



骨組構造物の耐荷力に対する安全性評価

著者	宮脇 幸治郎
引用	大阪府立工業高等専門学校研究紀要, 1982, 16, p.69-77
URL	http://doi.org/10.24729/00008027

骨組構造物の耐荷力に対する安全性評価

Safety Evaluation on Bearing Forces of Skeletal Structures

宮 脇 幸治郎*
Kohjiro MIYAWAKI*

(昭和57年4月15日受理)

ABSTRACT

This paper concerns the plastic and reliability analysis of skeletal structures. The simple plastic analysis estimates the ultimate strengths (the bearing loads) under combined stresses and the safety analysis searches how much reliability have the strength.

A modes of plastic collapse and bearing loads for structural systems are got by the step-by-step method. Hence, a yield conditions of the member nodes is defined that the absolute principal stresses by the bending moments, the axial force and the shear forces is beyond of the yield stress. And a collapse of structural systems is determined by the discriminant of matrices in which base the continuous states of members and the position of reaction, and do the orientation of member and reaction.

The reliability of the bearing forces evaluates a safety index of nodes with a given structure and a given loads and the probability of failure for the nodes are obtained. The nodes of collapse against the setting loads and the bearing capacities are got from the node-failure-probability.

1. 緒 言

構造物の大型化が近年進んでいる。このような構造物の設計ならびに建造時に十分な安全性および信頼性の確保が必要となる。しかも性能の向上、軽量化、省エネルギーあるいは経済性等が要求される。このような要求を満足させるための手法に塑性解析と信頼性解析を加味した手法が考えられる。すなわち、一般の多くの不静定構造物は、塑性解析で設計される傾向にあり、その結果極限状態における信頼性が問題となる。これらに関連する研究には、つぎのようなものがある。

塑性解析の基礎概念は、数多くの文献^{1)~3)}に著わされている。骨組構造の研究の大部分は曲げモーメントのみが断面の塑性化に有効であると仮定して行われた。しかし、D.E.GriersonとA. A. Aly⁴⁾は Polizzotto らの研究を発展させ、曲げモーメントのみならず、軸力、ねじりモーメントの組合せ部材力を考慮し、目的関数を重量最小の最適問題として行った。A.Badala, A. Morinetti と G. Oliveto⁵⁾は、トラス構造に対して座屈と完全弾塑性破壊とを考慮し、構造系の崩壊確率を求めた。

構造物には、多くの不確定要因が含まれており、これに信頼性工学の手法が取り入れられ、その研究は種々の形でなされている。⁶⁾最近、O. Ditlevson⁷⁾は構造物の信頼性評価に種々の

*土木工学科 (Department of Civil Engineering)

安全性の指標を定義した。また, D. Frangopol, N.D. Hung と J. Rondal⁸⁾ は単純塑性解析法に信頼性解析を加味し, 重量最小の最適設計を行った。

本研究は, 骨組構造で構成される建造物の耐荷力を評価し, これに対する信頼性の評価を行った。まず, 崩壊モードおよび耐荷力は塑性解析に準ずる逐次計算法により塑性崩壊に到るまで荷重を漸増させて求める。塑性解析での節点の挙動は, 節点の降伏するまでその節点は弾性的であり, 降伏した後は完全塑性であるとし, 節点以外の部分は, 常に弾性的挙動を呈する。なお断面(節点)の降伏条件は, 曲げモーメント, 軸力, せん断力によって生じる主応力の絶対値が節点での全断面の降伏応力に達している状態によって定義する。構造系の崩壊は, 部材の連続状態と反力の位置とに基因する変位伝達マトリックスおよび部材または反力の方に基因する剛性マトリックスの判別行列式によって定義する。

つぎに, 耐荷力の信頼性評価は, まず設定された構造形態の対象となる節点の安全性指標を求める。求められた安全性指標を用いて, その節点の破壊確率を算定し, 設定された荷重状態によって定まる崩壊モードに対する崩壊確率は, 節点の破壊確率より求める。崩壊モード数と求めた破壊確率より, 耐荷力の信頼性が求められる。

最後に耐荷力を評価する信頼性がどのようなパラメータによって変化するか少し数値計算を行い, いくつかの結果が得られた。

2. 骨組構造物の崩壊の定義

2.1 節点の破壊の定義

まず, 塑性解析を行うに際して仮定した事項は, (1)構造物が崩壊する以前に不安定現象は発生しない。(2)荷重は, 静的に作用し各々の荷重は比例して単調に増加する。(3)ぜい性破壊は発生しない。(4)クリープ, 疲労は考慮しない, の4つである。

部材の任意の断面には, 曲げモーメント M , 軸力 N およびせん断力 Q が作用しており, その全断面が降伏状態にあるとき, Fig1 に示すような応力分布を呈しているとする。すなわち, 繊維応力の大きさは, σ_{x0} であり, せん断応力は τ_0 であるとする。

図中の記号を用いて Z 軸に関するモーメントの釣合条件および軸力の釣合条件より次式のようになる。

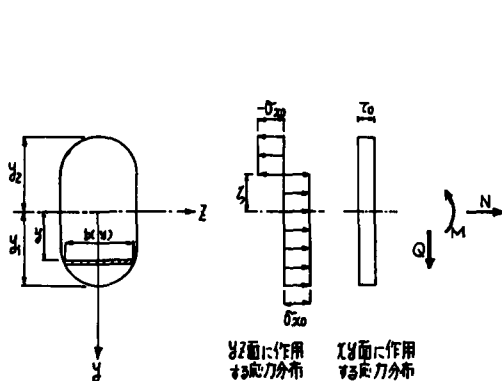


Fig1 応力分布図

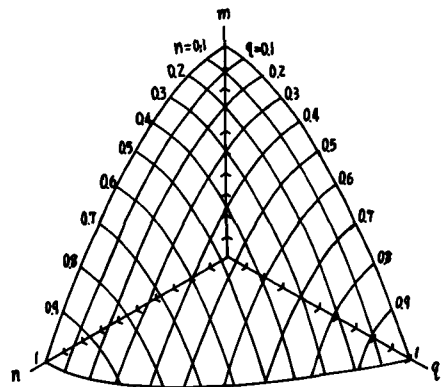


Fig2 降伏面図 (矩形断面)

$$M = \sigma_{xo} G_o(\zeta), \quad N = \sigma_{xo} A_o(\zeta) \quad (1 a, b)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} G_o(\zeta) &= \int_{-\zeta}^{y_1} y b(y) dy - \int_{-y_2}^{-\zeta} y b(y) dy \\ A_o(\zeta) &= \int_{-\zeta}^{y_1} b(y) dy - \int_{-y_2}^{-\zeta} b(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (2 a, b)$$

ζ は図心より中立軸までの距離で, M, N が同符号のとき正である。

式(1 a)および(1 b)より ζ を消去してやれば,

$$\sigma_{xo} = g_1(M, N) \quad (3)$$

なる関数が得られる。さらに, せん断力の釣合条件より,

$$Q = \tau_o A \quad (4)$$

ここに,

$$A = \int_{-y_2}^{y_1} b(y) dy \quad (5)$$

となる。したがって, 式(3)および(4)より主応力を求めると次式のようになる。

$$\sigma_{xo} = \frac{1}{2} \sigma_{xo} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_{xo}\right)^2 + \tau_o^2} = g(M, N, Q) \quad (6)$$

その結果, 降伏条件式は一般的に式(6)より次式のようになる。

$$g(M, N, Q) \leq \sigma_o \quad (7)$$

いま対象とする部材断面が軸対象断面で式(3)の σ_{xo} と式(4)の τ_o を降伏応力 σ_o で無次元化すれば次式のようになる。

$$\sigma_{xo} = \frac{\sigma_{xo}}{\sigma_o} = \left\{ \frac{1}{2} m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} m\right)^2 + (\alpha n)^2} \right\}, \quad \tau_o = q \quad (8 a, b)$$

ここに,

$$m = \frac{M}{\sigma_o S}, \quad n = \frac{N}{\sigma_o A}, \quad q = \frac{Q}{\sigma_o A}$$

S は塑性断面係数, α は断面によって定まる定数であり, 矩形断面の場合は $\alpha = 1$ である。したがって, 式(6)は,

$$\tilde{g} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{xo} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{xo}\right)^2 + q^2} \quad (9)$$

となる。

骨組構造物において部材が結合している節点, 部材の断面特性が変化する点および荷重の作用する点などにおいて, 破壊する断面が生じれば式(9)の $\tilde{g} = 0$ になり, $\tilde{g} > 0$ ならばその節点での安全余裕を意味する。降伏面に達した構造部材の断面は塑性ヒンジが発生した節点で置換できるものとする。Fig 2は矩形断面のときの降伏面を示す。

1.2 構造物の崩壊の定義

まず骨組構造物の崩壊とは, 少なくとも構造物系において有限変形が荷重の増加なしに起り

うるときの状態をいう。いまこのとき、つぎのことがいえる。

荷重 L_i に任意の変化 dL_i があり、その結果として変位、伸び、ずれ、節点回転角、軸ひずみ、曲率、軸力、せん断力、曲げモーメントにそれぞれ dxi , du , dv , $d\theta$, $d\epsilon$, $d\gamma$, $d\varphi$, dN , dQ , dM の変化を生じたとすれば、荷重 L_i+dL_i は $N+dN$, $Q+dQ$, $M+dM$ と釣合っているから、 dL_i は、 dN , dQ , dM と平衡状態にある。仮想仕事の原理から、つぎの関係にある。

$$\begin{aligned} \sum dL_i dx_i = & \int \left\{ \frac{dM}{d\varphi} (d\varphi)^2 + \frac{dN}{du} (du)^2 + \frac{dQ}{d\gamma} (d\gamma)^2 \right\} ds \\ & + \sum \left\{ \frac{dM}{d\theta} (d\theta)^2 + \frac{dN}{du} (du)^2 + \frac{dQ}{d\gamma} (d\gamma)^2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、右辺第1項は内力の降伏節点以外での仕事を意味し、第2項は降伏節点での仕事を意味する。崩壊の際には、 $dL_i=0$, $dM/d\theta=0$, $dN/du=0$, $dQ/dv=0$ であり、また $dM/d\varphi > 0$, $dN/d\epsilon > 0$, $dQ/d\gamma > 0$ であるゆえに、

$$d\varphi=0, \quad d\epsilon=0, \quad d\gamma=0$$

なら、

$$dM=0, \quad dN=0, \quad dQ=0 \quad (11)$$

となる。

したがって構造物が崩壊状態にあるときには外力のなす仕事は、塑性ヒンジによって吸収される仕事に等しい。このことは、構造系の崩壊状態は荷重の増加なしに変形が進行する状態であるとともに、別の表現をすれば、荷重によって部材力が定まらない状態ということである。すなわち、荷重ベクトル \underline{L} 、節点変位ベクトル \underline{X} 、部材力ベクトル \underline{P} 、荷重伝達マトリックス \underline{B} 、剛性マトリックス \underline{S} 、変位伝達マトリックス \underline{A} 、部材剛性マトリックス \underline{K} なる諸量は、

$$\left. \begin{aligned} \underline{L} &= \underline{S} \underline{X} \\ \underline{P} &= \underline{B} \underline{L} \end{aligned} \right\} \quad (12a, b)$$

ここに、

$$\underline{S} = \underline{A}' \underline{K} \underline{A}$$

$$\underline{B} = \underline{K} \underline{A} \underline{S}^{-1}$$

なる関係にある。このとき、構造系が崩壊状態にあれば、

$$\det\left(\frac{\partial \underline{L}}{\partial \underline{X}}\right) \equiv \det(\underline{S}) = 0 \quad (13)$$

あるいは、

$$\det\left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{L}}\right) \equiv \det(\underline{B}' \underline{B}) = \det(\underline{A}' \underline{A}) = 0 \quad (14)$$

となる必要がある。

ここでは、骨組構造系の崩壊の定義は、式(13)あるいは(14)を満足する状態であると定める。

3. 節点の安全性指標および破壊確率

安全性を評価する近似的方法に、2nd Moment 法がある。すなわち不規則変動量を期待値と変動係数（あるいは分散）によって評価し、これより破壊に対する抵抗強度と作用強度との差

差を求め、安全性指標なる量が求められる。

式(9)を用いて節点に関する安全性指標 β^* を具体的に求めると次式のようにになる。

$$\beta^* = \frac{\{\tilde{f}(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}) - \tilde{g}(\mu_{Y_1}, \mu_{Y_2}, \dots, \mu_{Y_l})\} \sigma_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} X_i \right)_0^2 V_{X_i}^2 + \sum_{j=1}^l \left(\frac{\partial g}{\partial Y_j} Y_j \right)_0^2 V_{Y_j}^2}} \quad (15)$$

ここに、

$f = \tilde{f} \sigma_0$: 抵抗強度, $\tilde{f} = \sqrt{2\mu - 1}$

$g = \tilde{g} \sigma_0$: 節点の作用強度

$X_1 = \sigma_0$: 降伏応力

$X_2 = \mu$: 塑性率

$Y_j = L_j (j=1, \dots, l)$: 外荷重

μ_{X_i}, μ_{Y_j} : X_i, Y_j に対する期待値

V_{X_i}, V_{Y_j} : X_i, Y_j に対する変動係数

なお、式(15)の分母の()での下添字0は、カッコ内の期待値を意味する。

いま、確率変数がすべて正規分布に従う場合、破壊確率 P_r は次式のような形で得られる。

$$P_r = P_r(\beta^*) = -\Phi(-\beta^*) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{\beta^*}{\sqrt{2}}\right) \quad (16)$$

ここに、 $\Phi(q)$: 正規分布関数

$\operatorname{erf}(q)$: 誤差関数

4. 骨組構造物の耐荷力に対する信頼性評価

4.1 塑性崩壊モード数の決定

複雑な構造物の崩壊形式の総数 n は、つぎの手順に従って求めることができる。まず、発生する可能性のある塑性ヒンジの位置およびその数 N を決定する。さらに構造物系の不静定次数 n_R を求める。 n_R は、つぎの判定式により求める。

$$n_R = (s + t + R) - 2k \quad (17)$$

ここに、 s は節点間部材数、 t は剛節接合材の数、 R は反力数、 k は節点数である。このとき基本崩壊形式の数 n_P は、次式によって求める。

$$n_P = N - n_R = n_B + n_f + n_j \quad (18)$$

また、基本崩壊形式の数は、はり形式、わく形式、節点形式に分類して求める。すなわち、はり形式の数 n_B は、部材中間に作用している外荷重の数であり、わく形式の数 n_f は、層方程式の数であり、節点形式の数 n_j は、部材が2個以上に集っている剛節節点の数である。

組合せ形式の数 n_c は、全体崩壊 n_{c_1} 、部分崩壊 n_{c_2} 、それぞれについてわく形式とはり形式の組合せの数として求められる。

$$n_c = n_{c_1} + n_{c_2} \quad (19)$$

したがって、総数 n は、

$$n = n_p + n_c \tag{20}$$

により得られる。

4.2 節点の破壊確率から構造の崩壊確率の節点

(1) 崩壊モードに対する崩壊確率

いま部材 \textcircled{i} の節点 $[i]$ での破壊する事象を E_i^j と示し、その余事象を \bar{E}_i^j と示す。設定された構造形態、荷重での崩壊モード I において、塑性ヒンジを形成する事象を H_i 、その余事象を \bar{H}_i とする。さらに部材 \textcircled{i} の節点の事象を N_i とし、節点 $[i]$ および $[j]$ において、

$$E_i^j \in H_i, E_j^i \in \bar{H}_i$$

であるとき、崩壊モード I でのつぎの事象を考える。

$$E_c = \prod_i^m \left(\prod_j^k E_i^j \prod_j^k \bar{E}_i^j \right), \quad i, j \in N_i \tag{21}$$

ここに、 m は部材数、 k は節点数である。したがって、事象 E_c の同時崩壊確率は、

$$P^{(1)}(E_c) = \prod_i^m \left(\prod_j^k P_r(E_i^j) \prod_j^k (1 - P_r(E_j^i)) \right), \quad i, j \in N_i \tag{22}$$

となり、連鎖崩壊確率は、

$$P^{(2)}(E_c) = \left\{ \min_{i,j} \left(P_r(E_i^j) \right) \right\} \left\{ 1 - \max_{i,j} \left(P_r(E_j^i) \right) \right\} \tag{23}$$

と近似評価される。

(2) 構造崩壊確率

構造物系の崩壊モード I ($I = 1, 2, \dots, n$) が生じる事象を F_1 、その余事象を \bar{F}_1 とする。このとき、構造崩壊確率 P_f は、

$$P_f = P_r(F_1) + P_r(\bar{F}_1 \cap F_2) + \dots + P_r(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3 \dots \bar{F}_{n-1} \cap F_n) \tag{24}$$

となる。上式により P_f を求めようとする場合すべての崩壊モードを決定する必要があり、さらに多次元分布関数に基づく計算を必要とする。この計算は、一般に非常に複雑なものである。したがって、式(24)に基づく厳密な崩壊確率の算定は、効率的でない。そこで、崩壊確率 P_f の近似的計算法をつぎのように評価する。

まず、与えられた荷重載荷状態に対応する崩壊モードを塑性解析により決定し、その崩壊モード 1 が生じる事象を F_1 、その崩壊モードが生じる確率を式(22)あるいは式(23)より $P_{r1}^{(1)}$ あるいは $P_{r1}^{(2)}$ とする。つぎに、構造物系に起り得るすべての崩壊形式の数 n を式(20)より求め、各崩壊モード I ($I = 1, 2, \dots, n$) の間の相関が無いと仮定し、さらに、一般に、

$$P_{r1} \geq P_{r2} \geq \dots \geq P_{rn}$$

であるから、 $P_{ri}(i \neq 1)$ を P_{r1} で近似評価すれば式(24)は、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} P_f &= P_{r1} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} (1 - P_{r1})^r \right\} \\ &= 1 - (1 - P_{r1})^n \end{aligned} \tag{25}$$

したがって、式(25)より構造物の部材の座屈を無視した耐荷力に対する信頼性の評価は、

$$L = 1 - P_f = (1 - P_{f1})^n \quad (26)$$

より求められる。

5. 数値計算例

5.1 設定モデル

ここでは、骨組構造物について最も基本的な構造形態である一端固定他端支承ばり（はりモデルと称す。Fig 3）および一層門型ラーメン（ラーメンモデルと称す。Fig 4）を取扱うものとする。図中の記号において λ , ξ_1 , ξ_x はそれぞれ荷重比, 幾何学的形状比, 部材断面比の係数を表わしている。なお, 対象部材断面は正方形断面とした。さらに数値計算に用いた諸元を表一に示す。

表一 諸 元

ヤング率 $E(\text{kg}/\text{cm}^2)$	2.1×10^6	一端固定他端支承	
降伏応力	平均値 $\tilde{\sigma}_0(\text{kg}/\text{cm}^2)$	2500	幾何学的形状比 ξ_1
	変動係数 CV_0	0.05	0.6
塑性率	平均値 $\tilde{\mu}$	1 ~ 4	門型ラーメン
	変動係数 CV_0	0.05	幾何学的形状比
部材断面 $b_0 \times b_0(\text{cm}^2)$	5×5	荷 重 比	1
形状寸法 $a(\text{cm})$	500	荷重の変動係数	2
			0.05
			$\tilde{0.40}$

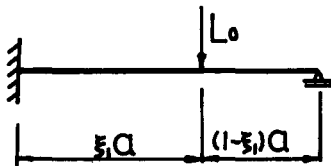


Fig 3 設定モデル (はり)

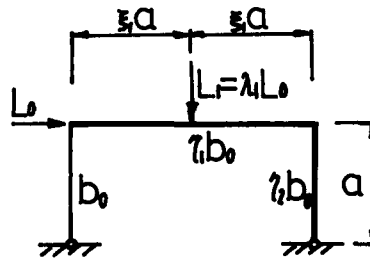


Fig 4 設定モデル (ラーメン)

5.2 計算結果

数値計算は、荷重の変動係数、節点での塑性率によってどのような崩壊確率に特性を示すか検討するために行ってみた。

Fig 5は、はりモデルで荷重の変動係数0.2, 降伏応力の変動係数0.05に設定したときの塑性率の崩壊確率に対する影響を示している。図中●は、各節点間の破壊は独立に生じ、塑性解析で定まる崩壊モードで構造系が同時崩壊するときの確率を示している。一方○は、同じように構造系が連鎖崩壊の確率を示す。

図の結果からわかるように、構造系が連鎖崩壊の方が、同時崩壊する確率より大きくなっている。この結果は、モンテカルロ法など直接法による結果と同様の特徴となっている。また、塑性率 μ が大きくなるほど崩壊確率が小さくなる傾向を示しているが、連鎖崩壊の場合 $\mu=1.5$

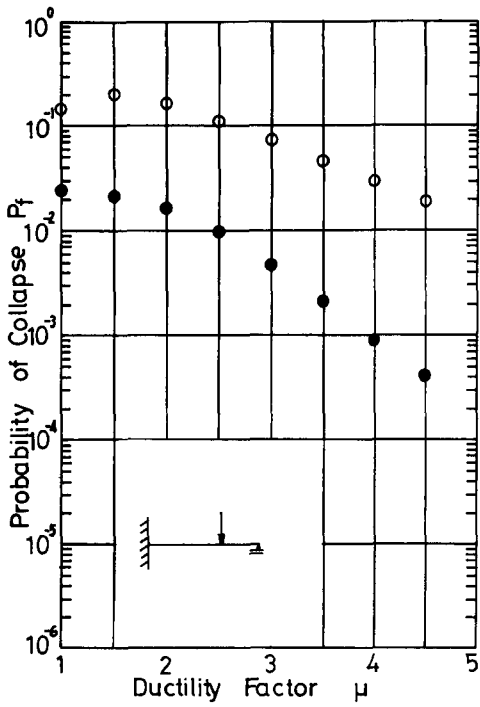


Fig 5 塑性率による崩壊確率
(はりモデル)

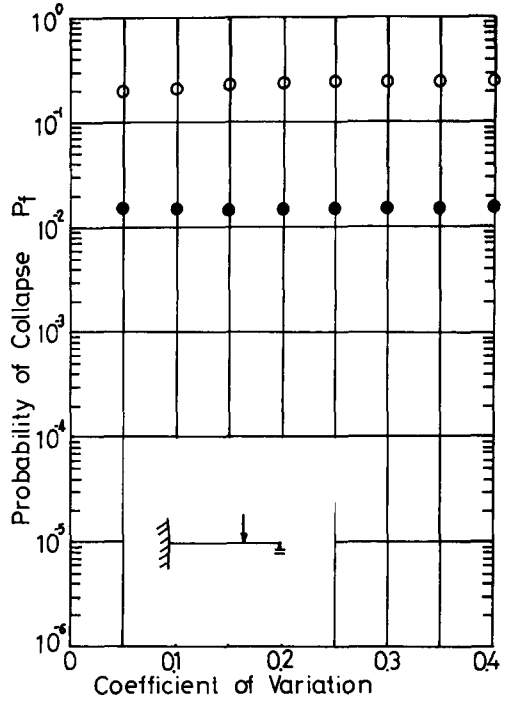


Fig 6 荷重変動係数による崩壊確率
(はりモデル)

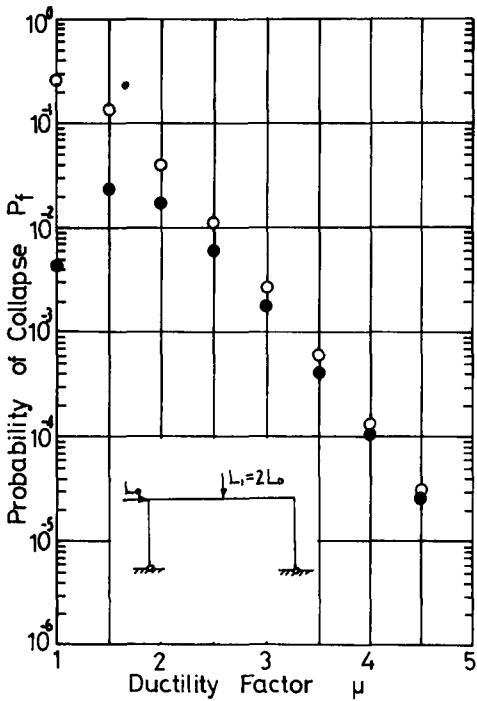


Fig 7 塑性率による崩壊確率
(ラーメンモデル)

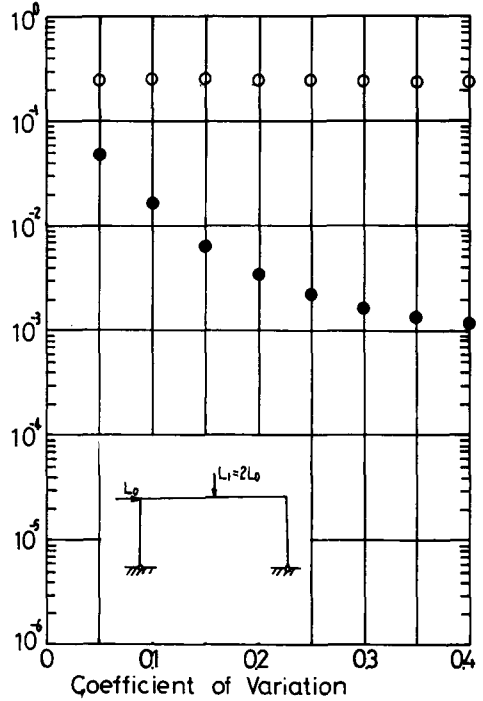


Fig 8 荷重変動係数による崩壊確率
(ラーメンモデル)

付近に少し増する傾向をもっている。

Fig 6は、同じはりモデルで、塑性率 $\mu=1$ での荷重変動係数が構造系の崩壊確率にどのように影響をもつかを示している。

図より、変動係数が0.05～0.4に変化した場合、同時崩壊と連鎖崩壊の確率はほとんど変化はなく、若干増加傾向をもっている。

Fig 7は、ラーメンモデルで荷重の変動係が0.2、荷重比が2、降伏応力の変動係数0.05に設定したときのFig 5に対応する結果である。図の結果より、はりモデルと同様の傾向をもっているが、塑性率が2.5以上での連鎖崩壊と同時崩壊の確率差はあまり大きくなく、崩壊確率の低下の割合が大きい。また、同時崩壊の場合、はりモデル異なり $\mu=1.5$ 付近でピークをもっている。

Fig 8は、ラーメンモデルで塑性率 $\mu=1$ のときの荷重の変動係数の影響を示している。求められた結果は、連鎖崩壊の場合、はりモデルと同じ傾向を、すなわち変動係数の増加に対してあまり変化がみられないが、同時崩壊の場合、はりモデルと非常に異っている。すなわち、荷重の変動係数が0.25までは急激に崩壊確率は下り、それ以上の変動係数に対してはあまり大きな変化はみられない。このようなフレームモデルにおいては各節点の破壊確率が変動係数により増加しても塑性解析で定まる崩壊モードで構造系が同時崩壊するときその崩壊確率が低下する特徴をもっている。

6. 結 言

本研究は、組合せ荷重下での骨組構造の耐荷力を塑性解析と信頼解析で行った。すなわち、塑性解析は、単純塑性解析に準ずる仮定を設け、塑性ヒンジの形成過程を逐次求めてゆき、耐荷力と塑性解析による構造系の崩壊モードを求めた。このようにして求められた耐荷力の信頼性は、構造系の各節点の破壊確率を2nd Moment法により近似評価し、塑性解析によって求められた崩壊モードに対する崩壊確率を求め、さらに他の崩壊モード数を求めて、構造系としての信頼性を評価した。

本解析手法は、複雑な破壊モード間の積分を計算することなく、比較的容易に耐荷力の評価ができる。したがって、複雑な骨組構造物の設計への応用が容易になる。

最後に、今後の課題としては、塑性解析を行う際に構造物の不安定現象すなわち、座屈の評価がなされていない。さらに地震動のような繰返し載荷に対する耐荷力の評価とその信頼性の評価方法の確立が必要となってくる。

参 考 文 献

- 1) Hodge, P.G: "Plastic Analysis of Structures," McGraw-Hill, 1959.
- 2) Massonnet, C.E. & M.A. Save: "Plastic Analysis and Design", Blaisdell, 1961.
- 3) Neal, B.G.: "The Plastic Method of Structural Analysis", Chapman & Hall, 1963.
- 4) Donald E. Grierson & A.A.Aly: "Plastic Design under Combined Stress", ASCE, Vol, 106, No.EM4, 1980. pp.585~607.
- 5) Badala, A, A.Marinetti & G.Oliveto: "The Collapse load of pin-jointed networks of randomly imperfect rods", Eng. Struct., 1980, Vol.2, pp.9~14.
- 6) 土木学会編:「構造物の安全性・信頼性」, 土木学会, 1976.
- 7) O.Ditlevson: "Narrow Reliability Bounds for Structural Systems", J.Struct. Mech., 1979, pp.453~472.
- 8) Frangopol, D.& J-C. Dotrepppe: "Four Models For the Reliability Analysis of Structural Behaviour", Int. Conf. Appl. Numer. Modelling 1st, 1978, pp.429~437.