

複合材料積層板の信頼性に基づく最適設計への積層パラメータの適用

著者	小木 曾 望, 中川 周哉, 室津 義定
雑誌名	日本機械学会論文集 A編
巻	68
号	676
ページ	1716-1723
発行年	2002-12
権利	(c) 社団法人日本機械学会
その他のタイトル	Application of Lamination Parameter to Reliability-Based Optimization of Symmetric Laminated Composite Plate
URL	http://hdl.handle.net/10466/15701

doi: 10.1299/kikaia.68.1716

複合材料積層板の信頼性に基づく最適設計への 積層パラメータの適用*

小木 曾 望^{*1}, 中川 周哉^{*2}, 室津 義定^{*3}

Application of Lamination Parameter to Reliability-Based Optimization of Symmetric Laminated Composite Plate

Nozomu KOGISO^{*1} Shuuya NAKAGAWA^{*2} and Yoshisada MUROTSU^{*3}

Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University,
1-1 Gakuen-Cho, Sakai, Osaka, 599-8531 Japan

In this paper, the two types of the reliability-based design of a laminated composite plate subject to in-plane loads are formulated in terms of lamination parameters to improve the calculation efficiency. One is the reliability-maximized design of the constant-thickness plate. The other is the thickness-minimized design under the reliability constraint. The first ply failure (FPF) criterion is adopted as the plate failure, so that the laminated plate system is modeled as a series system consisting of each ply failure. The ply reliability is evaluated by the first order reliability method (FORM), where the material properties and applied loads are treated as random variables. Then, the system reliability is approximated by Ditlevsen's bounds. Through numerical calculations, it is demonstrated that the reliability is distributed smoothly in the lamination parameter space and that a quick convergence is achieved in the reliability-based optimization.

Key Words : Structural Reliability, Optimum Design, Laminated Construction, Composite Material, Lamination Parameter, Reliability-Based Optimization, First Order Reliability Method, Tsai-Wu Criterion, First Ply Failure

1. 緒 論

複合材料は一般的な金属材料と比較して、比強度や比剛性が大きいこと、航空宇宙分野などさまざまな構造物で利用されている。また、複合材料積層板の積層構成を変化させることによって強度および剛性が著しく変化するため、設計仕様を満たす最適設計を求める研究が広く行なわれている。しかしながら、複合材料には製造段階で生じる材料特性のばらつきが非常に大きく、負荷荷重の変動の影響を受けやすいという問題点があり、そのような変動を確率分布に従う確率変数として扱う信頼性工学⁽¹⁾に基づいた設計が望まれる。

一般に構造信頼性解析には一次信頼性法 (First Order Reliability Method; FORM)⁽¹⁾が広く用いられている。これは、確率変数を独立な標準正規確率変数に変換し、その変数空間 (U -空間) における原点から

限界状態面までの最短距離によって破損確率を評価する手法である。FORM は等式制約付きの最適化問題として定式化できるため、逐次 2 次計画法などの非線形計画法⁽²⁾によって解くことができる。

面内荷重を受ける対称積層板の初期プライ破損に対する信頼性に関する研究^{(3)~(6)}から、繊維軸数が多くなるほど信頼性が高く評価されること、さらに確定的な強度最大化設計が合力方向に繊維を配向させた一方向材に近づくのに対して信頼性最大化設計では準等方性積層に近づくことが明らかにされている。著者は、座屈に対する積層板の信頼性に基づく最適設計の研究から、確定的な座屈荷重最大化設計は座屈モードが重根となるような積層構成になるのに対して、信頼性最大化設計では個々の座屈モードに対する信頼性がうまくバランスするような積層構成になることを明らかにした^{(7) (8)}。さらに、複合材料構造として、応力集中が生じる円孔を有する積層板⁽⁹⁾や複合材料積層パイプ構造⁽¹⁰⁾に信頼性に基づく最適設計を適用し、変動を考慮することの重要性を明らかにしてきた。

ところで、信頼性に基づく最適設計は、信頼性に対

* 原稿受付 年月日

^{*1} 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科機械系専攻航空宇宙工学分野 (〒 599-8531 大阪府堺市学園町 1-1)

^{*2} 大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程

^{*3} 正員, 大阪府立工業高等専門学校 校長 (〒 572-8541 寝屋川市幸町 26-12)

Email: kogiso@aero.osakafu-u.ac.jp

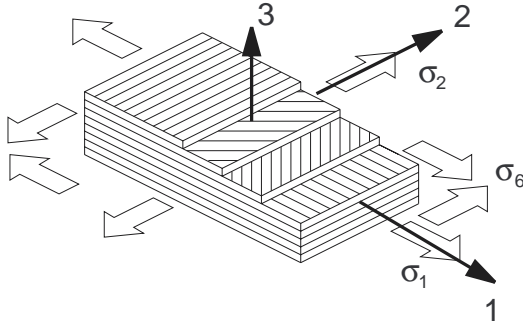


Fig. 1 Symmetric laminated composite plate.

する制約のもとでの重量最小化あるいは重量制約のもとでの信頼性最大化するような構造を求める設計問題である．信頼性解析自体が最適化問題として定式化されるため，信頼性に基づく最適設計は二重最適化問題として定式化されることになり，計算コストが高くならざるを得ない．

この最適設計問題を効率化するためには，設計変数や定式化に工夫が求められる．そこで，本研究では信頼性に基づく最適設計に積層パラメータを利用することを考える．複合材料積層板の積層構成は面内，面外の8個の積層パラメータ⁽¹¹⁾で表わすことができる．特に，対称バランスト積層の場合には，面内，面外変形を独立に考えることができ，それぞれ2個の積層パラメータによってすべての積層構成を表すことができる．さらに，これらの積層パラメータ空間における複合材料積層板の構造応答の非線形性が弱いいため，最適設計に積層パラメータを利用する手法が提案されている．最近では，複合材料構造の最適設計問題に積層パラメータを適用する研究も発表されている^{(12) (13)}．

本研究では，面内荷重を受ける複合材料積層板の初期プライ破損に対する信頼性を最大化する最適設計問題⁽⁵⁾および信頼性に基づいた積層板の板厚最小化問題の設計変数として積層パラメータを適用する． $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称バランスト積層板を数値計算例として，その有効性を明らかにする．

2. 対称積層板

2.1 対称積層板の面内剛性 対称積層板は中心面に対して積層構成が対称であるため，面内変形と曲げ変形は独立して考えることができる．よって，図1に示す一般軸系(1-2-6系)における板厚が h の対称積層板の面内における応力-ひずみ関係は，合応力 $N = h\sigma$ および面内剛性マトリクス A を用いて次式で表わす

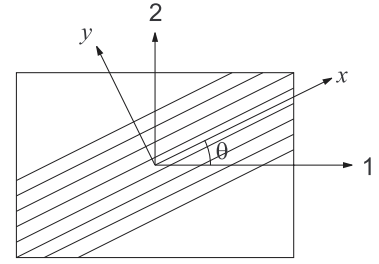


Fig. 2 Plate coordinate system.

ことができる⁽¹⁴⁾：

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで，面内剛性マトリクスを板厚 h で正規化した値 $A_{ij}^* = A_{ij}/h$ は，材料不変量 U_i ($i = 1, \dots, 5$) および面内積層パラメータ V_j^* ($j = 1, \dots, 4$)を用いて次式で表わすことができる：

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^* \\ A_{22}^* \\ A_{12}^* \\ A_{66}^* \\ A_{16}^* \\ A_{26}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_1^* & V_2^* \\ U_1 & -V_1^* & V_2^* \\ U_4 & 0 & -V_2^* \\ U_5 & 0 & -V_2^* \\ 0 & V_3^*/2 & V_4^* \\ 0 & V_3^*/2 & -V_4^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

材料不変量 U_i ($i = 1, \dots, 5$)は，繊維方向に関する弾性定数 Q_{ij} ($i, j = l, t, s$)を用いて次のように表される：

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

なお，繊維方向に関する弾性率 Q_{ij} ($i, j = l, t, s$)は繊維方向のヤング率 E_x ，繊維直角方向のヤング率 E_y ，繊維方向せん断弾性定数 E_s ，および繊維方向のポアソン比 ν_x によって次のように求められる：

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= mE_x, & Q_{yy} &= mE_y \\ Q_{xy} &= m\nu_x E_y, & Q_{ss} &= E_s \end{aligned} \quad (4)$$

ここで， m は次式で表される量である：

$$m = \left(1 - \frac{\nu_x^2 E_y}{E_x}\right)^{-1} \quad (5)$$

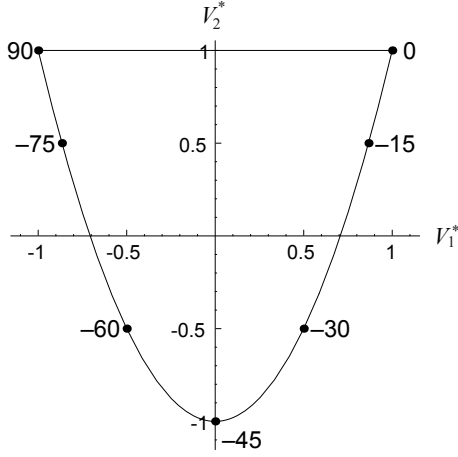


Fig. 3 Lamination parameter space of symmetric balanced laminate.

面内積層パラメータは対称積層板の中心面から i 番目の層の繊維配向角 θ_i 、体積含有率 v_i および積層数 N を用いて次式で定義される:

$$\begin{cases} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \end{cases} = \sum_{i=1}^{N/2} v_i \begin{cases} \cos 2\theta_i \\ \cos 4\theta_i \\ \sin 2\theta_i \\ \sin 4\theta_i \end{cases} \quad (6)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{N/2} = 1$$

この4つの面内積層パラメータを用いてあらゆる対称積層板の面内剛性を表わすことができる。

さらに、 $+\theta$ 層と $-\theta$ 層が等量存在する対称バラスト積層板では、積層パラメータ $V_3^* = V_4^* = 0$ となるため、二つのパラメータ V_1^* および V_2^* ですべての積層構成を表すことができ、その許容領域は図3で示される⁽¹¹⁾:

$$V_2^* \geq 2V_1^{*2} - 1, \quad V_2^* \leq 1 \quad (7)$$

積層パラメータの定義から、 $\pm\theta$ からなる対称アングルプライ積層板は放物線上の点で表される。 0° および 90° からなる対称クロスプライ積層板は $V_2^* = 1$ の直線上の点で表され、 V_1^* の値は $-1 \leq V_1^* \leq 1$ の線分を各層の体積含有率で内分した位置となる。二種類以上の配向角からなる一般的な対称バラスト積層板 $[\pm\theta_1 v_1 / \pm\theta_2 v_2 / \dots / \pm\theta_{N/2} v_{N/2}]_s$ は、この許容領域内の一点で表される。

本研究では、 $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称バラスト積層板を考える。このとき、積層パラメータの許容領域は $(-1, 1), (0, -1), (1, 1)$ を頂点とする三角形領域となる⁽¹¹⁾:

$$V_2^* \geq 2V_1^* - 1, \quad V_2^* \geq -2V_1^* - 1, \quad V_2^* \leq 1 \quad (8)$$

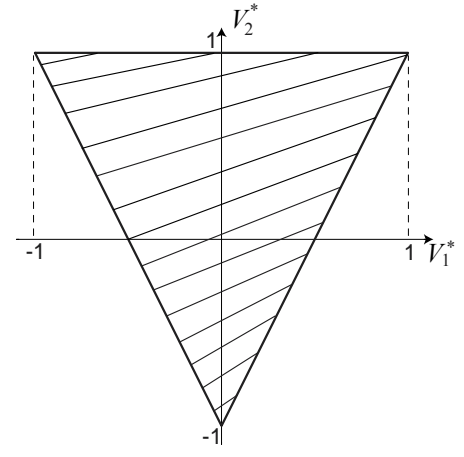


Fig. 4 Feasible region of $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ laminate of in-plane lamination parameter.

これを図4に示す。

2.2 対称積層板の強度解析 対称積層板の各層の破損規準として Tsai-Wu 規準を用いる⁽¹⁴⁾。Tsai-Wu 規準による破損包絡面は楕円体で表される⁽¹⁴⁾:

$$F_{xx}\sigma_x^2 + 2F_{xy}\sigma_x\sigma_y + F_{yy}\sigma_y^2 + F_{ss}\sigma_s^2 + F_x\sigma_x + F_y\sigma_y - 1 = 0 \quad (9)$$

ここで、 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s)^T$ は各層のプライ応力である。これは面内応力-ひずみ関係の式(1)から求められる面内ひずみを各層の配向角に沿った材料軸系 (x - y - s 系) に変換したプライひずみ $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_s)^T$ から、各層における応力-ひずみ関係 ($\sigma = Q\epsilon$) を用いて求めることができる。また、 $F_{ij}, F_i (i, j = x, y, s)$ は強度のパラメータであり、次式で定義される:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{1}{X_t X_c}, & F_x &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \\ F_{yy} &= \frac{1}{Y_t Y_c}, & F_y &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \\ F_{ss} &= \frac{1}{S^2}, & F_{xy} &= F_{xy}^* (F_{xx} F_{yy})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 X_t, X_c は繊維方向の引張および圧縮強度、 Y_c, Y_t は繊維直角方向の引張および圧縮強度、 S はせん断強度を表す。また F_{xy}^* は強度間の相関を表す定数であり、通常 -0.5 を用いる⁽¹⁴⁾。

一方、ひずみ空間における Tsai-Wu 規準は各層のプライひずみを用いて次式で表わされる:

$$G_{xx}\epsilon_x^2 + 2G_{xy}\epsilon_x\epsilon_y + G_{yy}\epsilon_y^2 + G_{ss}\epsilon_s^2 + G_x\epsilon_x + G_y\epsilon_y - 1 = 0 \quad (11)$$

ここで、 $G_{ij}, G_i (i, j = x, y, s)$ はひずみ空間における強度のパラメータであり、各層の応力-ひずみ関係が

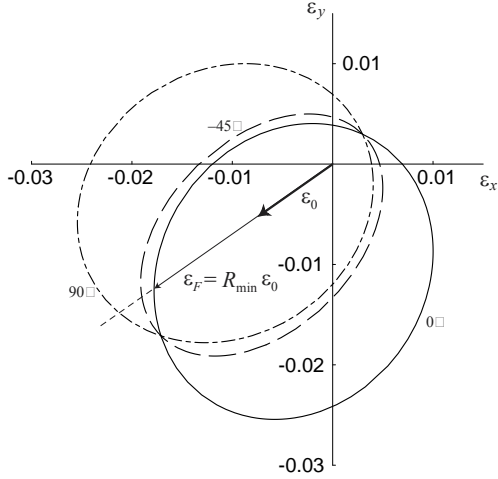


Fig. 5 Failure envelope of $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_s$ laminate in the strain space.

ら次式のように表わされる:

$$G_{xx} = F_{xx}Q_{xx}^2 + 2F_{xy}Q_{xx}Q_{xy} + F_{yy}Q_{xy}^2 \quad (12)$$

$$G_{yy} = F_{xx}Q_{xy}^2 + 2F_{xy}Q_{xy}Q_{yy} + F_{yy}Q_{yy}^2$$

$$G_{xy} = F_{xx}Q_{xx}Q_{xy} + F_{xy}(Q_{xx}Q_{yy} + Q_{xy}^2) + F_{yy}Q_{xy}Q_{yy}$$

$$G_{ss} = F_{ss}Q_{ss}^2$$

$$G_x = F_xQ_{xx} + F_yQ_{xy}, \quad G_y = F_xQ_{xy} + F_yQ_{yy}$$

本研究では、信頼性解析での数値的な安定性の観点から、ひずみ空間の Tsai-Wu 規準を用いる^{(15),(16)}。

各層の強度の評価には強度比 R を導入する。これは、負荷荷重のもとでのプライひずみ $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_s)^T$ に対して、荷重を比例的に増加させ破損包絡面に到達したとき生じるひずみ、すなわち破損ひずみ ϵ_F との比であり⁽¹⁴⁾、次式の関係が成り立つ (図 5 参照):

$$\epsilon_F = R\epsilon \quad (13)$$

これを式 (11) に代入して得られる次の方程式を解くことで、強度比 R が得られる:

$$(G_{xx}\epsilon_x^2 + 2G_{xy}\epsilon_x\epsilon_y + G_{yy}\epsilon_y^2 + G_{ss}\epsilon_s^2) R^2 + (G_x\epsilon_x + G_y\epsilon_y) R - 1 = 0 \quad (14)$$

以上より、積層板の強度解析の手順は次のようになる。

1. 負荷された応力 σ に対して、式 (1) を用いて積層板の面内ひずみを求める ($\epsilon = hA^{-1}\sigma$)。
2. 得られた面内ひずみから、各層の繊維配向角 θ_i に基づいてプライひずみに変換する ($\epsilon^i = T\epsilon$)。
3. 得られたプライひずみから、式 (11) および (14) を用いて、各層の強度比 R を得る。

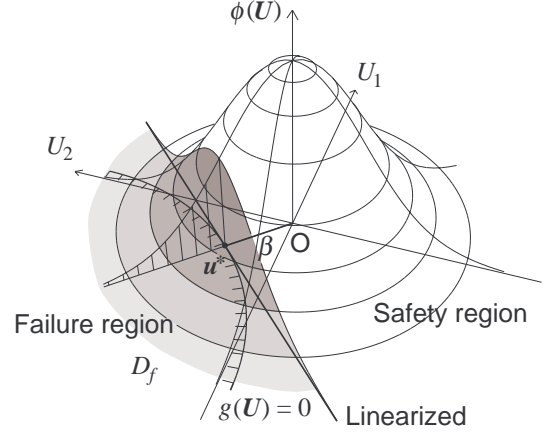


Fig. 6 First order reliability method (FORM).

この強度比が 1 以上であればその層は安全、1 より小さいときは破損することを意味する。本研究では、最も弱い層が破損したときに積層板が破損したとみなす初期プライ破損 (FPF) を適用する。つまり、最も強度比の小さな層が積層板の破損を支配する。

3. 信頼性解析

本研究では、式 (13) で定義されるひずみ空間での強度比に対して、一次信頼性法 (FORM) を用いて対称積層板の信頼性を評価する。

FORM では、変動をもった材料特性や負荷荷重などを表わす確率変数 X を標準正規化変数 U に変換し、その変数からなる U -空間での原点から限界状態面までの最短距離を信頼性指標 β と定義し、破損確率を求める方法である⁽¹⁾(図 6 参照)。限界状態面は対象とする構造物等の破損領域と安全領域との境界面であり、本研究では各層の強度比を用いて表わす。第 i 層の限界状態面 $g_i(X) = h_i(U)$ を次式で定義する:

$$g_i(x) = h_i(u) = R_i - 1 = 0 \quad (15)$$

よって第 i 層の信頼性指標 β_i を求めることは U -空間における次の最適化問題を解くことに帰着する⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \beta_i = \sqrt{u^T u} \\ \text{subject to: } & h_i(u) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

この最適化問題を解く手法として、大域的最適化手法のひとつであるトンネル法を用いる⁽¹⁷⁾。また、このとき得られた解 u^* を設計点と呼ぶ。

各層の破損確率 P_i は標準正規分布関数を用いて次式で評価される:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) = \int_{-\infty}^{-\beta_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (17)$$

さらに本研究では、初期プライ破損に対する信頼性を評価するために、積層板の破損を各層の破損からなる直列システムでモデル化する．そして、システムの信頼性をディトレブセン限界値⁽¹⁸⁾で近似する．このとき、得られた破損確率の上限値 P_U に対応する信頼性指標 β_U を積層板全体の信頼性指標をみなす：

$$P_U = \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{i=2}^m \max_{j<i} P_{ij}$$

$$\beta_U = -\Phi^{-1}(P_U) \quad (18)$$

ここで P_i は第 i 層の破損確率， P_{ij} は第 i 層と第 j 層の同時破損確率， m は破損モードの数を表す． $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称バランス積層板では $m = 4$ となる．

4. 信頼性に基づく最適設計

積層設計として、以下の二つの問題が考えられる．
一つは、板厚一定の積層板の信頼性を最大化する問題⁽⁵⁾であり、次式で定式化できる：

$$\begin{aligned} \text{Maximize : } & \beta(V_1^*, V_2^*; \mathbf{u}) \\ \text{subject to : } & V_2^* \geq 2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \geq -2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \leq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

\mathbf{u} は標準正規化された確率変数を表す．本研究では、材料特性および荷重を確率変数として取り扱う．

もう一つは、強度に関する信頼性の下限値を与えたときの積層板の板厚最小化問題であり、次式で定式化できる：

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & h \\ \text{subject to : } & \beta(V_1^*, V_2^*, h; \mathbf{u}) \geq \beta_a \\ & V_2^* \geq 2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \geq -2V_1^* - 1 \\ & V_2^* \leq 1 \\ & h \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

なお、 β_a は信頼性指標の許容値， h は板厚である．

5. 数値計算例

数値計算例として、面内荷重を受ける $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称バランス積層板の信頼性最大化問題および信頼性に基づいた積層板の板厚最小化問題に積層パラメータを適用する．材料は T300/5208 とし、その剛性特性および強度特性が正規分布に従う変動をもった確率変数と仮定する．これらの平均値および変動係

Table 1 Material properties of T300/5208.

Random variables	Mean	COV
E_x (GPa)	181.0	0.05
E_y (GPa)	10.3	0.05
E_s (GPa)	7.17	0.05
ν_x	0.28	0.01
X_t (MPa)	1500.0	0.1
X_c (MPa)	1500.0	0.1
Y_t (MPa)	40.0	0.1
Y_c (MPa)	246.0	0.1
S (MPa)	68.0	0.1

Table 2 Loading condition.

		N_1	N_2	N_6
Mean	Case 1	0.1	0.1	0.0
	Case 2	0.1	0.05	0.04
SD		0.03	0.03	0.03

unit: (MN/m)

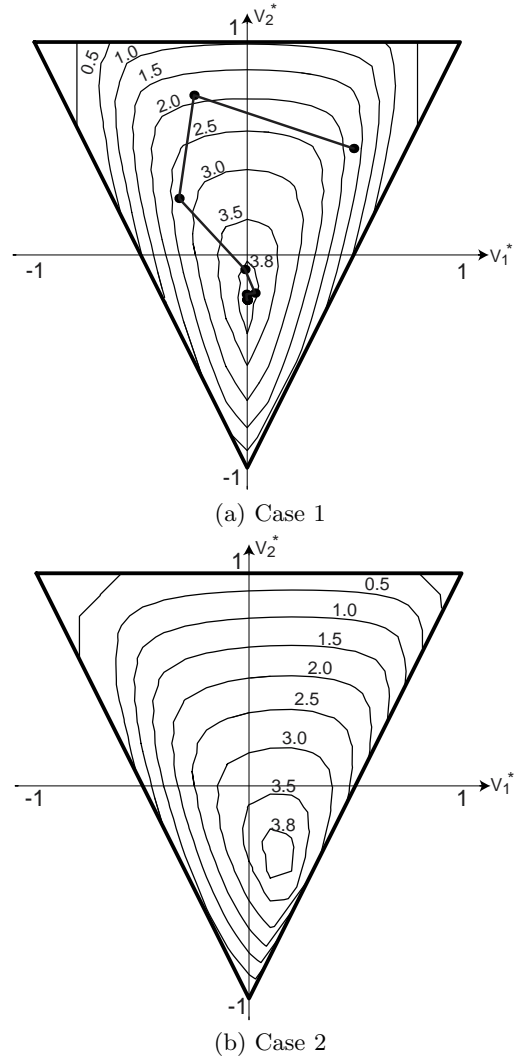


Fig. 7 Reliability index distribution in the lamination parameter space.

数を表 1 に示す．また負荷荷重として、表 2 に示す正規分布に従う 2 つの荷重条件について考える．

Table 3 Reliability-maximized design.

		Case 1	Case 2
Reliability index	β_{opt}	3.927	3.965
Lamination parameter	V_1^*	0.00	0.140
	V_2^*	-0.212	-0.358
Layer thickness	h_0 (mm)	0.197	0.230
	$h_{\pm 45}$ (mm)	0.606	0.679
	h_{90} (mm)	0.197	0.091

5.1 積層パラメータ空間における信頼性分布 厚さ 1mm の $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ の対称バランスト積層からなる正方形板 ($0.1\text{m} \times 0.1\text{m}$) に対して, 2つの荷重ケースに対する信頼性指標の等高線図を図 7 に示す. この等高線図は, 積層パラメータの許容領域における 0.1 刻みの格子点 221 点に対応する積層構成に対する信頼性解析により求めたものである. データ間隔が粗いために等高線に多少の誤差が含まれているが, 全体として積層パラメータ空間における信頼性分布は滑らかであり, 唯一の最適解を持つことがわかる.

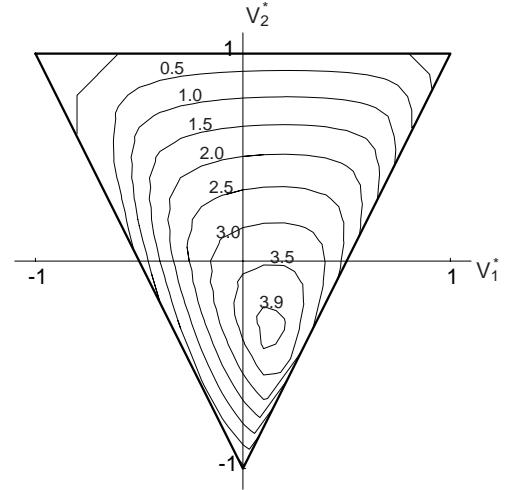
信頼性に基づく最適設計の解法に数理計画法を用いた場合, 設計変数として積層パラメータを用いることで, 全域的な最適解に収束する可能性が高いことが, この信頼性分布から推測できる.

5.2 確率分布形の影響 確率分布の影響を比較するために, 荷重ケース 2 に対して, 材料特性が対数正規分布およびワイブル分布にしたがうと仮定した場合の信頼性分布を図 8 に示す. 等高線の形状は正規分布に従う場合 (図 7) とあまり大きな違いは見られず, 滑らかな分布をしている. したがって, 確率変数の分布形によらず, 信頼性に基づく最適設計の設計変数に積層パラメータを採用することは有利であると言える. なお, 信頼性の最大値は分布形によって異なることに注意する必要がある.

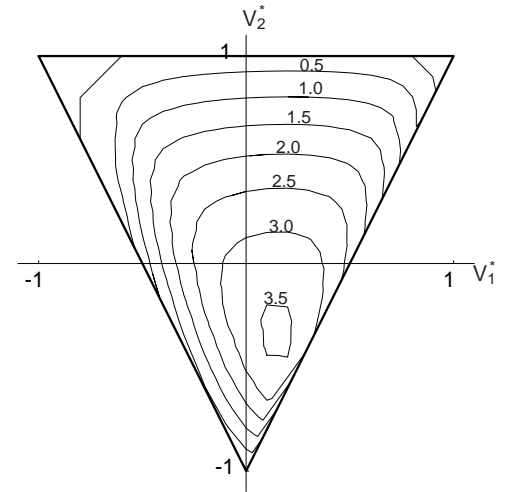
5.3 信頼性最大化問題 積層板厚さ 1.0mm で一定の正方形平板 ($0.1\text{m} \times 0.1\text{m}$) に対して, 信頼性が最大となる積層構成を積層パラメータを設計変数として求める. 初期値は $(V_1^*, V_2^*) = (0.5, 0.5)$ とし, (19) にしたがって最適化を行う. 解法としては逐次二次計画法⁽²⁾を用いる.

荷重ケース 1 における最適化の経路を図 7 の等高線図に重ねて示している. その探索はスムーズに進み, 収束性がよいことがわかる.

得られた最適解を表 3 に示す. どちらの荷重ケースにおいても, 最適解は積層パラメータ領域の内部に存在し, 0° 層, $\pm 45^\circ$ 層, 90° 層のいずれをも必要とすることがわかる. なお, 各層の層厚は, 積層パラメータの最適値を式 (6) に代入することで求められる.



(a) Lognormal distribution



(b) Weibull distribution

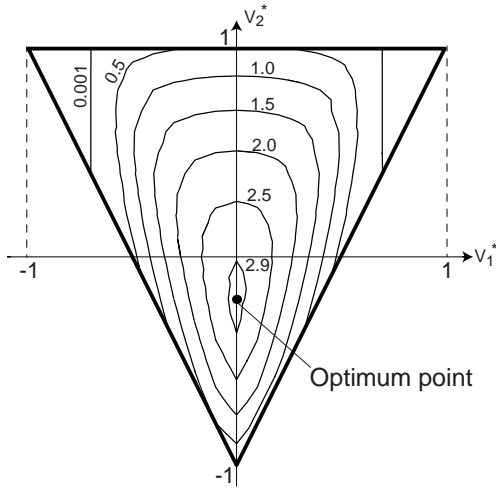
Fig. 8 Effect of probabilistic distribution type in load case 2.

Table 4 Thickness-minimized design.

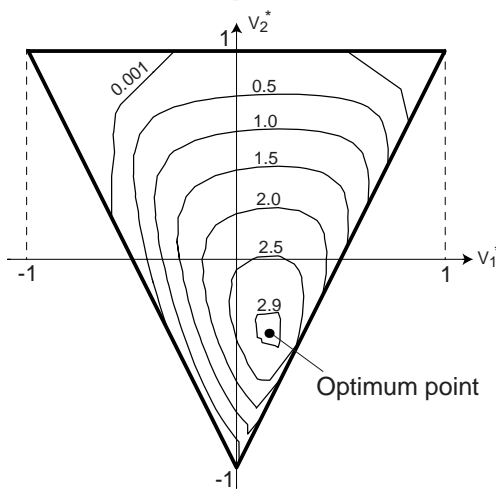
	Case 1	Case 2
h_{opt} (mm)	0.821	0.814
V_1^*	0.0	0.156
V_2^*	-0.204	-0.356
h_0 (mm)	0.163 (0.199)	0.195 (0.240)
$h_{\pm 45}$ (mm)	0.495 (0.603)	0.552 (0.678)
h_{90} (mm)	0.163 (0.199)	0.067 (0.082)

5.4 板厚最小化問題 同じく断面の形状が一辺 0.1m の正方形の積層板に対して, (20) にしたがって, 信頼性制約のもとでの板厚が最小となる積層構成を求める. ここでは, 信頼性指標の下限値 β_a を 3.0 と設定し, 初期設計を板厚 $h = 1.0\text{mm}$, 積層パラメータ $(V_1^*, V_2^*) = (0.5, 0.5)$ としている.

得られた最適解を表 4 に示す. どちらの荷重ケースにおいても, 信頼性指標は下限値 $\beta_{opt} = 3.0$ に収束する. 各層の体積含有率を表のカッコ内に示している



(a) Case 1: $h_{opt} = 0.821\text{mm}$.



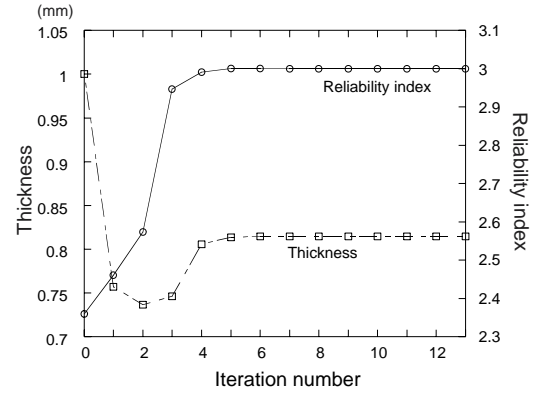
(b) Case 2: $h_{opt} = 0.814\text{mm}$.

Fig. 9 Reliability index distribution at the optimum thickness laminated plate.

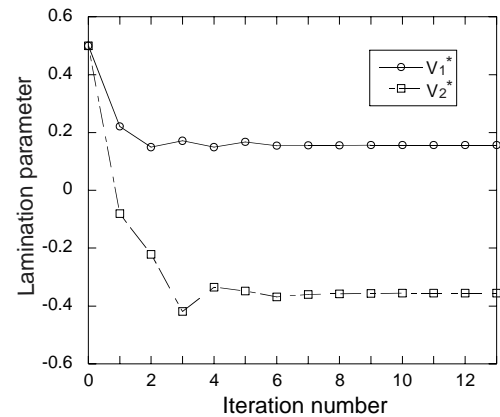
が、この値は、上節の信頼性最大化設計とほぼ同じである。このことから、積層パラメータだけでなく、板厚を設計変数に加えた板厚最小化問題でも、積層パラメータの有効性が機能していると言える。

また、最適な板厚における積層板の信頼性分布を図9に示す。得られた最適解はその厚さにおいて信頼性が最大となる点と一致し、全域的最適解となることがわかる。なお、板厚の変化に伴い、積層板の剛性や強度が変化するため、信頼性分布も変化することは明らかである。図7と図9を比較すると、板厚の大きい方が、信頼性指標が正になる領域、つまり破損確率が50%以下になる領域が広くなることが確認できる。

次に、荷重ケース2に対する収束履歴を図10に示す。計算の初期では、信頼性指標に関する制約は活性化していないため、板厚および積層パラメータの値が大きく変化する。しかし、繰り返しが進むにつれて、



(a) Thickness and reliability index.



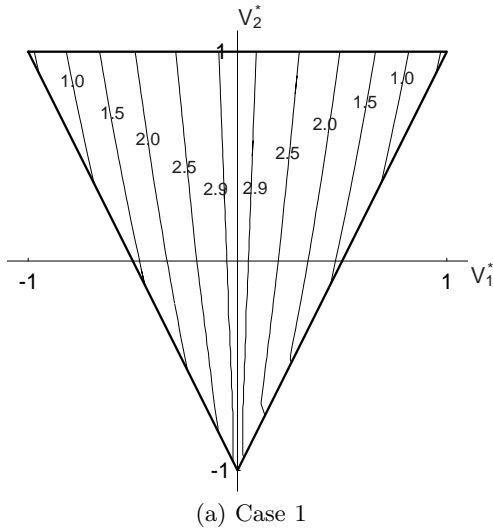
(b) Lamination parameters.

Fig. 10 Convergence history of thickness-minimized design in load case 2.

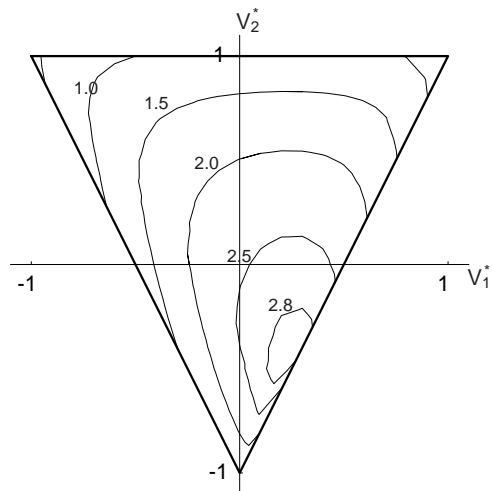
信頼性指標に関する制約は常に活性となり、板厚および積層パラメータの値が収束していく様子が見られる。

5.5 確定的な強度比分布との比較 材料特性および負荷荷重に変動がなく表1および表2に示す平均値を確定値とした場合の強度比と信頼性指標とを比較する。厚さ1mmの正方形平板(0.1m×0.1m)に対する強度比の積層パラメータ空間における分布を図11に、強度比が最大となる積層構成を表5に示す。どちらの荷重ケースでも、確定的な強度比等高線の形状は、信頼性分布(図7)とは大きく異なっている。

確定的な設計ではどちらも2種類の配向角のみの場合に強度が最大となり、3種類の配向角が必要となる信頼性に基づく設計と異なっている。特に、荷重ケース1の場合、 0° 層と 90° 層が等しく存在する $V_1^* = 0$ 軸上では、確定的な強度はそれほど変わらない。つまり、 $\pm 45^\circ$ 層はほとんど影響しない。これは図7に示した信頼性分布と大きく異なっている。特に、 $(V_1^*, V_2^*) = (0, 1)$ において確定的な強度が最大になるが、信頼性指標は $\beta = 1.0$ 程度と非常に小さくなる。これは、材料特性や荷重の変動を考慮することの重要性を示す一例である。



(a) Case 1



(b) Case 2

Fig. 11 Strength ratio distribution.

Table 5 Strength maximized design.

		Case 1	Case 2
Strength ratio	R_{opt}	3.02	2.99
Lamination parameter	V_1^*	0.0	0.240
	V_2^*	1.0	-0.521
Layer thickness	h_0 (mm)	0.50	0.240
	$h_{\pm 45}$ (mm)	0.00	0.760
	h_{90} (mm)	0.50	0.00

6. 結 論

本研究では、面内荷重を受ける $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称バランスト積層板の信頼性最大化問題および信頼性に基づいた板厚最小化問題に積層パラメータを適用し、以下の点を明らかにした。

- 確率変数の分布形により信頼性の値は異なってくるが、分布形によらず、信頼性は積層パラメータ空間で滑らかに分布する。

- 板厚一定の積層板に対する信頼性を最大化場合、および信頼性制約のもとで板厚を最小化する場合のどちらの信頼性に基づく最適設計問題に対しても、設計変数に積層パラメータを適用することでスムーズに最適解に収束する。

なお、今後の課題として、以下の点が挙げられる。

- 信頼性解析および最適化の数値解法をさらに効率化し、変位など剛性をも考慮した設計問題や曲げ、ねじり、座屈など面外剛性、面外強度を考慮した問題へ適用すること。
- 実際の積層板では層厚が離散値をとることを考慮する必要がある。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、有益な助言をいただいた甲南大学 中易秀敏教授に感謝する。

文 献

- (1) 室津, 米澤, 邵, システム信頼性工学, (1996), 共立出版.
- (2) 茨木, 福島, FORTRAN77 最適化プログラミング, (1991), 岩波書店.
- (3) M. Miki, Y. Murotsu, T. Tanaka, and S. Shao, *AIAA J.*, **28** (1990), 1980–1986.
- (4) M. Miki, Y. Murotsu, and T. Tanaka, *AIAA J.*, **30** (1992), 189–196.
- (5) S. Shao, M. Miki, and Y. Murotsu, *AIAA J.*, **31** (1993), 919–920.
- (6) 室津, 材料, **45-5** (1996), 588–589.
- (7) N. Kogiso, S. Shao, and Y. Murotsu, *Structural Optimization*, **14** (1997) 184–192.
- (8) 小木曾, 邵, 室津, 機論, **64-625**, A (1998) 2231–2238.
- (9) 小木曾, 中村, 室津, 機論, **65-640**, A (1999) 2424–2431.
- (10) N. Kogiso, S. Katou, K. Higashi, and Y. Murotsu, *CD-ROM Proc. 4th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Paper No. 139, (2001) 1–6.
- (11) 三木, 材料システム, **3** (1984), 83–98.
- (12) 轟, Haftka, 機論, **64-618**, A(1998), 514–521.
- (13) 亀山, 大関, 福永, 関根, 第 43 回構造強度に関する講演会論文集 (2001), 229–232.
- (14) S. W. Tsai, H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing, (1980) (訳: 藤井, 複合材料の強度解析と設計入門, 日刊工業新聞社, (1986))
- (15) 中易, 前川, 機論, **55-513**, A(1989), 1028–1035.
- (16) 中易, 機論, **56-528**, A(1990), 1807–1816.
- (17) 小木曾, 中川, 室津, 材料, **51-1** (2002), 74–79.
- (18) O. Ditlevsen, *Journal of Structural Mechanics*, **7** (1979), 453–472.