高次キュムラントと自己相関関数及び相互相関関数を活用した離散時間線形モデルのパラメータ推定

高次キュムラントと自己相関関数及び相互相関関数を活用した離散時間線形モデルのパラメータ推定

竹　安　数　博・樋　口　友　紀

ARMAモデルにおいて、そのシステム同定方法の一つとしてブートストラップ法がある。しかし、収束性は必ずしも良くなかった。本論文では、ARパラメータは３次キュムラントを用いて推定し、MAパラメータは自己相関関数及び相互相関関数を用いてモデルの構造的な前提からくるa priori knowledgeを活用することによって、新しいパラメータ推定アルゴリズムを開発した。新しい手法は収束率が良く、収束解が得られるまでの総合時間が短縮される。

キーワード：時系列解析、ARMAモデル、自己相関関数、キュムラント、パラメータ推定

1. はじめに

(p,q) 次のARMAモデル（自己回帰移動平均モデル）は

$$x_n + \sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i} = e_n + \sum_{j=1}^{q} b_j e_{n-j} \tag{1}$$

で表される。

ここで

$\{x_n\}$：定常エルゴード的正規過程 $x(t)$ の標本時系列 $(n = 1,2,\cdots,N,\cdots)$

$\{e_n\}$：平均値０、分散 $\sigma_e^{\,2}$ の正規性白色雑音

である。

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + \cdots + a_p Z^{-p}$$

$$B(Z^{-1}) = 1 + b_1 Z^{-1} + \cdots + b_q Z^{-q}$$

とおくと、$A(Z^{-1}),\ B(Z^{-1})$ は既約で定常条件、可逆条件、強正実条件を満たすものとする。なお、式(1)は一般的にはARMAX（Autoregressive Moving Average with exogenous input）モデル

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p x_{n-p} = c_1 u_{n-1} + \cdots + c_m u_{n-m} + e_n + b_1 e_{n-1} + \cdots + b_q e_{n-q} \tag{2}$$

における制御入力を受けないシステムのモデルと言い換えることができる。
ここで

$\{u_n\}$：入力時系列

である。
式(1)のパラメータ $\{a_i\}, \{b_i\}$ の推定に際しては、右辺そのものが有色雑音となっており、通常の最小二乗法を用いてもバイアスのかかった推定値となる。推定値がバイアスを持たないようにするため、拡大最小二乗法、一般化最小二乗法、逐次最尤法、補助変数法、疑似線形回帰法などがある[1]－[6]。なお、式(2)におけるパラメータ $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_k\}$ の推定に際しては外生入力項目部分を左辺にもってゆくと、$\{x_n\}, \{u_n\}$ の既知データと $\{a_i\}, \{c_k\}$ の未知パラメータで右辺は式(1)のそれと同じ形となり、ARMAモデルのシステム同定手法の拡張版とみることができる。

制御入力を受けないARMAモデルにおいて、従来必ずしも収束性のよくなかったブートストラップ法に筆者らは新たな手法を導入してその改善を図った[7]。相互相関関数を用いてモデルの構造的な前提からくるa priori knowledgeを活用することによって、ロバストなパラメータ推定および収束解を得るまでのトータルな計算時間短縮が図られた。本論文ではそれを、より改善した３次キュムラントと自己相関関数及び相互相関関数を活用したシステム同定アルゴリズムを提案する。

筆者らの前回の提案では、通常のYule-Walker方程式を用いるとARMAモデルではバイアスのかかったARパラメータ推定となるため、ブートストラップ型アルゴリズムを導入した。しかし、３次キュムラントに対するYule-Walker方程式を用いると、MA項が正規性雑音の場合、ARパラメータが不偏推定となる性質が利用できる[8] [9]。高次キュムラントを活用したシステム同定手法は複数出されているが [10]－[12]、本論文のような3次キュムラントと自己相関関数及び相互相関関数を活用した内容・アプローチのものは出されていない。

以下、２章では３次キュムラントと自己相関関数及び相互相関関数を活用したシステム同定アルゴリズムを提案する。３章では数値計算量について述べる。

2. ３次キュムラントと相互相関関数を活用したARMAモデルのパラメータ推定

まず３次キュムラントに対するYule-Walker方程式を用いたARパラメータ推定について述べ、ついで相互相関関数を用いたMAパラメータ推定アルゴリズムを示す。

2.1 ARパラメータ推定

確率変数が正規分布に従うとき、３次以上のキュムラントは０となる[8] [9]。式(1)の両辺

に $x_{n-l}{}^2$ をかけて平均をとると、$\{e_n\}$ が３次白色であるので

$$c_l + \sum_{i=1}^{p} a_i c_{l-i} = 0 \qquad l \geq 1 \tag{3}$$

ここで

$$\begin{aligned} c_l &= c(x_n, x_{n-l}, x_{n-l}) \\ &= E\left[x_n x_{n-l}{}^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

の３次キュムラントである。式(3)で l を１から p まで動かすと、３次キュムラントに対するYule-Walker方程式

$$\begin{pmatrix} c_0, & c_{-1}, & \cdots, & c_{1-p} \\ c_1, & c_0, & \cdots, & c_{2-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p-1}, & c_{p-2}, & \cdots, & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \tag{5}$$

を得る[9]。これを

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c}_s \tag{6}$$

と表記することにする。

$c_l \quad (l = 0,1,2,\cdots)$ の推定値 $\hat{c}_l$ は

$$\hat{c}_l = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l+1}^{N} x_i x_{i-l}{}^2 \tag{7}$$

で表される。

$\{c_l\}$ の推定値 $\{\hat{c}_l\}$ を用いて、式(6)より $\boldsymbol{a}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{a}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{a}} = -\hat{\boldsymbol{c}}^{-1}\hat{\boldsymbol{c}}_s \tag{8}$$

により不偏推定値として求めることができる。

ここで、$\hat{\boldsymbol{c}}, \hat{\boldsymbol{c}}_s$ は各々 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}_s$ において $\{c_l\}$ の推定値 $\{\hat{c}_l\}$ を置き換えたものである。これは、ホワイトノイズによって励起されたARモデルがYule-Walker方程式で $\boldsymbol{a}$ の不偏推定値を得ることができるのと同じ原理であるといえる。

2.2 MAパラメータ推定

$$\tilde{x}_n = x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p x_{n-p}$$

とおく。$\{\tilde{x}_i\}$ の自己相関関数は定義により

$$R_k = E[\tilde{x}_n \tilde{x}_{n+k}] \tag{9}$$

$$R_{-k} = R_k \tag{10}$$

である。また、$\{x_n\}$ と $\{e_n\}$ の相互相関関数は $\{e_n\}$ が白色雑音であるから

$$T_{e\tilde{x}}(l) = E[e_n \tilde{x}_{n+l}] = T_l \quad (l \geq 0) \tag{11}$$

$$T_{\tilde{x}e}(l) = E[\tilde{x}_n e_{n+l}] = 0 \tag{12}$$

$$T_{e\tilde{x}}(-l) = E[e_n \tilde{x}_{n-l}] = 0 \tag{13}$$

$$T_{\tilde{x}e}(-l) = E[\tilde{x}_n e_{n-l}] = T_l \tag{14}$$

となる。また、

$$E[e_k e_l] = \begin{cases} \sigma_e{}^2 & : k = l \\ 0 & : k \neq l \end{cases} \tag{15}$$

である。

なお、有限個のデータで実際に計算すると、$E[\tilde{x}_n e_{n+l}], (l > 0)$ のように、本来は無相関で理論的には0であるはずのものが、0でない値を持つことがある。これを

$$T_{\tilde{x}u}(l) = E[\tilde{x}_n e_{n+l}] = T_{-l} \qquad (\cong 0) \tag{16}$$

$$T_{e\tilde{x}}(-l) = E[e_n \tilde{x}_{n-l}] = T_{-l} \quad (\cong 0) \tag{17}$$

$$E[e_k e_{k+l}] = E[e_{k+l} e_k] = s_l \quad (\cong 0) \tag{18}$$

のように表すことにする。また、上記式(19)、(30)の表記に合わせ、

$$E[e_k{}^2] = \sigma_e{}^2 = s_o \tag{19}$$

と表すことにする。

　現代制御理論において、系の状態空間表現を行い、ARMA過程表現に落とし込むと、$q \leq p$

となることは周知である[13]。以下、簡単のため $q=p$ とする。式(1)を

$$\tilde{x}_n=\sum_{i=1}^{p}b_i e_{n-i}+e_n \tag{20}$$

と書きなおし、ベクトルを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_n&=\left(e_{n-1},\cdots,e_{n-p}\right)^T\\&=\boldsymbol{e}_n\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}&=\left(b_1,\cdots,b_p\right)^T\\&=\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{22}$$

式(20)は

$$\tilde{x}_n=\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{Z}_n+e_n \tag{23}$$

と表せる。ここで

$$I_n=\sum_{n=1}^{N}\left[\tilde{x}_n-\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{Z}_n\right]^2 \tag{24}$$

を最小にするパラメータ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ を求める。最小二乗推定は

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\left[\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n{}^T\right]^{-1}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{Z}_n\tilde{x}_n \tag{25}$$

で与えられる。ここで $N\to\infty$ とすると、式(25)の右辺は各々 $\{e_n\}$ の自己相関関数と $\{\tilde{x}_n\},\{e_n\}$ との相互相関関数で記述でき、

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{t} \tag{26}$$

となる。ただし

$$\boldsymbol{s}=\sigma_e{}^2\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{t}=\left[T_1,\quad T_2,\quad\cdots,\quad T_p\right]^T$$

である。式(26)を書きなおすと、

$$\sigma_e{}^2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t} \tag{27}$$

となる。これより

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sigma_e{}^2}\boldsymbol{t} \tag{28}$$

が得られる。パラメータ推定の全体のアルゴリズムは、表１のようなものが考えられる。収束性の判定は

$$D^{(l)} = \sum_{i=1}^{p}\left|\frac{\hat{b}_i{}^{(l)} - \hat{b}_i{}^{(l-1)}}{\hat{b}_i{}^{(l-1)}}\right| \tag{29}$$

において

$$D^{(l)} < \varepsilon \tag{30}$$

が m 回連続で成立したときとする。

表１．パラメータ推定のアルゴリズム

ステップ 1	:	正規性白色雑音を発生させ、$\{e_n\}$ の初期値とする
ステップ 2	:	$\hat{\sigma}_e{}^2, \{\hat{T}_i\}$ を計算する
ステップ 3	:	式(28)より $\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ を推定する
ステップ 4	:	式(20)より $\{e_n\}$ を推定する
ステップ 5	:	ステップ 2,3,4 を $\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ が収束するまで繰り返す

$\boldsymbol{b}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{b}}$ は式(28)にみられるように、行列、逆行列演算なく非常に簡単に求めることができる。従来の方法であれば、$\boldsymbol{S}$ の全成分が埋まった形でパラメータ推定計算がなされるが、ここでは構造的な前提からくるa priori knowledgeを活用することによって

- 解のロバスト性
- 計算時間の短縮

が期待できる。なお、式(16)～(19)を用いた場合、式(26)に相当するものは次のようになる。これは、いわゆる従来手法の範疇に入るものである。

$$\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{s}}^{-1}\boldsymbol{t} \tag{31}$$

ここで

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} s_0, & s_1, & \cdots, & s_{p-1} \\ s_1, & s_0, & \cdots, & s_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p-1}, & s_{p-2}, & \cdots, & s_0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{t} = \left(T_1, T_2, \cdots, T_p\right)^T$$

である。

パラメータ推定の全体アルゴリズムは、表２のようなものが考えられ、収束の判定は

$$D^{(l)} = \sum_{i=1}^{p} \left| \left(\frac{\hat{b}_i^{(l)} - \hat{b}_i^{(l-1)}}{\hat{b}_i^{(l-1)}} \right) \right| \tag{32}$$

において

$$D^{(l)} < \varepsilon \tag{33}$$

が m 回連続で成立した時とする。

表２．パラメータ推定のアルゴリズム

ステップ 1	:	正規性雑音を発生させ、$\{e_n\}$ の初期値とする
ステップ 2	:	$\{\hat{T}_i\}, \{\hat{S}_i\}$ を計算する
ステップ 3	:	式(31)より $\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ を推定する
ステップ 4	:	式(20)より $\{e_n\}$ を推定する
ステップ 5	:	ステップ 2,3,4 を $\hat{\boldsymbol{b}}^{(l)}$ が収束するまで繰り返す

2.3 解の収束性について

ARMAモデルにおいて、相互相関関数を用いてモデルの構造的な前提からくるa priori knowledgeを活用することによって、ロバストなブートストラップ型アルゴリズムを筆者は開発した[7]。そこでは、従来手法では約半数のケースしか収束しなかったのに対し、新アルゴリズムでは全ケースが収束した。本論文においてもブートストラップ型アルゴリズムはこの新しい方法を導入しており、収束性についても同様のことが言える。

3. 数値計算量について

以下、計算量の見積もりを行う。式(23)、(24)は一般的にみると

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \tag{35}$$

の形であると言える。(25)式では逆行列計算の計算量の見積もりが重要となる。一般に逆行列の計算法として下記のものが挙げられる。

- ガウスードゥーリトル法　　掃き出し法
- QR分解
  - －Gram-Schmidt法
  - －Householder法
- Conjugate Gradient Method（共役勾配法）

n 変数における逆行列計算の計算量の見積もりを L とすると、次のようになる。
ここで、除算: J 乗算: I 減算: G 加算: K とすると、

$$\begin{aligned} L &= n\text{回のピボット}(K=1\sim n) \\ &\times\left[1\text{ピボットにつき}\{(2n-K)\text{回の除算}+(2n-K)\text{回の減算}\}\times(n-K+1)\right] \end{aligned} \tag{36}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \prod_{K=1}^{n}\{J(2n-K)+G(2n-K)\}(n-K+1) \\ &\cong O(n^3) \end{aligned} \tag{37}$$

となる。
n 変数における行列×行列の積は下記のようになる。

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} n\text{回の積} \cong O(n^3) \tag{38}$$

n 変数における行列×列の積は下記のようになる。

$$\prod_{i=1}^{n} n\text{回の積} \cong O(n^2) \tag{39}$$

n 変数において、新旧アルゴリズム双方とも S_o 回の繰り返しで収束と仮定する。$\boldsymbol{b}$ の推定について、本論文によるアルゴリズムでは、式(28)より $S_oO(n)$ となる。一方、従来の

アルゴリズムではAR部分の推定も繰り返し計算されるため、$S_oO(2n)^3$ の計算量となる。$n=3, S_o=20$ の場合と $n=4, S_o=40$ の場合を比較したものを表3に示す。

表3. 計算量の比較（α: constant）

アルゴリズム	計算量	$n=3, S_o=20$ の場合	$n=4, S_o=40$ の場合
本論文による新手法: A	$S_oO(n)$	60α	160α
従来手法: B	$S_oO((2n)^3)$	4320α	20480α
従来手法: C(MA 部の $\boldsymbol{b}$ のみ見た場合)	$S_oO(n^3)$	540α	2560α
計算量の比率: D(C/A)		9 倍	16 倍

これらの数値ケースの場合、新手法では約1/10の前後のオーダーになると言えよう。

4. おわりに

制御入力を受けないARMAモデルにおいて、従来必ずしも収束性のよくなかったブートストラップ法に筆者らは新たな手法を導入し、その改善を図った[7]。本論文では新たにARパラメータは３次キュムラントを活用したパラメータ推定を行い、MAパラメータは[7]に出された考え方を活用しつつ、ARパラメータ推定結果を組み込むことにより、よりシンプルなシステム同定アルゴリズムを開発した。これによってロバストなパラメータ推定及び収束解を得るまでのトータルな計算時間の短縮が図られる。今後はARMAXモデルなどにも本手法を適用し、適用範囲の拡大を図ってゆきたく考えている。

参考文献

［1］ 得丸英勝、添田喬、中溝高好、秋月影雄；計数・測定、培風館、1982

［2］ 相良節夫、秋月影雄、中溝高好、片山徹；システム同定、計測自動制御学会、1987

［3］ Box Jenkins；Time Series Analysis Third Edition, PRENTICE HALL, 1994

［4］ Torsten Soderstrom "An efficient and Versalile Algorithm for Computing the Covariance Function of an ARMA Process" IEEE Trans on Signal Processing, Vol.46, No.6, 1998

［5］ Xian-Da Zhang, Hiroshi Takeda "An Approach to Time Series Analysis and ARMA Spectral Estimation" IEEE Trans on Acoustics, Speech & Signal Processing, Vol. ASSP-35, No.9, 1987

［6］ 片山徹；システム同定入門、朝倉書店、1994

［7］ Takeyasu.K., T.Amemiya. and H.Goto "Robust System Identification Algorithm of Bootstrap Type" IEMS Vol.1, No.1, 2002

[8] 井上雄二郎“高次統計量キュムラントによる信号処理－Ⅰ”システム/制御/情報、Vol.36, No.2, 1992

[9] 井上雄二郎“高次統計量キュムラントによる信号処理－Ⅱ”システム/制御/情報、Vol.36, No.5, 1992

[10] Y.Inoue and T.Matsui“Cumulant Based Parameter Estimation of Linear Systems of Non minimum Phase”Proc. of the Workshop on Higher-Order Spectral Analysis, 1989

[11] A.Swami and J.M.Mendl“ARMA Parameter Estimation Using Only Output Cumulants”IEEE Trans. Acoust, Speech Signal Processing, Vol.ASSP-38, No.7, 1990

[12] V.Krishanamurthy and H.Vincent Poor“Asymptotic Analysis of an Algorithm for Parameter Estimation and Identification of 1-b Quantized AR Time Series”IEEE Trans, Signal Processing, Vol.44, No.1, 1996

[13] 得丸英勝、竹安数博“離散時間線系モデルのあてはめによるスペクトル密度の推定”計測自動制御学会論文誌、Vol.13, No.2, pp.148-153, 1977