

最近の信頼性に基づく最適設計の発展（２）

著者	小木曾 望
雑誌名	機械の研究
巻	61
号	4
ページ	428-434
発行年	2009-04-01
URL	http://hdl.handle.net/10466/15669

最近の信頼性に基づく最適設計の発展 (2)

小 木 曾 望*

4. RBDO の新しい手法

大規模な問題にRBDOを適用するには、前号の図8に示したような二重ループ問題では莫大な計算時間を要し、実用的ではない。近年、限界状態関数の評価回数を減らす効率的な手法が提案されている。

ここでは、信頼性制約を等価な確定的な制約におき換える方法であるSORA (Sequential Optimization and Reliability Assessment)¹⁴⁾ および信頼性を近似的に評価して単一ループを実現する方法であるSLSV (Single Loop Single Vector)¹⁵⁾ を紹介する。

4.1 SORA

SORA¹⁴⁾ は、信頼性解析と、その結果を用いて信頼性制約を等価な制約におき換えた確定的な最適設計問題とを繰り返し解くことで、計算効率の向上を図る方法である。

簡単のために、確率変数 Z の平均値 μ を設計変数 x とする場合で説明する。FORMによって得られる設計点 u^* を Z 空間に変換した点を z^* とおく。設計点において、限界状態関数がゼロとなることから、限界状態関数に関する制約条件は次式に変換することができる。

$$g_i(x, z^*) \geq 0 \quad (24)$$

z^* を求めれば、この制約は x に対する確定的な制約条件とみなすことができ、確定的な最適解を求める。さらに、この最適解に対して信頼性解析を行い、再び等価な確定的最適設計を行うという過程を繰り返すことで、信頼性に基づく最適設計を求めようとするものである。

さて、信頼性に基づく最適設計問題を確定的な

最適設計問題とみなすには、設計点 z^* を合理的に近似することが必要となる。まず、設計変数の初期値を $x = \mu^{(0)}$ 、確率変数の初期値を $z^{(0)} = \mu^{(0)}$ として確定的な最適設計問題を解く。

$$\left. \begin{array}{l} \min_x \text{Cost}(x, z^{(0)}) \\ \text{s. t. } g_j(x, \mu^{(0)}) \leq 0 (j=1, \dots, m) \end{array} \right\} \quad (25)$$

この最適解を $\mu^{(1)}$ とおく。最適解では、通常、制約条件が活性となる。つまり、最適解は限界状態曲面上に存在するので、破損確率はほぼ0.5である。

次に、この最適解 $\mu^{(1)}$ に対して、PMAを用いて破損確率レベル p_f^q を満足する確率変数を求める。

$$\left. \begin{array}{l} \min_z g_j(\mu^{(1)}, z) \\ \text{s. t. } \beta(z) = -\Phi^{-1}(p_f^q) \end{array} \right\} \quad (26)$$

これで得られる Z 空間の設計点を $z^{*(1)}$ とする。

ここで、平均値 $\mu^{(1)}$ と、この問題(26)で得られる Z 空間における設計点 $z^{*(1)}$ との差を s_2 とおく。つまり、

$$s_2 = \mu^{(1)} - z^{*(1)} \quad (27)$$

SORAの特徴は、図10に示すように、 s_2 だけ安全側に移動した限界状態関数 $g_j(x - s_2)$ に対して $\mu^{(1)}$ を設計点とみなすことにある。この関係を用いて、次式に示すように、RBDOを確定的な最適設計問題に変換する。

$$\left. \begin{array}{l} \min_x \text{Cost}(x, z^{*(1)}) \\ \text{s. t. } g_j(x - s_2, z^{*(1)}) \leq 0 (j=1, \dots, m) \end{array} \right\} \quad (28)$$

この後は、図11に示すように、収束条件を満足するまで信頼性解析と確定的な最適設計を繰り返す。限界状態関数の総評価回数は、従来のRBDOでは、信頼性解析の繰返し回数と最適化の繰返し回数の積であったものがSORAでは和となるの

* 大阪府立大学 大学院工学研究科
航空宇宙海洋系専攻 准教授
(Nozomu Kogiso)

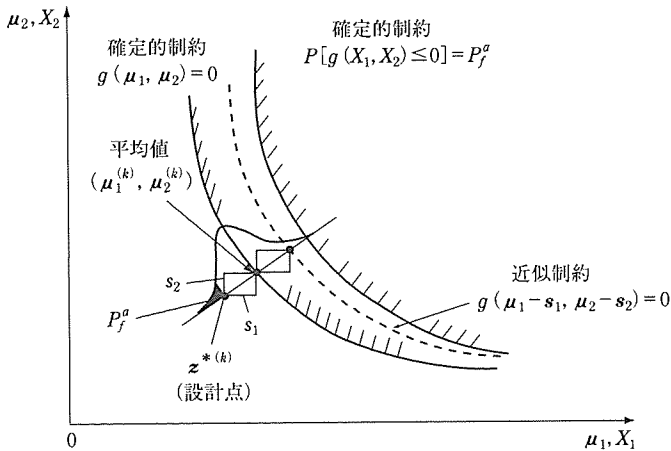


図 10 信頼性制約条件の近似

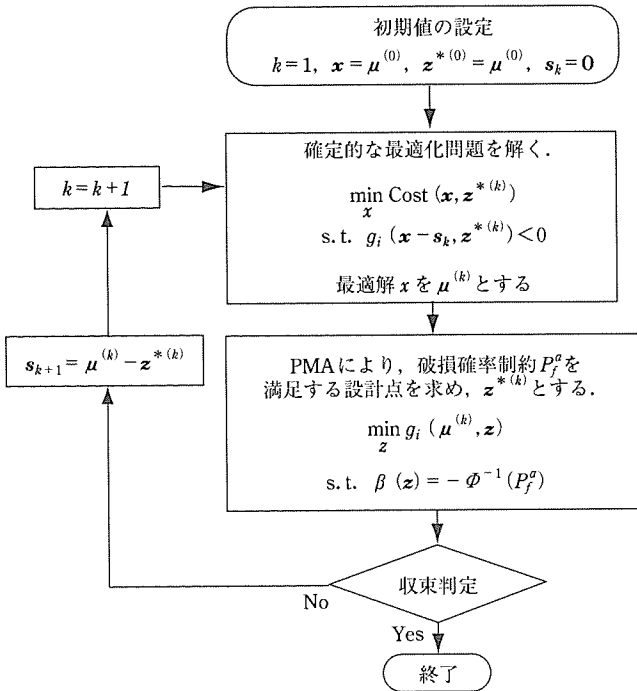


図 11 SORA のフローチャート

で、計算効率の大幅な改善が達成できる。

4.2 SLSV

SLSV¹⁵⁾ は、信頼性を近似評価することで、信頼性制約を確定的な制約条件におき換え、信頼性に基づく最適設計を単一ループ問題とする手法である。これにより、大幅に計算時間を短縮することができる。

簡単のために、独立な正規分布に従う確率変数

z の平均値 μ_i を設計変数 $x_i (i=1, \dots, n)$ とする場合を考える。このとき、 j 番目の規準 (限界状態関数 $g_j(x, z_{(j)})$) に対する設計点 $z_{(j)}^*$ の設計変数空間での座標は、図 12 に示すように次式で表される。

$$z_{(j)}^* = x - \beta_T \sigma_j^T \alpha_j \quad (29)$$

ここで、 β_T は対応する目標信頼性指標、 α_j は限界状態関数 g_j の単位勾配ベクトルである。なお、確率変数が非正規分布の場合でも同様の変換が可能である¹⁶⁾。

設計点が限界状態曲面上 ($g_i(x, z^*) = 0$) に存在することから、信頼性制約を次に示す確定的な制約でおき換えることができる。

$$g_j(x, z - \beta_i \sigma_i^T \alpha_i) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (30)$$

ここで、式 (29) に示した勾配ベクトル α_j は設計点 $z_{(j)}^*$ で評価すべき値である。つまり、式 (30) を解くためには探索が必要であり、それゆえ、従来手法では二重ループ法として定式化されてきた。

一方、SLSV では α_j を最適化ループにおける前の繰返し過程における値でおき換えて近似的に評価することで、RBDO を単一ループにする手法である。その計算手順を以下に示す。

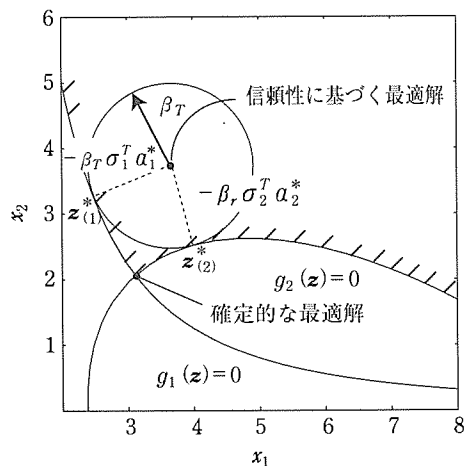


図 12 設計変数空間における設計点

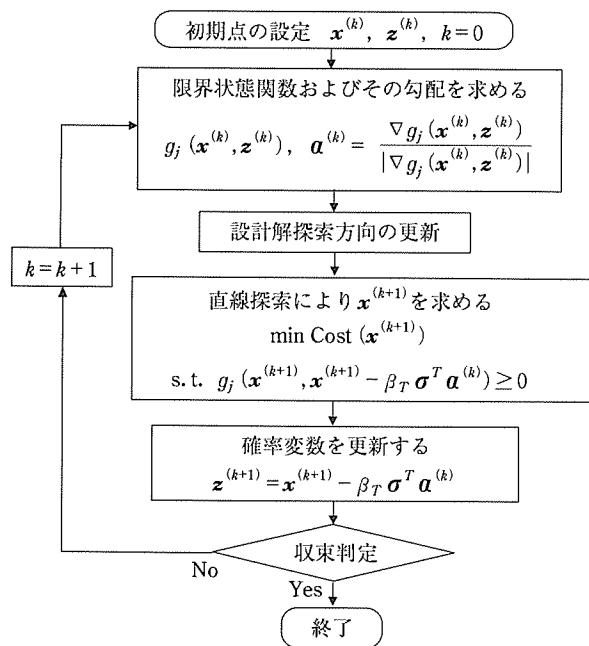


図13 SLSVのフローチャート

(1) $k=0$ とし, 初期設計 $\mathbf{x}^{(k)}$ および確率変数 $\mathbf{z}^{(k)}$ を設定する.

(2) 限界状態関数 $g(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{z})$ を評価するとともに, その感度 $\nabla g(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{z})$ を求め, $\mathbf{a}^{(k)}$ を求める.

(3) 次式で示す最適設計問題を定式化し, 直線探索により, $\mathbf{x}^{(k+1)}$ を求める.

$$\left. \begin{aligned} \min \text{Cost}(\mathbf{x}^{(k+1)}) \\ \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}) - \beta_T \sigma_j^T \mathbf{a}_j^{(k)} \geq 0 \\ (j=1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(4) 確率変数を更新する.

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \beta_T \sigma_j^T \mathbf{a}_j^{(k)} \quad (32)$$

(5) 収束判定条件を満足していれば $\mathbf{x}^{(k+1)}$ を最適解とする. $k=k+1$ として, (2)に戻り, 次の次元探索を行う.

その計算フローを図13に示す.

これら SORA, SLSV などの効率化手法の計算効率や信頼性近似精度に関して, 幾つかの例題に対する収束特性や信頼性近似精度などの性能比較が報告されている^{17), 18)}.

5. SLSV の性能

ここでは, RBDOにおける従来の二重ループ手法と SLSV との計算効率を比較する. なお, 最適

化アルゴリズムには逐次二次計画法 (SQP)¹⁹⁾ を用いている.

5.1 例題 1

数学モデルとして, 式 (33) の限界状態関数に対する 2 変数問題を考える¹³⁾.

$$\left. \begin{aligned} g_1(\mathbf{z}) &= \frac{z_1^2 z_2}{20} - 1 \\ g_2(\mathbf{z}) &= \frac{(z_1 + z_2 - 5)^2}{30} + \frac{(z_1 + z_2 - 12)^2}{120} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ただし, z_i は正規分布に従う確率変数とする. ここで, 確率変数 z_i の平均値を設計変数 x_i とした次式の RBDO 問題を考える.

$$\left. \begin{aligned} \min \text{Cost}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } P(g_j(\mathbf{z}) \leq 0) &\leq \Phi(-\beta_T) \quad (j=1, 2) \\ 0 \leq x_1 \leq 10, \quad 0 \leq x_2 \leq 10 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

z_i の標準偏差 $\sigma_i = 0.3$ の場合に, 目標信頼性指標 β_T を 3.0 と 5.0 に設定したときの性能を表 1 で比較する. 従来の二重ループ法と SLSV は, ほぼ同一の解に収束しているといえる. SLSV の信頼性指標の精度は二重ループ法と比較すると精度が低いが, 最大でも 2% 程度であり, 十分な精度があるといえる. 一方, SLSV における限界状態関数の評価回数は, 二重ループ法と比べてはるかに少なく, 計算効率が高いことがわかる.

なお, $\sigma_i = 0.3, \beta_T = 3.0$ における確定的な最適解と信頼性に基づく最適解を図 12 に示した.

5.2 例題 2

図 14 に示す片持ちはりにおいて, 応力および先端変位に関する信頼性制約のもとで, はりの断

表 1 例題 1: 二重ループ (R-F) と SLSV との比較

β_T	3.0		5.0	
	R-F	SLSV	R-F	SLSV
Cost (x)	6.726	6.723	7.816	7.774
x_1	3.439	3.437	3.799	3.765
x_2	3.287	3.286	4.017	4.009
g_1 評価回数	383	25	139	24
g_2 評価回数	421	25	169	24
β_1 の誤差, %	0.0133	0.225	o(-5)	0.0052
β_2 の誤差, %	o(-6)	2.330	o(-6)	0.053

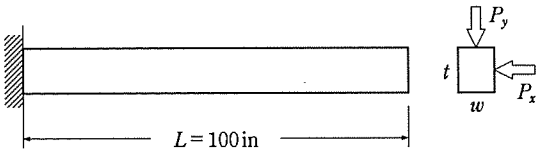


図14 2方向荷重を受ける片持ちはり問題

表2 例題2：確率変数

	平均	標準偏差
荷重 P_x , lb	500	100
荷重 P_y , lb	1000	100
降伏応力 σ_y , psi	40000	2000
ヤング率 E , psi	29×10^6	1.45×10^6

面積を最小化する問題を考える¹³⁾。設計変数 x ははりの高さ t と幅 w ，確率変数 z は二方向曲げ荷重 P_y, P_x ，ヤング率 E ，降伏応力 σ_y とする。いずれの確率変数も独立な正規分布に従うものとし，それぞれの平均値 μ と標準偏差を表2に示す。

このとき，限界状態関数は次式で表される。

$$g_1(z) = \sigma_y - \left(\frac{600}{wt^2} P_x + \frac{600}{w^2 t} P_y \right) \quad (35)$$

$$g_2(z) = D_0 - \frac{4L^3}{Ewt} \sqrt{\left(\frac{P_y}{t^2} \right)^2 + \left(\frac{P_x}{w^2} \right)^2}$$

ここで， D_0 は変位制約値で2.5とする。これに対するRBDOは次式で定式化できる。

$$\left. \begin{array}{l} \min_x \text{Cost}(x) = wt \\ \text{s. t. } P(g_j(z) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_T) \quad (j=1, 2) \end{array} \right\} \quad (36)$$

信頼性指標の制約値を $\beta_T=3.0$ のときの最適解を表3に，また収束履歴を図15に示す。確定的な最適解 ($w=2.87$ in, $t=2.77$ in) が制約境界(限界状態曲面)上に存在するのに比べて，信頼性を考慮した最適解は限界状態曲面から離れることで，信頼性を確保していることがわかる。このときの信頼性指標は $\beta_1=2.959$ ， $\beta_2=4.089$ であり，変位に関する信頼性指標 β_2 は活性化制約とならず，応力に対する信頼性指標 β_1 のみが活性化す

表3 例題2：SLSVによる信頼性に基づく最適解

Cost(x), m ²	w, in	t, in	β_1	β_2
9.497	2.500	3.799	2.959	4.089

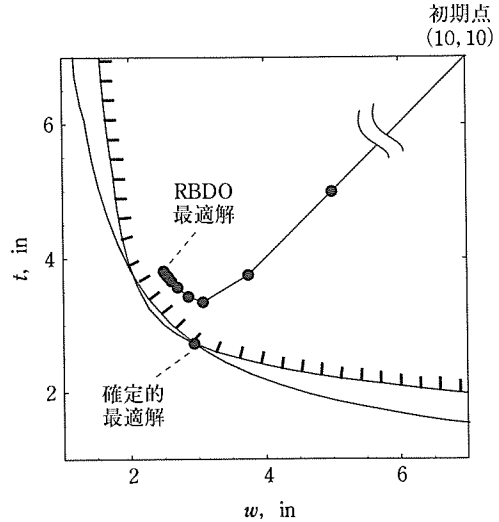


図15 例題2：設計変数 w と t の収束履歴

る。 β_1 がわずかに β_T を下回っているが，十分な精度で最適解が得られている。

SLSVにおける収束までの限界状態関数の評価回数は14回で，一方，同じ初期点から最適解に収束するまでの制約条件(限界状態関数)の評価回数は13回であった。この例では，SLSVは信頼性を高精度で近似できるうえに，確定的な最適設計と同程度の計算時間しか必要としない。

6. 信頼性に基づくトポロジー最適設計

信頼性に基づく最適設計が適用されている最も新しい領域に，信頼性に基づくトポロジー最適設計 (Reliability-Based Topology Optimization: RBTO) がある^{20), 21)}。

トポロジー最適設計は，構造の形状だけでなく，トラスやフレーム構造における部材配置，連続体構造における穴の位置や数などの形態も取り扱える自由度をもつ最適設計法である。コンプライアントメカニズムへの適用²²⁾ など，トポロジー最適設計を用いた新しい構造創成に関する研究や，レベルセット法を用いた新しい手法の開発²³⁾ など，近年，研究が盛んに行われている分野である。

以下では，フレーム構造に対するRBTOと確定的な最適形態とを比較した例²⁴⁾を紹介する。

6.1 フレーム構造への適用例 1

図16に示す設計領域に対して、 X 方向4分割、 Y 方向および Z 方向に2分割し、任意の2節点にフレーム要素を配置した構造をグランドストラクチャとする。図にはすべての要素は示していないが、各要素の断面は中実円とし、その直径を設計変数(最大値を1cm)とする。この構造の左端を固定し、右端中央節点にねじりトルクおよび曲げモーメントを負荷する。これらの荷重は正規分布に従う確率変数とし、ねじりトルクの平均値を10 Nmm、標準偏差を1 Nmm、曲げモーメントの平均値を0 Nmm、0 Nmmとする。

まず、荷重の平均値を確定的な荷重として、構造体積を最大体積の1%以下とする制約のもと

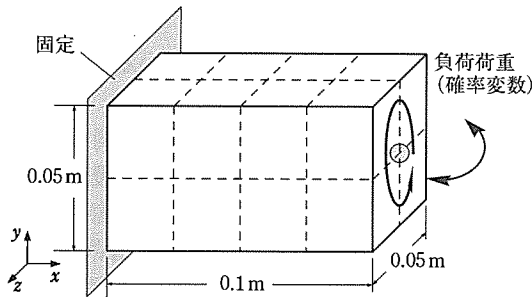
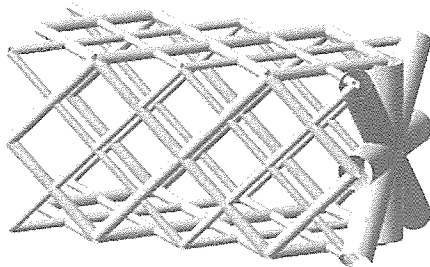
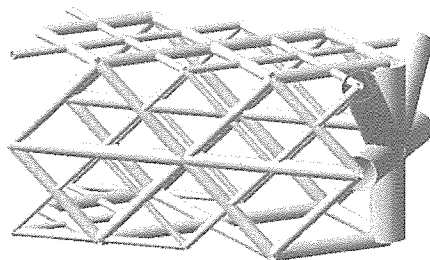


図16 曲げ-ねじりを受ける3次元フレーム構造



(a) 確定的な最適形態



(b) 信頼性に基づく最適形態

図17 最適形態の比較

で、平均コンプライアンスを最小化した。この確定的最適設計で得られた最適形態を図17(a)に示す。確定荷重では曲げ荷重がゼロでねじりトルクだけが負荷されるので、最適形態はねじり剛性が最大となる 45° で交差する格子構造となる。

続いて、荷重を確率変数とし、体積制約を最大体積の1%とした場合に、確定的最適設計で得られた平均コンプライアンスの2倍を超えないという限界状態関数のもとで信頼度を最大化する。この信頼性に基づく最適設計で求められた構造形態を図17(b)に示す。不確定な曲げ荷重を支持するために、前後面の中央に横部材が追加された構造となっている。

6.2 フレーム構造への適用例 2

剛性と振動数の二つの破損モードに対するシステム信頼性を考慮した信頼性に基づく最適設計の例を示す。

図18に、3次元フレーム構造の設計領域を示す。左端は固定され、右端中央の節点には非構造質量が配置され、また曲げ荷重が負荷されている。ここで、グランドストラクチャは前節と同じである。

これらの非構造質量を確率変数として、体積制約のもとで剛性および振動数の二つの破損モードに対するシステム信頼性を最大化する構造形態を求める。

まず、体積制約のもとで得られた確定的な最適設計として、平均コンプライアンスを最小化する最適形態を図19(a)に、また振動数を最大化する最適形態を図19(b)に示す。平均コンプライアンス最小化設計においては、中央節点にのみ荷重が負荷されているので、2次元フレーム構造に

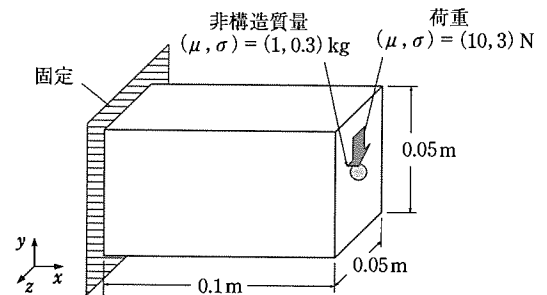


図18 非構造質量と負荷荷重の変動を有するフレームの設計領域

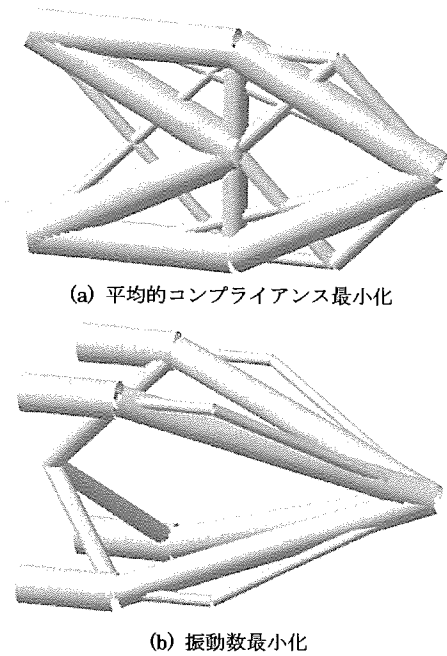


図 19 確定的なトポロジー最適設計

収束する。これに対し、振動数を最大化する場合には、左端の固定端の4隅の要素が太くなる3次元形態となる。

以下に、RBTOを同じ体積制約のもとで信頼性を最大化する最適形態を示す。破損モードとして、コンプライアンス上限値を超えた場合と固有振動数の下限値を下回った場合とを考える。ここでは、構造システムをこの二つの破損モードからなる直列システムとみなしたシステム信頼性を最大化する。その最適形態を図20に示す。この最適形態は、二つの確定的な最適解の性質を併せもったような形態であり、それぞれの破損モードを考慮していることがわかる。

なお、この例に示すように、剛性と振動数など

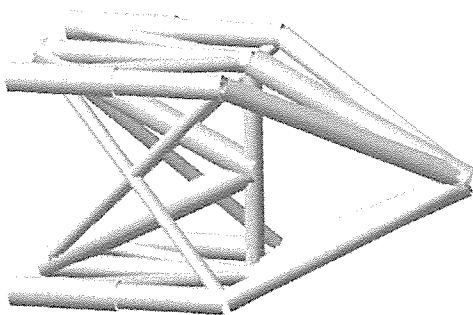


図 20 システム信頼性に基づく最適形態の例

複数の限界状態関数を有する問題であっても、システム信頼性を考慮することで合理的に最適形態を求めることができる。詳細については、文献24)を参照されたい。

7. まとめと今後の課題

本稿では、信頼性に基づく最適設計の最近の動向を示した。信頼性解析自体が繰返し計算を必要とするため、これまで信頼性に基づく最適設計は二重ループ問題として定式化されてきた。この二重ループ問題には計算時間を要するため、大規模な設計問題への適用が困難であった。

近年、信頼性近似を用いて二重ループを解消した計算効率の高いSORA, SLSVなどの手法が提案され、信頼性に基づく最適設計の研究が盛んに行われるようになってきた。また、トポロジー最適設計において、荷重条件などの不確定性を考慮する信頼性に基づくトポロジー最適設計も盛んに研究が行われている。

その一方、SORA, SLSVなどの手法は、システム信頼性ではなく、モード信頼性に着目した手法であって、複数の破損モードからなる構造の信頼性を評価する手法ではない。また、これらの手法は2.3節に示したような複数の設計点を有する限界状態関数には対処できない。

従来手法では、6章に示した数値例のようなシステム信頼性に基づいた最適設計は可能である²⁴⁾。しかし、計算時間の点から適用範囲が限られている。このようなシステム信頼性を考慮する最適設計に対しても、最近、効率的なアルゴリズムに関する研究が行われるようになってきた^{25), 26)}。信頼性に関する関心が高まる中、この領域の研究がますます盛んになっていくであろう。

参考文献

- 1) 室津義定・米澤政昭・邵 暁文：システム信頼性工学，6章，共立出版（1996）p. 73.
- 2) 日本機械学会 編：構造・材料の最適設計，6章，技報堂出版（1989）p. 219.
- 3) E. Nikolaidis, D. M. Chucel and S. Singhal : Engineering Design Reliability Handbook, CRC Press (2005).
- 4) P. Liu and A. Der Kiureghian : Struct. Safety, 9, 3 (1991) p. 161.

- 5) R. Rackwitz and B. Fiessler : *Comput. Struct.*, **9** (1978) p.489.
- 6) J.-O. Lee, Y.-S. Yang and W. S. Ruy : *Comput. Struct.*, **80** (2002) p.257.
- 7) H. O. Madson, S. Krenk and N. C. Lind : *Methods of Structural Safety*, Prentice Hall (1986) p.77.
- 8) B. D. Youn, K. K. Choi and Y. H. Park : *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, **125**, 2 (2003) p.221.
- 9) 小木曾 望・中川周哉・室津義定 : *材料*, **51**, 1 (2002) p.74.
- 10) A. Der Kiureghian and T. Dakessian : *Struct. Safety*, **20**, 1 (1998) p.37.
- 11) I. Enevoldsen and J. D. Sorensen : *Struct. Safety*, **15**, 3 (1994) p.169.
- 12) J. Tu, K. K. Choi and Y. H. Park : *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, **121** (1999) p.557.
- 13) B. D. Youn, K. K. Choi and L. Du : *AIAA J.*, **42**, 1 (2004) p.124.
- 14) X. Du and W. Chen : *Trans. ASME J. Mech. Des.*, **126** (2004) p.225.
- 15) X. Chen, T. K. Hasselman and D. J. Neill : *Proc. 38th AIAA SDM Conf. (1997) AIAA-97-1403*.
- 16) L. Wang and S. Kodiyalam : *Proc. 43rd AIAA SDM Conf. (2002) AIAA-2002-1754*.
- 17) R. J. Yang and L. Gu : *Struct. Multidiscip. Opt.*, **26** (2004) p.152.
- 18) R. J. Yang and L. Gu : *Struct. Multidiscip. Opt.*, **29** (2005) p.488.
- 19) 茨木俊秀・福島雅夫 : *FORTRAN77最適化プログラミング*, 7章, 岩波書店 (1991) p.177.
- 20) M. Alle, M. Raulli, K. Maute and D. M. Frangopol : *Comput. Struct.*, **82** (2004) p.1007.
- 21) G. Kharmanda, N. Olhoff, A. Mohamed and M. Lemaire : *Struct. Multidiscip. Opt.*, **26**, 5 (2004) p.295.
- 22) S. Nishiwaki, S. Min, J. Yoo and N. Kikuchi : *Comput. Methods Appl. Mech. and Eng.*, **190**, 34 (2001) p.4457.
- 23) 山崎慎太郎・西脇真二・泉井一浩・吉村允孝 : *日本機械学会論文集 (C編)*, **73**, 725 (2007) p.72.
- 24) K. Mogami, S. Nishiwaki, K. Izui, M. Yoshimura and N. Kogiso : *Struct. Multidiscip. Opt.*, **32**, 4 (2006) p.299.
- 25) J. Liang, Z. P. Mourelatos and E. Nikolaidis : *Trans. ASME J. Mech. Des.*, **129** (2007) p.121.5
- 26) M. McDonald and S. Mahadevan : *Trans. ASME J. Mech. Des.*, **130** (2008) 021403-1.

 インフォメーション

「科学技術週間」のシンボルマーク制定

文部科学省は、このほど、平成21年4月13日～19日に実施される「科学技術週間」のシンボルマークを新たに制定した。科学技術週間は、昭和35年2月26日の閣議了解により制定されてから、平成21年度開催で記念すべき50回目を迎える。基礎科学力強化年でもあるこの年に、科学技術週間のさらなる周知を図るため、「科学技術週間」シンボルマークを制定した。同省では、ホームページやパンフレットといった広報媒体、シンポジウムなどにおいて、広く活用をしていくことにしている。



「科学技術週間」シンボルマーク

<デザインコンセプト>

「Science」の「S」をベースとし、科学の内に秘めた無限の可能性を表現している。「青」は“宇宙”，「赤」は“大地”，ドットはそこに介在する人類，また七つのドットはこの1週間をきっかけとし、科学技術についての理解を促すという意味を表現している。