        *
50 REM************************************************************************
60      DEF FNA1#(T#,R#,VR#,S#,VS#)= VR#
70      DEF FNA2#(T#,R#,VR#,S#,VS#)= R#*VS#^2- .5/(R#^2)
80     DEF FNA3#(T#,R#,VR#,S#,VS#)=VS#
90     DEF FNA4#(T#,R#,VR#,S#,VS#)=-2!*VR#*VS#/R#
100
110    PRINT " INPUT  1    IF NEW  METHOD"
120    PRINT " INPUT OHERS IF OLD  METHOD"
130    PRINT"======>": INPUT ISW
140 REM--------  INITIAL  CONDITION ------------------------
150    R#=1#
160    VR#=0#
170    S#=0#
180    VS#=1#
190    H#=.01#
200    T#=0!
210    LO#=R#^2*VS#
220     Kepler  motion ---------------------------------------------
230    TEN0#=.5*(VR#^2+R#^2*VS#^2) - .5/R#
240    A10#= R#^2*VS#*(VR#*SIN(S#)+R#*COS(S#)*VS#) - .5#*COS(S#)
250 REM ---------------------------------------------------
260     KOUNT#=0
270     IF ISW=1 THEN GOTO 300
280     LPRINT  "  3-degree  old method          Kepler    motion    "
290     GOTO 310
300     LPRINT  "  3-degree  new method          Kepler    motion    "
310     LPRINT
320     LPRINT
330    FOR I = 1     TO 10000!
340 '
350        AK1#=H#*FNA1#(T#,R#,VR#,S#,VS#)
360        AL1#=H#*FNA2#(T#,R#,VR#,S#,VS#)
370        AM1#=H#*FNA3#(T#,R#,VR#,S#,VS#)
380        AN1#=H#*FNA4#(T#,R#,VR#,S#,VS#)
390 '
400        AK2#=H#*FNA1#(T#+H#/2,R#+AK1#/2,VR#+AL1#/2,S#+AM1#/2,VS#+AN1#/2)
410        AL2#=H#*FNA2#(T#+H#/2,R#+AK1#/2,VR#+AL1#/2,S#+AM1#/2,VS#+AN1#/2)
420        AM2#=H#*FNA3#(T#+H#/2,R#+AK1#/2,VR#+AL1#/2,S#+AM1#/2,VS#+AN1#/2)
430        AN2#=H#*FNA4#(T#+H#/2,R#+AK1#/2,VR#+AL1#/2,S#+AM1#/2,VS#+AN1#/2)
440 '
450        AK3#=H#*FNA1#(T#+H#  ,R#-AK1#+2#*AK2#  ,VR#-AL1#+2#*AL2#,
                                  S#-AN1#+2#*AN2#,  VS#-AN1#+2#*AN2#)
460        AL3#=H#*FNA2#(T#+H#  ,R#-AK1#+2#*AK2#  ,VR#-AL1#+2#*AL2#,
                                  S#-AN1#+2#*AN2#,  VS#-AN1#+2#*AN2#)
470        AM3#=H#*FNA3#(T#+H#  ,R#-AK1#+2#*AK2#  ,VR#-AL1#+2#*AL2#,
                                  S#-AN1#+2#*AN2#,  VS#-AN1#+2#*AN2#)
480        AN3#=H#*FNA4#(T#+H#  ,R#-AK1#+2#*AK2#  ,VR#-AL1#+2#*AL2#,
                                  S#-AN1#+2#*AN2#,  VS#-AN1#+2#*AN2#)
490 '
500        RN# =      R# +(AK1#+4#*AK2#+AK3#)/6#
510        VRN#=     VR# +(AL1#+4#*AL2#+AL3#)/6#
520        SN# =      S# +(AM1#+4#*AM2#+AM3#)/6#
530        VSN#=     VS# +(AN1#+4#*AN2#+AN3#)/6#
540        TN# = T#+H#
550 '
560  IF  ISW<>1  THEN GOTO 790
570 '
580 '^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^ syuseichi   no  keisan    ^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^
590 '      @@@@@@    EPR#  NO KEISAN  @@@@@@@@@
600 '
```

```
610  EPR#=(LO#^2-.5*R#^2)/R#^3*H#^4/24#
620  EPR#= EPR#*(.5*RN#*R#*(RN#+R#)-LO#^2*(R#^2+RN#^2+R#*RN#))/(RN#^3*R#^3)
630  RN#=RN#+EPR#
640 '
650 '     @@@@@@@       VRN#  NO  KEISAN    @@@@@@@
660     AISW=+1
670   IF  VRN#>0  THEN  690
680     AISW=-1
690     ASET#=TENO#-LO#^2/(2!*RN#^2)+.5/    RN#
700     VRN#=AISW*SQR(ASET#*2#)
710 '
720 '     @@@@@@     VSN#   NO  KEISAN    @@@@@@
730   VSN#=LO#/(RN#)^2
740 '     @@@@@@     EPS#  NO  KEISAN    @@@@@@
750  SETA#=A10#-LO#*(VRN#*SIN(SN#)+RN#*VSN#*COS(SN#))  +  .5#*COS(SN#)
760  EPS#=SETA#/( LO#*(VRN#*COS(SN#)-RN#*VSN#*SIN(SN#) ) +.5#*SIN(SN#) )
770  SN#=SN#+EPS#
780 '^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^
790 '-------------  FIRST INTEGRAL  NO  CHECK  ---------------------------
800       I1#=RN#^2*VSN#
810 '
820 '  Kepler   motion  no  case -------------------------------------
830       A1#=I1#*(VRN#*SIN(SN#)+RN#*VSN#*COS(SN#))  - .5#*COS(SN#)
840       A2#=-I1#*(VRN#*COS(SN#)-RN#*VSN#*SIN(SN#)) - .5#*SIN(SN#)
850       TEN#=(VRN#^2+(RN#*VSN#)^2)*.5#  -  .5#/RN#
860 '---------------------------------------------------------------------
870     KOUNT =KOUNT+1
880     IF FIX(KOUNT/ 500)=0 GOTO 1070
890          KOUNT=0
900         LPRINT
910         LPRINT "I=";
920         LPRINT USING "#####";I;
930         LPRINT "   L=";
940         LPRINT USING "##.###########";I1#;
950 '
960 '  Kepler  motion  no  case  ************************
970 '
980         LPRINT "   A1=";
990         LPRINT USING "##.###########";A1#;
1000         LPRINT "   A2=";
1010         LPRINT USING "##.###########";A2#;
1020 '    ************************************************
1030 '
1040         LPRINT "   E=";
1050         LPRINT USING "##.###########";TEN#
1060 '
1070      R#=RN#
1080      VR#=VRN#
1090      S#=SN#
1100      VS#=VSN#
1110      T#=TN#
1120    NEXT I
1130 STOP
```