

面外変形を考慮した薄板構造の剛性最大化を目的としたレベルセット法に基づくトポロジー最適設計

著者	堀尾 仁志, 小木曾 望, 乙守 正樹, 山田 崇恭, 西脇 眞二
雑誌名	日本機械学会論文集
巻	80
号	811
ページ	DSM0054
発行年	2014-03-25
権利	(c) 2014 一般社団法人日本機械学会
その他のタイトル	Level set-based topology optimization of thin plate structure for maximizing stiffness under out-of-plane deformation
URL	http://hdl.handle.net/10466/15699

doi: 10.1299/transjsme.2014dsm0054

面外変形を考慮した薄板構造の剛性最大化を目的とした レベルセット法に基づくトポロジー最適設計*

堀尾 仁志 *¹, 小木曾 望 *², 乙守 正樹 *³, 山田 崇恭 *⁴, 西脇 眞二 *⁵

Level set-based topology optimization of thin plate structure for maximizing stiffness under out-of-plane deformation

Hitoshi HORIO*¹, Nozomu KOGISO, Masaki OTOMORI, Takayuki YAMADA
and Shinji NISHIWAKI

*¹ Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University
1-1 Gakuen-Cho, Naka-ku, Sakai, Osaka, 599-8531 JAPAN

Abstract

The topology optimization method using the level set method and incorporating a fictitious interface energy derived from the phase field method was proposed by part of the authors. The method has been applied to several structural and multidisciplinary design problems. However, the method has not been applied to the plate bending structural design problem using the two-dimensional plate bending element model yet, regardless that the thin plate structures are widely used in engineering applications that require lightweightness. This paper extends the topology optimization method to the thin plate structure for maximizing stiffness under out-of-plane deformation by using the thin plate bending elements based on Reissner-Mindlin theory. The structural design problem using the thin plate bending elements is formulated as the mean compliance minimization under volume constraint problem. Through simple numerical examples, effects of the proposed method are illustrated. At first, the method significantly reduces computational cost for the thin plate maximizing stiffness design problem in comparison with the three-dimensional solid model. The obtained optimum configuration is shown to be equivalent to that of the three-dimensional solid model. Then, it is shown that the advantages of the method such as high convergence property, low initial design dependency, and the effect of the regularization parameters on the complexity of the configuration are also held in the plate bending element model.

Key Words : Optimum design, Shell structure, Structural design, Finite element method, Topology optimization, Stiffness maximization

1. 緒 論

薄板構造は、その薄さのために曲げ剛性が低く、剛性、強度、座屈あるいは振動の問題を生じやすい。曲げ剛性を大幅に向上させる方法として、一般的に、補強リブ(スティフナー)の取り付けや、ビード加工が行われている。その効果的な補強のために、補強リブの最適配置に関する研究(山崎・青木, 1989), (Cheng and Olhoff, 1981)

* 2013年11月25日

*¹ 学生員, 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1)

*² 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野

*³ 正員, アイシン・エイ・ダブリュ (株) (〒 444-1192 愛知県安城市藤井町高根 10 番地)

*⁴ 正員, 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻 (〒 615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C3 棟)

*⁵ 正員, フェロー, 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻

E-mail: ss102033@edu.osakafu-u.ac.jp

や、面外方向に形状変更を行う最適設計に関する研究(下田, 2013)が行われている。また、シェル構造の軽量化のために、自由境界形状を変更する最適形状設計に関する研究(下田, 2011)が行われている。

一方、構造最適化の中で最も設計自由度が高い方法として、トポロジー最適設計がある(西脇他, 2013), (Bendsøe and Sigmund, 2003)。この方法は、構造最適化問題を指定した設計領域内の材料分布問題へ置き換えることで、構造形状だけでなく、穴の数などの形態の変化も可能とする方法であり、これまでに、均質化法に基づく手法(Bendsøe and Kikuchi, 1988)や、SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法(Bendsøe, 1989)が提案されている。薄板構造に対しては、Pedersen は固有振動数最大化問題に対して SIMP 法を適用する手法を提案している(Pedersen, 2000)。最近では、シェル構造に SIMP 法を利用して、固有振動数だけでなく、減衰特性を最大化するために減衰材の最適配置を求める研究も行われている(Kang, et al., 2012), (Kim, et al., 2013)。さらに、Mello らは薄板構造のトポロジー最適設計の応用として、薄膜型のピエゾ抵抗素子を平板に貼り合わせた平板に対し、制振性能を最大化するようなピエゾ抵抗素子の最適配置問題に応用している(Mello, et al., 2012)。

均質化に基づく手法や SIMP 法はグレースケールを許容する手法である。これに対し、Maute と Ramm はトポロジー最適設計で得られた境界をパラメータ曲線で近似しながら形状材料分布問題を有限要素分割に写像し、さらに要素分割をアダプティブに変更しながら最適形態を求める手法を提案し、シェル構造の剛性最大化問題に適用している(Maute and Ramm, 1997)。これにより、明確な外形形状が得られるが、境界形状を近似しているのであって、グレースケール問題を本質的に解決しているわけではない。グレースケール問題を解決する手法として、レベルセット法による形状表現に基づく手法(Wang, et al., 2003), (Allaire, et al., 2004)が提案されている。この手法は、レベルセット関数のゼロ等位面により物体の外形形状を表現するため、グレースケールを含まない明確な外形形状が得られる。Park と Youn は、レベルセット法に基づく手法をシェル構造の最適設計に適用している(Park and Youn, 2008)。

しかし、これらの方法は、レベルセット関数のゼロ等位面により示す外形形状のみの変更により最適構造を得る方法であり、穴の創出など形態変更が許容されない。これに対し、Yamada らは、レベルセット関数による形状表現を行いながら、境界移動だけでなく、穴の創出など形態変更をも可能としたトポロジー最適設計法(Yamada, et al., 2010)を提案している。この方法では、フェーズフィールド法の考え方を導入することにより、最適設計問題を仮想的な界面エネルギー項を含むエネルギー汎関数の最小化問題に帰着させることで、最適化問題の正則化を行っている。この方法は、初期構造に対する依存性が低く、さらにこの正則化の度合いを調整することにより、構造の幾何学的な複雑さを定性的に表すことが可能である。

しかしながら、Yamada らの提案したトポロジー最適設計法(Yamada, et al., 2010)は、まだ、薄板構造へ適用されていない。そのため、薄板構造を三次元ソリッド要素を用いて離散化を行わなければならない、計算時間を浪費していた。そこで、本論文では、薄板構造の剛性が高い構造形態を効率的に求めるために、面外変形を考慮した薄板構造の剛性最大化を目的とした構造形態を求める設計問題に対して、板曲げ要素を用いたレベルセット法に基づくトポロジー最適設計法を提案する。

以下、2章では板曲げ要素に用いられる Reissner-Mindlin 理論について説明する。次に、3章ではレベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方にに基づくトポロジー最適設計による剛性最大化問題の定式化について説明する。4章において簡単な数値計算例により、従来の方法との比較をしながら本論文で提案する手法の妥当性を検証し、5章で本論文の結論を述べる。

2. Reissner - Mindlin 理論による薄板の面外変形

板曲げ要素は厚さが薄いことに着目して、2次元問題に単純化された構造要素である。Reissner - Mindlin 理論はせん断変形の影響を考慮した板曲げの理論であり、中立面に直交する平面が、変形後も平面ではあるが、直交しないという曲げ変形を扱う(半谷, 1995)。図1のように、 z 方向の曲げ変位を w とし、 x , y 方向の回転角度をそれぞれ β_x , β_y と表す。法線の長さが一定であり、中立面の伸縮はなく、そして、変位が長さ方向に線形分布するものとする。面内方向のひずみを ε_x , ε_y 、面内せん断ひずみを γ_{xy} 、面外せん断ひずみを γ_{yz} , γ_{zx} とすると、変位とひずみの関係式は次式で表される。

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (1)$$

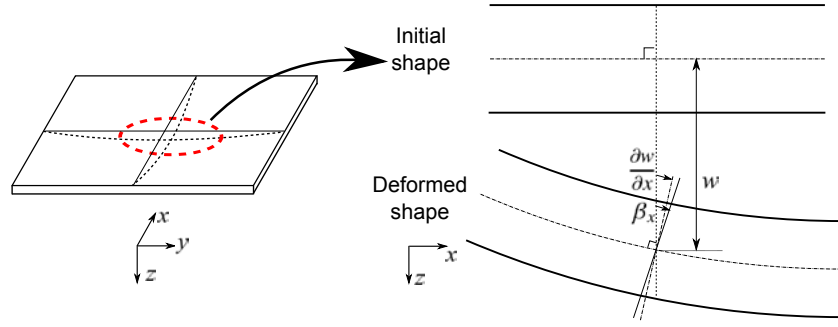


Fig. 1 Reissner-Mindlin assumption

$$\varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \quad (4)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \quad (5)$$

続いて、面内直応力を σ_x , σ_y , 面内せん断応力を τ_{xy} , 面外せん断応力を τ_{zx} , τ_{yz} とすると、応力と変位の関係式は次式となる。

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = Gz \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (9)$$

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (10)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比であり、せん断弾性定数 G は次式で表される。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11)$$

次に、板厚 h , 曲げ剛性 D_b とすると、モーメントと変位の関係式は次式で表される。

$$M_x = D_b \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$M_y = D_b \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$M_{xy} = \frac{D_b(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \quad (14)$$

$$Q_x = Gh_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (15)$$

$$Q_y = Gh_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (16)$$

ここで、 M_x , M_y は曲げモーメント、 M_{xy} はねじりモーメント、 Q_x , Q_y はせん断力、 h_s はエネルギー視点より評価したせん断剛性補正係数であり、曲げ剛性 D_b は次式で表される。

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17)$$

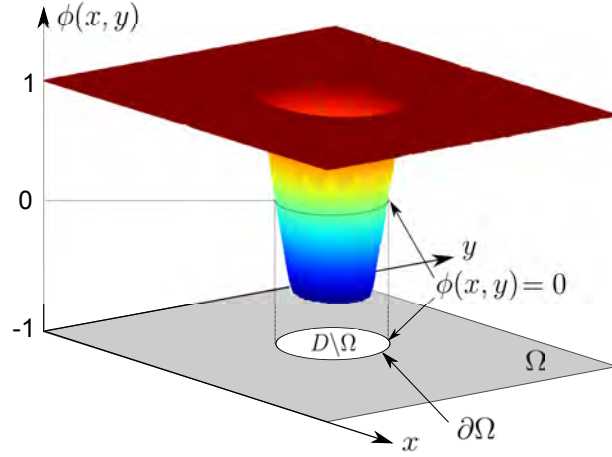


Fig. 2 Fixed design domain D and level set function ϕ

さて、3次元弾性体のひずみエネルギー $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は以下のように表すことができる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (18)$$

まず、式(18)の積分式の第一項に注目する。板厚 h が一定であり、式(1)で x 方向の回転角 β_x が z の関数ではないことを考慮して z で積分すると、次式が得られる。

$$\iiint_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \epsilon_x dz dx dy = \iiint_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dz dx dy = \iint M_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} dx dy \quad (19)$$

同様に、他の項も求めると、式(18)は次式で表される。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \iint \left\{ M_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \right\} dx dy \quad (20)$$

2次元板曲げ要素で離散化するモデルにおけるひずみエネルギーは、式(20)に基づいて求めることができる。

3. レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化による剛性最大化

3.1 最適化問題の定式化

物体で占められている領域 Ω (以下、物体領域) の存在が許容されている固定領域 D (以下、固定設計領域) において、物体領域の構造最適化について考える。レベルセット法では、図2に示すように、レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて、そのゼロ等位面によって物体境界を陰的に表現する。すなわち次式に示すように、物体領域において正、空洞領域において負、物体の境界ではゼロとなるレベルセット関数を用いて物体の形状表現を行う。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{x} は固定設計領域の座標である。なお、本研究ではレベルセット関数に上限値と下限値を導入しているが、これは目的汎関数に付加する仮想的な界面エネルギーを導入するためである。

上述のレベルセット法による形状表現を用いて、目的汎関数を F 、体積制約を制約汎関数 G で表す構造最適化問題を次式で定義する。

$$\text{Minimize}_{\phi} : F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (22)$$

$$\text{subject to} : G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (23)$$

ここで、 $f(\mathbf{x})$ は目的汎関数の被積分関数で、 V_{\max} は体積の上限値である。

本研究では、フェーズフィールド理論の定式化で利用されている仮想的な界面エネルギーを導入し、式 (22) および式 (23) の構造最適化問題を次式に示す問題に変換する (Yamada, et al., 2010).

$$\text{Minimize }_{\phi} : F_R(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega + \frac{1}{2}\tau \int_D |\nabla\phi|^2 d\Omega \quad (24)$$

$$\text{subject to } : G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (25)$$

ここで、 F_R は正則化項を含めた目的汎関数、 τ は仮想的な界面エネルギーと目的汎関数の比を示すパラメータで、正則化係数と呼ぶ。この値を適切に設定することにより、最適構造の複雑さを定性的に変化させることができる。また、本研究では、最適化アルゴリズムを構築する段階において無次元化を行い、正則化係数 τ の値を一意に決定できるようにしている。詳細は文献 (Yamada, et al., 2010) を参照されたい。

ラグランジュ未定乗数法を用いて、式 (24), (25) を無制約問題に置き換える。すなわち、ラグランジュアンを \bar{F}_R 、式 (25) に関するラグランジュ乗数を λ とすれば、上述の最適化問題は次式となる。

$$\text{Minimize }_{\phi} : \bar{F}_R(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) + \lambda)d\Omega + \int_D \frac{1}{2}\tau|\nabla\phi|^2 d\Omega - \lambda V_{\max} \quad (26)$$

本研究では上式を解くことにより最適構造を得る。

3.2 時間発展方程式によるレベルセット関数の更新

本研究では、最適化問題を時間発展方程式を解く問題へと置き換えることにより、設計変数であるレベルセット関数を更新する。まず、仮想的な時間 t を導入し、レベルセット関数を更新させる駆動力は、次式に示すように、ラグランジュアン \bar{F}_R の勾配に比例するものと仮定する。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -K(\phi)\frac{\delta\bar{F}_R}{\delta\phi} \quad (27)$$

ここで、 $K(\phi)(>0)$ は比例定数、 $\delta\bar{F}_R/\delta\phi$ はラグランジュアン \bar{F}_R の汎関数微分を表す。式 (27) に式 (26) を代入し、適当な境界条件を設定することで、時間発展方程式を導く。すなわち、境界条件として、物体領域境界であることが指定されている境界 ∂D_N においてはディリクレ境界条件、その他の境界においてはノイマン境界条件を与え、固定設計領域外部からの影響がないことを表現する。以上より、時間発展方程式は反応拡散方程式系として次式で表される。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -K(\phi)\left(\frac{\delta\bar{F}}{\delta\phi} - \tau\nabla^2\phi\right) \quad \text{in } D \quad (28)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \quad (29)$$

$$\phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \quad (30)$$

なお、 \bar{F} は式 (22), (23) を無制約問題に置き換えた場合のラグランジュアンであり、次式で与えられる。

$$\bar{F}(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) + \lambda)d\Omega - \lambda V_{\max} \quad (31)$$

3.3 剛性最大化問題

本研究では、剛性最大化問題を考える。線形弾性体で構成される物体領域 Ω に対して、図 3 に示すように、境界 Γ_u において変位 \mathbf{u}_0 で変位固定、境界 Γ_t に荷重 \mathbf{t} が与えられている問題について考える。ただし、境界 Γ_u , Γ_t は、最適設計において変化しないものとする。このとき、体積制約の下で平均コンプライアンス $l(\mathbf{u})$ を最小化する問題を考え、目的関数を次式で定義する。

$$F(\Omega) = l(\mathbf{u}) \quad (32)$$

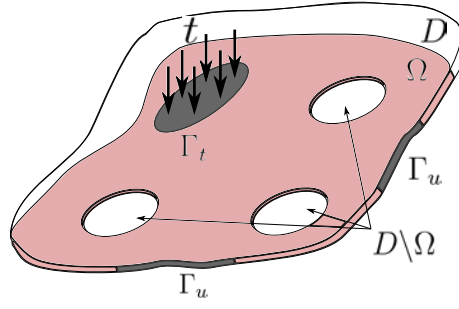


Fig. 3 Boundary condition of design problem

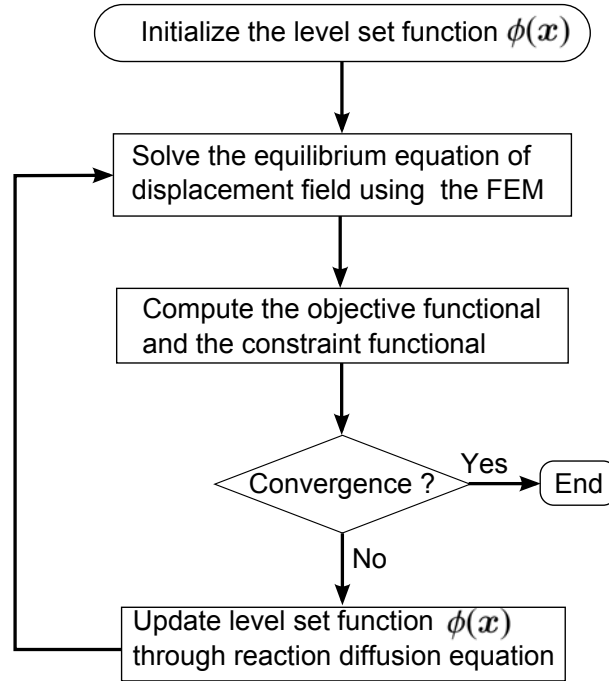


Fig. 4 Flowchart of topology optimization procedure

ここで、ひずみエネルギー $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ との関係は次式で表される。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in U \quad \mathbf{u} \in U \quad (33)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (34)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (35)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、 \mathbf{E} は弾性テンソルを表し、ひずみエネルギー $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は式 (20) で評価できる。さらに、 U は以下の式にて定義される変位関数空間である。

$$U = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ in } \Gamma_u\} \quad (36)$$

3.4 最適化アルゴリズム

図 4 に最適化のフローチャートを示す。まず、初期構造を示すレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を上限値と下限値に対する制約を満たすように与える。次に、有限要素法を用いて平衡方程式を解き、目的汎関数、制約汎関数の値を求める。ここで目的汎関数が収束すれば、最適化計算を終了させる。収束しない場合は反応拡散方程式 (28) に従い、

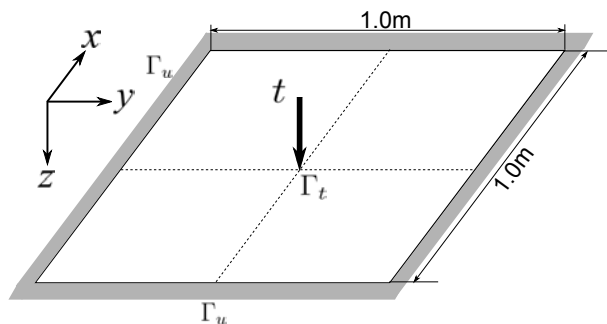


Fig. 5 Fixed design domain and boundary conditions of thin plate model

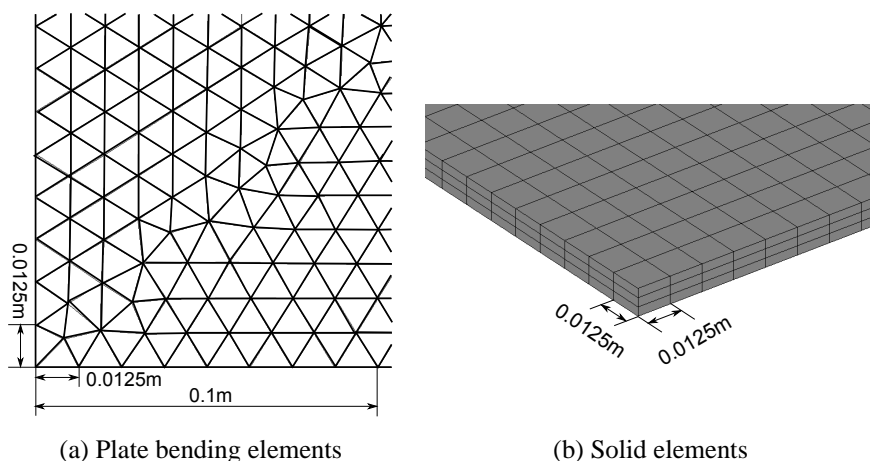


Fig. 6 FE Model discretization

レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を更新する．ただし，初期構造の体積が体積制約と大きく異なる場合，200 ステップ程度かけて，制約を満たすように修正する．

なお，変位場の解析は物体形状を陽に抽出することなく計算を行う Yamada ら (Yamada, et al., 2010) の方法と同様の近似解法を用いる．つまり，変位場の解析における縦弾性係数は，空洞領域は十分に小さな剛性を持つ領域とみなし，境界近傍では滑らかに推移するものとする．

4. 計算例

2つの数値例により，本研究で提案する方法の妥当性を検証する．まず，周辺が固定された薄板の場合について検討する．ここでは，最適形態を示しながら従来のソリッド要素との比較を行う．また，得られた構造形態の妥当性や初期構造の影響を調べる．次に，周辺が単純支持された薄板について最適形態を検討する．最適形態と収束履歴を示したあと，同様に形態の妥当性について検証する．最後に正規化係数 τ を変化させ，得られる最適構造の幾何学的複雑さが定性的に調整できることを示す．

なお，薄板構造のトポロジー最適設計としては構造材料の配置よりも，構造は変化させず，それに付加する制振材の配置問題 (Kang, et al., 2012), (Kim, et al., 2013), (Mello, et al., 2012) などが現実的な応用である．しかし，本論文は手法の提案を目的としているため，構造材料の配置問題を数値計算例として示す．

4.1 周辺固定の場合

図5で示される寸法 $1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ の正方形設計領域 D が周辺固定され，中央に $1.0 \times 10^3\text{N}$ の面外荷重を受ける場合の設計問題を考える．ここで体積制約の上限値 V_{max} は固定設計領域の50%である $5.0 \times 10^{-3}\text{m}^3$ とし，正規化係数 τ を 2.0×10^{-5} に設定する．なお，板厚は 0.01m ，ヤング率 210GPa ，ポアソン比 0.33 とし，構造解析においては平均要素長 $1.25 \times 10^{-2}\text{m}$ の要素で固定設計領域を 16160 要素で分割する．

Table 1 Mesh statistics of plate bending and solid elements

	Number of elements	Number of DOF	Element form	Average element size (m)
Plate bending	16160	73524	Triangle	0.0125
Solid	19200	544341	Cuboid	0.0125

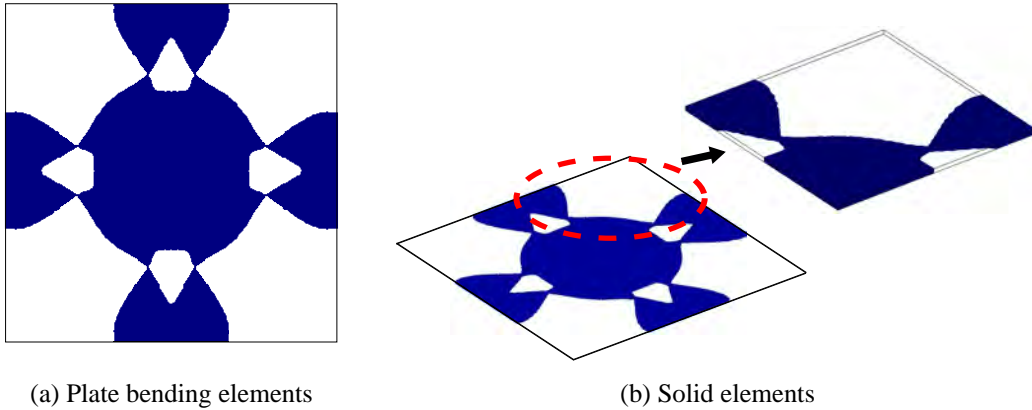


Fig. 7 Optimal configurations using plate bending and solid elements: Both models bring the same results.

Table 2 Comparison of computational performance between plate bending and solid elements: Plate bending element model has about 40 times computational efficiency with the same objective function value as solid element model.

	Objective function (J)	Volume constraint (%)	CPU time (s) ^a
Plate bending	0.1996	43.3	555
Solid	0.1984	43.7	22244

^a CPU : Intel(R) PentiumR III Xeon X3370

4.1.1 ソリッド要素を用いたモデルとの比較

ここでは、従来用いられていたソリッド要素によるモデルと板曲げ要素によるモデルとで、最適形態および計算時間を比較する。この比較のため、面内の要素の平均長を 0.0125m で同じとして、板曲げ要素は三角形要素で、ソリッド要素は六面体要素で分割する。図 6 にそれぞれの要素分割の様子を示す。それぞれの要素分割による要素数、自由度数などを表 1 で比較する。

得られた最適形態を図 7 に示す。なお、ソリッド要素の場合は一部を拡大したものを図 7(b) に示す。いずれも同一の最適形態であり、中央部と周囲の辺をつなぐ部分に穴が形成され、細くなっていることが確認できる。

次に、それぞれの要素に対する最適形態の目的関数、体積、計算時間の値を表 2 で比較する。板曲げ要素とソリッド要素の目的関数や体積の値の差は 1% 以内であり、ほぼ同じ値である。しかし、計算時間は、板曲げ要素の方が 40 分の 1 と圧倒的に小さく、板曲げ要素を使うことが有利であることがわかる。

最適形態に至るまでの目的関数および体積の収束履歴を図 8 で比較する。初期設計では固定設計領域すべてを材料領域としているため、初期段階では体積制約を満足するように体積を減少させるように変化する。このとき、目的関数値は上昇するが、体積が上限値に近づくにつれて目的関数の増加が緩やかになり、収束に向かう。この傾向はどちらの要素を用いた場合でも同じである。

これらから、板曲げ要素は形態面、数値面のどちらにおいてもソリッド要素と同等の結果を得られ、計算時間においては大幅に減少させることができる。

4.1.2 構造形態の妥当性

得られた最適形態は中央部から周辺部に至る部分に穴が空いている。この形態の妥当性を簡易モデルを用いて検証する。図 9 のように周囲から中央部に至る部材に穴が存在しない簡易モデル (Model 1) と、穴が存在する簡易

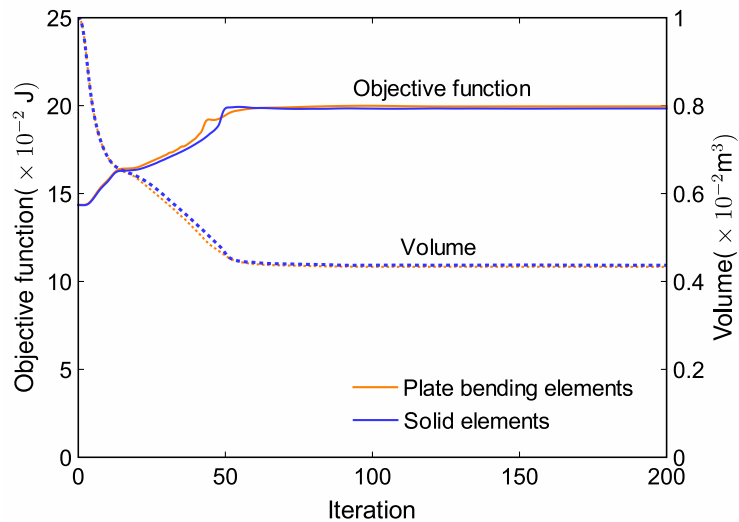


Fig. 8 Comparison of convergence histories between solid and plate bending element models: Both models have the similar convergence histories.

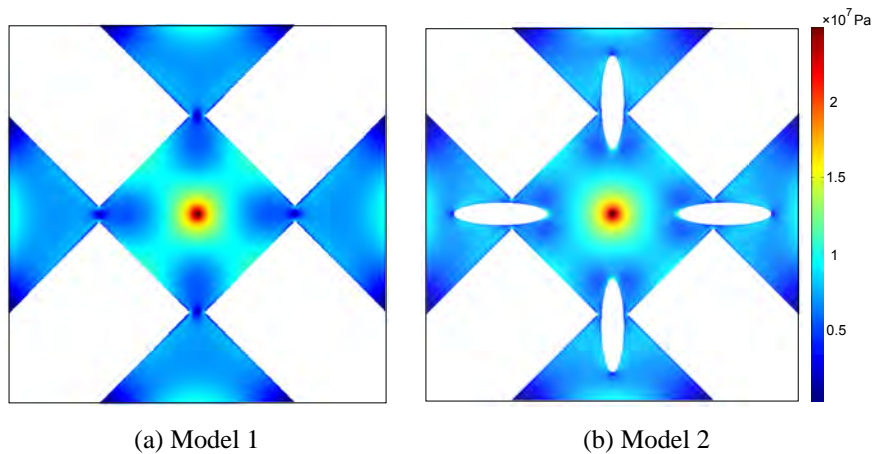


Fig. 9 Confirmation models with and without holes under edge-fixed condition that the color distribution shows von Mises stress distributions: Model with hole has higher stiffness than that without holes.

モデル (Model 2) をソリッド要素にて作成し、応力、変位および平均コンプライアンスの比較を行う。比較のため、2つの簡易モデルの体積が同じにしている。

この2つのモデルにおける平均コンプライアンス、ミーゼス応力の最大値、および曲げの変位の最大値を表3に示す。また、それぞれのモデルでのミーゼス応力の分布図を図9に重ねて表示する。表3より、目的関数である平均コンプライアンスは穴が存在しないモデルよりも穴が存在するモデルのほうが小さい値をとり、穴が存在するモデルのほうが剛性が大きい構造であることがわかる。また、図9より、穴が存在しないモデルでは中央部から各辺に向かう細くなっている部材の応力は低いことがわかる。つまり、この部分を取り除いても影響が少ない。この不要な部分に穴をあけたものが穴が存在するモデルの形態である。このことから、トポロジー最適設計で得られた図7の構造形態は妥当であることがいえる。

4.1.3 初期設計の影響

次に初期形態の影響について検討する。この問題に対して異なる2つの初期形態を設定する。Case 1は固定設計領域がすべて物体領域により占められている場合、Case 2は固定設計領域に4つの穴が開いたモデルとする。これらの2ケースに対する構造形態の変化および最適形態を図10で比較する。また、最適形態の目的関数および体

Table 3 Comparison of objective function value, maximum stress, and maximum displacement between models with and without holes under edge-fixed condition: Model with holes is superior to that without holes.

	Objective function (J)	Maximum stress (MPa)	Maximum displacement (m)
No holes	0.2397	44.14	4.795×10^{-4}
With holes	0.2316	44.31	4.633×10^{-4}

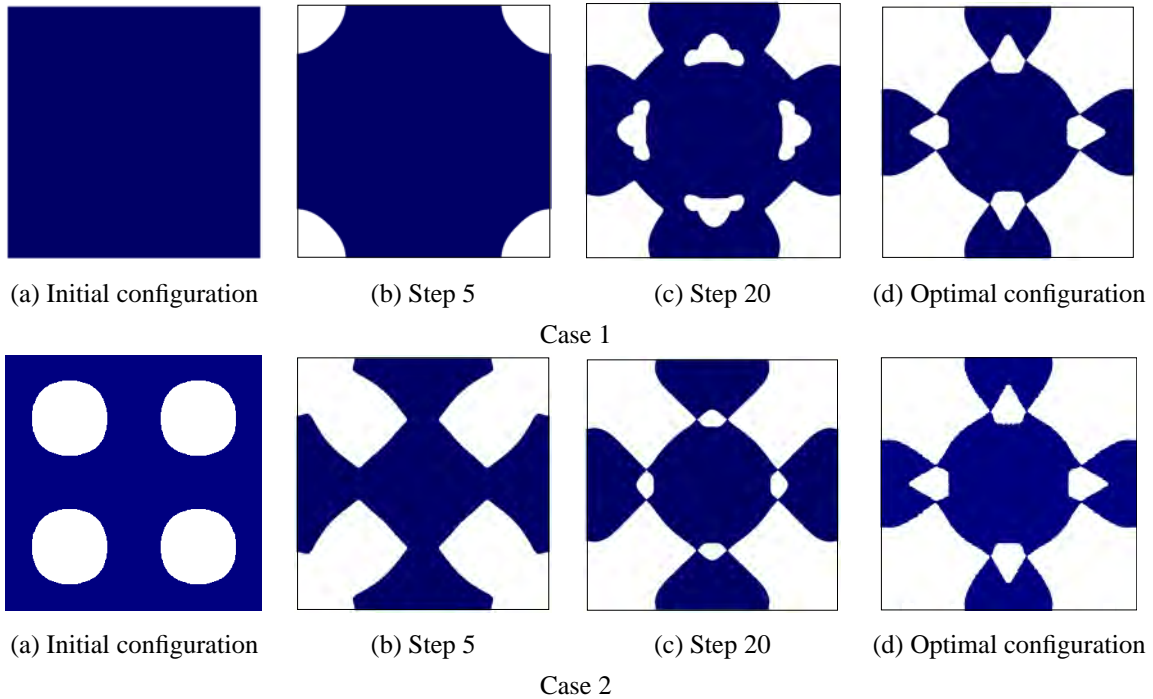


Fig. 10 Comparison of configuration histories between different initial configurations: Cases 1 and 2 converges the same optimal configurations regardless of different initial configurations.

Table 4 Comparison of Cases 1 and 2: Optimal configurations have the same performance regardless of different initial configurations.

	Objective function (J)	Volume constraint (%)
Case 1	0.1996	43.3
Case 2	0.1996	43.3

積を表 4 に示す。これより、途中の形態は異なるけれど、得られた最適形態は同一で、物理的に妥当な構造が得られていることがわかる。従来の手法であるソリッド要素で提案されていたと同様、板曲げ要素の場合でも初期状態の影響が小さいことがわかる。

4.2 周辺支持の場合

次に、 $1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ の正方形設計領域 D に対して、周囲を単純支持し、正方形の中央部に面外荷重 $1.0 \times 10^3 \text{N}$ を受ける場合を考える。構造解析においては、平均要素長 $2.5 \times 10^{-3} \text{m}$ の要素で固定設計領域を 396928 要素で分割する。最適設計における正則化係数 τ を 1.0×10^{-5} とし、それ以外のパラメータは周辺固定の場合と同一とする。

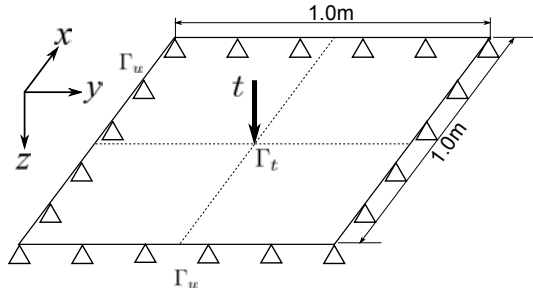


Fig. 11 Fixed design domain and boundary conditions of simply supported model

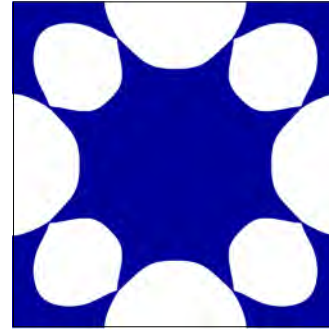


Fig. 12 Optimal configuration of simply supported model using plate bending elements

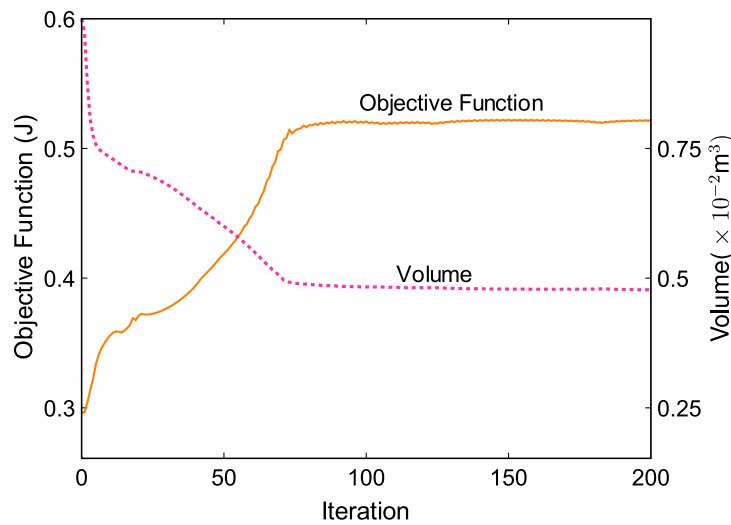


Fig. 13 Convergence history of simply-supported thin plate model using plate bending elements

4.2.1 最適形態と収束

板曲げ要素を用いた場合の最適形態を図 12 に示す。四隅から中央に向かって部材が配置され、中央部に向かう部材の四隅付近に穴が創出された形態となっている。また、最適形態に至るまでの目的関数および体積の収束履歴を図 13 に示す。周辺固定の場合と同様に適切に収束していることがわかる。

4.2.2 形態の妥当性

単純支持の場合も固定支持の場合と同様に簡易モデルを用いて穴の妥当性の検討を行う。図 14 のように四隅から中央に至る部分に穴が存在しない簡易モデル (Model 3) と、穴が存在する簡易モデル (Model 4) を板曲げ要素を用いて作成し、応力、変位および平均コンプライアンスの比較を行う。

この 2 つのモデルにおける平均コンプライアンス、ミーゼス応力の最大値、および厚さ方向の変位の最大値を表 5 に示す。また、それぞれの単純支持でのモデルの応力の分布図を図 14 に重ねて表示している。周辺固定の場合と同様に、表 5 より、目的関数である平均コンプライアンスは、穴が存在しないモデルよりも穴が存在するモデルのほうが小さい値をとり、穴が存在するモデルのほうが剛性が大きい構造であることがわかる。また、図 14 より、穴が存在しないモデルでは中央部から各辺に向かう細くなっている部材の応力は低くなっていることがわかる。これらの結果は周辺固定の場合と同様である。

以上より、境界条件を変更した単純支持の場合でも、物理的に妥当な構造が得られ、板曲げ要素を用いた最適化が適切に行われていると言える。

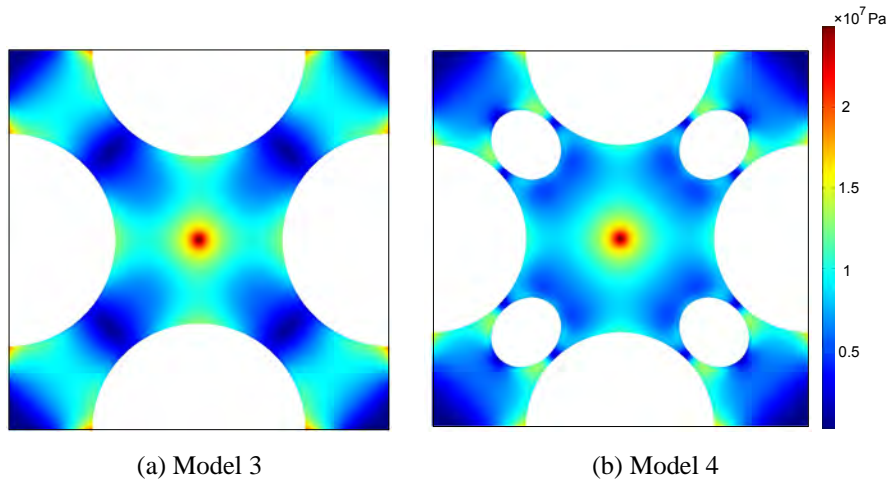


Fig. 14 Confirmation models with and without holes under simply supported condition that the color distribution shows von Mises stress distributions: Model with hole has higher stiffness than that without holes.

Table 5 Comparison of objective function value, maximum stress, and maximum displacement between models with and without holes under simply supported condition: Model with holes is superior to that without holes.

	Objective function (J)	Maximum stress (MPa)	Maximum displacement (m)
No holes	0.4126	28.33	8.260×10^{-4}
With holes	0.3657	28.14	7.278×10^{-4}

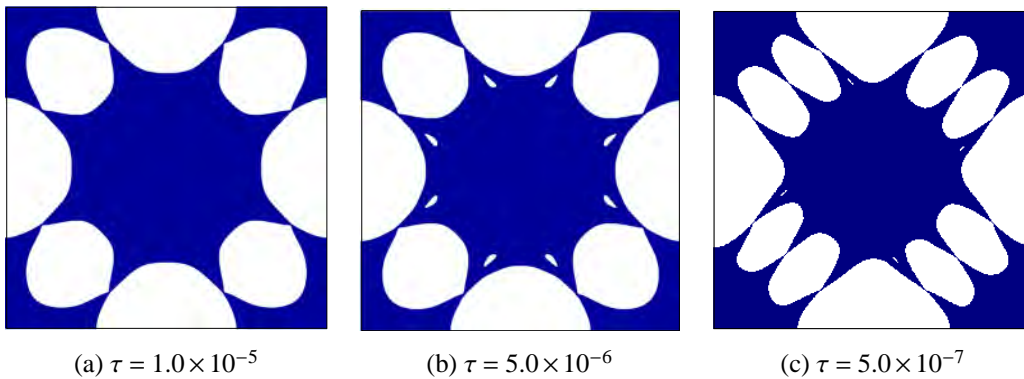


Fig. 15 Effect of regularization parameter τ on the geometrical complexity of optimal configuration

4.2.3 最適構造形態への正則化係数 τ の影響

図 15 で正則化係数 τ を 1.0×10^{-5} , 5.0×10^{-6} , 5.0×10^{-7} と設定したときの最適形態を比較する. $\tau = 5.0 \times 10^{-6}$ のときは四隅の穴の近くに小さな穴ができる. さらに $\tau = 5.0 \times 10^{-7}$ と小さくすると, 穴が 2 つになり, 構造形態が複雑になることがわかる. これより, 薄板モデルにおいてもソリッドモデルと同様に, 正則化係数によって最適構造形態の複雑さが影響を受けることがわかる.

5. 結 論

本論文では, 面外方向の荷重を受ける薄板に対して, レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化の手法を板曲げ要素モデルに適用する方法を提案し, 数値計算例を通して, 以下の点を明らかにした.

- 板曲げ要素を用いた場合でも, 従来のソリッド要素と形態面, 数値面において同様の結果が得られることを

確認した。これにより、効率的に短時間で最適形態が求められることを示した。

- 面外荷重を受ける薄板に対して、提案手法により得られた最適形態が物理的に妥当であることを示した。
- 提案手法においても、初期形態の設定によらず、ほぼ同一の最適形態が得られること、良好な収束特性を有することを示した。また、その繰り返し過程で穴が創出する形態変化が可能であることを示した。

文 献

- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1 (2004), pp. 363-393.
- Bendsøe, M. P., Optimal shape desing as a material distribution problem, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4 (1989), pp. 192-202.
- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2 (1988), pp. 197-224.
- Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., *Topology Optimization, Theory, Methods and Applications* (2003), Springer-Verlag.
- Cheng K. T. and Olhoff N., An investigation concerning optimal design of solid elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, No. 3 (1981), pp. 305-323.
- 半谷裕彦, 平板の基礎理論, 彰国社 (1995).
- Kang, Z., Zhang, X., Jiang, S. and Cheng, G., On topology optimization of damping layer in shell structures under harmonic excitations, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 46, No. 1 (2012), pp. 51-67.
- Kim, S. Y., Mechefske, C. K. and Kim, I. Y., Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12 (2013), pp. 2873-2883.
- Maute, K. and Ramm, E., Adaptive topology optimization of shell structures, *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 11 (1997), pp. 1767-1773.
- Mello, L. A. M., Takezawa, A. and Silva, E. C. N., Designing piezoresistive plate-based sensors with distribution of piezoresistive material using topology optimization, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21 (2012), Paper No. 085029, pp. 1-13.
- 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇, トポロジー最適化 (2013), 丸善出版.
- Park, K. S. and Youn, S. K., Topology optimization of shell structures using adaptive inner-front (AIF) level set method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 36, No. 1 (2008), pp. 43-58.
- Pedersen, N. L., Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, No. 1 (2000), pp. 2-11.
- 下田昌利, 板・シェル構造体の自由境界の形状設計のための最適化手法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 77, No. 782 (2011), pp. 1571-1582.
- 下田昌利, シェル構造体のフリーフォーム最適化手法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 79, No. 797 (2013), pp. 60-73.
- Wang, M. Y., Wang, X. M. and Guo, D. M., A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2 (2003), pp. 227-246.
- Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Method in Applied Mecanics and Enginerring*, Vol. 199, No. 45-48 (2010), pp. 2876-2891.
- 山崎光悦, 青木 昭裕, 薄板構造補強リブの最大剛性設計, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 55, No. 516 (1989), pp. 1884-1891.

References

- Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1 (2004), pp. 363-393.
- Bendsøe, M. P., Optimal shape desing as a material distribution problem, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4 (1989), pp. 192-202.

- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2 (1988), pp. 197-224.
- Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., *Topology Optimization, Theory, Methods and Applications* (2003), Springer-Verlag.
- Cheng K. T. and Olhoff N., An investigation concerning optimal design of solid elastic plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, No. 3 (1981), pp. 305-323.
- Hangai, Y., *Basic Theory of Plates* (1995), Shokokusha (in Japanese).
- Kang, Z., Zhang, X., Jiang, S. and Cheng, G., On topology optimization of damping layer in shell structures under harmonic excitations, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 46, No. 1 (2012), pp. 51-67.
- Kim, S. Y., Mechefske, C. K. and Kim, I. Y., Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12 (2013), pp. 2873-2883.
- Maute, K. and Ramm, E., Adaptive topology optimization of shell structures, *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 11 (1997), pp. 1767-1773.
- Mello, L. A. M., Takezawa, A. and Silva, E. C. N., Designing piezoresistive plate-based sensors with distribution of piezoresistive material using topology optimization, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21 (2012), Paper No. 085029, pp. 1-13.
- Nishiwaki, S., Izui, K. and Kikuchi, N., *Topology Optimization*, (2013), Maruzen (in Japanese).
- Park, K. S. and Youn, S. K., Topology optimization of shell structures using adaptive inner-front (AIF) level set method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 36, No. 1 (2008), pp. 43-58.
- Pedersen, N. L., Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, No. 1 (2000), pp. 2-11.
- Shimoda, M., Numerical optimization method for designing free-boundary shape of plate and shell structures, *Transaction of the JSME, Series A*, Vol. 77, No. 782 (2011), pp. 1571-1582 (in Japanese).
- Shimoda, M., Free-form optimization method for shell structures, *Transaction of the JSME, Series A*, Vol. 79, No. 797 (2013), pp. 60-73 (in Japanese).
- Wang, M. Y., Wang, X. M. and Guo, D. M., A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2 (2003), pp. 227-246.
- Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45-48 (2010), pp. 2876-2891.
- Yamazaki, K. and Aoki, A., Minimum compliance design technique of stiffener shape and layout for stiffened thin plate structures, *Transaction of the JSME, Series A*, Vol. 55, No. 516 (1989), pp. 1884-1891 (in Japanese).