複数ジャンル商品間ブランド選択と行列構造

複数ジャンル商品間ブランド選択と行列構造

竹安　数博・樋口　友紀

Analysis of the Preference Shift of Customer Brand Selection among Multiple Genre and its Matrix Structure

Kazuhiro Takeyasu・Yuki Higuchi

Abstract: It is often observed that consumers select upper class brand when they buy next time. Suppose that former buying data and current buying data are gathered. Also suppose that upper brand is located upper in the variable array. Then transition matrix becomes upper triangular matrix under the supposition that former buying variables are set input and current buying variables are set output. Takeyasu et al. (2007) analyzed the brand selection and its matrix structure before. In that paper, products of one genre are analyzed. In this paper, brand selection among multiple genre and its matrix structure are analyzed. For example, there is a case that customer selects bracelet or earrings besides selecting upper brand of necklace she already has. Such cases often happen. Analyzing such structure provides useful applications. Unless planner for products does not notice its brand position whether it is upper or lower than other products, matrix structure makes it possible to identify those by calculating consumers' activities for brand selection. Thus, this proposed approach enables to make effective marketing plan and/or establishing new brand.

Keywords: brand selection, matrix structure, brand position

1. はじめに

ブランド品を購入する際、初めは手頃な価格の商品を購入するものの、情報を得たりするうちに、その次に購入するものはより良い、名前の通った高価なものであるということが予想される。そこで、上位ブランドをベクトルの上位から並べ、前回購入を入力、今回購入を出力としたとき、ブランド遷移行列は上三角行列となることが想定される。

同一ジャンルでのブランドの上方シフトについては竹安・樋口（2007）で分析されている。今回はこれを複数ジャンルにまたがる商品に拡張する。例えば、宝飾品でネックレスのケースを考える。使い慣れてくると、よりよい高価なものを買い求める行動となることが予想される。一方で、ネックレスより他のブレスレットやイヤリングの方を買い揃えてゆく行動も一般的によく見られるものである。小売業の関係者にヒアリングすると、同一ジャンルの商品の上方ブランド選択と、別ジャンル商品への購買拡大の双方が観察されるとのことである。したがって、このような分析は現実的に意味のあることで、ブランド購入時の消費者行動を行列構造として明らかにし法則化することができれば、それを予測等に用いることができる。また、一定範囲内でブランドの選択を繰り返すと選択が収束してしまうので、新たなブランド品の市場投入のタイミングを考えることも可能となる。そして、供給者側がブランドのポジショニングを強く意識して市場投入していなかった場合においても、上記行列構造を解析することによって、消費者が評価し、位置づけたポジションを明確に浮かび上がらせることも可能となる。

従来、ブランド変遷に関する計量的把握の試みは、山中（1982）、高橋他（2002）、他出されている。山中（1982）は広告支出等を入力としてマルコフ遷移確率によって消費者の購買過程を捉えようとするものである。また、高橋他（2002）は、ロジスティック分布を用いたブランド選択確率モデルで分析を行っている。また、竹安・樋口（2007）では同一ジャンルのブランドの上方シフトとその行列構造が分析されている。本論文は、それを複数ジャンルにまたがる商品に拡張して分析を行うもので、現実的にはそういった行動も多くみられるものである。なお、このような取り組みは確認し得る限り過去に例がないものである。

以下、2. では同一ジャンルの商品のブランド選択と行列構造について明らかにし、3. ではそれを複数ジャンルの商品のブランド選択と行列構造について分析する。4. では s-step 先の予測式について述べる。5. では数値計算で確認し、6. では手法の活用について述べることとする。

2. ブランド選択と行列構造

(1) ブランド選択の上方シフト

初めは手頃なブランド品を購入していた者も、次に購入する時はよりよいもの、多少値が張っても名前の通ったより高級なブランド品を購入したくなるのが常である。
バッグ、時計、自動車など、枚挙に暇がない。
今、x, y, z というブランドがあるとして、x が最上位に位置するブランド、y がその次に位置するブランド、z が最下位ブランドである場合を考える。一般的な消費者行動は $z \to y$, $y \to x$, $z \to x$ 等である。$x \to z$ はあまり見受けられないであろう。

x が現在の購買、x_b が以前の購買を示すとする。x へは x_b か y_b、もしくは z_b からシフトしていっているので、

$$x = a_{11}x_b + a_{12}y_b + a_{13}z_b$$

と表すことができる。同様に y は

$$y = a_{22}y_b + a_{23}z_b$$

z は、上位から降りてくることはないので

$$z = a_{33}z_b$$

と表せる。
これらを書き直すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\mathrm{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{\mathrm{b}} \tag{2}$$

となる。ここで

$$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3,\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3\times3},\ \mathbf{X}_{\mathrm{b}} \in \mathbf{R}^3$$

である。

A は上三角行列となる。

これを検証するには

$$\mathbf{X}^{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{X}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$i = 1,\ 2 \cdots N$$

といったデータを生成し（全て上位へのブランドシフトをするデータ群）、最小二乗法でパラメータ推定をすればよい。

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{A}\mathbf{X}_{\mathrm{b}}^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i \tag{5}$$

とおく。

このとき、

$$\varepsilon^i = \begin{pmatrix}\varepsilon_1^i\\ \varepsilon_2^i\\ \varepsilon_3^i\end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

である。

$$J = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^{iT}\boldsymbol{\varepsilon}^i \to Min \tag{6}$$

とする **A** の推定値 $\hat{\mathbf{A}}$ は

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}^i \mathbf{X}_{\mathrm{b}}^{iT}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_{\mathrm{b}}^i \mathbf{X}_{\mathrm{b}}^{iT}\right)^{-1} \tag{7}$$

によって求めることができる。

全て上位へとブランドシフトするデータ群では、(7) で推定された $\hat{\mathbf{A}}$ は上三角行列となるはずである。

(3)、(4)であえて

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{\mathrm{b}}^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

といった上位ブランドから下位ブランドへシフトするデータ群がごく少量混入すると、$\hat{\mathbf{A}}$ は下三角部分に微小項を含む行列として推定されることが考えられる。

(2) 行の並べ替えによるブランド優先順位へのソート

一般のデータを取り扱うと、変数が必ずしも上述の x, y, z のように並んではおらず、z, x, y のように並んでいることも考えられる。この場合、$\hat{\mathbf{A}}$ は上三角に大きな値が並ぶ形とならず、かなりバラバラに大きい値と小さい値が入り混じることが考えられる。ただ、これは行の入れ替え操作を繰り返すことにより、より上位と考えられるブランドから下位ブランドへと並べなおすことができる。それによって行列も大きな値が上三角部分に、微小項が下三角部分に集まることが考えられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\hat{\mathbf{A}}}{\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \varepsilon & \bigcirc & \bigcirc \\ \varepsilon & \varepsilon & \bigcirc \end{pmatrix}} \xleftarrow{\text{行入替}} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \overset{\hat{\mathbf{A}}}{\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \varepsilon & \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}} \qquad (8)$$

(3) ブランド選択が逐次的に上位シフトせずジャンプする場合

一度何かを買って、しばらくして周りの情報から、あのブランドが一番良いと聞かされると、途中段階のブランドはスキップしていきなり最上級ブランドを購入するケースもよくみかけられる。

ブランドを v, w, x, y, z とし、左側にいくほど上位ブランドと仮定すると、

$$v \leftarrow z$$
$$v \leftarrow y$$

といったシフトとなる。z から y, x, w には行かない、また y から x, w には行かない、x から w には行かないとすると、

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_b \\ w_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \tag{9}$$

のような行列となることが予想される。

これらについては5.で数値例を元に検証する

3. 複数ジャンル製品へのモデルの拡張

一つのジャンルの商品のブランド遷移式を記すと、(2) を拡張して下記のようになる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}_\mathbf{b} \tag{10}$$

ここで

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix}, \ \mathbf{X}_\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_b^1 \\ x_b^2 \\ \vdots \\ x_b^p \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^p, \ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{p \times p}, \ \mathbf{X}_\mathbf{b} \in \mathbf{R}^p$

である。

なお、商品選択が全て上方シフトであるなら

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる。

これを3つのジャンルの商品群に拡大すると、下記のようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} & \mathbf{A}^{13} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} & \mathbf{A}^{23} \\ \mathbf{A}^{31} & \mathbf{A}^{32} & \mathbf{A}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_\mathrm{b} \\ \mathbf{Y}_\mathrm{b} \\ \mathbf{Z}_\mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{14}$$

ここで

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix}, \mathbf{X}_\mathrm{b} = \begin{pmatrix} x_b^1 \\ x_b^2 \\ \vdots \\ x_b^p \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^q \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_\mathrm{b} = \begin{pmatrix} y_b^1 \\ y_b^2 \\ \vdots \\ y_b^q \end{pmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^r \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_\mathrm{b} = \begin{pmatrix} z_b^1 \\ z_b^2 \\ \vdots \\ z_b^r \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{A}^{11} = \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} & \cdots & a_{1p}^{11} \\ a_{21}^{11} & a_{22}^{11} & \cdots & a_{2p}^{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}^{11} & a_{p2}^{11} & \cdots & a_{pp}^{11} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & \cdots & a_{1q}^{12} \\ a_{21}^{12} & a_{22}^{12} & \cdots & a_{2q}^{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}^{12} & a_{p2}^{12} & \cdots & a_{pq}^{12} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{13} = \begin{pmatrix} a_{11}^{13} & a_{12}^{13} & \cdots & a_{1r}^{13} \\ a_{21}^{13} & a_{22}^{13} & \cdots & a_{2r}^{13} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}^{13} & a_{p2}^{13} & \cdots & a_{pr}^{13} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{pmatrix} a_{11}^{21} & a_{12}^{21} & \cdots & a_{1p}^{21} \\ a_{21}^{21} & a_{22}^{21} & \cdots & a_{2p}^{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}^{21} & a_{q2}^{21} & \cdots & a_{qp}^{21} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{22} = \begin{pmatrix} a_{11}^{22} & a_{12}^{22} & \cdots & a_{1q}^{22} \\ a_{21}^{22} & a_{22}^{22} & \cdots & a_{2q}^{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}^{22} & a_{q2}^{22} & \cdots & a_{qq}^{22} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{23} = \begin{pmatrix} a_{11}^{23} & a_{12}^{23} & \cdots & a_{1r}^{23} \\ a_{21}^{23} & a_{22}^{23} & \cdots & a_{2r}^{23} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}^{23} & a_{q2}^{23} & \cdots & a_{qr}^{23} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{A}^{31} = \begin{pmatrix} a_{11}^{31} & a_{12}^{31} & \cdots & a_{1p}^{31} \\ a_{21}^{31} & a_{22}^{31} & \cdots & a_{2p}^{31} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{31} & a_{r2}^{31} & \cdots & a_{rp}^{31} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{32} = \begin{pmatrix} a_{11}^{32} & a_{12}^{32} & \cdots & a_{1q}^{32} \\ a_{21}^{32} & a_{22}^{32} & \cdots & a_{2q}^{32} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{32} & a_{r2}^{32} & \cdots & a_{rq}^{32} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{33} = \begin{pmatrix} a_{11}^{33} & a_{12}^{33} & \cdots & a_{1r}^{33} \\ a_{21}^{33} & a_{22}^{33} & \cdots & a_{2r}^{33} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{33} & a_{r2}^{33} & \cdots & a_{rr}^{33} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^p,\ \mathbf{X}_\mathrm{b} \in \mathbf{R}^p,\ \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^q,\ \mathbf{Y}_\mathrm{b} \in \mathbf{R}^q,\ \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^r,\ \mathbf{Z}_\mathrm{b} \in \mathbf{R}^r,\ \mathbf{A}^{11} \in \mathbf{R}^{p \times p},\ \mathbf{A}^{12} \in \mathbf{R}^{p \times q},$
$\mathbf{A}^{13} \in \mathbf{R}^{p \times r},\ \mathbf{A}^{21} \in \mathbf{R}^{q \times p},\ \mathbf{A}^{22} \in \mathbf{R}^{q \times q},\ \mathbf{A}^{23} \in \mathbf{R}^{q \times r},\ \mathbf{A}^{31} \in \mathbf{R}^{r \times p},\ \mathbf{A}^{32} \in \mathbf{R}^{r \times q},\ \mathbf{A}^{33} \in \mathbf{R}^{r \times r}$

式(14)を

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{W}_\mathrm{b} \tag{17}$$

と書き直すと、遷移行列 A は(7)と同様にして

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{W}^i \mathbf{W}_\mathrm{b}^{iT}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{W}_\mathrm{b}^i \mathbf{W}_\mathrm{b}^{iT}\right)^{-1} \tag{18}$$

によって求めることができる。

ここで

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z}\end{pmatrix},\ \mathbf{W}_{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{b}}\\ \mathbf{Y}_{\mathrm{b}}\\ \mathbf{Z}_{\mathrm{b}}\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} & \mathbf{A}^{13}\\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} & \mathbf{A}^{23}\\ \mathbf{A}^{31} & \mathbf{A}^{32} & \mathbf{A}^{33}\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\mathbf{W}^{i}=\mathbf{A}\mathbf{W}_{\mathrm{b}}^{i}+\varepsilon^{i}\quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{1}^{i}\\ \vdots\\ \varepsilon_{p}^{i}\\ \varepsilon_{p+1}^{i}\\ \vdots\\ \varepsilon_{p+q}^{i}\\ \varepsilon_{p+q+1}^{i}\\ \vdots\\ \varepsilon_{p+q+r}^{i}\end{pmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{22}$$

である。

同一ブランドで購買が上方シフトする場合、例えば $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{33}$ が上三角行列になるであろうことは、2. でみたとおりである。**X** をブレスレット、**Y** をイヤリング、**Z** をネックレスとする。ネックレスだけでみると $\mathbf{A}_{33}$ 内でブランド選択が上方シフトするだけかの話であるが、1. で述べたように他商品へ購買が拡大する場合がある。**Z** のある購買レベルから **X** や **Y** のあるレベルへの購買にシフトする状況が発生する。これは、**Z** を中心にみているが、**X** や **Y** を中心にみても同様のことが言える。**X** 内での上方シフトの他、**Y** や **Z** への購買の拡大が発生する。例えば、**X**, **Y**, **Z** 内の変数が 5 段階ずつあるとし、各段階が各ブランド商品内では最下位から最上位までカバーされ区分されているとする。その場合、例えば **Z** の中位のレベルから他ブランド商品にシフトする場合、**X** や **Y** の中位かそれ以上のレベルにシフトするのかどうかといったことを検証すると、興味ある結果が得られよう。それらがわかれば、他ブランド商品へのシフトの場合もある程度予測できることになり、販売者側としても顧客への商品の案内等をより有効にできるなど、マーケティングに効果的に活用することが可能となる。以下、5. において簡単な数値事例で確認することとする。

4. s-step 先の予測

式 (14) を時系列でみることにする。n 時点先での $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ をそれぞれ

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_p^n \end{pmatrix}, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \vdots \\ y_q^n \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ \vdots \\ z_r^n \end{pmatrix} \tag{23}$$

とおくと、式 (14) は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{Y}_{n-1} \\ \mathbf{Z}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

と記述できる。なお、予測式で乗数の表記が出る関係でサフィックスは右下側につけている。したがって、s-step 先は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+s} \\ \mathbf{Y}_{n+s} \\ \mathbf{Z}_{n+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}^s \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

で予測できる。

なお

$$\mathbf{A}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(s) & \mathbf{A}_{12}(s) & \mathbf{A}_{13}(s) \\ \mathbf{A}_{21}(s) & \mathbf{A}_{22}(s) & \mathbf{A}_{23}(s) \\ \mathbf{A}_{31}(s) & \mathbf{A}_{32}(s) & \mathbf{A}_{33}(s) \end{pmatrix} \tag{26}$$

とおくと、

$s = 2$ のとき

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^2 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}, & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}, & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}, & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}^2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}, & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23} + \mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}, & \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}, & \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23} + \mathbf{A}_{33}^2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

となる。

$s=3$ の場合、行列内の式が長くなるので Block Matrix 別に表記すると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11}(3) &= \mathbf{A}_{11}^{3}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\\
&\quad+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\\
\mathbf{A}_{12}(3) &= \mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{12}^{2}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\\
&\quad+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\\
\mathbf{A}_{13}(3) &= \mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\\
&\quad+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{2}\\
\mathbf{A}_{21}(3) &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{2}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\\
&\quad+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\\
\mathbf{A}_{22}(3) &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{22}^{3}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\\
&\quad+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\\
\mathbf{A}_{23}(3) &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{22}^{2}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\\
&\quad+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{2}\\
\mathbf{A}_{31}(3) &= \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{2}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\\
&\quad+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{31}\\
\mathbf{A}_{32}(3) &= \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}^{2}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\\
&\quad+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{32}\\
\mathbf{A}_{33}(3) &= \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\\
&\quad+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{33}^{3}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

となる。

$s=4$ の場合、同様に Block Matrix 別に表記すると下記のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{11}(4) &= \mathbf{A}_{11}^{4}+\mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\\
&\quad+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{2}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\\
&\quad+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{2}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\\
&\quad+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{2}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\\
&\quad+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\\
&\quad+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{12}(4) = {} & \mathbf{A}^{3}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{2}_{22}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32} \\
& +\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{3}_{22}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32} \\
& +\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}^{2}_{22}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22} \\
& +\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}^{2}_{33}\mathbf{A}_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{13}(4) = {} & \mathbf{A}^{3}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33} \\
& +\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}^{2}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}^{3}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}^{2}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23} \\
& +\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{3}_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{21}(4) = {} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{3}_{11}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} \\
& +\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{2}_{11} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}^{3}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}^{2}_{11}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}^{2}_{33}\mathbf{A}_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{22}(4) = {} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}^{2}_{22} \\
& +\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}^{4}_{22}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}^{2}_{22}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}^{2}_{33}\mathbf{A}_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{23}(4) = {} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{2}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23} \\
& +\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}^{2}_{33}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}^{3}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}^{2}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13} \\
& +\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}^{2}_{33}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23} \\
& +\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}^{3}_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{31}(4) = {} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{3}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\\
&+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{2}\\
&+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}^{2}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\\
&+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{2}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\\
&+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\\
&+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}+\mathbf{A}_{23}^{3}\mathbf{A}_{31}\\
\mathbf{A}_{32}(4) = {} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{2}\\
&+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\\
&+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}^{3}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\\
&+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\\
&+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}^{2}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\\
&+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}+\mathbf{A}_{33}^{3}\mathbf{A}_{32}\\
\mathbf{A}_{33}(4) = {} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{2}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}\\
&+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}^{2}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}\\
&+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}^{2}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\\
&+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{33}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{33}\\
&+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{33}^{2}\mathbf{A}_{32}\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{33}^{4} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

これらを見るとわかるように

$$\mathbf{A}^{s}$$

の各 Block Matrix $\mathbf{A}_{ij}(s)(i=1,2,3)(j=1,2,3)$ の項数は

$$3^{(s-1)}$$

となる。

5. 数値計算例

以下 2. において $p=q=r=3$ のケースを考える。**Z** の下位から **Z** 内での中位、**Z** の下位から **Y** の下位、中位、上位、**Z** の中位から **Y** の中位、上位、**Z** の上位から **Y** の上位、**Z** の下位から **X** の下位、中位、上位、**Z** の中位から **X** の中位、上位、**Z** の上位から **X** の上位へのシフトが発生するケースを考える。また、**Z** で同一場所に留まるケースも想定する。簡単にするため、**X**, **Y** については同一位置のところへのみシフトする（つまり留まる）もの

とする。その場合、(21) の $\mathbf{A}$ において

$\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}$：対角行列

$\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{32},$：0

$\mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{32},$：上三角行列

となることが予想される。

1. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{Z}$ の2位へ　：　2件
2. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{Z}$ の1位へ　：　1件
3. $\mathbf{Z}$ の2位から $\mathbf{Z}$ の1位へ　：　2件
4. $\mathbf{Z}$ の3位のまま　：　4件
5. $\mathbf{Z}$ の2位のまま　：　4件
6. $\mathbf{Z}$ の1位のまま　：　2件
7. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{Y}$ の2位へ　：　1件
8. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{Y}$ の1位へ　：　1件
9. $\mathbf{Z}$ の2位から $\mathbf{Y}$ の1位へ　：　1件
10. $\mathbf{Y}$ の3位のまま　：　3件
11. $\mathbf{Y}$ の2位のまま　：　1件
12. $\mathbf{Y}$ の1位のまま　：　2件
13. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{X}$ の2位へ　：　2件
14. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{X}$ の1位へ　：　1件
15. $\mathbf{X}$ の3位のまま　：　2件
16. $\mathbf{X}$ の2位のまま　：　3件
17. $\mathbf{X}$ の1位のまま　：　1件
18. $\mathbf{Z}$ の2位から $\mathbf{Y}$ の2位へ　：　2件
19. $\mathbf{Z}$ の1位から $\mathbf{Y}$ の1位へ　：　1件
20. $\mathbf{Z}$ の1位から $\mathbf{X}$ の1位へ　：　1件
21. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{Y}$ の3位へ　：　2件
22. $\mathbf{Z}$ の3位から $\mathbf{X}$ の3位へ　：　1件
23. $\mathbf{Z}$ の2位から $\mathbf{X}$ の2位へ　：　2件
24. $\mathbf{Z}$ の2位から $\mathbf{X}$ の1位へ　：　1件

このときのベクトル $\mathbf{W}, \mathbf{W}_b$ は次のように表わされる。

$$1.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 7.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 13.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 19.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$2.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 8.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 14.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} 20.\ \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_b = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$3.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ 9.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ 15.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 21.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$4.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\ 10.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 16.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 22.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$5.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ 11.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 17.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 23.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$6.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ 12.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ 18.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ 24.\ \mathbf{W}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{W}_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

これらを (18) に代入すると (30) が得られる。

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&3&0&0&0&0&0&2&2\\
0&0&2&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&2&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&2&1\\
0&0&0&0&0&3&0&0&2\\
0&0&0&0&0&0&2&2&1\\
0&0&0&0&0&0&0&4&2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&4
\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&2&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&12&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&15
\end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
1&0&0&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&\frac{1}{15}\\
0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&\frac{2}{15}\\
0&0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{15}\\
\hdashline
0&0&0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&\frac{1}{15}\\
0&0&0&0&1&0&0&\frac{1}{6}&\frac{1}{15}\\
0&0&0&0&0&1&0&0&\frac{2}{15}\\
\hdashline
0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{15}\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{15}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{4}{15}
\end{array}\right) \tag{31}
$$

これをみると、想定通り

$\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}$：対角行列

$\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{32},$：0

$\mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{33},$：上三角行列

となっている。

6. 手法の活用

上記の手法を活用すると、例えば自動車でみるとＡ社からＢ社あるいはＣ社へのブランド選択がシフトする状況が明らかとなる。ブランドレベル間の遷移だけでなく、競合他社へのシフト状況も一目瞭然となる。上記の手法を利用して予測を繰り返すことで、消費者行動

が収束し、ブランド全体の販売が縮小されることも予想される。それにより、新たなブランド投入の時期や、必要性が明確になり、市場拡大に資するという活用等も考えられる。

また、販売者や生産者もブランドの相対的優先順位を認識していなかったが、消費者行動を分析すると、ブランドの優先順位がわかったということもあり得る。その場合、より明確なブランド選択を誘導するマーケティング戦略をとることが可能である。なんとなくバラバラに提供していたものを、順位付けを明確にすることにより、より販売拡大に資することができる。消費者に夢を持たせる高位ブランドを設定することにより、購買に"目標"を持たせることができ、消費拡大につなげることができるのである。

7. おわりに

消費者がブランド品を購入するとき、時間を追って価格帯、ネームバリュー等の点において下位ブランドから高位ブランドへとシフトするのではないかということが考えられる。本論文では、ブランド選択が上方シフトする場合の行列構造を明らかにし、単一ジャンルの商品から複数ジャンルの商品間へモデルを拡張することによって、さらに立体的に構造を把握した。また、ブランドをグループでみた場合の Block Matrix 構造と s-step 先の予測モデルを展開した。数値例では複数ジャンルの商品を対象にブランド選択が上方シフトする場合の行列構造のあり方を検証した。

今後は、これらの関係が鮮明に出ると考えられる自動車業界等の事例について、アンケート調査・分析などを行いながら検証を深めてゆきたいと考えている。

参考文献

Aker, D. A：Management Brands Equity, Simon & Schuster, USA (1991)

片平秀貴：「マーケティングサイエンス」, 東京大学出版会 (1987)

片平秀貴・杉田善弘："マーケティング・サイエンスの最近の動向：米国を中心として", オペレーションズリサーチ, Vol. 14, pp. 178-188 (1994)

高橋弓子・高橋武則："ロイヤルティを考慮した消費者のブランド選択モデルの構築", 日本経営工学会論文誌, Vol. 53, No. 5, pp. 342-347 (2002)

山中均之："広告とブランド遷移に関する計量的研究",「マーケティングサイエンス」, 千倉書房 (1982)

Takeyasu, K., and Y. Higuchi.: Analysis of the Preference Shift of Customer Brand Selection, International Journal of Computational Science (IJCS), Vol. 1, No. 4, pp. 371-394 (2007)