

## 最近の信頼性に基づく最適設計の発展（１）

著者	小木曾 望
雑誌名	機械の研究
巻	61
号	3
ページ	325-330
発行年	2009-03-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15668">http://hdl.handle.net/10466/15668</a>

# 最近の信頼性に基づく最適設計の発展 (1)

小 木 曾 望\*

## 1. はじめに

近年、市販の最適設計ツールや CAE ツールの発展に伴い、最適設計手法は機械システムの高度化・高性能化の一翼を担うようになってきた。その一方で、高度化・複雑化したシステムがひとたび破損すると、その影響も広範囲にわたることになる。

そのため、機械システムの信頼性・安全性を設計段階で確保する要求がますます高まっている。JISによれば、信頼性は「与えられた条件で規定の期間中、要求された機能を果たすことができる性質」と、信頼度は「与えられた条件で規定の期間中、要求された機能を果たす確率」と定義されている。機械の信頼度は、材料特性や製造条件、負荷荷重などの使用環境などのバラツキを確率変数としてモデル化し、構造応答量(応力, 変位, 振動数など)が規定値を超えない確率(非破損確率)として評価される<sup>1)</sup>。

信頼性解析と最適設計を組み合わせることで、そのような信頼度に対する制約(破損確率制約)のもとで重量最小化する設計や、重量制約のもとでの信頼度を最大化する設計(破損確率最小化設計)などを行うことが可能となる。これらを信頼性に基づく最適設計(Reliability-Based Design Optimization: RBDO)<sup>2)</sup>と呼ぶ。近年、信頼性への要求が高まっているため、効率的な最適設計法の開発や実構造への適用など、RBDOの研究が盛んに行われている<sup>3)</sup>。

これに伴い、国際会議における発表件数も増加している。例えば、構造および複合領域の最適設計に関する国際会議(World Congress of Struc-

tural and Multidisciplinary Optimization: WCSMO)において、不確定性を考慮する最適設計に関連する発表件数は第4回(2001年)には195件中12件(6%)であったものが、第7回(2007年)には312件中40件(13%)へと大きく増加してきている。また、米国航空宇宙学会(AIAA)が主催する構造分野に関する国際会議(Structures, Structural Dynamics and Materials Conference: 通称SDM)においては、1999年から不確定性を考慮する解析法や設計手法に関する会議(Non-Deterministic Approaches Conference)が併設されている。第48回(2006年)SDMにおいて、これらに関連する研究発表件数は593件中83件(14%)と全体に占める割合が大きくなっている。

このように、不確定性を考慮する設計法はますます重要性を増してきている。そこで、本稿では、最新の信頼性に基づく最適設計の発展と今後の展開について解説する。

## 2. 信頼性解析

### 2.1 限界状態関数と信頼性

信頼性は、構造が破損しない確率として定義される。その破損規準となる確率関数  $Z$  の関数  $g(Z)$  を次式で定義し、これを限界状態関数と呼ぶ。

$$g(Z) = R(Z) - S(Z) \begin{cases} > 0 & \text{安全} \\ = 0 & \text{限界状態} \\ < 0 & \text{破損} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $R(Z)$  は強度、 $S(Z)$  は負荷荷重である。確率変数空間において、 $g(Z) = 0$  を満たす集合を限界状態曲面と呼ぶ。

構造設計においては、材料特性や負荷荷重を確

\* 大阪府立大学 大学院工学研究科  
航空宇宙海洋系専攻 准教授  
(Nozomu Kogiso)

率変数  $Z$  としてモデル化し、応力  $S(Z)$  がその規準値  $R(Z)$  を超える場合を破損規準として信頼性を評価する。そのほかに、変位がその上限値を超える場合や固有振動数がその下限値を下回る場合などの構造応答に関する設計規準を破損規準とみなして信頼性を評価する場合もある。

構造破損確率は、 $Z$  の結合確率密度関数  $f_Z(z)$  を用いて次式で評価する。

$$P_f = \int \cdots \int_{g(Z) \leq 0} f_Z(z) dz \quad (2)$$

信頼度  $R = 1 - P_f$  は非破損確率として評価する。

## 2.2 一次信頼性法 (FORM)

結合確率密度関数の複雑さや限界状態曲面の形状などのため、式(2)を解析的に解くことは一般に困難である。数値解法としてのモンテカルロ法では、限界状態関数の評価回数が数千~数万回を必要とするため、設計で用いることは難しい。そこで、限界状態関数を線形近似して破損確率を評価する一次信頼性法 (First order reliability method: FORM) が広く用いられている。その手順を以下に示す。

- (a) 確率変数  $Z$  を互いに独立な標準正規確率変数  $U$  に変換する。
- (b) 標準正規空間 ( $U$  空間) における原点から限界状態曲面までの最短距離を与える点を探索し、限界状態関数を線形近似する。
- (c) 標準正規確率密度関数を用いて破損確率を評価する。

(1) 確率変数の標準正規分布への変換  
確率変数  $Z$  が互いに独立な場合は、次式を用いて標準正規変数  $U$  に変換する。

$$U_i = \Phi^{-1}(F_{Z_i}(Z_i)) \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

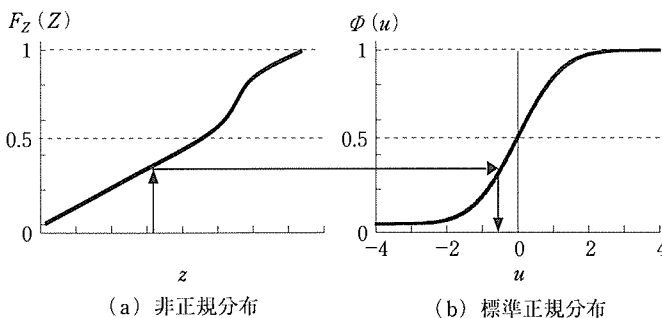


図1  $Z$  空間から  $U$  空間への変換 (独立の場合)

ここで、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規確率分布関数である。これは、図1に示すように、 $Z_i$  の確率分布関数  $F_{Z_i}(Z_i)$  と等しい値をもつ標準正規変数  $U_i$  に変換することを意味する。特に、確率変数  $z_i$  が平均値  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i^2$  の正規分布に従う場合 ( $N(\mu_i, \sigma_i)$ ) は次式を用いて標準正規変数に変換できる。

$$U_i = \frac{Z_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (4)$$

確率変数の変換に伴い、限界状態関数も標準正規確率空間 ( $U$  空間) へ変換する。

$$h(U) = g(Z) \quad (5)$$

(2) 信頼性指標の探索と破損確率の近似  
FORMでは、限界状態関数を線形近似して破損確率を評価する。破損確率の近似精度を確保するために、 $U$  空間における原点から限界状態曲面までの最短距離  $\beta$  を与える点  $u^*$  を限界状態関数の線形化点とする。

この問題は、以下に示す非線形計画問題として定式化できる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & \beta(u) = \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \\ \text{subject to : } & h(u) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\beta$  を信頼性指標と呼び、最小距離を与える点  $u^*$  を  $\beta$  点 ( $\beta$ -Point)、設計点 (Design Point) あるいはMPP (Most Probable Point) と呼ぶ。

設計点  $u^*$  で限界状態関数を線形近似することで、図2に示すように、破損確率を近似することができる。

$$P_f \approx \Phi(-\beta) = \int_{-\infty}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (7)$$

図2の場合、限界状態関数の線形近似により破損領域が広がるが、設計点から離れた領域は原点からの距離が遠い。距離が遠ければ、破損確率に及ぼす影響が指数関数的に小さくなるため、破損確率の近似誤差は破損領域面積の違いよりもはるかに小さい。

なお、限界状態曲面の曲率までを考慮して、設計点で限界状態関数を二次近似する手法を二次信頼性法 (Second Order Reliability Method: SORM) と呼ぶ。限界状態関数の非線形性が大き

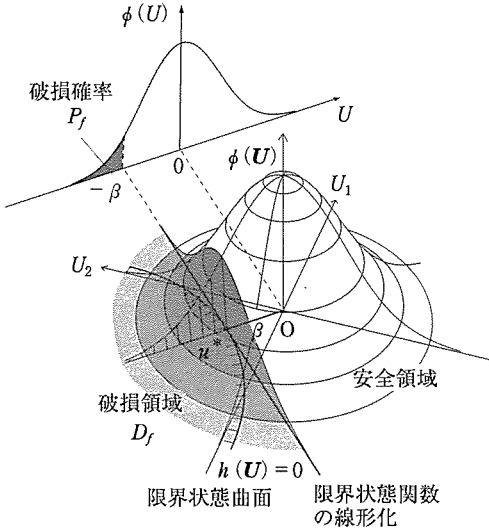


図2 一次信頼性法

い場合にはSORMが有効である。しかし、曲率を求めるには二階微分が必要になるため、計算時間を要する。

(3) ラクビッツ・フィスラー法

信頼性指標を求める手法として、式(6)だけでなく、ラクビッツ・フィスラー法<sup>5)</sup>が広く用いられている。この手法は、図3に示すように、設計点  $u^*$  において、限界状態関数の勾配の逆方向  $(-\nabla h(u^*))$  が原点から設計点へ方向と一致するという性質を利用した方法である。

$$u^* = -\beta \frac{\nabla h(u^*)}{|\nabla h(u^*)|} \quad (8)$$

その手順を以下に示す。

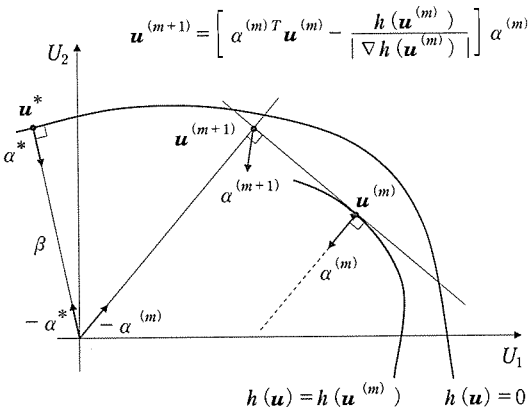


図3 ラクビッツ・フィスラー法

ステップ1:

$m=1$ とし、初期点  $u^{(m)}$  を仮定する。一般的には、原点を初期点とする。

ステップ2:

$u^{(m)}$  における限界状態関数の勾配  $\nabla h(u^{(m)})$  およびその単位ベクトル  $\alpha^{(m)}$  を求める。

$$\alpha^{(m)} = \frac{\nabla h(u^{(m)})}{|\nabla h(u^{(m)})|} \quad (9)$$

ステップ3:

原点を通る  $-\alpha^{(m)}$  方向で、 $u^{(m)}$  で線形化した限界状態関数の値が0となる点を求める。つまり、

$$h(u^{(m)}) + \nabla h(u^{(m)})^T (u - u^{(m)}) = 0 \quad (10)$$

を満たす点  $u$  を  $u^{(m+1)}$  とする。すなわち、

$$u^{(m+1)} = \left[ \frac{\nabla h(u^{(m)})^T u^{(m)} - h(u^{(m)})}{|\nabla h(u^{(m)})|^2} \right] \nabla h(u^{(m)}) \quad (11)$$

である。原点から  $u^{(m+1)}$  までの距離は、

$$\beta = \frac{h(u^{(m)}) - \nabla h(u^{(m)})^T u^{(m)}}{|\nabla h(u^{(m)})|} \quad (12)$$

である。

ステップ4:

$h(u^{(m+1)})=0$  であれば、終了。そうでなければ、 $m=m+1$  としてステップ2に戻る。

2.3 FORMの収束特性改善法

信頼性解析に用いられるラクビッツ・フィスラー法や非線形計画法は、限界状態関数の非線形性が強い場合には設計点に収束しなかったり、局所解に収束してしまうことがある。そのような場合には、信頼性を過大評価してしまうなどが問題となる。

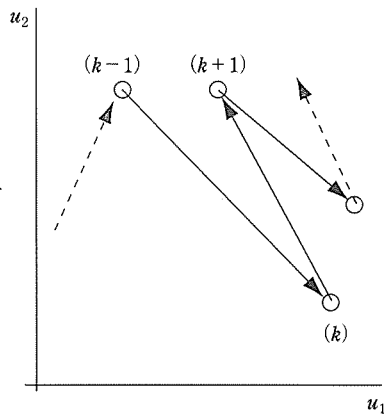


図4 設計点探索がジグザグに進む場合

このような問題に対処する手法として、修正法<sup>6)</sup>を紹介する。この方法では、図4のように探索点がジグザグ進むような場合に、探索方向を過去の探索方向の平均方向に設定することで、収束性能を向上させることができる。また、ラクビッツ・フィースラー法に容易に組み込むことができる。

ラクビッツ・フィースラー法の直前の3回の繰り返しを  $k-1, k, k+1$  とした場合、以下の条件を満たす場合にジグザグ進行と判断する。

$$\frac{\mathbf{u}^{(k-1)T} \mathbf{u}^{(k+1)}}{|\mathbf{u}^{(k-1)}| |\mathbf{u}^{(k+1)}|} > \frac{\mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{u}^{(k+1)}}{|\mathbf{u}^{(k)}| |\mathbf{u}^{(k+1)}|} \quad (13)$$

この条件を満たすとき、 $k+1$  回目の探索方向を次式によって変更する。

$$\mathbf{u}^{\text{new}} = \beta^{\text{new}} \frac{\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k+1)}}{|\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k+1)}|} \quad (14)$$

$$\beta^{\text{new}} = \frac{\beta^{(k)} h(\mathbf{u}^{(k-1)}) - \beta^{(k-1)} h(\mathbf{u}^{(k)})}{h(\mathbf{u}^{(k-1)}) - h(\mathbf{u}^{(k)})} \quad (15)$$

探索方向は、過去3回の平均方向である。その探索幅  $\beta^{\text{new}}$  は、近似的に  $h(\mathbf{u}^{\text{new}}) = 0$  となるように定めている。

例として、図5に示す限界状態関数を考える。この限界状態関数は、二つの設計点  $\mathbf{u}_1^* = (2, 782, 0.100)$ 、 $\mathbf{u}_2^* = (-1.29, 3.253)$  を有する<sup>7)</sup>。さて、この問題に対して通常のリクビッツ・フィースラー法を適用した場合、初期点の選択によって、 $\mathbf{u}_1^*$  に収束する場合と  $\mathbf{u}_A$  と  $\mathbf{u}_B$  との間を行き来するだけで収束しない場合に大きく分かれ、 $\mathbf{u}_2^*$  に

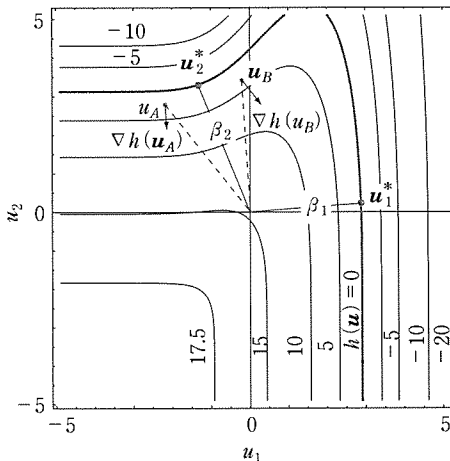


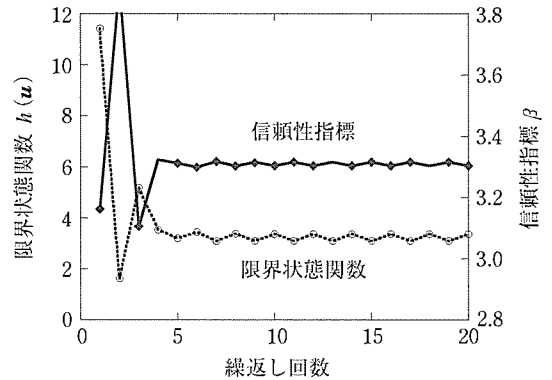
図5 非線形性の強い限界状態曲面の例<sup>7)</sup>

収束することはほとんどない。 $\mathbf{u}_2^*$  に収束するのは、 $\mathbf{u}_2^*$  の近傍を初期値に選んだ場合だけである。

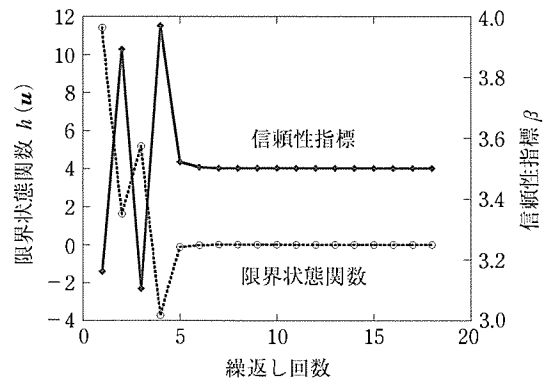
$\mathbf{u}_2^*$  への収束を狙って、初期点を  $(-3, 1)$  とした場合のFORMの探索履歴を図6(a)に示す。ここでは20回目までしか示していないが、この後も図5に示す2点  $\mathbf{u}_A$  と  $\mathbf{u}_B$  を互いに行き来しているだけであり、 $\mathbf{u}_2^*$  には収束しない。これは、 $\mathbf{u}_A$  における勾配方向が  $-\mathbf{u}_B$  と一致し、 $\mathbf{u}_B$  における勾配方向が  $-\mathbf{u}_A$  と一致しているためである。

一方、この問題に上記の修正法を適用した場合の収束履歴を図6(b)に示す。探索方向の修正により、少ない繰返し回数で限界状態関数がゼロに収束し、設計点として  $\mathbf{u}_2^*$  が得られる。また、これとよく似た別の修正法<sup>8)</sup> も提案されている。

さて、上記の手法では複数の設計点を求めることはできない。この例では異なった初期点を用いただけである。一つの限界状態関数が複数の設計点をもつ場合は、大域的最適化手法などを用いる



(a) 通常のFORMによる探索履歴



(b) 修正法を適用した場合の探索履歴

図6 探索方向修正法の効果

必要がある。例えば、トンネル法を利用する手法<sup>9)</sup>や限界状態関数にペナルティを与える手法<sup>10)</sup>が提案されている。これについては、紙面の都合上、詳細は省略する。

### 3. 信頼性に基づく最適設計

確定的な最適設計は、図7に示すように制約領域の境界に存在することが多い。そのような設計は、設計条件にバラツキが存在すると制約領域を逸脱してしまう可能性が高い。これに対し、信頼性に基づく最適設計 (Reliability-Based Design Optimization: RBDO) では、設計条件の変動を確率変数によってモデル化することにより、制約領域を逸脱する確率を定められた値以下とすることができ、設計パラメータの変動を考慮した設計を合理的に求めることができる。

RBDOでは、確定的な最適設計と同様、以下の2種類の定式化が可能である。その一つは、破損確率制約、あるいは信頼性指標に対する制約のもとで重量を最小化する問題である。

$$\left. \begin{aligned} &\text{Minimize : Cost}(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to : } P_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_T) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{x}$  は設計変数、 $\text{Cost}(\mathbf{x})$  は目的関数である。 $\beta_T$  は破損確率下限値  $P_f^q$  に対応する目標信頼性指標値 [ $P_f^q = \Phi(-\beta_T)$ ] である。信頼性指標  $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  を用いて制約条件を表せば、次式となる。

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq \beta_T \quad (17)$$

もう一つはこの問題(16)の双対問題であり、重量などの性能に関する制約条件  $q_i(\mathbf{x})$  ( $i=1, \dots, m$ ) のもとで破損確率を最小化、または信頼性を最大化する問題である。

$$\left. \begin{aligned} &\text{Minimize : } \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ &\text{subject to : } q_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \\ &\quad \quad \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

RBDOでは、確率変数  $\mathbf{z}$  の平均値  $\boldsymbol{\mu}$  を設計変数  $\mathbf{x}$  とすることが多い。

#### 3.1 モード信頼性に対する最適設計問題

一般に、システムには複数の破損モードが存在する。破損確率  $P_f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  は、構造を複数の破損モードの直列システムと

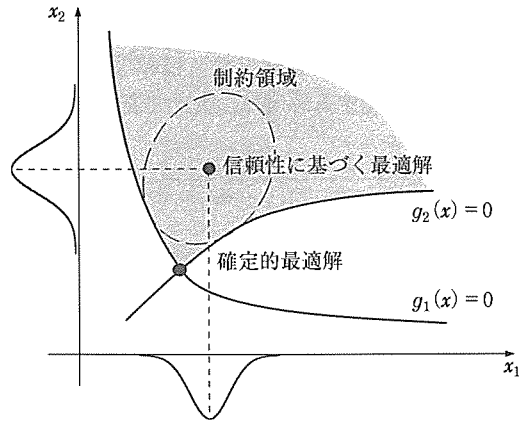


図7 確定的最適解と信頼性に基づく最適解

して評価するべきである。

しかしながら、モデル化の煩雑さや計算時間の問題などから、次式に示すモード信頼性  $\beta_i$  に対する制約条件のみを考えた副問題が広く用いられている<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} &\text{Minimize : Cost}(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to : } \beta_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq \beta_T \quad (\text{for all } i) \\ &\quad \quad \quad h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (\text{for all } i) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この制約のもとで得られた最適解のシステム信頼性指標は、一般に  $\beta_T$  よりも大きくなるが、元の問題(16)の最適解と一致するとは限らないことに注意する。

なお、モード信頼性指標を評価するには、それぞれの限界状態関数に対してFORMによる信頼性解析が必要となる。したがって、信頼性に基づく最適設計のアルゴリズムは、図8に示すような二重ループ構造となり、多大な計算コストを要する。これを克服するために、4章で示す新しい手

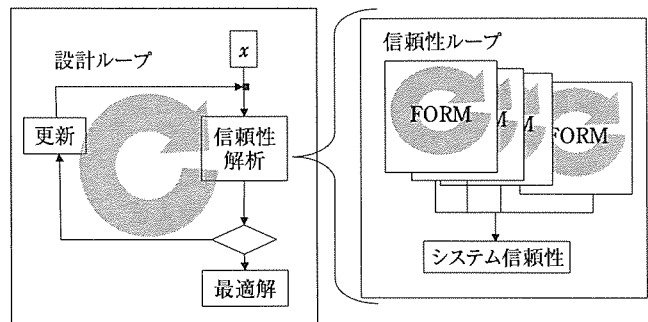


図8 信頼性に基づく最適設計のフロー

法が提案されている。

### 3.2 感度解析

最適設計の探索で必要となる信頼性指標  $\beta_i$  の設計変数  $\mathbf{x}$  に関する感度は、次式で表される<sup>11)</sup>。

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \frac{1}{|\nabla_u h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)|} \frac{\partial h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)}{\partial x_j} \quad (20)$$

上式第2項の限界状態関数の設計変数に関する微分は、設計点で限界状態関数がゼロとなる [ $h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)=0$ ] ことから次のように変換できる。

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)}{\partial x_j} = -\nabla_u h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x_j} \quad (21)$$

ここで、 $\nabla_u h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$  は設計点  $\mathbf{u}^*$  における値であり、FORMで得られるので、改めて求める必要はない。一方、 $\partial \mathbf{u}^* / \partial t_i$  は、式(3)の確率変数の標準正規化の関係式の微分である。したがって、感度解析にはほとんど計算時間を要しない。

### 3.3 Performance Measure Approach

FORMは、信頼性指標が非常に大きくなるような場合には、収束精度が悪化することが知られている。信頼性に基づく最適設計の繰返し過程の途中に信頼性指標が大きくなりすぎるような設計が現れると、FORMの計算時間が増加し、最適設計の計算時間が莫大になってしまったり、収束しなくなってしまうこともある。

この問題を解決する方法として、Performance Measure Approach (PMA)<sup>12)</sup> が提案されている。この手法では、FORMとは逆に、標準正規空間 ( $U$ 空間) において原点を頂点とする半径  $\beta_T$  の超球面上で限界状態関数  $h(\mathbf{u})$  の最小値を求める。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize : } h(\mathbf{u}) \\ \text{subject to : } |\mathbf{u}| = \beta_T \end{array} \right\} \quad (22)$$

この最小点を  $\mathbf{u}_p^*$  と表す。  $h(\mathbf{u}_p^*)=0$  であれば  $\beta_T$  は信頼性指標と一致するが、そうでない場合には物理的な意味はない。例えば、図9のように、 $h(\mathbf{u}_p^*) > 0$  の場合、信頼性指標は  $\beta_T$  よりも大きいということがわかるだけである。

しかし、目標信頼性指標として用いられる信頼性指標の値は3~6程度の値であり、PMAはFORMに比べて収束安定性が高い。そのため、

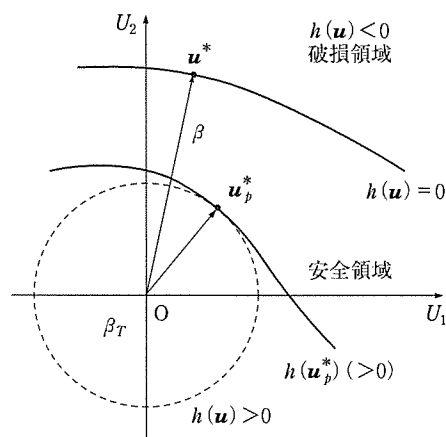


図9 PMAによる信頼性制約の概念

RBDOの内部ループにPMAを用いることで、最適解を安定して求めることができる。PMAを用いたRBDOは次式で定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize : Cost}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{subject to : } h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p^*) \geq 0 \\ |\mathbf{u}_p^*| = \beta_T \end{array} \right\} \quad (23)$$

信頼性指標が  $\beta_T$  以上という制約の代わりに、 $U$ 空間における半径  $\beta_T$  の超球面上が安全領域となる ( $h > 0$ ) ような制約を課している。

なお、PMA法における感度解析は3.2節に示したFORMの感度解析と同様の手法で定式化できるため、FORMと同様、感度解析には計算時間を要しない。

PMAは、従来のFORMを用いる方法に比べて収束特性が優れている場合が多く、機械設計分野で広く用いられるようになってきた<sup>13)</sup>。また、 $\mathbf{u}_p^*$ の探索性能を改善するために、PMA法に対しても2.3節で示した手法が提案されている<sup>6), 8)</sup>。ただし、PMA法では式(16)と等価な問題は定式化できるけれど、信頼性最大化問題(18)には使えないことに注意する。

この手法の開発と相前後して、機械工学分野での信頼性に基づく最適設計に関する研究が盛んになってきた<sup>3)</sup>。

(参考文献は次号に掲載)  
(次号へつづく)