大阪公立大学
Osaka Metropolitan University
学術情報リポジトリ

技術進歩と均衡成長

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-10-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山谷, 恵俊 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00016598

大阪府立大学経済研究叢書 第25冊

技術進歩と均衡成長

山 谷 恵 俊 著

大阪府立大学経済学部

大阪府立大学経済研究叢書 第25冊

技術進歩と均衡成長

山 谷 恵 俊 著

大 阪 府 立 大 学 経 済 学 部

目　　次

凡　　例

1　序文，本文，および註にあらわれる括弧〔　〕内の数字は，巻末にあげられた参考文献番号をさしている．

2　数式，および図の番号は，章（I，II……）ごとにあらためている．

序にかえて

——本書の意図と構成——

本書は，技術進歩が新投資にのみ体化されるという観点のもとに，異質的資本と同質的労働を投入物とする生産のモデル（vintageモデル）を構成し，経済成長に関する理論的諸問題を追求したものである．

技術進歩の「体化」（embodiment）は，現在建造されたばかりのvintageの機械に対してのみならず，現在訓練されたばかりの労働に対しても適用されうる．前者は ‘capital embodied’，後者は ‘labour embodied’ と呼ばれる．しかし，「体化された技術進歩」のより重要な特徴は，後者よりも，前者についてあらわれるので，本書における分析は，「資本に体化された技術進歩」の場合だけに限定する．

成長モデルを構成するにあたって，次のような基本的仮定を設定する．

(1) 技術進歩は恒常的な率で進行する．そして粗投資は，その時点の産出量の一定割合であり，建造時に存在する最高の技術知識を体化する．さらに，資本は無限の物理的耐久性をもつと仮定され，それを生産構造の中から取除くことを決定する唯一つの要因は，陳腐化である．

(2) 完全競争が仮定される．したがって，資本設備の経済的廃棄は，その稼得する準地代がゼロになるとき，発生する．

(3) 労働供給は，外生的に与えられ，時間にわたって一定率で増大するが，いかなる時点においても，過剰要素となることはないと仮定する．そして支障なく完全雇用が成立するものとする．

このような仮定のもとで，分析される内容は，次の通りである．

(1) まず，いくつかの均衡条件を満す自己完結的な経済成長のモデルを構成する．

(2) そのモデルにおいて，内生変数である産出量，粗投資，消費，賃金率などが，恒常的な率で成長してゆくような「均衡成長径路」(Balanced Growth

Path）はどのようにあらわされるか，そしてそれはどのような条件のもとに存在するかを検討する．

(3) 粗貯蓄率，人口増加率，技術進歩率などのパラメーターを変化させたとき，均衡成長径路はどのように変化するか．モデルの比較動学的分析をおこなう．とりわけ，粗貯蓄率変化の効果が興味の中心になる 最大消費均衡成長径路の存在に関する黄金律は，新古典派 non-vintage モデルの一つの遺産であるが，それが，このような vintage モデルにおいて成立するか，否かを検討する．

(4) 均衡成長径路の安定性を，いくつかのケースについて証明する．

(5) 同質的，変形可能な資本財を仮定した新古典派 non-vintage モデルにくらべて，変形不能な資本のモデルでは，将来についてのの予想の要素がより重要になる．投資，労働雇用，技術選択などは，現在の諸事情のみならず，将来についての予想に依存する．殊に機械建造後に資本財の労働集約度が固定されてしまう場合には，「投資行為は人質を運命に委ねる」(Hahn and Matthews [14] p.839) ことである．現在の賃金率が将来もそのまま持続すると予想する場合と，将来賃金率の恒常成長を予想する場合とでは，企業者行動が異ってくる．現実は，両者の中間に在るであろうが，理論的には，このようなゼロ予見と完全予見の両極端を分析すればよい そこで，一般モデルとして，ゼロ予見にもとづくモデルを構成して，均衡成長の諸性質を議論したのち，完全予見の影響を考察する．

(6) 一部門モデルについての上述の議論を二部門モデルに拡張する、一般的な多部門分析はおこなわない、それは，n 部門モデルと二部門モデルの間には，一部門モデルと二部門モデルの間にみられるほどの質的差異が認められないからである．

これらの分析を通じて，結論的に主張できることは，vintage アプローチによる均衡成長径路の性格が，新古典派的 non-vintage モデルにおいて導かれている均衡成長の一般的性格と極めて類似しているということである．議論を完全にするためには，上述の諸仮定のもとでのモデルの一般解や，ある均衡

成長径路から他の均衡成長径路への移行過程について分析しなければならないが，紙数の都合上，割愛した．

次に，本書の構成方法について述べなくてはならない．

技術進歩が新投資にのみ体化されると考えるとき，新機械建造時における要素代替（事前的代替）の可能性と，建造後におけるそれ（事後的代替）の区別が重要になる．新古典派理論の枠組の中に，体化された技術進歩，したがって資本の異質性を導入したとき，それは伝統理論からの離脱を意味する．しかし，スムーズな生産関数にしたがって，事前・事後の要素代替をおこなうことは，資本の異質性と必ずしも矛盾しない．資本は，新技術を体化しているが，putty のようなもので，いかなる時点においても，どのような労働供給をも認容するよう連続的に形を変えることができる．Phelps〔40〕の語法にしたがえば，これは 'putty-putty' ケース（事前的に putty であるとともに事後的にも putty）にほかならない．それは一つの極端をあらわしている．

他の極端は，新機械の労働需要が建造前に既に固定しているとともに，建造後の選択の可能性も存在しないという考えである．そこでは，スムーズな生産関数のかわりに，固定係数の技術が設定される．'clay-clay' ケースと呼ばれる．反新古典派的な Harrod=Domar 理論〔15〕，〔9〕の依拠する生産関数がそれである．

これら両極端の中間に，新資本のみが putty であるとする考えがある．新機械の建造される時点では，企業家は，種々の資本・労働比率をともなう技術の間の選択が可能であるが，建造されたのちは，機械の労働需要は，建造時の量に固定されてしまう．言いかえれば，スムーズな生産関数にしたがって，事前的には要素代替が可能であるが，事後的には不能である．これは 'putty-clay' ケースと呼ばれる．

経済成長という分析対象の長期理論的性格は，固定係数よりも事前的代替との斉合性がより大きく，'体化' 仮設は，事後的代替より事後的非代替の方により大きい現実性を付与する．「真理は中間に在り」(Solow〔51〕p. 92)．本書の非常に多くの部分を，この putty-clay ケースに割いた．中間部のⅢ，Ⅳが

それに相当する．そして，Ⅰ，Ⅱが putty-putty ケース，Ⅴが clay-clay ケースである。

以下で，各章の内容の要約と，関連文献のアクノレジメントを記しておこう．

Ⅰ 「要素代替と均衡成長——労働増大的技術進歩の場合」 これは一部門 putty-putty ケースである．まず，技術進歩が労働増大的（labour augmenting）であることを仮定したとき，均衡成長径路が存在し，しかも安定であることを明らかにする．しかし，有効労働の平均生産力に上限を設定するか否かによって，均衡成長径路存在のための条件が異るだけでなく，資本設備について，前者では陳腐化が内生的に発生するが，後者では物理的消失がない限り，経済的寿命は無限大である．次に，均衡成長の比較動学的分析において，均衡成長率が貯蓄率の高さから独立であること，設備の経済的耐用年限と貯蓄率の逆行関係や，黄金律径路の必要十分条件などが導かれる．それらは non-vintage の新古典派モデルにおけると全く同一の結果を示している．

参考文献として第一に挙げられるべきものは Levhari〔29〕である．均衡成長径路の存在と黄金律に関する議論が展開されている．

Ⅱ 「要素代替と均衡成長——資本増大的技術進歩の場合」 技術進歩が資本増大的（capital augmenting）であるとき，均衡成長径路の存在は，生産関数における要素代替の弾力性に依存することが，putty-putty モデルについて明らかにされる．要素代替の弾力性が1にひとしいとき（Cobb-Douglas 型），Ⅰと同様の分析結果が成立する．ところが，代替弾力性が1より小さいときには，産出量の究極の成長率は労働力増加率にのみ依存し，技術進歩の貢献は時間の経過とともに消滅してゆく．産出量体系の大域的安定と双対的に，均衡利子率の負値収束が導かれる．逆に，代替弾力性が1より大きいときには，産出量体系も双対体系も無限発散的である．すなわち，均衡成長径路と資本増大的技術進歩は両立しない．

もともと，体化された資本増大的技術進歩を資本理論の中で取りあげたのは Solow〔51〕，〔53〕，〔50〕である．そこでは，異質的な資本設備のメニューを

一つの等価な資本に集計することが論証される．その観点を，成長理論に導入して，均衡成長の存在と安定性を導いたのは，Koyck＝t′ Hooft-Welvaars〔25〕である．しかし，それらの分析はいずれもCobb-Douglasの世界に限定されていた．Cobb-Douglas世界から離れるとき，均衡成長の存在と安定性が破壊されるという‘Razor's edge character’を指摘したのがAkerlof and Nordhaus〔1〕である．Ⅱはこれらの議論に多くを負っている．

Ⅲ 「要素の事後的非代替と均衡成長——一部門モデル」 putty-clayケースの一部門モデルである．はじめに，将来賃金に関するゼロ予見を仮定して，労働増大的な「体化された」技術進歩が恒常的に進行している場合の成長モデルを構成し，生産の技術的条件として，労働が不可欠であることを仮定するかぎり，均衡成長解が存在するということを導く．

このモデルの均衡成長径路の一つの特徴は，資本財の労働集約度，および経済的耐用年限が先決され，産出量，投資，その他の均衡成長解は，これらのタームで完全にあらわされることである．とりわけ，均衡産出量に対する貯蓄増加の効果は，capital deepening effectとcapital lengthening effectの合成果とみることができる．そして，均衡成長の比較動学的分析の諸結果は，要素代替弾力性に依存することが明らかとなる．代替弾力性が1をこえないときには，分析結果はputty-puttyケース（Ⅰ）と同一であるが，代替弾力性が1より大きい場合には，逆方向の結果が生じる．

次に，完全予見を仮定したとき，均衡成長の様相がどのように変化するか．注目すべきことは，ゼロ予見の場合に確立された，貯蓄増加の資本設備耐用年限に及ぼす影響と要素代替弾力性の間のみごとな対応関係が，完全予見のモデルでは失われてしまうことである．のみならず，貯蓄増加の資本集約度に対する影響も不確定となる．

労働が新投資と可変的な比率で結合されるが，現存資本については固定的な比率でしか結合されないという考え方を最初に導入したのはJohansen〔21〕である．しかしながら，そこでは，生産関数の線型性が仮定され，成長過程における設備陳腐化の認識が欠如していた．Kurz〔26〕やMassel〔32〕は，そ

の認識のうえに立って成長モデルを構成するが，そこで設備の経済的寿命は，市場の力によって決定されるのでなく，政策的に決定される変数と考えられている．予想の要素の導入とともに，機械寿命の内生化を導いた一つの完結した理論モデルは Phelps [40] によって確立される．ただし，分析対象が Cobb-Douglas の世界に限られていた．Ⅲは，いわば，Cobb-Douglas 世界から一般世界への拡張である．この一部門 putty-clay ケースに属する文献としては，上述のもののほかに，Salter [47]，[48]，Kaldor and Mirrlees [22]，Swan [55]，Pyatt [44]，Weizsäcker [60] などがある．また，均衡成長解存在の最初の検討としては Kemp, Sheshinski and Thanh [23]，安定分析については Sheshinski [49] を挙げなくてはならない．

Ⅳ 「要素の事後的非代替と均衡成長――二部門モデル」 Ⅲの二部門モデルへの拡張である．将来賃金に関するゼロ予見と，労働増大的技術進歩のもとで，生産関数に関する若干の経済学的仮定を設定して，均衡成長径路の存在が導かれる．Brouwer の不動点定理の一つの適用例を示している．均衡成長の比較動学的分析においては，貯蓄増加と capital deepening や capital lengthening の間の因果関係が，一部門モデルのようには明確でなくなる．ただし，生産関数が両部門ともに Cobb-Douglas 型の場合には，極立った特徴として，両部門で異った率での均衡成長が可能となり，技術進歩の部門間格差が産出量均衡成長の部門間格差に反映する．また，資本設備の経済的耐用年限が，貯蓄率から独立となり，構造定数としての産出量の要素弾力性との間に明確な関係がクローズアップされてくる．

この種の二部門モデルの文献としては Solow [52] があるが，これは成長理論としてよりむしろ資本理論として展開されたものである．また，Kemp and Thanh [24] は，Cobb-Douglas 関数のもとに，予見の種類と部門の多寡に応じて4種の成長モデルを構成し，均衡成長の構造を分析している．

Ⅴ 「固定係数と均衡成長」 最後に，clay-clayケースにおける均衡成長径路の存在と安定性が検討され，比較動学的分析がおこなわれる．モデルの均衡成長解の存在を保証するために貯蓄率の満すべき条件が明らかにされるが，

完全予見の想定のもとでは，その条件が同時に，均衡利子率の正値性を保証するのに対し，ゼロ予見の場合に均衡利子率の正値性を確保するためには，貯蓄率について一層きびしい条件が満されなければならぬことが明らかにされる．しかし，putty-clay ケース（Ⅲ）と異って，完全予見かゼロ予見かの差異は，資本設備の経済的耐用年限や産出量均衡成長解には影響しない．賃金や利子率の決定にのみ関係を持っている．次に，二部門モデルに関して特徴的なことは，一部門モデルで導き出した解存在条件と同じ条件が，資本財部門についてのみ成立するならば，体系の均衡成長径路が存在するということである．

この方面の文献としては，一部門モデルの Solow, Tobin, Weizsäcker and Yaari〔54〕がある．その主な意図は，事前的にも事後的にも代替が不能にもかかわらず，基本的な新古典派的方法が機能することを示すことであった．V は，安定分析の手法をこの文献に負っている．

1968年2月

山　谷　恵　俊

I　要素代替と均衡成長

――労働増大的技術進歩の場合――

§1　労働増大的技術進歩と均衡成長径路

1　モデル　資本財の物理的減価なしと仮定し，純粋に労働増大的な「体化された」技術進歩が一定率 λ でおこなわれているものとする.(1) そのとき，T 時に建造された（vintage T の）資本設備 K_T による t 時（$t \geqq T$）における生産物 $Q_T(t)$ の生産関数は

$$Q_T(t)=F(e^{\lambda T}L_T(t), K_T) \tag{1.1}$$

であらわされる．$L_T(t)$ は，t 時において K_T と組合される労働量とする．そこで，F を連続な一次同次関数とすれば，(1.1) は

$$Q_T(t)=e^{\lambda T}L_T(t)f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right) \tag{1.1a}$$

と書くことができる．ただし

$$f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)\equiv F\left(1,\ \frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right).$$

さて，f は 'well behaved'，すなわち，次のような条件が満されていると

(1)　$F^{(T)}(L_T,\ K_T)$ を vintage T の機械 K_T によって生産される産出物の生産関数とするとき，すべての T，および L_T，K_T のすべての正の値に対して，$F^{(T)}(L_T,\ K_T)=F(b(T)L_T,\ K_T)$ となるような正定数 $b(T)$ が存在するならば，そしてそのときにのみ，技術変化は労働増大的（labour augmenting）と呼ばれる．しかも，$b(T)=b(0)e^{\lambda T}(\lambda>0)$ とあらわされるとき，労働増大的な技術進歩がおこなわれているという．それは，このようなかたちの技術進歩が，産出量や分配率に関するかぎり，労働投入の増加するのと同じ効果をもつという認識にもとづいている．（Phelps〔42〕(p. 22)，Allen〔3〕(p. 238) 参照)．λ を rate of labour augmentation というが，労働力増加率とまぎらわしいので，本書では単に技術進歩率と呼ぶことにする．また，このような技術進歩は Harrod 中立的である．Uzawa は，技術変化が労働増大的であることと，Harrod 中立的であることが同値であることを証明している（Robinson＝Uzawa Theorem)．Uzawa〔57〕(pp. 119―20)，Robinson〔45〕(pp. 139―42)，Phelps〔42〕(p. 22) 参照.

仮定する.(2) すなわち，すべての $x>0$ について，$f(x)$ は連続的に2回微分可能で，

(1.2) $$f'(x)>0,\quad f''(x)<0,\quad f'(\infty)=0.$$

さらに，

(1.3) $$f(0)=0,\ f(\infty)<\infty$$

を仮定する．これは，K_T が与えられたとき，配分労働 $L_T(t)$ を小さくするならば，有効労働単位当り産出量は増加するが，その増加には上限が存在することをいみする．その上限をuであらわすとき，$e^{-\lambda T}K_T\neq 0$ に対して

(1.3a) $$\lim_{L_T(t)\to 0} f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)=u<\infty.$$ (3)

ところで，t 時に存在している種々の vintage の設備に対する労働量の最適配分の条件は，ゼロ予見のもとでは，それぞれの vintage に組合される労働の限界生産力が t 時の賃金率 $w(t)$ にひとしくなることである．すなわち，使用される設備のすべての T について

(1.4) $$\frac{\partial Q_T(t)}{\partial L_T(t)}=e^{\lambda T}\left[f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)-\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}f'\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)\right]=w(t)$$

となることである．そこで

(1.5) $$g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)\equiv f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)-\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}f'\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)$$

と定義するならば，(1.4) の条件は

---

(2) 導関数条件 (1.2) は，いわゆる Inada の条件よりも弱い条件である．なぜならば，Inada は，(1.2) のうえに $f'(0)=\infty$ を仮定するが，ここではそれを必要としないからである．Inada〔18〕(p. 120)，Burmeister〔7〕(p. 147，脚注4) 参照．

(3) 以上のような条件を満す生産関数の一つの例は，代替弾力性 $\sigma<1$ の C.E.S. 生産関数である．$\sigma=\dfrac{1}{1+\beta}$ とするとき，C.E.S. 生産関数は，$F(e^{\lambda T}L_T(t),\ K_T)=[a(e^{\lambda T}L_T(t))^{-\beta}+bK_T^{-\beta}]^{-\frac{1}{\beta}}$．そこで $x=\dfrac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}$ とおくと，$f(x)=(a+bx^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}}$，$f'(x)=b(ax^{\beta}+b)^{-\frac{1+\beta}{\beta}}$，$f''(x)=-(1+\beta)abx^{\beta-1}(ax^{\beta}+b)^{-\frac{1+2\beta}{\beta}}$．$\sigma<1$ のとき，$\beta>0$，したがって (1.2)，(1.3) は満され，(1.3 a) における $u=a^{-\frac{1}{\beta}}$ となる．Arrow, Chenery, Minhas and Solow〔4〕(pp. 225—50) 参照．

(1.4*a*) $$g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)=e^{-\lambda T}w(t)$$

となる.(4) (1.2), (1.3), (1.3*a*), (1.5) より, g について次の性質が明らかである.(5)

(1.6) $g(0)=0$, $g(\infty)=u$, $g'(x)>0$ ($x>0$ に対して), $g'(\infty)=0$.

(1.6) により, $\frac{\partial}{\partial L_T(t)}g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)<0$ であるから, 既存の古い資本設備については, より少い労働量を配分することによって, 有効労働の限界生産力を高めることができるが, それには限度がある. したがって, もし, $\lim_{L_T(t)\to 0} e^{\lambda T}g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)<w(t)$ となるならば, そのような vintage の資本設備は正の準地代を稼得することができない. よって, それは廃棄されなくてはならない. (1.6) により, $\lim_{L_T(t)\to 0} e^{\lambda T}g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)=e^{\lambda T}u$ であるから, t 時に残存している最も古い資本設備は $e^{\lambda T}u=w(t)$ となる vintage T の設備である. したがって, t 時に使用されている設備の最高年令を $\theta(t)$ であらわすと

(1.7) $$\theta(t)=t-\frac{1}{\lambda}\log\frac{w(t)}{u}.$$

これは

(1.7 *a*) $$w(t)=ue^{\lambda(t-\theta(t))}$$

と書きなおすことができる.

さて, f は 'well behaved' であるから, g は連続であり, 逆関数 $g^{-1}\equiv\phi$ が存在する. (1.4 *a*) より, すべての T に対して

(1.8) $$\frac{K^T}{e^{\lambda T}L_T(t)}=g^{-1}(e^{-\lambda T}w(t))=\phi(e^{-\lambda T}w(t)).$$

(1.6) により, $\phi'>0$. (1.7 *a*), (1.8) より

---

(4) $g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)$ は有効労働の限界生産力にほかならない. すなわち,

$$\frac{\partial Q_T(t)}{\partial(e^{\lambda T}L_T(t))}=\frac{\partial Q_T(t)}{\partial L_T(t)}\Big/\frac{\partial(e^{\lambda T}L_T(t))}{\partial L_T(t)}=e^{-\lambda T}\frac{\partial Q_T(t)}{\partial L_T(t)}=g\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right).$$

(5) $g(\infty)=u<\infty$ は, ゼロの労働投入における労働の限界生産力が有限であるという仮定 (Levhari〔29〕p. 154) と同値である.

$$(1.8\,a)\qquad \frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}=\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})$$

が成立する．

ϕ をこのように定義するとき，$Q_T(t)$ は，(1.1 a)，(1.8 a) により

$$(1.9)\qquad Q_T(t)=\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})}K_T$$

のようにあらわされる．したがって，総産出量 $Q(t)$，および総雇用量 $L(t)$ は

$$(1.10)\qquad Q(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t}Q_T(t)dT=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})}K_TdT,$$

$$(1.11)\qquad L(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t}L_T(t)dT=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{e^{-\lambda T}K_T}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})}dT.$$

いま，労働供給が一定率 $n>0$ で増加するとすれば，完全雇用の条件は(6)

$$(1.12)\qquad L(0)e^{nt}=L(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{e^{-\lambda T}K_T}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})}dT.$$

そして，粗貯蓄率を s とするならば，貯蓄・投資均等条件は

$$(1.13)\qquad K_t=sQ(t)=s\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda(t-T)})}K_TdT.$$

このようにして，経済成長のモデルは，(1.7 a)，(1.10)，(1.12)，(1.13) によって構成せられた．決定されるべき変数は $w(t)$，$\theta(t)$，K_t，$Q(t)$ である．一クラスの初期条件が与えられるならば，すべての変数の時間径路が確定する．すなわち，体系は自己完結的である．

直ちに明らかなように，このモデルでは，(1.12)，(1.13) によって，$\theta(t)$，K_t が先決され，そののち (1.7 a) において $w(t)$，(1.10) において $Q(t)$ が決定される．したがって，(1.12)，(1.13) がモデルの基本的拘束条件である，(1.12)，(1.13) は次のように書きなおすことができる．

$$(1.12\,a)\qquad L(0)e^{nt}=\int_{0}^{\theta(t)}\frac{e^{-\lambda(t-T)}K_{t-T}}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})}dT,$$

(6) 労働は過剰要素になることはないと仮定されているので，$L(0)e^{nt}<\int_{-\infty}^{t}L_T(t)dT$.

(1 13 a) $$K_t=s\int_0^{\theta(t)}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})}K_{t-T}dT.$$

2 均衡成長径路 上述のモデルにおける均衡成長解は

(1 14) $$\theta(t)=\theta,\quad K_t=K_0e^{gt}$$

とおくことによって求めることができる．θ，K_0，g は決定さるべき未定定数である (1.12a)，(1.13a) に (1.14) を代入すれば

(1.15) $$L(0)e^{nt}=\int_0^{\theta}\frac{K_0e^{(g-\lambda)(t-T)}}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}dT,$$

(1.16) $$e^{gt}=s\int_0^{\theta}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{g(t-T)}dT.$$

(1.15) を書きかえれば

$$\frac{L(0)}{K_0}e^{(n+\lambda-g)t}=\int_0^{\theta}\frac{e^{(\lambda-g)T}}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}dT$$

となるが，この式の右辺は t に依存しないゆえ

$$g=\lambda+n$$

が成立しなければならない．そのとき，(1.15)，(1.16) によって

(1.15 a) $$\frac{L(0)}{K_0}=\int_0^{\theta}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}dT,$$

(1.16 a) $$1=s\int_0^{\theta}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT.$$

均衡成長径路の存在は，(1.15 a)，(1.16 a) を満す θ，K_0 の存在に依存する，それを確めるためには，(1.16 a) を満す $\theta>0$ の存在することを導けばよい．

いま，関数 ψ を次のように定義する．

(1.17) $$\psi(\theta)\equiv\int_0^{\theta}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT.$$

直ちに明らかなように

(1.18) $$\psi(0)=0,\qquad \lim_{\theta\to\infty}\psi(\theta)=\frac{1}{\lambda+n}\ \frac{f(\phi(0))}{\phi(0)}.$$

また，(1.17) を θ について微分すれば

$$\frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta}=\lambda ue^{-\lambda\theta}\int_0^\theta\frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})^2}\{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]$$

$$-\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})f'[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]\}e^{-nT}dT+\frac{f[\phi(u)]}{\phi(u)}e^{-(\lambda+n)\theta}.$$

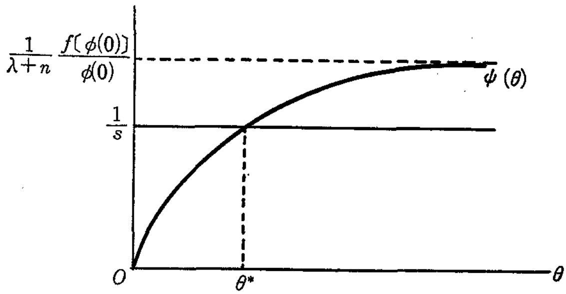
この式の右辺第2項はゼロである.(7) また，(1.5)，(1.8 a) により

$$f[\phi(u(e^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]-\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})f'[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]=ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T}$$

が得られるので，これを代入すれば，

(1.19) $$\frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta}=\lambda u^2e^{-2\lambda\theta}\int_0^\theta\frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{(\lambda-n)T}dT>0\ (\theta>0 \text{ に対して}).$$

(1.18)，(1.19) にもとづき，(1.17) を図示すれば，1.1 図のようになる.



1.1 図

1.1 図より直ちにわかるように，(1.16 a) が正値解 $\theta^*>0$ をもつための必要十分条件は

(1.20) $$\frac{1}{\lambda+n}\ \frac{f[\phi(0)]}{\phi(0)}>\frac{1}{s}.$$

ところが，$\phi(0)=0$ ゆえ，$\dfrac{f[\phi(0)]}{\phi(0)}=F\left(\dfrac{1}{\phi(0)},\ 1\right)=F(\infty,\ 1).$

したがって，(1.20) は

(7) (1.6) より $\phi(u)=g^{-1}(u)=\infty$，他方，(1.3) より $f[\phi(u)]=f(\infty)=u$. したがって，$\dfrac{f(\phi(u))}{\phi(u)}=0$.

$$(1.20\,a) \qquad F(\infty,\ 1) > \frac{\lambda+n}{s}$$

のようにあらわされる．これは，十分な労働力を装備した機械単位当りの平均生産力が，$\dfrac{\lambda+n}{s}$ より大でなくてはならないことを物語っている．[8]

このようにして，(1.20 a) が満されるならば一意的な均衡成長径路は存在する．諸変数の均衡成長解は次のようにあらわされる．[9]

$$(1.21) \quad K_t^* = K_0^* e^{(\lambda+n)t}, \qquad K_0^* = \frac{L(0)}{\displaystyle\int_0^{\theta^*} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}\,dT}.$$

$$(1.22) \qquad w^*(t) = w^*(0)e^{\lambda t}, \qquad w^*(0) = ue^{-\lambda\theta^*}.$$

$$(1.23)\, Q^*(t) = Q^*(0)e^{(\lambda+n)}, \quad Q^*(0) = L(0)\frac{\displaystyle\int_0^{\theta^*} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T}\,dT}{\displaystyle\int_0^{\theta^*} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}\,dT}.$$

これらの解について明白な特徴は次の通りである．

(1) 投資，産出量，賃金のいずれについても，その均衡成長率は，技術進歩率と労働力増加率のみによって決定され，貯蓄率から独立である．[10]

(2) 均衡諸量の絶対水準は[11]，θ^* したがって貯蓄率に依存する．

§ 2　貯蓄と均衡成長

1　貯蓄増加の効果　§ 1において，モデルの均衡成長解，とりわけ均衡

---

(8) これは Levhari [29] において導かれた条件と同一である．Levhari [29] (p. 158) 参照．

(9) 諸変数の均衡成長解は次のようにして求まる．まず，θ^* が (1.16a) によってえられ，次いで K_0^* が (1.15a) においてきまり，さらに (1.7a)，(1.13) において $w^*(t)$，$Q^*(t)$ が求まる．

(10) 産出量均衡成長率 $\lambda+n$ はいわゆる「自然成長率」にほかならない．限界資本係数は，均衡において，$\dfrac{K_t^*}{\dot{Q}^*(t)}$ であるが，(1.21)，(1.23)，(1.16a) により $\dfrac{K_t^*}{\dot{Q}^*(t)} = \dfrac{s}{\lambda+n}$．したがって，均衡成長径路において，「保証成長率」$= \dfrac{s}{K_t^*/\dot{Q}^*(t)}$ は「自然成長率」$=\lambda+n$ にひとしい．

(11) K_0，$w(0)$，$Q(0)$ などをそれぞれの変数の絶対水準と呼ぶことにする．

水準値が，パラメーター s に依存することが明らかになったので，こんどは，このパラメーターを変化させたとき，諸変数の均衡水準がどのように変化するか，その比較動学的考察をおこなわなくてはならない．

まず，s を変化させたときの θ^* への影響は，(1.16 a)，(1.17)，(1.19) によって求まる．

$$(2.1)\qquad \frac{d\theta^*}{ds}=-\frac{1}{s^2\psi'(\theta^*)}<0.$$

このようにして，貯蓄の増加は資本設備の経済的廃棄を早める．

次に，$K_0{}^*$ に対す影響を求めよう．いま，

$$(2.2)\qquad \xi(\theta)\equiv\int_0^{\theta}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}dT$$

と定義すると，

$$(2.3)\qquad \xi'(\theta^*)=\lambda ue^{-\lambda\theta^*}\int_0^{\theta^*}\frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}e^{(\lambda-n)T}dT>0.$$ [1]

したがって，(1.21)，(2.1)～(2.3) により

$$(2.4)\qquad \frac{dK_0{}^*}{ds}=-\frac{L(0)\xi'(\theta^*)}{\xi(\theta^*)^2}\,\frac{d\theta^*}{ds}>0$$

がえられる．(2.4) において，貯蓄増加は均衡投資水準を高めることがわかる．

s の $Q^*(0)$ に対する関係は，次のようにしてえられる．(1.23)，(1.17)，(2.2) により

$$(1.23\,a)\qquad Q^*(0)=L(0)\frac{\phi(\theta^*)}{\xi(\theta^*)},$$

これを s について微分すれば，

$$(2.5)\qquad \frac{dQ^*(0)}{ds}=L(0)\frac{\psi'(\theta^*)\xi(\theta^*)-\phi(\theta^*)\xi'(\theta^*)}{\xi(\theta^*)^2}\,\frac{d\theta^*}{ds}.$$

---

(1) 本来ならば，(2.3) の右辺第2項として，$\dfrac{e^{-n\theta^*}}{\phi(u)}$ がつけ加わるべきであるが，(1.6) により $\phi(u)=\infty$ であるから，この項は消滅する．なお，(1.8) において $\phi'(x)>0$ ($x>0$ に対して)．

(2.5) の符号を調べよう． まず，(1.17)，(1.19)，(2.2)，(2.3) から次式がえられる．

$$\psi'(\theta)\xi(\theta)=\lambda u^2 e^{-2\lambda\theta}\int_0^\theta \frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{(\lambda-n)T}dT\int_0^\theta \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}dT,$$

$$\phi(\theta)\xi'(\theta)=\lambda ue^{\lambda\theta}\int_0^\theta \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT\int_0^\theta \frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})^2}e^{(\lambda-n)T}dT.$$

ところが，(1.5)，(1.8 a) によって

$$f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T}]=ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T}+\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})f'[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})] \tag{2.6}$$

が成立するので，これを考慮すれば，

$$\psi'(\theta)\xi(\theta)-\psi(\theta)\xi'(\theta)=-\lambda ue^{-\lambda\theta}\int_0^\theta f'[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]e^{-(\lambda+n)T}dT$$

$$\times\int_0^\theta \frac{\phi'(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{(\lambda-n)T}dT.$$

ただちに，$\psi'(\theta^*)\xi(\theta^*)-\psi(\theta^*)\xi'(\theta^*)<0$ が導かれる．したがって，(2.5) において，$\dfrac{dQ^*(0)}{ds}>0$. これは，貯蓄率の上昇が常に均衡産出量水準を引上げる効果をもっていることを物語っている．

さて，直観的には，これまで述べられた「体化された」技術進歩の場合の方が，伝統的な「体化されない(2)」技術進歩の場合に比して，産出量が貯蓄変化により敏感に反応するように思われる．しかし，実はそうでなく，貯蓄変化に対する均衡産出量水準の反応は，技術進歩の「体化」，「非体化」の型と無関係である．それは，$Q^*(0)$ の s に対する対数導関数が，「体化」の場合と，「非体化」の場合とで全く同一のかたちをとることによって知られる．(3) 以下で，それを示そう．

まず，「体化された」技術進歩の場合は，(2.1)，(1.23 a)，(2.5) によって

(2) 「体化されない」という語は 'disembodied' よりむしろ 'unembodied' の意味にとるべきである．なぜならば 'disembodied' は，かって体化された技術進歩が体化をやめることと解釈されるからである．(Green [13] p. 143，脚注 7 参照)．もっと正確には 'organizational' というべきであろう．(Nelson [35] p. 581 参照)．

(3) この事実は Levhari and Sheshinski [30] によって指摘された．

$$(2.7)\qquad \frac{1}{Q^*(0)}\ \frac{dQ^*(0)}{ds}=-\frac{\xi'(\theta^*)\psi(\theta^*)-\xi(\theta^*)\psi'(\theta^*)}{s^2\xi(\theta^*)\psi(\theta^*)\psi'(\theta^*)}$$

$$=\frac{1}{s}\left\{\frac{\xi'(\theta^*)}{s\psi'(\theta^*)\xi(\theta^*)}-\frac{1}{s\psi(\theta^*)}\right\}.$$

ところが，(1.19)，(2.3) より，$\dfrac{\psi'(\theta^*)}{\xi'(\theta^*)}=ue^{-\lambda\theta^*}$. これを考慮すれば，(2.8) は

$$(2.7\,a)\qquad \frac{1}{Q^*(0)}\ \frac{dQ^*(0)}{ds}=\frac{1}{s}\left\{\frac{e^{\lambda\theta^*}\psi(\theta^*)}{u\xi(\theta^*)}-1\right\}$$

となる．ところで，賃金の相対的分前 $D_L(t)$ は，

$$(2.8)\qquad D_L(t)=\frac{w(t)L(t)}{Q(t)}$$

であらわされるが，これは均衡成長径路においては，(1.22)，(1.23)，(1.12) によって，

$$(2.9)\quad D_L^*(t)=ue^{-\lambda\theta^*}\frac{\displaystyle\int_0^{\theta^*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}dT}{\displaystyle\int_0^{\theta^*}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT}=ue^{-\lambda\theta^*}\frac{\xi(\theta^*)}{\psi(\theta^*)}.$$

(2.7 a)，(2.9) によって

$$(2.7b)\qquad \frac{1}{Q^*(0)}\ \frac{dQ^*(0)}{ds}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{D_L^*}-1\right)$$

が成立する．

他方，「体化されない」技術進歩の場合，同質的な資本ストックを $K(t)$ であらわすと，総産出量 $Q(t)$ の総計的生産関数は

$$(2.10)\qquad Q(t)=F(e^{\lambda T}L(t),\ K(t))$$

であらわされる．[4] そのとき，貯蓄・投資均等条件，および労働の完全雇用条件は，それぞれ，

$$\dot{K}(t)=sF(e^{\lambda t}L(t),\ K(t)),$$

$$L(t)=L(0)e^{nt}$$

(4) もちろん，労働増大的技術進歩（Harrod 中立的技術進歩）を仮定し，F は一次同次にして，微分可能であり，資本財の物理的減価なしとする．

であらわされる．そこで，$h(t)\equiv\dfrac{K(t)}{e^{\lambda t}L(t)}$ とおくと

$$\dot{K}(t)=se^{\lambda t}L(t)\,f(h(t))=sK(t)\frac{f(h(t))}{h(t)},$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}=\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}-(\lambda+n).$$

これら2式より

$$\text{(2.11)}\qquad \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}=s\,\frac{f(h(t))}{h(t)}-(\lambda+n)$$

がえられる．ところが，均衡成長径路においては，$\dot{h}(t)=0$ でるから，これを考慮すれば，(2.10) は

$$\text{(2.11 }a\text{)}\qquad \frac{f(h^*)}{h^*}=\frac{\lambda+n}{s}$$

となる．したがって

$$\frac{dh^*}{ds}=\frac{1}{s}\;\frac{h^*}{1-\dfrac{h^*f'(h^*)}{f(h^*)}}=\frac{1}{s}\;\frac{h^*}{1-D_L{}^*}.$$

ところで，(2.10) を s について微分すれば

$$\frac{dQ(t)}{ds}=e^{\lambda t}L(t)\,f'(h(t))\frac{dh(t)}{ds}.$$

よって，$\dfrac{dQ^*(t)}{ds}=e^{\lambda t}L(t)\,f'(h^*)\dfrac{dh^*}{ds}$.　これに先にえられた $\dfrac{dh^*}{ds}$ を代入して，整理するならば

$$\frac{1}{Q^*(t)}\;\frac{dQ^*(t)}{ds}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{D_L{}^*}-1\right)$$

が得られる．これは，(2.7 b) と同一のかたちを示している．(5)

以上により，いずれの技術進歩の場合にも，均衡産出量の貯蓄率に対する対数導関数が，s と $D_L{}^*$ のみによってあらわされた．次に，$D_L{}^*$ 自身は s 上昇に対してどのように反応するであろうか．(2.9) を θ^* について微分して，整

(5) Meade〔33〕は Cobb-Douglas 関数について，この結果を導いている．Meade〔33〕(p. 111) 参照．

理すれば

$$\frac{dD_L^*}{d\theta^*}=-\frac{u\lambda e^{-\lambda\theta^*}}{\phi(\theta^*)^2}\Big[ue^{-\lambda\theta^*}\Big(\int_0^{\theta^*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}dT\Big)^2+$$

$$+\int_0^{\theta^*}f'[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})]e^{-(\lambda+n)T}dT\int_0^{\theta^*}\frac{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})-ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T}\phi'(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})^2}$$

$$e^{-nT}dT\Big].$$

一般には，右辺の符号は不定である．しかし，もし $\frac{ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T}\phi'(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}\leqq 1$ ならば，$\frac{dD_L^*}{d\theta^*}<0$. $\frac{dD_L^*}{ds}=\frac{dD_L^*}{d\theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}$ であるから，そのときには，$\frac{dD_L^*}{ds}>0$. ところが，$ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T}=w^*(T)$，$\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})=\phi(w^*(T))$ であるから[(6)]，資本・有効労働比率の賃金率に対する弾力性が1より大きくないならば（要素の代替弾力性があまり大きくないならば），貯蓄率の上昇は，必ず，賃金の相対的分前を引上げるであろう．

さて，(2.4)，(2.5) において，貯蓄増加が均衡産出量や均衡投資量に及ぼす効果は，$s>0$ のすべての値について，正であった．したがって，$s=1$ のとき，産出量，および投資は最大である．ところが，両者の差である消費については，それは成立しない．そのことは，最大消費均衡成長の条件を求めることによって明らかになる．そのためには，利子率を導入して，均衡成長率，貯蓄率，分配率との相互関係を明白にしなければならない．

2　利子率と経済成長の黄金率　均衡成長のもとでは $\theta(t)$ は変動しないので，1単位の資本財が将来にわたって稼得できる準地代は全く正確に予見することができる．現在の資本設備1単位の市場価値は，市場利子率によって割引された将来準地代の現在価値となる．$r(t)$ を t 時の利子率，$q_T(t)$ を vintage T の設備1単位の t 時（$t\geqq T$）における準地代とするとき，vintage T の資本1単位の v 時における価格 $P_T(v)$ は

(6)　(1.7 a)，(1.8) より，ϕ が賃金率に対する資本・有効労働結合比率をあらわすことがわかる．

(2.12) $$P_T(v)=\int_v^{T+\theta^*} q_T(t)e^{-\int_v^t r(z)dz}dt$$

であらわされる．ただし

(2.13) $$q_T(t)=\frac{Q_T{}^*(t)-w^*(t)L_T{}^*(t)}{K_T{}^*}.$$

$v=T$ のとき，$P_T(T)$ は建造されたばかりの新機械の市場価格である．競争均衡のもとでは，$P_T(T)$ は vintage T の新機械の生産費にひとしくなくてはならない．一部門モデルでは，資本財は産出物の単位と同一の単位で測られているので，$P_T(T)=1$ である．したがって，すべての T について

(2.14) $$1=\int_T^{T+\theta^*} q_T(t)e^{-\int_T^t r(z)dz}dt.$$

(2.13) に (1.7 a), (1.8a), (1.9), (2.6) を考慮するならば

(2.13 a) $$q_T(t)=\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)})]-ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)}}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)})}=f'[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)})]$$

がえられる．そこで，(2.13 a) を (2.14) に代入すれば

(2.14 a) $$1=\int_T^{T+\theta^*} f'[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)})]e^{-\int_T^t r(z)dz}dt.$$

この積分方程式の解が，利子率の時間径路を与えるであろう．しかし，ここで，均衡成長径路においては，$r(z)$ が T 時における値を将来にわたって保持すると予想しよう．そのときには，$r(z)=r(T)$ ($z\geqq T$ に対して)．したがって，(2.14a) は

(2.15) $$1=\int_T^{T+\theta^*} f'[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)})]e^{-r(T)(t-T)}dt,$$

書きかえれば

(2.15 a) $$1=\int_0^{\theta^*} f'[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})]e^{-r(t)T}dT.$$

これが均衡利子率を規定する方程式である．(2.15 a) の解 $r(t)$ は，t に依存しない定数となることが明らかである．以下，それを単に r であらわす．なお，(2.15 a) の右辺は，$r(t)$ の減小関数で，$r(t)\to\infty$ のとき 0 である．した

がって，もし $\int_0^{\theta*} f'[\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})]dT > 1$ となるならば $r(t)$ は正値である.(7)

そこで，次の事実を導く.

(2.16)　$s=1-D_L{}^*$ ならば，そしてそのときにのみ，$r=\lambda+n$.

(2.9) を書きなおせば

$$D_L{}^* = sue^{-\lambda\theta*}\int_0^{\theta*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}dT.^{(8)} \tag{2.9 a}$$

$1-D_L{}^*=s$ とすれば，(2.9 a) より

$$\frac{1}{s} = 1+ue^{-\lambda\theta*}\int_0^{\theta*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}dT \tag{2.17}$$

が成立つ. これに (1.16 a), (2.6) を考慮すれば

$$1=\int_0^{\theta*} f'[\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})]e^{-(\lambda+n)T}dT.^{(9)} \tag{2.18}$$

(2.15 a), (2.18) より，$r=\lambda+n$ が導かれる.

逆に，(2.15 a) において，$r=\lambda+n$ とすれば，(2.18) が成立する. そのとき，(2.6) により，(2.18) は次式のように書きかえられる.

$$\int_0^{\theta*}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT = 1+ue^{-\lambda\theta*}\int_0^{\theta*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}dT$$

これに (1.16 a) を考慮すれば，(2.17) がえられる. (2.9 a), (2.17) によって，$\frac{1}{s}=1+\frac{D_L{}^*}{s}$, したがって，$s=1-D_L{}^*$. 以上により，(2.16) が証明された.

以上の準備のもとに，最大消費径路の条件を求める. 消費 $C^*(0)$ は，

$$C^*(0)=Q^*(0)-K_0{}^*=L(0)\frac{\psi(\theta^*)-1}{\xi(\theta^*)}$$

---

(7) 必ずしも，その保証はない.

(8) (2.9) に (1.16 a) を考慮してえられる.

(9) これは次のようにして導き出される.

$$1=\frac{1}{s}-ue^{-\lambda\theta*}\int_0^{\theta*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}dT=\int_0^{\theta*}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT$$
$$-ue^{-\lambda\theta*}\int_0^{\theta*}\frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}dT=\int_0^{\theta*}\frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})]-ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T}}{\phi(ue^{-\lambda\theta*}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT$$

= (2.18) 右辺.

によってあらわされる．これを θ^* について微分すれば，

$$\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}=\frac{L(0)}{\xi(\theta^*)^2}\{\xi'(\theta^*)-\xi'(\theta^*)\psi(\theta^*)+\xi(\theta^*)\psi'(\theta^*)\}.$$

したがって，最大消費径路の必要条件 $\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}=0$ は，

$$\psi(\theta^*)=1+\frac{\psi'(\theta^*)}{\xi'(\theta^*)}\xi(\theta^*)$$

をいみする．これに (1.16 a)，(2.6) を代入すれば

$$\frac{1}{s}=1+ue^{-\lambda\theta^*}\xi(\theta^*). \tag{2.19}$$

(2.19)，(2.9 a) から，$s=1-D_L{}^*$ が成立する．

$s=1-D_L{}^*$ が最大消費均衡成長の十分条件でもあることは，次式によって明らかである．

$$\left.\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial \theta^*}\right|_{s=1-D_L{}^*}=\frac{L(0)\xi'(\theta^*)}{\xi(\theta^*)^2}[ue^{-\lambda\theta^*}\xi'(\theta^*)-\psi'(\theta^*)-\lambda ue^{-\lambda\theta^*}\xi(\theta^*)]$$

$$=-\lambda uL(0)\frac{\xi'(\theta^*)}{\xi(\theta^*)}<0.$$

このようにして，貯蓄率（投資）が利潤分配率（利潤）にひとしいとき，あるいは，利子率が成長率にひとしいとき，そして，そのときにのみ，最大消費均衡成長が実現することが明らかとなった．これは，新古典派 non-vintage モデルにおいて，経済成長の黄金律 (Golden Rule of Economic Growth)，もしくは新古典派定理 (Neo-Classical Theorem) と呼ばれている命題にほかならない．(10) ここに，新古典派 non-vintage モデルにおいて真である一つの命題が，putty-putty vintage モデルにおいても真であることが判明した．

---

(10) 黄金律という命名は Phelps 〔37〕 によっておこなわれた（同論文 pp. 638—42 参照）．同じ事柄を Robinson 〔46〕 は新古典派定理と呼ぶ（同論文 p. 219 参照）．そのほかに，Phelps 〔39〕，〔41〕，〔42〕，Allais 〔2〕，Pearce 〔36〕，Marty 〔31〕．Weizsäcker 〔59〕，Black 〔5〕 など参照．

§ 3 均衡成長の安定分析

§ 1において，モデルの均衡成長解は，(1.15a)，(1.16 a) を満す解によってあらわされたが，本節では，(1.12)，(1.13)，あるいは (1.12a)，(1.13a) を満す一般解が，時間の経過につれて，均衡成長解に漸近的に収束することを示す.[1]

新たに，有効労働単位当り投資量 $h(t)$ を定義する.

(3.1)
$$h(t) \equiv \frac{K_t}{e^{\lambda t} L(t)}$$

そうすると，(1.12)，(1.13) であらわされたモデルは，次のように $h(t)$ の表示で書きなおすことができる.

(3.2)
$$1 = \int_{t-\theta(t)}^{t} \frac{e^{-n(t-T)}}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda(t-T)})} h(T) dT,$$

(3.3)
$$h(t) = s \int_{t-\theta(t)}^{t} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda(t-T)})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda(t-T)})} e^{-(\lambda+n)(t-T)} h(T) dT.$$

これは次の表現と同値である.

(3.2 a)
$$1 = \int_{0}^{\theta(t)} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda T})} h(t-T) dT,$$

(3.3 a)
$$h(t) = s \int_{0}^{\theta(t)} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)} e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T} h(t-T) dT.$$

そして，$h(t)$，$\theta(t)$ の均衡成長解は，

(3.4)
$$1 = h \int_{0}^{\theta} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta} e^{\lambda T})} dT,$$

(3.5)
$$1 = s \int_{0}^{\theta} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta} e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta} e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T} dT$$

を満すような h，θ である．それを h^*，θ^* とする．このようにして，モデルの一般解が時間の経過とともに，均衡成長解に収束することを証明するためには，$h(t) \to h^*$，および，$\theta(t) \to \theta^*$ を証明すればよいことになる.

---

(1) 以下の証明では，clay-putty モデルにおける Sheshinski 〔49〕(pp. 243—47) の手法を試みる.

さて，$t=0$ を出発点にとり，経済は均衡条件 (3.2 a)，(3.3 a) にもとづき進展してゆくとする．ゼロ時点で与えられた資本，および労働についての過去の歴史的事実は，$h(t)$ の初期条件を，次のような有界な範囲に限定すると仮定する．すなわち，$t<0$ に対して

$$\text{(3.6)}\qquad \underline{h}_0 \leqq h(t) \leqq \bar{h}_0,\qquad \underline{h}_0 \leqq h^* \leqq \bar{h}_0$$

とする．ただし，$\underline{h}_0$，$\bar{h}_0$ は正の実数である．

(3.6) の制限のもとでは，どのような初期条件に対しても，$h(t)$，$\theta(t)$ は正，かつ連続である．[(2)] そして，すべての可能な解に対する上限と下限を設定することができる．

$\underline{h}$ を，$\underline{h} \leqq \underline{h}_0$ となるよう与えたとき，

$$\text{(3.7)}\qquad 1=\int_0^{\bar{\theta}} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\bar{\theta}}e^{\lambda T})}\underline{h}dT$$

を満すような $\bar{\theta}$ が存在する．また，$\bar{h}$ を，$\bar{h} \geqq \bar{h}_0$ となるよう与えたとき，

$$\text{(3.8)}\qquad 1=\int_0^{\underline{\theta}} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\underline{\theta}}e^{\lambda T})}\bar{h}dT$$

を満すような $\underline{\theta}$ が存在する．そのとき，$\underline{h} \leqq h^* \leqq \bar{h}$ ゆえ

$$\text{(3.9)}\qquad \bar{\theta} \geqq \theta^* \geqq \underline{\theta}.$$ [(3)]

$\underline{h}$，$\bar{h}$ を以上のように定めたとき，次の命題が成立する．

$$\text{(3.10)}\qquad \underline{h} \leqq h(t) \leqq \bar{h} \qquad (\text{すべての } t \geqq 0 \text{ に対して}).$$

これを証明しよう．そのためには，任意の t_0 を定めて，$t<t_0$ となる t に対して $\underline{h} \leqq h(t) \leqq \bar{h}$ が成立すると仮定して，$\underline{h} \leqq h(t_0) \leqq \bar{h}$ が成立することを導けばよい．

次のような最大問題を設定する．

$$\underset{\psi}{\mathrm{Max}}\, J(\psi)=s\int_0^{\theta(t)} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}\psi(T)dT$$

---

(2) 連続性の証明には，clay-clay モデルにおける Solow, Tobin, von Weizsäcker and Yaari [54] (p. 91) の手法を適用すればよい．

(3) $\xi'(\theta)>0$ ゆえ，$\dfrac{dh}{d\theta}<0$ となることより導かれる．

ただし，ψ は，$\underline{h} \leqq \psi(T) \leqq \bar{h}$ となるような有界な積分可能関数で

$$1=\int_0^{\theta(t)} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t)}e^{\lambda T})}\psi(T)dT$$

を満すという条件のもとである．

最大関数 ψ^* は，$\psi^*(T)=\bar{h}$ $(0<T \leqq \theta(t)$ について$)$ となる．したがって，最大 $\theta(t)$ は $\underline{\theta}$ である．よって

$$J(\psi^*)=\bar{h}s\int_0^{\theta} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT$$

$$\leqq \bar{h}s\int_0^{\theta^*} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}dT=\bar{h}.$$ [4]

したがって，

$$h(t_0)=s\int_0^{\theta(t_0)} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta(t_0)}e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta(t_0)}e^{\lambda T})}e^{-(\lambda+n)T}h(t_0-T)dT \leqq J(\psi^*) \leqq \bar{h}.$$

両端をとれば，$h(t_0) \leqq \bar{h}$．そのとき，$\theta(t_0) \geqq \underline{\theta}$．それは，(3.2 a) において $t=t_0$ とおき，$h(t_0-T) \leqq \bar{h}$ $(0 \leqq T \leqq \theta(t_0))$ と (3.8) を考慮すれば直ちに明らかである．

同様の議論により，$h(t_0) \geqq \underline{h}$，$\theta(t_0) \leqq \bar{\theta}$ が導かれる．そこで，t_0 は任意，$h(t)$ は連続であるから，(3.10) の証明が完結する．

以下で，(3.10) における区間 $[\underline{h}, \bar{h}]$ が時間の経過とともに減少してゆくことを示す．

$t_0=0$，$t_n=t_{n-1}+\bar{\theta}$ となるように，継起的区間 $[t_{n-1}, t_n)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ を設ける．そして

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{aligned} &\limsup_t h(t) \leqq h^*, \\ &\liminf_t \theta(t) \geqq \theta^* \end{aligned}$$

を導く．

$t \geqq t_{n-1}$ なるすべての t に対して，$h(t) \leqq a_{n-1}$，$\theta(t) \geqq b_{n-1}$，および

$$1=a_{n-1}\int_0^{b_{n-1}} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda b_{n-1}}e^{\lambda T})}dT$$

(4) 不等式は (3.9) により，右辺等式は (3.5) により明らかである．

となるような実数 a_{n-1}, b_{n-1} が存在すると仮定する．そこで，$t \geqq t_{n-1}+\bar{\theta}$ となるように t をきめる．(3.10) の証明において明らかなように，$h(t)$ の最大値を a_n とすると，

$$h(t) \leqq a_n = s a_{n-1} \int_0^{b_{n-1}} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda b_{n-1}} e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda b_{n-1}} e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T} dT.$$

そのとき $a_{n-1} > h^*$. もし，そうでなければ証明すべきことがなくなるからである．したがって，$b_{n-1} < \theta^*$. ゆえに，次式が成立する．(5)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = s \int_0^{b_{n-1}} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda b_{n-1}} e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda b_{n-1}} e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T} dT < s \int_0^{\theta^*} \frac{f[\phi(ue^{-\lambda\theta^*} e^{\lambda T})]}{\phi(ue^{-\lambda\theta^*} e^{\lambda T})} e^{-(\lambda+n)T} dT$$
$$=1.$$

これより $a_n < a_{n-1}$ がしたがう．

次に，b_n を

$$1 = a_n \int_0^{b_n} \frac{e^{-nT}}{\phi(ue^{-\lambda b_n} e^{\lambda T})} dT$$

によって定義する．$a_n < a_{n-1}$ であるから，$b_n > b_{n-1}$，また，$t \geqq t_{n-1}+\bar{\theta}$ なる t に対して $h(t) \leqq a_n$ であるから，$\theta(t) \geqq b_{n-1}$.

このようにして，$t \geqq t_{n-1}$ となるすべての t に対して，$h(t) \leqq a_n$, $\theta(t) \geqq b_n$ となり，$a_n < a_{n-1}$, $b_n > b_{n-1}$ となるような a_n, b_n が存在することが明らかになった．$\{a_n\}$ は減小数列，$\{b_n\}$ は増加数列である．そして，$\lim_{n \to \infty} a_n = h^*$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \theta^*$. 初期値 $a_0 = \bar{h}$, $b_0 = \underline{\theta}$ とする．ここに (3.11) は証明された．

同様の手法により，次の関係が成立する．

$$\text{(3.12)} \qquad \begin{aligned} &\liminf_t h(t) \geqq h^*, \\ &\limsup_t \theta(t) \leqq \theta^*. \end{aligned}$$

(3.11) と (3.12) を結びつけることにより，$\lim_{t \to \infty} h(t) = h^*$, $\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \theta^*$. そのとき，(3.1), (1.7 a), (1.10) により，$\lim_{t \to \infty} w(t) = w^*(t)$, $\lim_{t \to \infty} K_t = K_t^*$, $\lim_{t \to \infty} Q(t) = Q^*$. 体系の安定性(6)の証明は完結する．

---

(5) $\psi'(\theta) > 0$ により不等式が明らかである．右辺等式は (3.5) による．

(6) 任意の初期条件から出発した一般解が，時間の経過とともに一意的な均衡成長解に収束する場合，「体系は安定である」という．「安定」と「大域的安定」と区別すべきである．Burmeister〔7〕(p. 146) 参照.

§ 4　生産関数に関する仮定の変更と均衡成長

これまでの分析では，生産関数に関する特殊な仮定 (1.3) を置いた．それは，与えられた vintage の資本設備に対して，組合される労働量をいかに小さくしても，有効労働の平均生産力の増加には上限が存在するという仮定である．そのため，完全競争下の成長過程において，賃金コストの上昇とともに，どのような設備も，いつかは必ず正の準地代を稼得できなくなり，経済的廃用が生ずる．この仮定は，比較的現実性をもっていると思われるが，本節では，この仮定をやめて，そのかわりに，通常よくおこなわれる Uzawa の条件を仮定しよう．[1] そのときには，$e^{-\lambda T}K_T \neq 0$ に対して

$$\lim_{L_T(t)\to 0} f\left(\frac{K_T}{e^{\lambda T}L_T(t)}\right)=\infty. \tag{4.1}$$

この仮定のもとでは，現存するどのような古い vintage の設備についても経済的廃棄は生じない．これまでのモデルとのちがいはここから発生する．それが均衡成長にどのような変化をもたらすか．これが本節の課題である．

1　モデルと均衡成長解　上述の仮定のために，§ 1 における (1.7), (1.7a) がもはや成立しない．(1.8) は妥当するが，(1.8a) のような書きかえはできなくなる．そして，$x>0$ に対して $g^{-1\prime}\equiv\phi'>0$ であるが，$\phi(\infty)=\infty$ であるから，T を固定して，$w(t)\to\infty$ とするとき，$L_T(t)\to 0$. vintage T の資本設備の産出量は，(1.9) のかわりに

$$Q_T(t)=\frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(t))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(t))}K_T \tag{4.2}$$

であらわされる．そして，総産出量は

$$Q(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(t))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(t))}K_T dT. \tag{4.3}$$

均衡条件は，次の通りである．

---

(1)　Uzawa の条件とは，§ 1 の (1.2) の条件に，$f'(0)=\infty$，$f(\infty)=\infty$ を付け加えたものである．Uzawa [58] (p. 108) 参照．

$$(4.4)\qquad L(0)e^{nt}=\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-\lambda T}}{\phi(e^{-\lambda T}w(t))}K_T dT,$$

$$(4.5)\qquad K_t=s\int_{-\infty}^{t}\frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(t))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(t))}K_T dT.$$

(4.4) は労働の完全雇用の条件，(4.5) は貯蓄・投資均等条件である．

モデルの均衡成長解は，

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} K_t&=K_0e^{gt}\\ w(t)&=w(0)e^{\omega t}\end{aligned}$$

を，(4.4)，(4.5) に代入することによって求めることができる．K_0，$w(0)$，g，ω は決定されるべき未定定数である．実際，(4.4)～(4.6) によって

$$(4.7)\qquad L(0)e^{nt}=K_0e^{(g-\omega)t}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(g-\lambda)T}}{\phi(e^{(\omega-\lambda)t}e^{-\lambda T}w(0))}dT,$$

$$(4.8)\qquad 1=s\int_{-\infty}^{0}\frac{f[\phi(e^{(\omega-\lambda)t}e^{-\lambda T}w(0))]}{\phi(e^{(\omega-\lambda)t}e^{-\lambda T}w(0))}e^{gT}dT$$

が得られる．[2] そこで，(4.8) が成立するためには，右辺が t に依存してはならない．したがって

$$(4.9)\qquad \omega=\lambda$$

でなくてはならない．(4.9) を (4.7) に代入すれば，

$$(4.10)\qquad g=\lambda+n$$

の成立が導かれる．そこで，(4.9)，(4.10) を (4.7)，(4.8) に代入するならば，$w(0)$，K_0 を決定する関係式がえられる．

$$(4.7\,a)\qquad \frac{L(0)}{K_0}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nT}}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))}dT,$$

$$(4.8\,a)\qquad 1=s\int_{-\infty}^{0}\frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))}e^{(\lambda+n)T}dT.$$

(4.7 a)，(4.8 a) を満す正の $w(0)$，K_0 が存在するための条件を求める．(4.8 a) の右辺は，$w(0)$ の減小関数である．そして，

(2) (4.6) を (4.4)，(4.5) に代入し，得られた結果について，$T-t$ を新しく T とおくことによって，(4.7)，(4.8) のような表示をうる．

$$\lim_{w(0)\to 0} s\int_{-\infty}^{0} \frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))} e^{(\lambda+n)T}dT = \lim_{w(0)\to 0} s\int_{-\infty}^{0} F\left(\frac{1}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))},\ 1\right)e^{(\lambda+n)T}dT$$

$$= s\int_{-\infty}^{0} \lim_{w(0)\to 0} F\left(\frac{1}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))},\ 1\right)e^{(\lambda+n)T}dT = s\int_{-\infty}^{0} F\left(\frac{1}{\phi(0)},\ 1\right)e^{(\lambda+n)T}dT$$

$$= \frac{s}{\lambda+n} F\left(\frac{1}{\phi(0)},\ 1\right) = \frac{s}{\lambda+n} F(\infty,\ 1).$$

同様にして,

$$\lim_{w(0)\to \infty} s\int_{-\infty}^{0} \frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w(0))} e^{(\lambda+n)T}dT = \frac{s}{\lambda+n} F(0,\ 1).$$

したがって, (4.8 a) を満す正の $w(0)$ が存在するための一つの十分条件は, 次の通りである.

$$(4.11) \qquad \frac{s}{\lambda+n} F(\infty,\ 1) > 1 > \frac{s}{\lambda+n} F(0,\ 1).$$

$w(0)$ の正値解 ($w^*(0)$) が存在するならば, (4.7 a) において, K_0 の正値解 (K_0^*) が決定される.

(4.11) の左不等式は, 前モデルにおける均衡成長解存在条件 (1.20 a) と同一である.[3] 右不等式は, 貯蓄率が十分低くて $s < \dfrac{\lambda+n}{F(0,\ 1)}$ ならば, 満される.

(4.11) が満されるとき, 総産出量の均衡成長解は, (4.3), (4.6), (4.9), (4.10), (4.7 a) より求まる.

$$(4.12) \quad Q^*(t) = \frac{1}{s} K_0^* e^{(\lambda+n)t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))} e^{(\lambda+n)T}dT}{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{nT}}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))} dT} L(0)e^{(\lambda+n)t}.$$

2 均衡成長径路の比較動学 上に示された均衡成長解に対して, 貯蓄率変化による比較動学的分析の結果が, 前モデルの場合と全く同一であることを明らかにする.

s の $w^*(0)$, K_0^* に対する影響は, (4.8 a), (4.7 a) を微分し, 整理するこ

(3) p. 7 参照.

とによって求まる.(4)

$$(4.13)\quad \frac{dw^*(0)}{ds}=\left[s^2w^*(0)\int_{-\infty}^{0}\frac{\phi'(e^{-\lambda T}w^*(0)}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}e^{(n-\lambda)T}dT\right]^{-1}>0,$$

$$(4.14)\quad \frac{dK_0^*}{ds}=\frac{dK_0^*}{dw^*(0)}\ \frac{dw^*(0)}{ds}=\frac{K_0^{*2}}{s^2w^*(0)L(0)}>0.$$

s の上昇は，均衡賃金率，および均衡投資水準を高めることがわかる．

次に，s 上昇の $Q^*(0)$ に対する効果は，$Q^*(0)=\frac{1}{s}K_0^*$ を s について微分することによって

$$(4.15)\quad \frac{dQ^*(0)}{ds}=\frac{Q^*(0)}{s}\left[\frac{Q^*(0)}{w^*(0)L(0)}-1\right]$$

のようにあらわされる.(5) ところが，

$$Q^*(0)-w^*(0)L(0)=L(0)\frac{\int_{-\infty}^{0}f'[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]e^{(\lambda+n)T}dT}{\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nT}}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}dT}>0,$$

ゆえに，$\frac{dQ^*(0)}{ds}>0$. すなわち，貯蓄増加は均衡産出量水準を高める.(6) なお，(4.15) より

$$(4.15\,a)\quad \frac{1}{Q^*(0)}\ \frac{dQ^*(0)}{ds}=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{D_L^*}-1\right]$$

---

(4) (4.13) の導出の際，$f[\phi^{-\lambda T}w^*(0))]-\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))f'[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]=e^{-\lambda T}w^*(0)$ を利用していることに注意．また，(4.7 a) において，$\frac{dK^*(0)}{dw^*(0)}=\frac{K_0^{*2}}{L(0)}\int_{-\infty}^{0}\frac{\phi'[e^{-\lambda T}w^*(0)]}{\phi[e^{-\lambda T}w^*(0)]}e^{(n-\lambda)T}dT.$

(5) (4.14) が考慮されている．

(6) $\frac{dQ^*(0)}{ds}>0$ を§2と同様の手法によって求めると，次の通りである．

$\psi(w^*(0))=\int_{-\infty}^{0}\frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}e^{(\lambda+n)T}dT,\ \xi(w^*(0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nT}}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}dT$ とすると，(4.12)により $Q^*(0)=L(0)\frac{\psi(w^*(0))}{\xi(w^*(0))}$，また $\psi'(w^*(0))=w^*(0)\xi'(w^*(0))$.

したがって，$\frac{dQ^*(0)}{ds}=L(0)\frac{\psi'(w^*(0))\xi(w^*(0))-\psi(w^*(0)\xi'(w^*(0))}{\xi(w^*(0))^2}\ \frac{dw^*(0)}{ds}$

$$=\frac{L(0)}{s^2}\left[\frac{\psi(w^*(0))}{w^*(0)\xi(w^*(0))^2}-\frac{1}{\xi(w^*(0))}\right]$$

$$=\frac{L(0)}{s^2\xi(w^*(0))^2}\left[\frac{\psi(w^*(0))-w^*(0)\xi(w^*(0))}{w^*(0)}\right]>0.$$

が成立する．これは前モデルにおける（2.7 b）と同一結果を示している．

賃金の相対的分前 $D_L{}^*$ に対する貯蓄率変化の効果も，前モデルにおけると同じように[7]，関数 ϕ の弾力性に依存する．

最後に，このモデルにおいても最大消費均衡成長径路に関する黄金律が成立することを示さなくてはならない．§2の場合と同じように，あらかじめ $s=1-D_L{}^*$ が $r=\lambda+n$ の必要十分条件であることを導く．

競争均衡の条件，

$$1=\int_T^\infty q_T(t)e^{-\int_T^t r(z)dz}dt \text{ [8]}$$

は，均衡成長径路において

$$(4.16)\qquad 1=\int_0^\infty f'[\phi(e^{\lambda T}w^*(0))]e^{-rT}dT$$

となる．均衡利子率は（4.16）を満す r である．[9] そこで，$s=1-D_L{}^*$ とすれば，

$$(4.17)\qquad \begin{aligned} 1=\frac{1}{s}(1-D_L{}^*)&=\int_{-\infty}^0 \frac{f[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]-w^*(0)e^{-\lambda T}}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}e^{(\lambda+n)T}dT \\ &=\int_{-\infty}^0 f'[\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))]e^{(\lambda+n)T}dT=\int_0^\infty f'[\phi(e^{\lambda T}w^*(0))]e^{-(\lambda+n)T}dT. \end{aligned}$$

（4.16），（4.17）より，$r=\lambda+n$．逆に $r=\lambda+n$ とするとき，$s=1-D_L{}^*$ となることも容易に導かれる．

さて，均衡消費水準 $C^*(0)$ は

$$C^*(0)=Q^*(0)-K_0{}^*=L(0)\frac{\psi(w^*(0))-1}{\xi(w^*(0))}$$

であるから，最大消費径路の必要条件は

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} 0&=\frac{dC^*(0)}{dw^*(0)} \\ &=L(0)\frac{\psi'(w^*(0))\xi(w^*(0))-\xi'(w^*(0))\psi(w^*(0))+\xi'(w^*(0))}{\xi(w^*(0))^2}. \end{aligned}$$

---

(7) pp. 11—12 における議論参照．

(8) §2における（2.14）に対応するものである．

(9) （4.16）の右辺は，r の減小関数であり，$r\to\infty$ につれて，ゼロに収束する．したがって，均衡利子率 r の正値性を保証する条件は，$\int_0^\infty f'[\phi(e^{\lambda T}w^*(0))]dT\geqq 1$．

ただし

$$\psi(w^*(0))=\int_{-\infty}^{0}\frac{f[\phi e^{-\lambda T}w^*(0))]}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}e^{(\lambda+n)T}dT,$$

$$\xi(w^*(0))=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nT}}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))}dT$$

とする．ところが，$\psi'(w^*(0))=w^*(0)\xi'(w^*(0))$ であるから，(4.18) は

$$w^*(0)\xi(w^*(0))=\psi(w^*(0))-1 \tag{4.18 a}$$

を意味する．他方，

$$D_L{}^*=\frac{w^*(0)L(0)}{Q^*(0)}=\frac{w^*(0)\xi(w^*(0))}{\psi(w^*(0))}. \tag{4.19}$$

(4.18 a), (4.19) より，$1-D_L{}^*=\dfrac{1}{\psi(w^*(0))}=s$ がしたがう.[10] また，

$$\left.\frac{d^2C^*(0)}{dw^*(0)^2}\right|_{s=1-D_L{}^*}=\frac{L(0)\xi'(w^*(0))}{\xi(w^*(0))}$$
$$=-\frac{L(0)}{\xi(w^*(0))}\int_{-\infty}^{0}\frac{\phi'(e^{-\lambda T}w^*(0))}{\phi(e^{-\lambda T}w^*(0))^2}e^{(n-\lambda)T}dT<0.$$

以上により，均衡成長が最大消費径路であるための必要十分条件は，貯蓄率が利潤分配率にひとしいこと，あるいは，利子率が成長率にひとしいことである．§2におけると同じように，黄金律が成立した．

---

(10) $s=1-D_L{}^*$ が最大消費径路の必要条件であることは，次のようにして求めることもできる．$C^*(0)=Q^*(0)-K_0{}^*=(1-s)Q^*(0)$ ゆえ，最大消費の必要条件は，$0=\dfrac{dC^*(0)}{ds}=-Q^*(0)+(1-s)\dfrac{dQ^*(0)}{ds}$. これより $\dfrac{1}{Q^*(0)}\dfrac{dQ^*(0)}{ds}=\dfrac{1}{1-s}$. これと (4.15 a) を等置すれば，$s=1-D_L{}^*$ が導かれる．

II　要素代替と均衡成長

——資本増大的技術進歩の場合——

§1　資本増大技術進歩のもとにおける成長モデル

Iにおいては，体化された技術進歩が純粋に労働増大的（Harrod 中立的）であることを前提としたが，本章では，逆に，純粋に資本増大的（Solow 中立的）な技術進歩[(1)]を仮定するとき，成長モデルの一般解，ないし均衡成長解についてどのようなことが主張できるかを検討する．まず，本節で一般的な成長モデルを構成する．

資本増大的技術進歩のもとでは，vintage T の資本設備による t 時（$t \geqq T$）の産出物生産関数は

$$(1.1) \qquad Q_T(t)=F(L_T(t),\ e^{\lambda T}K_T)$$

のようにあらわされる．[(2)] F は新古典派的性質を持つと仮定する．このとき，労働の最適配分の条件，

$$(1.2) \qquad w(t)=\frac{\partial Q_T(t)}{\partial L_T(t)} \quad (T \leqq t \text{ なるすべての } T \text{ について})$$

が満されるならば，総産出量 $Q(t)$ は

$$(1.3) \qquad Q(t)=F(L(t),\ K(t))$$

によってあらわされることを示そう．[(3)] ただし

---

(1) Solow 中立的という呼び名は Allen〔3〕(p. 281) にもとづく．また，Fei-Ranis 中立的と呼ばれることもある．Phelps〔42〕(p. 23)，Fei and Ranis〔10〕(pp. 182—98) 参照．

(2) 厳密にいえば，vintage 生産関数 $F^T(L_T,\ K_T)$ が，すべての $T>0$ と，L_T，K_T のすべての正の値に対して，$F^T(L_T,\ K_T)=F(L_T,\ b_TK_T)$ となるような正の b_T（すべての $T>0$ について）が存在するとき，そしてそのときにのみ，技術変化は資本増大的 (capital augmenting) という．Fisher〔11〕(p. 286, Def. 3.1) 参照．そして，一定率の恒常的技術進歩を仮定しているので，$b_T=e^{\lambda T}$ $(\lambda>0)$ となる．λ は rate of labour augmentation であるが，以下では単に技術進歩率と呼ぶ．

(3) 生産関数の aggregation 問題のより一般的な論述については，Green〔12〕，〔13〕，Fisher〔11〕参照．

$$(1.4) \qquad Q(t)=\int_{-\infty}^{t} Q_T(t)dT,$$

$$(1.5) \qquad L(t)=\int_{-\infty}^{t} L_T(t)dT,$$

$$(1.6) \qquad K(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda T}K_T dT$$

とする．なお，K_T は T の変化に応じて異る物理的性質をもつ機械であるから，そのままでは加算不能である．そこで，それぞれの vintage の機械に，その技術的生産性をウエイトして集計したものが $K(t)$ で，これは「有効資本ストック」(efficient stock of capital) と呼ばれる．(4)

いま，関数 g を

$$(1.7) \qquad g\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)\equiv f\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)-\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}f'\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)$$

と定義するとき(5)，(1.1)，(1.2)，(1.7) により

$$(1.8) \qquad w(t)=g\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right), \qquad \text{（すべての } T\leqq t \text{ に対して）.}$$

f は連続関数で，2回微分可能，そして I (1.2) と同じ条件(6)が満されているとすれば，(1.7) において定義された g は，連続であり，$g(0)=0$，$g'(x)>0$ ($x>0$ に対して)．したがって g の逆関数 ϕ が存在し，$\phi'>0$ である．すなわち

$$(1.9) \qquad \frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}=\phi[w(t)] \qquad \text{（すべての } T\leqq t \text{ に対して）.}$$

(1.1)，(1.4)，(1.5)，(1.9) から

$$(1.10) \qquad Q(t)=f[\phi(w(t))]L(t)$$

がえられる．他方，(1.1)，(1.4)，(1.6)，(1.9) によって

$$(1.11) \qquad Q(t)=\frac{f[\phi(w(t))]}{\phi(w(t))}K(t)$$

---

(4) Solow [53] (p. 59) による．

(5) I と同様に，$f(x)\equiv F(1, x)$ とする．

(6) さらに，(1.3 a) を仮定するか，(4.1) を仮定するかによって，モデル表示が若干異るが，本節では，(4.1) の仮定のもとでの表示をおこなった．

が成立する.[7] さらに，(1.9)〜(1.11) において次式が導かれる.

$$\frac{K(t)}{L(t)}=\phi(w(t))=\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)} \quad (\text{すべての } T\leqq t \text{ に対して}). \tag{1.12}$$

(1.12) は，有効資本ストックと総雇用量の結合比率が個々の vintage の機械における要素結合比率にひとしいことを物語っている．そこで，(1.10) に (1.12) を代入して，整理すれば，

$$Q(t)=f[\phi(w(t))]L(t)=f\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)L(t)=F(L(t),\ K(t))$$

が導かれる．これは (1.3) にほかならない．以上により，2要素，一次同次の生産関数において，労働の最適配分がおこなわれるとき，技術進歩が資本増大的ならば，資本集計化が可能であることが明らかになった.[8]

さて，労働力が一定率 (n) で増加することと，粗産出量の一定割合 (s) が貯蓄されることを仮定すれば，完全雇用の条件，および貯蓄・投資の均等条件は，それぞれ

$$L(t)=L(0)e^{nt}, \tag{1.13}$$

$$sQ(t)=K_t \tag{1.14}$$

によってあらわされる.

成長モデルは (1.3)，(1.6)，(1.13)，(1.14) によって構成され，一連の初期条件が与えられるならば，$L(t)$，$K(t)$，$Q(t)$，Q_t の時間径路が決定される．体系は自己完結的である.

完全雇用の条件 (1.13) が満されるならば，$L(t)$ の解は (1.13) によって

---

(7) (1.1) は，$Q_T(t)=L_T(t)f\left(\dfrac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)=e^{\lambda T}K_T\dfrac{f\left(\dfrac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)}{\dfrac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}}$ というように二通りの表現ができる．(1.10) を導出する際には，(1.1) は前者のかたちで導入され，(1.11) の導出においては，(1.1) は後者のかたちで導入される.

(8) 一次同次の生産関数を想定するかぎり，技術進歩が資本増大的であることは，集計的資本ストック存在のための充分条件であるだけでなく，必要条件でもあることが Fisher〔11〕によって指摘された.（Fisher〔11〕，Theorem 3.2，pp. 268—9)．ただし，Fisher〔11〕の証明の究極の数学的基礎は Leontief〔27〕(Theorem 3.2, p. 344)，または Leontief〔28〕(Proposition 1. p. 364) に在る．また，Diamond〔8〕や Uzawa〔57〕によっても同一結果が導かれる.

あらわされるので，これを (1.3) に代入し，(1.14) を考慮すれば，

$$K_t = sF(L(0)e^{nt},\ K(t)).$$

他方，(1.6) を t について微分すれば，

$$\dot{K}(t) = e^{\lambda t}K_t.$$

この二式より

$$\dot{K}(t) = se^{\lambda t}F(L(0)e^{nt},\ K(t)) \tag{1.15}$$

がえられる．これが $K(t)$ の時間径路をあらわす微分方程式である．F についての前述の仮定(9) 以外の仮定が設けられないかぎり，この方程式の一般解を明示することはできない．

また，$K(t)$ の均衡成長解を，$K^*(t)=K^*(0)e^{gt}$ とおくと，(1.15) より

$$g\frac{K^*(0)}{L(0)}e^{(g-\lambda-n)t} = sf\left[\frac{K^*(0)}{L(0)}e^{(g-n)t}\right] \tag{1.16}$$

が成立しなければならない．f について Uzawa の条件が仮定されるだけでは，(1.16) の成立するような $K^*(0)$，g が存在するかどうか不明である．

そこで，生産関数 F ににおける要素代替の弾力性に関する仮定を設けることによって，モデルの一般解，および均衡成長径路の諸性質を導くことにする

§ 2 Cobb-Douglas 関数の場合

1 均衡成長径路　本節では，F に関する要素代替の弾力性が 1 であるときについて考察する． 通常の新古典派的性質として F の一次同次性が仮定されているので，代替の弾力性が 1 のとき，F は Cobb-Douglas 型となる．(1)
したがって，(1.1) は次のようなかたちをとる．(2)

---

(9) p. 27 参照.

(1) その証明については，たとえば Brown〔6〕(pp. 192—96) 参照

(2) (2.1) は $Q_T(t)=[e^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda T}L_T(t)]^{\alpha}K_T{}^{1-\alpha}$ のように書きかえることができる．したがって，代替弾力性が 1 である一次同次生産関数に関しては，Solow 中立的進歩と Harrod 中立的進歩の差は解消する．しかし，それは形の上での差が無いだけであって，後述の (2.2)，(2.3) のような aggregation をおこなうことは Solow 中立的技術進歩の場合にのみ可能である．Solow〔51〕の意図がそうであったように，本章では Cobb-Douglas 関数 (2.1) を資本増大的技術進歩を含む生産関数としてのみ解釈する．Solow〔51〕(p. 91．注 2) 参照.

(2.1) $$Q_T(t)=L_T(t)^{\alpha}(e^{\lambda T}K_T)^{1-\alpha}.$$

ただし，α は産出量の労働に対する弾力性であり，$0<\alpha<1$. したがって，(1.3) は

(2.2) $$Q(t)=L(t)^{\alpha}K(t)^{1-\alpha}$$

となる．その際，

(2.3) $$K(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda T}K_T dT.$$

また，(1.12)，(1.7)，(2.2) によって[(3)]，

(2.4) $$w(t)=\alpha\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha}.$$

そして，$K(t)$ の時間径路を規定する微分方程式 (1.15) は

(2.5) $$\dot{K}(t)=se^{(\lambda+\alpha n)t}L(0)^{\alpha}K(t)^{1-\alpha}$$

によってあらわされる．

モデルの均衡成長解は，次のようにして求まる．まず，

$$K(t)=K_0e^{gt}$$

として，これを (2.5) に代入して，整理すれば，

$$g=\frac{\lambda}{\alpha}+n,\qquad K_0=\left[\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}L(0)$$

がえられる．したがって，有効資本ストックの均衡成長解は，

(2.6) $$K^*(t)=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)t}.$$

同様にして，他変数の均衡成長解も求めることができる．[(4)]

(2.7) $$K_t^*=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t},$$

---

(3) 次のように導かれる．$w(t)=\phi^{-1}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)=g\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)=f\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)-\frac{K(t)}{L(t)}f'\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)=\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha}-(1-\alpha)\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha}=\alpha\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha}.$

(4) (2.2)，(2.3)，(2.4) に (2.6) を考慮することによって求まる．

$$Q^*(t)=s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}, \tag{2.8}$$

$$w^*(t)=\alpha s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda t}, \tag{2.9}$$

$$D_L{}^*(t)=\frac{w^*(t)L(t)}{Q^*(t)}=\alpha. \tag{2.10}$$

このようにして，均衡成長径路の特徴を次のように述べることができる．

1）総産出量，投資，消費（後述）は，いずれも $\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n$ の率で成長する．それに対し，有効資本ストックは $\frac{\lambda}{\alpha}+n$ の率，すなわち総産出量成長率に技術進歩率を加えた率で成長する．

2）賃金率は $\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda$ の率，すなわち総産出量成長率より労働力成長率を差引いた率で増大してゆくが，賃金の相対的分前は不変にとどまる．

3）貯蓄率（投資率）は，諸変数の成長率になんらの影響を与えないが，動学的均衡水準に対してはすべて positively に影響する．すなわち，貯蓄増加は諸量の均衡水準を高める．

4）技術進歩率や労働力増加率の高まりは，諸変数の成長率を高めるが，絶対水準に対しては低める効果をもつ．

2　利子率と黄金律　競争均衡の条件は，

$$1=\int_T^\infty \frac{Q_T(t)-w(t)L_T(t)}{K_T}\,e^{-\int_T^t r(z)dz}dt. \tag{2.11}$$

ところが，Cobb-Douglas 関数（2.1）のもとでは，

$$\frac{K_T}{L_T(t)}=e^{-\lambda T}\left[\frac{w(t)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{2.12}$$ [5]

---

(5)　(1.7)，(1.8) より $w(t)=f\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)-\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}f'\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)$，また (2.1) により $f\left(\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right)=\left[\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right]^{1-\alpha}$. よって $w(t)=\alpha\left[\frac{e^{\lambda T}K_T}{L_T(t)}\right]^{1-\alpha}$. これより (2.12) が求まる．また，(2.1) において，$\frac{Q_T(t)}{K_T}=\left[\frac{L_T(t)}{K_T}\right]^\alpha$ ゆえ，(2.12) を代入すれば，(2.13) がえられる．

$$\frac{Q_T(t)}{K_T}=e^{\lambda T}\left[\frac{w(t)}{\alpha}\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{2.13}$$

そこで，(2.12)，(2.13) を (2.11) に代入して，整理するならば

$$1=e^{\lambda T}\int_T^\infty\left\{\left[\frac{w(t)}{\alpha}\right]^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}-w(t)\left[\frac{w(t)}{\alpha}\right]^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right\}e^{-\int_T^t r(z)dz}dt. \tag{2.11 a}$$

均衡成長のもとでは，$r(z)=r(T)$ （すべての $z\geqq T$ について）とし，(2.9) を (2.11 a) に代入することにより，若干の計算ののち

$$r=\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)-\lambda \tag{2.14}$$

を得ることができる．[6] 設備の物理的減価の存在しない場合，均衡利子率 r と資本設備陳腐化率 λ の和は，均衡において，粗利潤率にひとしい．均衡粗利潤率を π であらわすと，(2.14) によって，

$$\pi=\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right). \tag{2.15}$$

直ちに明らかなように，均衡利子率 r の正値性は必ずしも保証されない．粗利潤率が設備陳腐化率をカバーしない場合には，利子率は負になる．しかしながら，もし $s<\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ ならば，$r>0$. そして，この条件は，実際的には，それほどきびしい条件ではないと思われる．[7]

また，(2.14) において，均衡利子率と技術進歩率の間に興味ある関係を読みとることができる．それは，パラメーター s の大きさによって，λ の r に及ぼす効果が異ることである．すなわち，$s<\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ ならば，λ の高いことは r の大きいことと結びつくが，$s>\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ の場合には，λ の高いことは r を低める．そして $s=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ の場合には，r は λ から独立である．

---

(6) $r(T)$ は T に依存しないゆえ，単に r と記す．

(7) s が非常に大きくて，$s>\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+(1-\alpha)\dfrac{n}{\lambda}$ の場合には，(2.14) において $r<0$. これは貯蓄性向が非常に大きいため，現在財より将来財がよく高く評価される場合であって，その経済学的妥当性は極めて稀薄である．よって体系が経済学的に有意味であるためには，$s\leqq\dfrac{1-\alpha}{\alpha}+(1-\alpha)\dfrac{n}{\lambda}$ でなくてはならない．

ところで，資本ストック $K(t)$ の資産価値はどのようにあらわされるか，資本の価値を $A(t)$ であらわすとき，$A(t)$ は，粗利潤率 π をそれに乗じたものが総利潤量 $(1-\alpha)Q(t)$ となるよう決定される.[8] すなわち，

$$\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)A(t)=(1-\alpha)Q(t).$$

均衡成長径路においては，(2.8) が成立するので，それを代入すれば，

$$A(t)=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}=e^{-\lambda t}K^*(t).$$

このようにして，(2.3) で定義された有効資本ストックの価値は，有効資本ストックの均衡成長解に $e^{-\lambda t}$ を乗じたものであらわされる.

(2.14)について導かれる第2の事実は，貯蓄率が利潤の相対的分前にひとしいとき，そしてその場合にのみ，利子率が産出量成長率にひとしいということである．実際，(2.14) に $s=1-\alpha$ を代入すれば，直ちに $r=\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n$ がえられ，その逆も明らかである．そこで，均衡成長が最大消費径路であるための必要十分条件が，$s=1-\alpha$，あるいは $r=\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n$ であることを導くことができる．実際，消費 $C(t)$ は，均衡成長径路において，

$$\text{(2.16)}\qquad C^*(t)=Q^*(t)-K_t^*=\left(s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-s^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}.$$

したがって，最大消費径路においては

$$0=\frac{\partial C^*(t)}{\partial s}=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}s^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}-\frac{1}{\alpha}s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}.$$

よって，$s=1-\alpha$．また

$$\left.\frac{\partial^2 C^*(t)}{\partial s^2}\right|_{s=1-\alpha}=-\alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}<0.$$

したがって，$s=1-\alpha$ は最大消費径路のための必要十分条件である.

3　体系の安定性　(2.5) の均衡成長解は一意的であるから，体系の安定性を証明する最も直接的な方法は，任意の初期条件から出発する (2.5) の一般

(8) 例えば，Koyck and t'Hooft-Welvaars [25] (pp. 255—56) 参照.

解が，時間の経過につれて均衡成長径路に収束することを導くことである．

(2.5) の一般解を求めれば，

$$K(t)=\left[\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}L(0)^{\alpha}e^{(\lambda+\alpha n)t}+B\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

B は積分定数である．初期条件 $K(0)$ を与えれば，B が確定し，次式が導かれる．

$$(2.17)\qquad K(t)=K(0)\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

K_t については，(2.3)，(2.5) により

$$K_t=sL(0)^{\alpha}e^{\alpha nt}K(t)^{1-\alpha}$$

がえられるので，これに (2.17) を代入すれば，

$$(2.18)\qquad K_t=sL(0)^{\alpha}K(0)^{1-\alpha}e^{\alpha nt}\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

$Q(t)$，$w(t)$ の一般解も，同様の方法で求まる．

$$(2.19)\qquad Q(t)=L(0)^{\alpha}K(0)^{1-\alpha}e^{\alpha nt}\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$(2.20)\qquad w(t)=\alpha L(0)^{\alpha-1}K(0)^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)nt}\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$t\to\infty$ のとき，K_t はどのような値に収束するか．(2.17) は次のように書きかえることができる．

$$(2.17a)\qquad K(t)=K(0)\,e^{\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)t}\left[\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}+e^{-(\lambda+\alpha n)t}\times\left\{1-\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}\right\}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

(2.17 a) において，$t\to\infty$ のとき $e^{-(\lambda+\alpha n)t}\to 0$ を考慮すれば，$t\to\infty$ に対して

$$K(t)\to\left(\frac{s}{\frac{\lambda}{\alpha}+n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)t}.$$

右辺は $K^*(t)$ にほかならない．[9] 任意の $K(0)$ から出発した $K(t)$ は時間の経過につれて均衡成長径路に漸近的に収束する．

(2.18)～(2.20) についても，同様にして，$t\to\infty$ のとき，

$$K_t\to s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}=K_t{}^*,$$

$$Q(t)\to s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+n\right)t}=Q^*(t),$$

$$w(t)\to\alpha s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda t}=w^*(t).$$

以上により，体系の安定性が証明された．

§3　要素代替の弾力性と均衡成長

本節では要素代替の弾力性が恒常的に1にひとしくない場合について，§1において構成せられた成長モデルの一般解が，時間の経過につれてどのような漸近的な動きを示すかを考察する．[1]

その考察に入るまえに，代替の弾力性に関係なく，時間の経過とともに，有効資本ストックが，労働供給量よりもより急速に増加してゆくことを明らかにする．そのためには，集約変数として

(3.1)
$$k(t)\equiv\frac{K(t)}{L(t)}$$

を定義したとき，$\lambda>0$ のもとで

(3.2)
$$\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$$

の成立することを証明すれば十分である．なお，(1.3) は次式のように書きか

(9)　(2.6) より明らかである．

(1)　本節の試論は主として Akerlof and Nordhaus〔1〕にもとづき，それに若干の訂正を施したものである．

えられる．

$$Q(t)=L(t)f(k(t)) \tag{3.3}$$

ところで，(3.2) の成立を証明するためには，任意に $c>0$ を与えたとき，$t\geqq T(c)$ なる t に対して $k(t)\geqq c$ となるような $T(c)$ が存在することを導けばよい．以下，それをおこなう．

(1.13)，(1.15)，(3.1) によって

$$\hat{K}(t)=se^{\lambda t}\frac{f(k(t))}{k(t)} \tag{3.4}$$

が成立つ．^ は成長率のしるしとする．したがって，

$$\hat{k}(t)=se^{\lambda t}\frac{f(k(t))}{k(t)}-n. \tag{3.5}$$

ところで，任意に与えた $c>0$ に対して，$f(c)>0$ であるから，

$$se^{\lambda T_1(c)}\frac{f(c)}{c}-n>0 \tag{3.6}$$

となるような $T_1(c)$ が存在する．したがって，もし $k(t)\leqq c$ のときには，$t\geqq T_1(c)$ なる t に対して，(3.5)，(3.6) により

$$\hat{k}(t)=se^{\lambda t}\frac{f(k(t))}{k(t)}-n\geqq se^{\lambda T_1(c)}\frac{f(c)}{c}-n=\varepsilon>0. \tag{3.7}$$

すなわち，$k(t)$ は増大してゆく．

そこで，もし $k(T_1(c))\geqq c$ ならば（ケース1），$t>T_1(c)$ に対して $k(t)<c$ となるためには，$\hat{k}(t)\leqq 0$ でなくてはならない．ところが，上述により，もし $t>T_1(c)$，$k(t)=c$ ならば，$\hat{k}(t)>0$．これは $k(t)>c$ とならないことをいみする．また，$k(T_1(c))<c$ のとき（ケース2）には，$k(t)\leqq c$，$t\geqq T_1(c)$ に対して，(3.7) により $k(t)$ の成長率が少くとも $\varepsilon>0$ であることがわかる．したがって，有限時間の経過によって $k(t)$ は c に到達する．それ以降はケース1と同一である．

このようにして，代替の弾力性に関係なく (3.2) の成立が証されたが，以下

では，代替の弾力性 σ に依存して，議論は二つの場合にわかれる.(2)

1　$\sigma<1$ の場合　まず，$t\to\infty$ のとき利潤の相対的分前 $D_K(t)$ はどのような動きを示すか.（1.7），（1.12），（3.1），（3.3）により

$$(3.7)\qquad D_K(t)=\frac{k(t)f'(k(t))}{f(k(t))},\ ^{(3)}$$

$$(3.8)\qquad \frac{dD_K(t)}{dk(t)}=(1-\sigma)\frac{k(t)f''(k(t))}{f(k(t))}.$$

したがって，$\sigma<1$ ならば，$\dfrac{dD_K(t)}{dk(t)}<0$. そして $\lim\limits_{k(t)\to\infty}f'(k(t))=0$ であるから，$\sigma<1$ の場合

$$(3.9)\qquad \lim_{k(t)\to\infty}D_K(t)=0.$$

次に，$t\to\infty$ につれて利潤分配率がゼロに近づいてゆくという事実を使って，有効資本ストックの成長率 $\hat{K}(t)$ が有界であることを導くことができる. 実際，（3.5）を微分すれば

$$(3.10)\qquad \frac{\dfrac{d(\hat{k}(t)+n)}{dt}}{\hat{k}(t)+n}=\lambda+\hat{f}(\hat{k}(t))-\hat{k}(t)$$

がえられる. ところが

$$(3.11)\qquad \hat{f}(k(t))=\frac{f'(k(t))\dot{k}(t)}{f(k(t))}=D_K(t)\hat{k}(t).$$

そこで（3.10），（3.11）を考慮することによって次式を導くことができる.(4)

$$(3.12)\qquad \dot{\hat{k}}(t)=\frac{\hat{k}(t)+n}{\hat{k}(t)}[\lambda-(1-D_K(t))\hat{k}(t)]$$

---

(2)　第一の場合では，すべての $k(t)$ について $\sigma(k(t))<1$ を仮定し，第二の場合では，すべての $k(t)$ について $\sigma(k(t))>1$ を仮定する. Akerlof and Nordhaus〔1〕によれば，前者は 'substitution inelastic'，後者は 'substitution elastic' のケースである.

(3)　（3.7）は次のように導かれる.　$D_K(t)=1-D_L(t)=1-\dfrac{w(t)N(t)}{Q(t)}=1-\dfrac{\phi^{-1}(k(t))}{f(k(t))}=1-\dfrac{f(k(t))-k(t)f'(k(t))}{f(k(t))}=k(t)\dfrac{f'(k(t))}{f(k(t))}.$

(4)　$\dot{\hat{k}}(t)=\dfrac{\frac{d\hat{k}(t)}{dt}}{\hat{k}(t)}=\dfrac{\frac{d(\hat{k}(t)+n)}{dt}}{\hat{k}(t)+n}\;\dfrac{\hat{k}(t)+n}{\hat{k}(t)}$ を考慮せよ.

いま，$c_0=k(0)$ とおくと，(3.2) より，$t>T(c_0)$ となる t に対して $k(t)\geqq c_0$ が成立つような $T(c_0)$ が存在する． そして，$\sigma<1$ ゆえ，(3.9) により，$\mathrm{Max}\,D_K(t)\equiv\bar{D}_K<1$ が存在し，すべての t に対して $D_K(t)\leqq\bar{D}_K$ が成立する．したがって，すべての t に対し $\frac{\lambda}{1-\bar{D}_K}\geqq\frac{\lambda}{1-D_K(t)}$. そこで，もし $\hat{k}(t)>\frac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ とすると，$\hat{k}(t)>\frac{\lambda}{1-D_K(t)}$ ゆえ，(3.12) において $\hat{k}(t)<0$. したがって

$$\hat{k}(t)\leqq\mathrm{Max}\left[\hat{k}(0),\ \frac{\lambda}{1-\bar{D}_K}\right]. \tag{3.13}$$

他方，(3.9) により $\mathrm{Min}\,D_K(t)=0$ ゆえ，すべての t に対して $\frac{\lambda}{1-D_K(t)}\geqq\lambda$.
よって，もし $0<\hat{k}(t)<\lambda$ ならば，すべての t に対して $\hat{k}(t)<\frac{\lambda}{1-D_K(t)}$.
したがって (3.12) において $\hat{k}(t)>0$.[5] したがって，

$$\hat{k}(t)\geqq\mathrm{Min}[\hat{k}(0),\ \lambda]. \tag{3.14}$$

(3.13)，(3.14) により $\hat{k}(t)$ は有界でなくてはならない．そして $\hat{K}(t)=\hat{k}(t)-n$ ゆえ，$\hat{K}(t)$ も有界である．

(3.9) と $\hat{K}(t)$ の有界性を使って，$t\to\infty$ のときの $Q(t)$，$K(t)$ の漸近的動きを導くことができる．まず，(3.1)，(3.3)，(3.11)，(1.13) によって

$$\hat{Q}(t)=D_K(t)\hat{K}(t)+(1-D_K(t))n \tag{3.15}$$

がえられる．[6] したがって

$$\lim_{t\to\infty}\hat{Q}(t)=\lim_{t\to\infty}D_K(t)\hat{K}(t)+n\lim_{t\to\infty}(1-D_K(t)).$$

そこで，$\hat{K}(t)$ の有界性と (3.9) を考慮すれば

$$\lim_{t\to\infty}\hat{Q}(t)=n. \tag{3.16}$$

次に，(1.15) において $\hat{K}(t)=se^{\lambda t}\frac{Q(t)}{K(t)}$，したがって

---

(5) $\hat{k}(t)<0$ となることはない．なぜならば，もしそうなったとすると，$\hat{K}(t)=\hat{k}(t)+n<n$ となり，(3.2) に矛盾するからである．

(6) (3.3) から，$\hat{Q}(t)=n+\hat{f}(k(t))$. これに (3.11) を代入すれば，$\hat{Q}(t)=n+D_K(t)\hat{k}(t)$. これに $\hat{k}(t)=\hat{K}(t)-n$ を代入して整理すれば (3.15) がえられる．

(3.17) $$\hat{K}(t)=\lambda+\hat{Q}(t)-\hat{K}(t).$$

ところが $\sigma<1$ の場合，$\hat{K}(t)$ は有界であるから，$\lim_{t\to\infty}\hat{K}(t)=0$. このことと (3.16) を (3.17) に考慮するならば，次式が明らかである.

(3.18) $$\lim_{t\to\infty}\hat{K}(t)=\lambda+n$$

以上により，$t\to\infty$ につれて $Q(t)$ および $K(t)$ はそれぞれ一定率の成長径路に収束すること，しかも $Q(t)$ の漸近的成長率は $K(t)$ のそれより技術進歩率だけ小さいことが明らかになった．これらの論理的帰結は，$\sigma=1$ の場合において導かれた結果[7]と同一である．しかし，$\sigma=1$ の場合と異って，$\sigma<1$ の場合，産出量の究極の成長率は労働力増加率のみに依存し，技術進歩の貢献分が時間の経過とともに消滅してしまうことが一つの著るしい特徴である.

もう一つの特徴は，均衡利子率が，$\sigma=1$ の場合必ずしも負にはならなかったのに対し[8]，$\sigma<1$ の場合には $t\to\infty$ につれて負の値に収束することである．以下，それを説明する.

$A(t)$ を有効資本ストックの価値とするとき，粗利潤率 $\pi(t)$ は

$$\pi(t)=\frac{D_K(t)Q(t)}{A(t)}=e^{\lambda t}D_K(t)\frac{Q(t)}{K(t)}$$

であらわされる.[9] 他方，$\hat{K}(t)$ の有界性により

$$0\leqq\hat{K}(t)=se^{\lambda t}\frac{Q(t)}{K(t)}\leqq c$$

となるような c が存在する．よって

$$0\leqq D_K(t)se^{\lambda t}\frac{Q(t)}{K(t)}=s\pi(t)\leqq cD_K(t).$$

ところが，(3.9) により $\lim_{t\to\infty}D_K(t)=0$ ゆえ，上式より $\lim_{t\to\infty}\pi(t)=0$. $r(t)=\pi(t)-\lambda$ ゆえ，$\lim_{t\to\infty}r(t)=-\lambda<0$. これは恒常貯蓄率の仮定が $\sigma<1$ における漸近利子率の正値性と両立しないことを物語っている.

(7) pp. 30—31 参照.
(8) p. 32 (2.14) をみよ.
(9) $A(t)$ の定義については p. 33 参照.

2　$\sigma>1$ の場合　　直ちに明らかなことは $\dfrac{dD_K(t)}{dk(t)}>0$,　したがって

$$\lim_{t\to\infty} D_K(t)=1. \tag{3.19}$$

そこで，$\sigma>1$ の場合，$\hat{K}(t)$ が，$t\to\infty$ につれて，無限大に発散することを示そう．$\hat{K}(t)=\hat{k}(t)+n$ であるから，$\lim_{t\to\infty}\hat{k}(t)=\infty$ を証明すればよい．さらに，そのためには，任意の c を与えたとき，$t>T(c)$ なる t に対して $\hat{k}(t)>c$ となるような $T(c)$ が存在することを導けばよい．

$\bar{D}_K$ を任意にきめる．$0<\bar{D}_K<1$ ゆえ，$t>m(\bar{D}_K)$ なるすべての t に対して $D_K(t)>\bar{D}_K$ となるような $m(\bar{D}_K)$ が存在する．そこで $T=m(\bar{D}_K)$ とおく．

i）$\hat{k}(T)>\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ の場合．もし $\hat{k}(t)=\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ となったとすると，(3.12) の関係を使えば

$$\dot{\hat{k}}(t)=\left(1+\frac{n}{\hat{k}(t)}\right)\left[\lambda-(1-D_K(t))\frac{\lambda}{1-\bar{D}_K}\right]>0$$

となり，$\hat{k}(t)$ は上昇しなければならない．したがって $\hat{k}(t)$ は $\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ より下ることはありえない．

ii）$\hat{k}(T)\leqq\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ の場合．$1-\bar{D}_K>\varepsilon>0$ に対して $T^*=m(\bar{D}_K+\varepsilon)$ が存在する．　そのとき，$t>T^*$ なる t について $D_K(t)\geqq\bar{D}_K+\varepsilon$.　したがって (3.12) を考慮すれば

$$\dot{\hat{k}}(t)\geqq\left(1+\frac{n}{\hat{k}(t)}\right)[\lambda-(1-\bar{D}_K-\varepsilon)\hat{k}(t)].$$

ところで，もし $\hat{k}(t)\leqq\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ ならば，$\lambda-(1-\bar{D}_K)\hat{k}(t)\geqq0$,　よって

$$\dot{\hat{k}}(t)\geqq\left(1+\frac{n}{\hat{k}(t)}\right)\varepsilon\hat{k}(t)>n\varepsilon>0.^{(10)}$$

---

(10)　Akerlof and Nordhaus〔1〕(p. 347) の論証においては，$\hat{k}(t)>\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}}$ が前提されて不等式が導かれている．その誤りを本文のように訂正した．

したがって $\hat{k}(t)$ は有限時間のうちに $\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ を通過する．そしてｉ）のケースに入る．

$\bar{D}_K$ は任意であるから，$\dfrac{\lambda}{1-\bar{D}_K}$ はいくらでも大きくすることができる．このようにして $t\to\infty$ につれて $\hat{k}(t)\to\infty$ が導かれた．

$t\to\infty$ につれて $\hat{K}(t)\to\infty$ ゆえ，(3.15) において $\sigma>1$ のとき (3.19) が成立することを考慮するならば，$\hat{Q}(t)\to\infty$ が直ちに明らかである．

他方，$\pi(t)=D_K(t)e^{\lambda t}\dfrac{Q(t)}{K(t)}=\dfrac{1}{s}D_K(t)\hat{K}(t)$ において，$t\to\infty$ のとき $D_K(t)\to 1$，$\hat{K}(t)\to\infty$ であるから，$\pi(t)\to\infty$．したがって $r(t)\to\infty$．

以上により，$\sigma>1$ の場合には，$t\to\infty$ に対し，総出産量および有効資本ストックの成長率は無限大に発散するとともに，粗利潤率および利子率も無限大に発散する．

§4　体化されない技術進歩と資本財の物理的減価の導入

前節までは，資本設備が非減価的で，無限大の物理的耐用年限をもつことを仮定した．そこでは，どのように長く使い古した，時代おくれの資本設備にも，極めて微小量の労働を組合すことによって，最新設備におけると同じ労働の限界生産力を得，したがって常に利用されている．本節では，この仮設を取去って，代りに，設備について一定の物理的耐用年限を設定し，その間は完全効率で働らくものとする．そして耐用年限を終えたとき，一挙に瓦壊してしまうのでなく，その時点の産出物のタームで評価換算された価格で処分され，新しい投資のために利用可能になると仮定する．さらに，技術進歩については，Solow 中立的な「体化された」進歩だけでなく，Hicks 中立的(1)な「体化さ

(1)　生産関数が $F(L, K; t)=b(t)F(L, K)$，$(b(t)>0)$ と書けるとき，iso-factor-augmenting progress がおこなわれているといわれる (Phelps〔42〕p.23) が，規模に関する収穫不変のもとでは，これは Hicks〔16〕による中立性の最初の定義と同値であることが知られている．そこで，このようなかたちの技術進歩を Hicks 中立的技術進歩という．なお，恒常的な率 μ における技術進歩を仮定するならば，$b(t)=b(0)e^{\mu t}$．本節では，$b(0)=1$ という調整をほどこして，このようなかたちの Hicks 中立的進歩を仮定する．

れない」進歩がおこなわれているものと仮定する．このような仮定の変更が動学体系の漸近的動きにどのような影響を及ぼすかを考察するのが本節の目的である．議論は，要素代替弾力性が1の場合だけに限定される．そのようないみで，本節は§2の補論として付け加えられたものである．[2]

新しいパラメーターとして，μを「体化されない」技術進歩率，mを設備の物理的耐用年限とする．モデルは，次のような一連の方程式体系であらわされる．

$$Q_T(t)=e^{\mu t}L_T(t)^{\alpha}(e^{\lambda T}K_T)^{1-\alpha} \tag{4.1}$$

$$Q(t)=\int_{t-m}^{t} Q_T(t)dT \tag{4.2}$$

$$L(t)=\int_{t-m}^{t} L_T(t)dT \tag{4.3}$$

$$K(t)=\int_{t-m}^{t} e^{\lambda T}K_T dT \tag{4.4}$$

$$w(t)=\alpha\frac{Q_T(t)}{L_T(t)}=\alpha\frac{Q(t)}{L(t)} \quad (t\geqq T\geqq t-m \text{ なる } T \text{ について}) \tag{4.5}$$

$$L(t)=L(0)e^{nt} \tag{4.6}$$

$$K_t=e^{-\lambda m}K_{t-m}+sQ(t) \tag{4.7}$$

(4.1)～(4.4) は自明である．(4.5) はゼロ予見下の労働の最適配分の条件である．それは，現存のどの vintage の設備に配分される労働の限界生産力も互にひとしく，しかもそれは実質賃金率にひとしくなくてはならないことをあらわしている．(4.6) は労働の完全雇用の条件である．(4.7) は，t時の粗投資が，耐用年限を完了したばかりの $t-m$ 時の新設備のスクラップ価値[3]と t 時の総産出量からの貯蓄によってまかなわれることをあらわしている．

§2の場合と同様にして，集計的生産関数が導かれる，それは次のようにあら

(2) 本節は，旧稿〔61〕の一部を修正加筆したものである．

(3) K_{t-m} は t 時に処分される $t-m$ 時の新資本財である．その単位処分価格は t 時におけるその資本財の市場価値である．t 時の1単位の産出物は，$t-m$ 時の1単位の新資本財の $e^{\lambda m}$ 倍の生産能力をもつ新資本財を購入することができるのであるから，$t-m$ 時の1単位の新資本財の t 時における価格は，t 時の産出物で評価して $e^{-\lambda m}$ である．したがって K_{t-m} の t 時における処分価格は $e^{-\lambda m}K_{t-m}$ である．

わされる．

(4.8) $$Q(t)=e^{\mu t}L(t)^{\alpha}K(t)^{1-\alpha}$$

そこで，(4.4) を t について微分し，(4.7)，(4.8) を考慮すれば

(4.9) $$\dot{K}(t)=se^{(\lambda+\mu)t}L(t)^{\alpha}K(t)^{1-\alpha}$$

が得られる．これに (4.6) を代入すれば，

(4.9 a) $$\dot{K}(t)=se^{(\lambda+\mu+\alpha n)t}L(0)^{\alpha}K(t)^{1-\alpha}.$$

これが，$K(t)$ の時間径路を規定する微分方程式である． その解は次の通りである．

(4.10) $$K(t)=K(0)\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\mu+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

したがって総産出量，賃金率の時間径路は以下のように求まる．

(4.11) $$Q(t)=L(0)^{\alpha}K(0)^{1-\alpha}e^{(\mu+\alpha n)t}\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\mu+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

(4.12) $$w(t)=\alpha\frac{K(0)^{1-\alpha}}{L(0)^{1-\alpha}}e^{\{\mu-(1-\alpha)n\}t}\left[1+\frac{s}{\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n}\frac{L(0)^{\alpha}}{K(0)^{\alpha}}(e^{(\lambda+\mu+\alpha n)t}-1)\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

そこで t を無限大に近づければ，(4.10)，(4.11)，(4.12) はそれぞれ，次のような成長径路に収束することがわかる．

(4.13) $$K^{*}(t)=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)t}$$

(4.14) $$Q^{*}(t)=s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

(4.15) $$w^{*}(t)=\alpha s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu\right)t}$$

これらが一意的な均衡成長径路にほかならないことは容易に確めることができる．[4] したがって体系は安定である．

注意すべきは，K_t の一般解が求められていないことである．それは，(4.7)

(4) §2と同様におこなうことができるので詳述は省略する．

に (4.11) を代入してえられる m 階の定差方程式の解であるが，簡単に解くことができないので，$t\to\infty$ のときの K_t の漸近的収束性だけを吟味する．

(4.7) の $Q(t)$ に (4.14) の $Q^*(t)$ を代入すれば，

$$K_t-e^{-\lambda m}K_{t-m}=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

この定差方程式の同次解は

$$K_t^{(1)}=\int_0^m c_i t^{m-i}e^{-\lambda t}di.$$

ただし c_i は初期条件に依存する定数である．次に，特解として

$$K_t^{(2)}=\frac{s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)}{1-e^{-m\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)}}\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

をうることができる．ゆえに一般解は

$$K_t=K_t^{(1)}+K_t^{(2)}$$

であらわされるが，実は，$t\to\infty$ のとき $K_t^{(1)}\to 0$ であることを証明しよう．$R_i(t)=c_i t^{m-i}e^{-\lambda t}$ $(i\leqq m)$ とおけば，$K_t^{(1)}=\int_0^m R_i(t)di$. そのとき，$\lim_{t\to\infty}R_i(t)=0$ を次のようにして導くことができる．

もし $c_i>0$ ならば，$R_i(t)>0$. しかも $t>\dfrac{m-i}{\lambda}$ なる t については $\dot{R}_i(t)<0$. すなわち $R_i(t)$ は $t>\dfrac{m-i}{\lambda}$ なる t について正の単調減小関数である．また，任意の正数 ε に対して，$R_i(t')<\varepsilon$ となるような t' が存在する．なぜならば

$$c_i t^{m-i}-\varepsilon e^{\lambda t}=-\varepsilon\Big[1+\frac{\lambda}{1!}t+\cdots\cdots+\frac{\lambda^{m-i-1}}{(m-i-1)!}t^{m-i-1}$$
$$+\left\{\frac{\lambda^{m-i}}{(m-i)!}-\frac{c_i}{\varepsilon}\right\}t^{m-i}+\frac{\lambda^{m-i+1}}{(m-i+1)!}t^{m-i+1}+\cdots\cdots\Big]$$

において右辺が負になるような t' が存在するからである．したがって，$t\geqq\mathrm{Max}\left(\dfrac{m-i}{\lambda},\ t'\right)$ なる t については，$R_i(t)<\varepsilon$. そして ε が任意正数である

ことから，$\lim_{t\to\infty} R_i(t)=0$．次に，$c_i<0$ のときには，正，負を逆にして，同様の議論によって $\lim_{t\to\infty} R_i(t)=0$ がえられる． さらに，$c_i=0$ の場合は，$\dot{R}_i(t)=R_i(t)=0$，したがって，$\lim_{t\to\infty} R_i(t)=0$．

以上により

$$\lim_{t\to\infty} K_t^{(1)}=\lim_{t\to\infty}\int_0^m R_i(t)di=\int_0^m \lim_{t\to\infty} R_i(t)di=0.$$

これを考慮すれば， 粗投資 K_t の一般解は $t\to\infty$ のとき特解 $K_t^{(2)}$ に収束することが明らかである．すなわち

$$(4.16)\qquad K_t^*=\frac{s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)}{1-e^{-m\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)}}\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

なお，消費および資本ストック価値[5]の漸近的収束径路は次の通りである．

$$(4.17)\qquad C^*(t)=(1-s)s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

$$(4.18)\qquad A^*(t)=s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)^{-\frac{1}{\alpha}}L(0)\,e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)t}$$

また，均衡利子率は次式のようにあらわされる．[6]

$$(4.19)\qquad r=\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)-\lambda$$

したがって，$s=1-\alpha$ のとき，そしてその場合にのみ，$r=\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n$.

以上導き出された結果を，§2における結論と比較しながら，次のように総括することができる．

(5) $C(t)=Q(t)+e^{-\lambda m}K_{t-m}-K_t=(1-s)Q(t)$，$A(t)=e^{-\lambda t}K(t)$ であることに注意．

(6) 粗利潤率 $\pi(t)=\frac{Q(t)-w(t)L(t)}{A(t)}$ は，均衡成長のもとでは $\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)$ となる ((4.6)，(4.14)，(4.15)，(4.18) によって求まる)． したがって，均衡利子率は，$r=\frac{1-\alpha}{s}\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)-\lambda$.

1）均衡成長径路は，§2と同様に，安定であり，最大消費均衡成長の黄金律も同様に成立する．(7)

2）均衡成長径路における総産出量，投資，消費，有効資本ストック，その価値，および賃金率は，いずれも§2の場合のそれぞれ(8)にくらべて $\frac{1}{\alpha}\mu$ だけ高い成長率で増大してゆく．それに反して，均衡水準値はより低くなる．興味深いことは，均衡成長率が技術進歩の組成の変化の影響をうけないことである．技術変化が「体化される」型であろうと，「体化されない」型であろうと，あるいは両者のミックスであろうとそのいずれに拘らず，技術進歩の水準がそれぞれのケースで同一であるかぎり，産出量均衡成長率は同一である．(9)

3）粗利潤率，および利子率の均衡値は，§2の場合にくらべて，$\frac{1-\alpha}{s}\frac{\mu}{\alpha}$ だけ高い値を示す．体化された技術進歩率のみ変化したときの均衡利子率に対する影響は，§2の場合と同様に，s と $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ の相対的な大きさに依存する．(10)

4）本節で外生的に導入した資本設備の物理的耐用年限は，投資水準にのみ negatively に影響する．すなわち，耐用年限の短いことは，投資水準を高めるためには望ましいが，産出量，消費，賃金率，利子率などの成長率や絶対水準にはなんらの影響を及ぼさない．また，限界資本係数に対しては negatively に影響することがわかる．実際，(4.14)，(4.16) によって

$$\frac{K_t^*}{\dot{Q}^*(t)}=\frac{s}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}\mu+n\right)\left[1-e^{-m\left(\frac{\lambda+\mu}{\alpha}+n\right)}\right]}$$

---

(7) (4.17) について $\frac{\partial C^*(t)}{\partial s}=0$ の条件を求めれば，$s=1-\alpha$ が導かれる．しかも $\left.\frac{\partial^2 C^*(t)}{\partial s^2}\right|_{s=1-\alpha}<0$.

(8) (2.6)～(2.9) (pp.30—31) 参照.

(9) この現象は putty-clay ケースや clay-clay ケースにおいても成立する．Howrey〔17〕(p. 400) 参照.

(10) (4.19) において，$s\gtreqless\frac{1-\alpha}{\alpha}$ ならば，$\frac{\partial r}{\partial \lambda}\gtreqless 0$ (不等号同順).

が導かれるからである．したがって $m>0$ ゆえ，$\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda+\frac{1}{\alpha}+n>\frac{s}{K_t^*/\dot{Q}^*(t)}$．すなわち，産出量成長率（自然成長率）は貯蓄性向/限界資本係数（保証成長率）より大である．そして $m=\infty$，つまり資本財が非減価的なとき（§ 2の場合）においてのみ，両者の均等が成立する．

III　要素の事後的非代替と均衡成長

―― 一部門モデル ――

§1　モデルと均衡成長解[(1)]

1　モデル　vintage t の資本設備を K_t，それに配分される労働量を L_t，産出量を Q_t であらわす．恒常的に一定率 (λ) の労働増大的な「体化された」技術進歩が進行していると仮定する．そのとき Q_t の生産関数は

$$(1.1)\qquad Q_t=F(e^{\lambda t}L_t,\ K_t)=e^{\lambda t}L_t f(b_t)$$

であらわされる．ただし

$$(1.2)\qquad f(b_t)\equiv F(1,\ b_t),\qquad b_t=\frac{K_t}{e^{\lambda t}L_t}$$

とする．$f(b_t)$ は連続的に二回微分可能で，$b_t>0$ に対して $f(b_t)>0$，$f'(b_t)>0$，$f''(b_t)<0$ と仮定する．なお，こんご誤解のおそれのないかぎり，$f(b_t)$ を単に f_t で，$f'(b_t)$ を f'_t で，$f''(b_t)$ を f''_t であらわす．

次に，資本設備は使用による物理的減価なく，組合される労働との間に事後的代替不能が仮定されるので，t 時の総産出量 $Q(t)$ は

$$(1.3)\qquad Q(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t}Q_T dT$$

であらわされる．$\theta(t)$ は t 時に使用される設備の最高年令とする．

労働が過剰要素になることはないという前提[(2)]のもとで，完全雇用の条件，および貯蓄・投資の均等条件は，それぞれ

$$(1.4)\qquad L(t)=L(0)e^{nt}=\int_{t-\theta(t)}^{t}L_T dT$$

$$(1.5)\qquad sQ(t)=K_t$$

によってあらわされる．n は外生的な労働供給増加率，s は粗貯蓄率である．

---

(1)　本節は，旧稿〔63〕の一部（pp. 2—10）を修正したものである．

(2)　これは，すべての t について $L(0)e^{nt}<\int_{-\infty}^{t}L_T dT$ ということである．

将来賃金についてゼロ予見を仮定すれば，真新しい設備に配分される労働量は，生産関数 (1.1) のもとで，その限界生産力が現行賃金率 $w(t)$ にひとしくなるよう，決定されなければならない．したがって

$$(1.6) \qquad w(t)=\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}=(f_t-b_t f'_t)e^{\lambda t}.$$

他方，賃金費用をカバーしない設備は経済的に廃棄されねばならぬゆえ

$$(1.7) \qquad w(t)=\frac{Q_{t-\theta(t)}}{L_{t-\theta(t)}}=f_{t-\theta(t)}e^{\lambda(t-\theta(t))}$$

が成立する．(1.6)，(1.7) が労働の最適配分の条件である．

以上 (1.1)～(1.7) において独立な式の数は8個[(3)]，t 時の未知数は L_t，K_t，Q_t，$L(t)$，$Q(t)$，b_t，$w(t)$，$\theta(t)$ の8個である．体系は自己完結的である．

2 均衡成長　上述の方程式体系において，

$$(1.8) \qquad \theta(t)=\theta, \quad Q(t)=Q(0)e^{gt}$$

とおくことによって，モデルの均衡成長解を求めることができる．

(1.8) を (1.3)～(1.5) に考慮すれば，諸変数の時間径路は次のようにあらわされる．[(4)]

$$(1.9) \qquad L_t=L_0e^{nt}, \quad Q_t=Q_0e^{gt}, \quad K_t=K_0e^{gt}.$$

$$(1.10) \qquad L_0=\frac{nL(0)}{1-e^{-n\theta}}, \quad Q_0=\frac{gQ(0)}{1-e^{-g\theta}}, \quad K_0=sQ(0).$$

ところで，(1.2)，(1.9) により

$$(1.11) \qquad b_t=\frac{K_0}{L_0}e^{[g-(\lambda+n)]t}\equiv b^{[g-(\lambda+n)]t}$$

が導かれるが，(1.1) に (1.11) を代入すれば，

---

(3)　(1.1)，(1.2) において独立な式は3個であることに注意．

(4)　L_t，L_0 は次のようにして導かれる．(1.4) において $\theta(t)=\theta$ とし，t について微分すれば $L_t-L_{t-\theta}=nL(0)e^{nt}$ がえられる．この定差方程式の恒常成長解は $L_t=\dfrac{nL(0)}{1-e^{-n\theta}}e^{nt}$．これより，$L_0=\dfrac{nL(0)}{1-e^{-n\theta}}$．他の解も同様の手法により求めることができる．

$$(1.12)\qquad \frac{Q_0}{L_0}e^{[g-(\lambda+n)]t}=f(be^{[g-(\lambda+n)]t}).$$

ところが $f'>0$, $f''<0$ ゆえ，(1.12) がすべての t について成立するためには

$$(1.13)\qquad g=\lambda+n$$

でなくてはならない．したがって (1.11) より

$$(1.14)\qquad b_t=b.$$

以上により諸変数が一定率 $g(=\lambda+n)$ で成長する均衡成長径路においては，資本設備の経済的耐用年限がどの設備についても一定 ($\theta(t)=\theta$) であるとともに，使用中のどの設備についても有効単位であらわした労働に対する結合比率は同一 ($b_t=b$) でなくてはならない．それでは θ, b はどのようにして決定されるか．

(1.6), (1.7), (1.8), (1.14) において

$$(1.15)\qquad \frac{bf'}{f}=1-e^{-\lambda\theta}$$

が導かれる．もちろん $f\equiv f(b)$ とする．

他方，(1.1), (1.2) より

$$Q_t=\frac{f_t}{b_t}K_t$$

であるが，これを (1.3) に代入し，(1.5), (1.8), (1.13), (1.14) を考慮すれば

$$(1.16)\qquad \frac{b}{f}=s\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{\lambda+n}$$

が得られる．(5)

さて，(1.15), (1.16) において，変数は b と θ だけであるから，これら二式において b と θ の値 (b^*, θ^* とする) が決定されるならば，(1.6), (1.10)

(5) $b_T=b$, $\theta(t)=\theta$ ゆえ，$Q(t)=\int_{t-\theta}^{t}\frac{f}{b}K_T dT=\frac{sf}{b}\int_{t-\theta}^{t}Q(T)dT$. これに $Q(t)=Q(0)e^{(\lambda+n)t}$ を代入して整理すれば，(1.16) がえられる．

$\sim$(1.14) により，Q^*_0，$Q^*(0)$，K_0^*，L^*_0，$w^*(0)$ が確定する.

$$
(1.17)\quad
\begin{aligned}
Q_0^* &= \frac{nL(0)f^*}{1-e^{-n\theta^*}} \\
Q^*(0) &= L(0)f^*\frac{n}{\lambda+n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}} \\
K_0^* &= \frac{nL(0)b^*}{1-e^{-n\theta^*}} \\
w^*(0) &= (f^*-b^*f'^*)=e^{-\lambda\theta^*}f^*
\end{aligned}
$$

このようにして，均衡成長解の存在は，(1.15)，(1.16) を満す b^*，θ^* の存在に依存することが明らかになった.

3　均衡成長解の存在　(1.15) に (1.16) を代入して整理すれば

$$
(1.18)\qquad f' = \frac{\lambda+n}{s}\,\frac{1-e^{-\lambda\theta}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}.
$$

したがって均衡成長解の存在を証明するためには，(1.16)，(1.18) を満す b^*，θ^* の存在を導けばよい.

まず (1.16) を満す θ と b の関係を図示しよう. (1.16) を θ について微分し，(1.15) を考慮して整理すれば，

$$
\frac{db}{d\theta} = se^{-n\theta}f > 0 \qquad (\theta > 0 \text{ に対して}).
$$

さらに，第二次微分は，(1.18) を考慮しながら，若干の計算の結果

$$
\frac{d^2b}{d\theta^2} = \frac{se^{-2n\theta}f}{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}[\lambda(1-e^{-\lambda\theta})+n(1-e^{n\theta})]
$$

となる. したがって，(i) $n>\lambda$ のとき，すべての $\theta\geqq 0$ に対し $\frac{d^2b}{d\theta^2}<0$ であるが，(ii) $n\leqq\lambda$ のときには，$(1-e^{-\lambda\theta}\lambda)+n(1-e^{n\theta})=0$ となる $\bar\theta$ が存在し，$\theta<\bar\theta$ に対しては $\frac{d^2b}{d\theta^2}>0$，$\theta>\bar\theta$ に対しては $\frac{d^2b}{d\theta^2}<0$.

次に，θ の定義域の端点に対応する b の値如何. (1.16) において $\lim_{\theta\to 0} b=\bar b$ とすれば，$\frac{\bar b}{f(\bar b)}=0$ が成立しなければならない. $F(\infty,\ 1)=\infty$ というという新古典派的仮定のもとでは，$\bar b=0$.(6) また，(1.16) において $\lim_{\theta\to\infty} b=\hat b$ とす

(6) $\frac{\bar b}{f(\bar b)}=0 \leftrightarrow \frac{f(\bar b)}{\bar b}=\infty \leftrightarrow F\left(\frac{1}{\bar b},\ 1\right)=\infty \leftrightarrow \frac{1}{\bar b}=\infty \leftrightarrow \bar b=0$. $\leftrightarrow$ は必要充分条件のしるし.

れば，$\dfrac{f(\hat{b})}{\hat{b}}=\dfrac{\lambda+n}{s}$ が成立しなければならない．これを満す $\hat{b}$ が存在する条件はどのようなものか，$\lim_{b\to 0}\dfrac{f(b)}{b}=\infty$ であるから，$\hat{b}$ が存在するためには

$$(1.19)\qquad \lim_{b\to\infty}\frac{f(b)}{b}\leqq\frac{\lambda+n}{s}$$

が成立すれば十分である．

(1.19) の経済学的意味を知るためには，(1.19) の成立しない場合の意味を検討すればよい．

(1.19) が成立しないときには，$\lim_{b\to\infty}\dfrac{f(b)}{b}>\dfrac{\lambda+n}{s}$. ところが (1.11)～(1.13) より $\dfrac{f(b)}{b}=\dfrac{Q_0}{K_0}$ が成立し，他方 (1.1) より $\dfrac{Q_0}{K_0}=F\left(\dfrac{L_0}{K_0},\ 1\right)$ であるから，

$$\lim_{b\to\infty}\frac{f(b)}{b}=\lim_{K_0\to\infty}F\left(\frac{L_0}{K_0},\ 1\right)=F(0,\ 1).$$

しかるに $F(0,\ K)\geqq 0$ において，$F(0,\ K)=0$ ならば $F(0,\ 1)=0$. したがって

$$\lim_{b\leftarrow\infty}\frac{f(b)}{b}>\frac{\lambda+n}{s}>0$$

の必要十分条件は，

$$(1.20)\qquad F(0,\ K)>0.$$

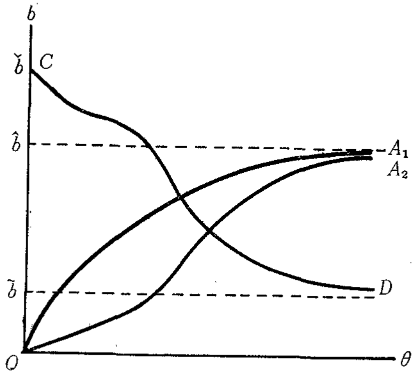
(1.20) は，労働なしに正の産出量が可能であることをあらわしている．このようにして，(1.19) の成立しないのは，労働なしに正の産出量が可能な場合，そしてそのときだけであることが明らかになった．[7] したがって，労働投入が正の産出量のための必要条件であるような生産関数の場合には，条件 (1.19) は満されていると言える．[8]

以上の議論により，(1.16) を満す θ と b の関係は3.1図の OA_1 または

(7) 文脈は異るが，同様の議論が Phelps〔67〕(pp. 13—14) においておこなわれている．

(8) (1.19) の必要充分条件は $\lim_{b\to\infty}f'(b)\leqq\dfrac{\lambda+n}{s}$. ところが，$f'(b)=\dfrac{\partial F(L_0,K_0)}{\partial K_0}$ ゆえ，(1.19) は $\lim_{K_0\to\infty}\dfrac{\partial F(L_0,\ K_0)}{\partial K_0}\leqq\dfrac{\lambda+n}{s}$ と同値である．

OA_2 のようにあらわされる.[9]



3.1図

次に，(1.18) を満す θ, b の図表如何. (1.8) を θ について微分すれば，$\theta>0$ に対し

$$\frac{db}{d\theta}=\frac{\lambda+n}{sf''}\frac{\lambda e^{-\lambda\theta}(1-e^{-n\theta})+ne^{-n\theta}(1-e^{-\lambda\theta})}{[1-e^{-(\lambda+n)\theta}]^2}<0$$

がえられるが，第二次微分は，n, λ, f''' に依存して，符号が定まらない.

さらに，(1.18) において $\lim\limits_{\theta\to 0} b=\check{b}$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} b=\tilde{b}$ とすれば，$f'(\check{b})=\dfrac{\lambda}{s}$, $f'(\tilde{b})=\dfrac{\lambda+n}{s}$ が成立しなければならない. したがって，これらを満す $\check{b}$, $\tilde{b}$ が存在するためには

(1.21) $$\lim_{b\to\infty} f'(b) \leqq \frac{\lambda}{s}$$

が満されれば十分である.[10] ところが，(1.21) は，

$$\lim_{b\to\infty}\frac{f(b)}{b} \leqq \frac{\lambda}{s}$$

が満されるとき，そしてそのときにのみ，満される. したがって，上述の議論と同様にして，「労働なしには産出なし」の生産関数を仮定するかぎり，(1.21) の条件は満されていることがわかる. このようにして，(1.18) を満す θ と b

(9) OA_1 は $n>\lambda$ の場合，OA_2 は $n\leqq\lambda$ の場合である.

(10) (1.21) が満されれば，$\lim\limits_{b\to\infty} f'(b)<\dfrac{\lambda+n}{s}$，したがって $\tilde{b}$ は存在する.

関係は3.1図 CD 曲線のようにあらわされる.(11)

さて，3.1図より明らかなように，均衡成長解 b^*，θ^* の存在は

(1.22) $$\hat{b} \geqq \tilde{b}$$

の成立に依存する．ところで

$$\frac{f(\hat{b})}{\hat{b}} = f'(\tilde{b}) = \frac{\lambda + n}{s}$$

が成立しているから，もし $\hat{b} < \tilde{b}$ であったと仮定すれば，$f'' < 0$ の仮定により，$f'(\hat{b}) > f'(\tilde{b})$ となり，したがって

(1.23) $$\frac{f(\hat{b}) - \hat{b}f'(\hat{b})}{\hat{b}} = f'(\tilde{b}) - f'(\hat{b}) < 0$$

が導かれる．(1.17) において，$f(b) - bf'(b) = f(b)e^{-\lambda\theta} > 0$ ゆえ，(1.23) はこれに矛盾する．ゆえに，(1.22) は成立していなくてはならない.

このようにして，労働を不可欠の要素とする新古典派型生産関数を仮定するかぎり，労働増大的技術進歩下の一部門 putty-clay モデルにおいて，一意的な均衡成長解の存在することが明らかになった.(12) 均衡点は，3.1図において，E_1 または E_2 であらわされている.

(11) 3.1図では $\check{b} > \hat{b}$ としたが，$\check{b}$ と $\hat{b}$ の大小関係は不定である.

(12) Kemp, Sheshinski and Thānh〔23〕において，

(4)式を $\int_{t-\theta^*}^{t} sg(b^*)a_{t-v}(\lambda n)^{v-t}dv = 1$，(9)式を $\lambda^{-\theta^*} \geqq \frac{g'(b^*)}{g(b^*)/b^*} > \lambda^{-\theta^*-1}$ と書きかえることができる． 前者は本節の (1.16)， 後者は (1.15) に対応する． Kemp, Sheshinski and Thānh〔23〕によれば，Fig. 2（同論文 p. 247）において，前者は右下り，後者は右上りの曲線となることが，交点の存在を保証する．ところが，後者について $\lambda^{-\theta^*} = \frac{g'(b^*)}{g(b^*)/b^*}$ とすれば，

$$\frac{db^*}{d\theta^*} = -\frac{\lambda^{-\theta^*}\log\lambda g(b^*)^2}{b^*g''(b^*)g(b^*) + g'(b^*)[g(b^*) - b^*g'(b^*)]} = \frac{\lambda^{-\theta^*}\log\lambda g(b^*)^2}{(\sigma^* - 1)b^*g''(b^*)g(b^*)}.$$

σ は要素の代替弾力性である．したがって $\frac{db^*}{d\theta^*} > 0$ のためには，$\sigma^* \leqq 1$ でなければならない．すなわち，均衡点における要素代替弾力性が1をこえないことが，均衡解存在のための充分条件である．Kemp, Sheshinski and Thanh〔23〕はこの帰結を認識していないため，解存在証明が論理的に完結していないが，Sheshinski〔49〕は代替弾力性についての仮定を明示することによって，〔23〕の証明法を補充している．なお， 技術進歩が存在しないとき， 均衡成長と完全雇用が両立しないという Inada〔19〕の議論があるが， これは賃金決定に関する特別な仮定と離散的期間分析にもとづく特殊ケースにすぎない.

§ 2　比較動学的分析と黄金律径路

1　貯蓄と生産性　(1.15), (1.16) において明らかなように，均衡解 b^*, θ^* はパラメーター s, λ, n に依存する．したがって，これらパラメーターの変化は，b^* および θ^* の変化をひきおこし，その変化を通じて，他の諸変数の均衡成長解に影響すると考えることができる．そこでまず，貯蓄増加が資本財の労働集約度および経済的耐用年限の均衡値にどのような影響を与えるかを分析しよう．

(1.15), (1.16) を s について微分すれば

$$\begin{pmatrix} \dfrac{f'(f-bf')+bff''}{f^2} & -\lambda e^{-\lambda\theta} \\ \dfrac{f-bf'}{f^2} & -se^{-(\lambda+n)\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{db}{ds} \\ \dfrac{d\theta}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{b}{sf} \end{pmatrix}$$

がえられる．解は次の通りである．

(2.1)
$$\frac{db}{ds}=\frac{\lambda bf}{s[(\lambda-se^{-n\theta}f')(f-bf')-sbff''e^{-n\theta}]}$$

(2.2)
$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{(1-\sigma)b^2e^{\lambda\theta}f''}{s[(\lambda-se^{-n\theta}f')(f-bf')-sbff''e^{-n\theta}]}$$

ただし σ は設備と労働の代替弾力性である．

(2.3)
$$\sigma=-\frac{f'(f-bf')}{bff''}$$

ところで，(2.1), (2.2) の右辺において

$$f''^*<0, \quad f^*-b^*f'^*\geqq 0,$$

$$\lambda-se^{-n\theta^*}f'^*=\frac{e^{-n\theta^*}[\lambda e^{n\theta^*}+ne^{-\lambda\theta^*}-(\lambda+n)]}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}>0^{(1)}$$

が成立つ．したがって

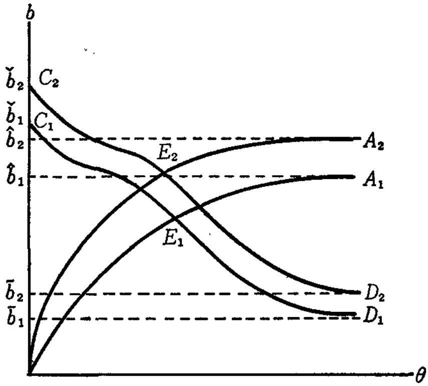
---

(1)　左等式は (1.18) より求まる．そして $\varphi(\theta)=\lambda e^{n\theta}+ne^{-\lambda\theta}-(\lambda+n)$ とおくと，$\varphi(0)=0$, $\varphi'(\theta)=\lambda n(e^{n\theta}-e^{-\lambda\theta})>0$ ($\theta>0$ について)．これより右不等式が明らかである．

$$\frac{db^*}{ds} > 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d\theta^*}{ds} \gtreqless 0 \quad (\sigma^* \gtreqless 1 \text{ に応じて，不等号同順}). \tag{2.5}$$

このようにして，貯蓄の増加は資本財の労働に対する結合比率の均衡値を高めるが，代替弾力性が均衡点において1より小であるときにのみ，設備の経済的耐用年限を低める．3.2図は $\sigma < 1$ の場合における貯蓄増加の効果を図示したものである．添字の1が低い貯蓄率の場合，添字の2が高い貯蓄率の場合をあらわす.(2) 図に示されたように，$\sigma^* < 1$ の場合には貯蓄増加は均衡点を E_1 から E_2 へと北西方向に移動させる効果をもっている．なお均衡点は，$\sigma^*=1$ の場合には真北，$\sigma^*>1$ の場合には北東方向に移動する．



3.2図

このような論理的帰結に対する経済学的解釈は次の通りである．貯蓄率の上

(2) 3.2図は (1.16) と (1.18) の図示である．θ を一定とすると，s の上昇は，(1.16) においては $\dfrac{f}{b}$ を低め，(1.18) においては $f'(b)$ を低める．ところが，$\dfrac{f}{b}$，f' が低いのは b が高いときにおいてのみである．また，$\dfrac{f(\hat{b})}{\hat{b}}=\dfrac{\lambda+n}{s}$，$f'(\tilde{b})=\dfrac{\lambda+n}{s}$，$f'(\check{b})=\dfrac{\lambda}{s}$ を満す $\hat{b}$，$\tilde{b}$，$\check{b}$ はいずれも，s の上昇によって高くなる．したがって s の上昇は OA 曲線を OA_1 から OA_2 へ，CD 曲線を C_1D_1 から C_2D_2 へといずれも上方へシフトさせる．

昇は二つの側面から機械の経済的耐用年限に作用する．まず，貯蓄率の上昇は新投資を高めることによって機械の労働需要を高める．労働供給に変化なしとすれば，このような労働需要の増加は古い機械に配置していた労働を新機械に移動させることによってまかなわねばならない．これは機械の経済的耐用年限を減小させることにほかならない．ところが他面，貯蓄率の上昇は資本・有効労働比率を高めることを通じて労働需要を減小させる．つまり，労働に対する資本財の代替が生じる．そしてそのことが機械の経済的廃棄をおくらせる効果をもっている．代替の弾力性が大きいほどその効果は大きい．このような二面的な効果のうち，前者は3.2図における OA 曲線のシフトに対応し，後者は CD 曲線のシフトに対応する．$\sigma^*>1$ は後者が前者を打消してなお余りある場合，$\sigma^*<1$ は後者が前者に及ばない場合，$\sigma^*=1$ は両効果が相殺する場合である．

なお，一次同次の生産関数において，b のあらゆる値に対して $\sigma=1$ の場合，その生産関数は Cobb-Douglas 型である．したがって $\frac{bf'}{f}$ は産出量の資本に対する弾力性をあらわし，b に依存しない定数となる．これを β であらわすことにすれば，(1.15) において

$$\theta^*=-\frac{\log(1-\beta)}{\lambda}$$

がえられる．そこでは，θ^* は s に依存しない定数である．s の上昇が θ^* の上昇も下落も生じないのはけだし当然であろう．

ここで，資本ストックの平均年令 (m) と経済的耐用年限の関係を導いておこう．平均年令は

$$m=\frac{\int_{t-\theta}^{t}(t-T)K_T dT}{\int_{t-\theta}^{t}K_T dT} \tag{2.6}$$

と定義される．[3] 均衡成長径路においては，

(3) 平均年令の定義については Allen〔3〕(p. 298) にしたがう．

$$(2.7)\qquad m^*=\frac{1}{\lambda+n}-\frac{\theta^*}{e^{(\lambda-n)\theta^*}-1}.$$ [4]

もちろん $m^*>0$. そこで (2.7) を θ^* について微分すれば

$$\frac{dm^*}{d\theta^*}=\frac{(\lambda+n)\theta^* e^{(\lambda+n)\theta^*}}{[e^{(\lambda+n)\theta^*}-1]^2}-\frac{1}{e^{(\lambda+n)\theta^*}-1}>0.$$

これは，使用されている機械の平均年令は陳腐化する機械の年令と同方向に変化することを示している.[5]

この結果に (2.5) を考慮すれば，s と m^* の関係が明瞭になる．すなわち，$\sigma^*>1$ ならば，高い貯蓄率は高い年令構成の資本ストックをもたらすが，$\sigma^*<1$ ならば，高い貯蓄率が却って低い年令構成の資本ストックをもたらす，なお，$\lim_{\theta\to\infty}\frac{\theta}{e^{(\lambda+n)\theta}-1}=0$ ゆえ，資本設備の経済的廃棄が生じないときには，均衡における資本ストックの年令構成は産出量均衡成長率の逆数となる.[6]

さて，貯蓄増加が均衡産出量水準に及ぼす影響を検討すべき段階に達した. (1.17) において

$$(2.8)\qquad Q^*(0)=\frac{n}{\lambda+n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}\,f^*L(0)$$

であるから，s の上昇は b^* と θ^* の変動を通じて $Q^*(0)$ に影響すると みることができる．すなわち

$$(2.9)\qquad \frac{dQ^*(0)}{ds}=\frac{\partial Q^*(0)}{\partial b^*}\,\frac{db^*}{ds}+\frac{\partial Q^*(0)}{\partial\theta^*}\,\frac{d\theta^*}{ds}.$$

---

(4) (2.6) において $\int_{t-\theta}^{t}TK_TdT=K_0\int_{t-\theta}^{t}Te^{(\lambda+n)T}dT=K_0\left[\frac{Te^{(\lambda+n)T}}{\lambda+n}-\frac{e^{(\lambda+n)T}}{(\lambda+n)^2}\right]_{t-\theta}^{t}$ を考慮すればよい.

(5) Mattews [33] は，各機械に雇用労働割合をウエイトした加重平均をもって資本ストックの平均年令とすべきと主張している. ([33] p. 168 参照). この主張にしたがえば $m=\int_{t-\theta}^{t}\frac{L_T}{L(t)}K_TdT\Big/\int_{t-\theta}^{t}K_TdT$ となり，$\frac{L^*_T}{L(t)}=\frac{n}{1-e^{-n\theta^*}}e^{n(T-t)}$ を考慮すれば，$m^*=\frac{\lambda+n}{\lambda+2n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+2n)\theta^*}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}\,\frac{n}{1-e^{-n\theta^*}}$. そこで，$\frac{d}{d\theta^*}\left\{\frac{\lambda+n}{\lambda+2n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+2n)\theta}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}\right\}<0$, $\frac{d}{d\theta^*}\left(\frac{n}{1-e^{-n\theta^*}}\right)<0$. したがって $\frac{dm^*}{d\theta^*}<0$. これは本文と全く逆の結果である.

(6) Phelps [38] (p. 558) においても同一の結果が導かれている.

(2.9) の右辺第一項は capital deepening effect, 第二項を capital lengthening effect と呼ぶ.(7)

そこで, (2.8) を b^* および θ^* によって偏微分すれば, 次の通りである.

$$\frac{\partial Q^*(0)}{\partial b^*}=\frac{n}{\lambda+n}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}f'^*L(0)>0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial Q^*(0)}{\partial \theta^*}=\psi'(\theta^*)f^*L(0)<0. \tag{2.11}$$

ただし

$$\psi(\theta)\equiv\frac{n}{\lambda+n}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{1-e^{-n\theta}}$$

とする.(8) (2.4), (2.5), (2.10), (2.11) により

$$\frac{\partial Q^*(0)}{\partial b^*}\frac{db^*}{ds}>0,$$

$$\frac{\partial Q^*(0)}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}\lesseqqgtr 0$$ ($\sigma^*\gtreqqless 1$ に応じて, 不等号同順)

が導かれる. このようにして, 均衡産出量水準に対する貯蓄増加の capital deepening effect は常に正であるが, capital lengthening effect は代替の弾力性に依存して正, 負が決定される.

(2.11) は興味ある結果を示している. その経済学的解釈は次のようになされよう. 労働供給に比して設備の実働期間が非常に短い場合には, 経済的廃棄をおくらせることは, 労働者により多くの機械を与えることをいみし, したがって産出量は増加する. しかし, やがては一層の耐用年限の延長が労働力の一部を有効でない使用にみちびく結果, 産出量の減小を生じるに至る. このようにして, 労働供給が与えられたとき, 産出量を最大ならしめる最適耐用年限が

(7) この用語は Phelps [40] (p. 282) によるが, 用法は若干異る. Phelps [40] は, $Q(0)$ を s と θ (Phelps の記号では z) のタームであらわし, 前者を通じての直接的効果を capital deepening effect, 後者を通じての間接的効果を capital lengthening effect と名付けている.

(8) $\psi(0)=1$, $\psi(\infty)=\frac{n}{\lambda+n}$, $\psi'(\theta)<0$ ($\theta>0$ に対して). 証明はたとえば Phelps [40] (p. 285. Appendix A) 参照.

存在する．ところが，労働供給一定のまま，θ を引上げようとすれば，当然，θ 上昇による産出量の増加は，労働の有効でない再配分の結果として生じる産出量の減小によって相殺され，却って産出量の純減小を生じるであろう．

さて，貯蓄増加の二つの効果を綜合すれば，(2.9) において，$\sigma^*\leqq 1$ の場合には，両効果が同一方向に働らき，確実に $\dfrac{dQ^*(0)}{ds}>0$ であるが，$\sigma^*>1$ の場合には，それぞれの効果が反対方向に働らくので，$\dfrac{dQ^*(0)}{ds}$ の符号は確定しない．σ^* が十分大きいときには，貯蓄増加が産出量水準を引下げる結果を生じることさえある．このようにして，節約は生産の資本集約度を高めると同時に，資本の平均年令を低めることを通じて産出量水準に影響するという従来の観念は，要素の代替弾力性に依存してその意味内容が規定されなければならない．

最後に賃金の相対的分前に対する貯蓄増加の効果を分析する．均衡成長径路において，賃金分前 $D_L(t)$ は，(1.7)，(1.10)～(1.14) により

$$D_L{}^*(t)=\frac{w^*(t)L(t)}{Q^*(t)}=\frac{\lambda+n}{n}\,\frac{e^{n\theta^*}-1}{e^{(\lambda+n)\theta^*}-1} \tag{2.13}$$

となる．ただちに

$$\frac{dD_L{}^*(t)}{d\theta^*}<0 \tag{2.14}$$

が明らかである．[9] したがって

$$\frac{dD_L{}^*}{ds}=\frac{dD_L{}^*}{d\theta^*}\,\frac{d\theta^*}{ds}\gtreqless 0 \quad (\sigma^*\gtreqless 1 \text{ に応じて，不等号同順}).$$

このようにして節約の増加の賃金分前に対する影響は要素代替の弾力性に依存する．節約と均衡産出量の間の上述の結果とあわせて，次のような結論を述べることができる．代替弾力性が 1 の場合には，貯蓄増加は産出量の増加をもたらすが，賃金分前に対しては中立的である．ところが，代替弾力性が 1 より小さい場合には，貯蓄増加は産出量の増加をもたらすとともに賃金分前も上昇さ

(9) $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{\lambda+n}{n}\,\dfrac{e^{n\theta}-1}{e^{(\lambda+n)\theta}-1}\right]<0$ については Phelps〔40〕(p.288. Appendix D 参照)．

す．したがってこの場合は，投資増加は利潤側に不利な影響を残すことになる．逆に，代替弾力性が1より大きい場合には，貯蓄増加の産出量に対する影響は不定であるが，賃金分前を確実に減小さす効果をもっている．

2　利子率と黄金律　貯蓄増加の均衡消費水準に対する影響，黄金律径路の存在などを検討しなければならないが，それに先立って，体系内に利子率を導入しよう．

vintage T の設備の t 時（$t \geq T$）における準地代は，均衡成長のもとでは

$$(2.15) \qquad q_T^*(t)=\frac{Q_T^*-w^*(t)L_T^*}{K_T^*}=[1-e^{-\lambda(T+\theta^*)}e^{\lambda t}]\frac{f^*}{b^*}.$$

これを競争均衡条件

$$1=\int_T^{T+\theta^*} q_T^*(t)e^{-r(t-T)}dt$$

に代入すれば，若干の計算の結果

$$(2.16) \qquad \frac{b^*}{f^*}=\frac{1}{r}-\frac{\lambda e^{-r\theta^*}-re^{-\lambda\theta^*}}{r(\lambda-r)}$$

がえられる．これが利子率を規定する関係式であるが，ここでも，貯蓄率が利潤分前にひとしいとき，そしてそのときにのみ利子率は成長率にひとしくなることがわかる．実際，(2.16)，(1.16) より

$$(2.17) \qquad s=\frac{\lambda+n}{r(\lambda-r)}\,\frac{(\lambda-r)-(\lambda e^{-r\theta^*}-re^{-\lambda\theta^*})}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}$$

がえられるが，(2.13) は

$$(2.13\,a) \qquad 1-D_L^*=\frac{\lambda-(\lambda+n)e^{n\theta^*}+ne^{(\lambda+n)\theta^*}}{n[e^{(\lambda+n)\theta^*}-1]}$$

のように書きかえることができる．そこで，$r=\lambda+n$ とすれば，(2.17) と (2.13 a) の右辺は互にひとしくなるので，$s=1-D_L^*$．逆に，$s=1-D_L^*$とすれば，(2.17) と (2.13 a) の左辺がひとしくなるので，

$$\frac{\lambda+n}{r(\lambda-r)}\,\frac{(\lambda-r)-(\lambda e^{-r\theta^*}-re^{-\lambda\theta^*})}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}=\frac{\lambda-(\lambda+n)e^{n\theta^*}+ne^{(\lambda+n)\theta^*}}{n[e^{(\lambda+n)\theta^*}-1]}.$$

若干の計算により

$$\frac{1}{r}+\frac{\lambda}{r(r-\lambda)}e^{-r\theta*}-\frac{1}{r-\lambda}e^{-\lambda\theta*}=\frac{1}{\lambda+n}+\frac{\lambda}{(\lambda+n)n}e^{-(\lambda+n)\theta*}-\frac{1}{n}e^{-\lambda\theta*}$$

がえられる．これより $r=\lambda+n$.

さて，putty-putty モデルにおいて成立した最大消費均衡成長に関する黄金律が，このモデルにおいて成立するであろうか．

最大消費径路においては，消費 $C(0)$ の貯蓄率 s に関する全微分がゼロとなる．$C(0)=Q(0)-K_0$ であるから，(1.17) において

$$C^*(0)=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta*})f^*-(\lambda+n)b^*}{1-e^{-n\theta*}} \tag{2.18}$$

となり，$C^*(0)$ は b^* と θ^* の関数である．したがって最大値の必要条件は

$$\frac{dC^*(0)}{ds}=\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}\frac{db^*}{ds}+\frac{\partial C^*(0)}{\partial\theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}=0. \tag{2.19}$$

(2.4) により $\dfrac{db^*}{ds}>0$, (2.5) により $\dfrac{d\theta^*}{ds}$ は σ^* に依存して符号不定であることが分っているが，いま s について同一の値が $\dfrac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}$ と $\dfrac{\partial C^*(0)}{\partial\theta^*}$ の両方共をゼロならしめることがおこったとすれば，その値は最大値条件を満すことになる．まず，

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial C^*(0)}{\partial\theta^*}\\&=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\frac{[(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta*}-\lambda e^{-(\lambda+2n)\theta*}]f^*-[nf^*-n(\lambda+n)b^*]e^{-n\theta*}}{(1-e^{-n\theta*})^2}\end{aligned}$$

は

$$\frac{b^*}{f^*}=\frac{n+\lambda e^{-(\lambda+n)\theta*}-(\lambda+n)e^{-\lambda\theta*}}{n(\lambda+n)}$$

をいみする．これに (1.16) を考慮すれば

$$s=\frac{\lambda-(\lambda+n)e^{n\theta*}+ne^{(\lambda+n)\theta*}}{n[e^{(\lambda+n)\theta*}-1]}.$$

したがって，(2.13 a) により $s=1-D_L{}^*$.

次に，

$$0=\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\ \frac{[1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}]f'^*-(\lambda+n)}{1-e^{-n\theta^*}}$$

は

$$f'^*=\frac{\lambda+n}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}$$

をいみする．ところが競争均衡条件において

$$f'^*=\frac{r}{1-e^{-r\theta^*}}$$

が成立する.(10) この二式より $r=\lambda+n$，したがって $s=1-D_L^*$ がしたがう．

このようにして $s=1-D_L^*$ は $\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}$ と $\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}$ を同時にゼロならしめることが明らかになった．しかし，この条件（$s=1-D_L^*$）が最大値を保証する十分条件であるためには，$s=1-D_L^*$ において

$$(2.20)\quad \frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^{*2}}\left(\frac{db^*}{ds}\right)^2+\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial \theta^{*2}}\left(\frac{d\theta^*}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^*\partial\theta^*}\ \frac{db^*}{ds}\ \frac{d\theta^*}{ds}<0$$

が成立しなければならない.(11) そこで順次，左辺の各項の符号を検討しよう．

まず，直ちに

$$(2.21)\qquad \frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^{*2}}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\ \frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}f''^*<0$$

が明らかである．次に，

$$\left.\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial \theta^{*2}}\right|_{s=1-D_L^*}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\ \frac{\psi'(\theta^*)}{\phi(\theta^*)},$$

ただし

---

(10) 均衡成長径路において競争均衡条件は $K_t^*=\int_t^{t+\theta^*}[Q_t^*-w^*(T)L_t^*]e^{-r(T-t)}dT$ であらわされるが，その両辺を K_t^* で偏微分すれば，$1=\frac{\partial Q_t^*}{\partial K_t^*}\int_t^{t+\theta^*}e^{-r(T-t)}dT.$ これに $\frac{\partial Q_t^*}{\partial K_t^*}=f'^*$ を代入して，計算すれば得られる．

(11) (2.20) の左辺に $\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}\ \frac{d^2\theta^*}{ds^2}+\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}\ \frac{d^2 b^*}{ds^2}$ という項を付け加えたものが $\frac{d^2 C^*(0)}{ds^2}$ であるが，$s=1-D_L^*$ のとき，$\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}=\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}=0$ ゆえ，この項は消滅する．

$$\psi(\theta)=[(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta}-\lambda e^{-(\lambda+2n)\theta}]f-[nf-n(\lambda+n)b]e^{-n\theta},$$
$$\phi(\theta)=(1-e^{-n\theta})^2$$

とする.(12) したがって

$$\psi'(\theta)=[\lambda(\lambda+2n)e^{-(\lambda+2n)\theta}-(\lambda+n)^2e^{-(\lambda+n)\theta}]f+n[nf-n(\lambda+n)b]e^{-n\theta}.$$

ところで $\phi(\theta^*)>0$. そして $s=1-D_L^*$ のとき, $\psi(\theta^*)=0$, したがって

$$[nf-n(\lambda+n)b^*]e^{-n\theta^*}=[(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta^*}-\lambda e^{-(\lambda+2n)\theta^*}]f^*,$$

よって

$$\psi'(\theta^*)|_{s=1-D_L^*}=-\lambda(\lambda+n)[1-e^{-n\theta^*}]e^{-(\lambda+n)\theta^*}f^*<0.$$

以上により

$$\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial\theta^{*2}}\Big|_{s=1-D_L^*}<0 \qquad (2.22)$$

が成立する. 最後に,

$$\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^*\partial\theta^*}\Big|_{s=1-D_L^*}=\frac{n(\lambda+n)L(0)}{(1-e^{-n\theta^*})(e^{(\lambda+n)\theta^*}-1)}>0. \qquad (2.23)$$ (13)

以上 (2.21)~(2.23) を考慮すれば, $s=1-D_L^*$ のとき, 一般には (2.20) の左辺が負定値である保証はないが, $\sigma^*\leqq 1$ ならば, $\frac{db^*}{ds}\frac{d\theta^*}{ds}\leqq 0$ ゆえ, (2.20) は満されることがわかる.

このようにして, 均衡点における要素代替の弾力性が1より大でない場合においては, 投資=利潤, ないし利子率=成長率が最大消費均衡成長径路の必要十分条件であることが明らかになった.

§3 均衡成長径路の安定分析

ここで, Sheshinski [49] の方法にもとづき, §1で示された均衡成長径路の安定分析をおこなう.

---

(12) $\frac{\partial C^*(0)}{\partial\theta^*}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\frac{\psi(\theta^*)}{\phi(\theta^*)}$, $\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial\theta^{*2}}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\frac{\psi'(\theta^*)\phi(\theta^*)-\psi(\theta^*)\phi'(\theta^*)}{\phi(\theta)^2}$ において, $s=1-D_L^*$ のとき $\psi(\theta^*)=0$ となることに注意.

(13) (2.18) より $\frac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^*\partial\theta^*}$ を求め, $f'^*=\frac{\lambda+n}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}$ ($s=1-D_L^*$ のとき成立する関係) を考慮すれば求まる.

いま，新しい集約変数として

$$h_t=\frac{K_t}{e^{\lambda t}L(t)}$$

を導入するとき，モデルの均衡条件は h_t のタームで次のようにあらわされる.(1)

$$(3.1) \qquad 1=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{h_T}{b_T}e^{n(T-t)}dT$$

$$(3.2) \qquad h_t=s\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{f(b_T)}{b_T}h_Te^{(\lambda+n)(T-t)}dT$$

$$(3.3) \qquad f(b_t)-b_tf'(b_t)=f(b_{t-\theta(t)})e^{-\lambda\theta(t)}$$

(3.1) は完全雇用の条件，(3.2) は貯蓄・投資の均等条件，(3.3) は設備廃棄の決定式に相当する. (3.1), (3.2) は時間表示をあらためて，次のようにあらわすことができる.

$$(3.1\,a) \qquad 1=\int_{0}^{\theta(t)}\frac{h_{t-T}}{b_{t-T}}e^{-nT}dT$$

$$(3.2\,a) \qquad h_t=s\int_{0}^{\theta(t)}\frac{f(b_{t-T})}{b_{t-T}}h_{t-T}e^{-(\lambda+n)T}dT$$

そして均衡成長解は

$$(3.4) \qquad b=h\frac{1-e^{-n\theta}}{n},$$

$$(3.5) \qquad 1=s\frac{f}{b}\,\frac{1-e^{-n\theta}}{\lambda+n},$$

$$(3.6) \qquad \frac{bf'}{f}=1-e^{-\lambda\theta}$$

を同時に満す解 $(b^*,\ \theta^*,\ h^*)$ である.(2)

---

(1) (3.1) は (1.2), (1.4) と h_t の定義式より次のようにして導かれる. $1=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{L_T}{L(t)}dT=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{K_T}{e^{\lambda t}b_T}\frac{1}{L(t)}dT=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{h_T}{b_T}\frac{L(T)}{L(t)}dT=\int_{t-\theta(t)}^{t}\frac{h_T}{b_T}e^{n(T-t)}dT.$ 同様にして (3.2) は (1.1) ～ (1.5) と h_t の定義式より導かれる. (3.3) は (1.6), (1.7) より直ちにえられる.

(2) (3.4) ～ (3.6) は (3.1) ～ (3.3) において $\theta(t)=\theta$, $b_t=b$, $h_t=h$ とおくことによって求まる.

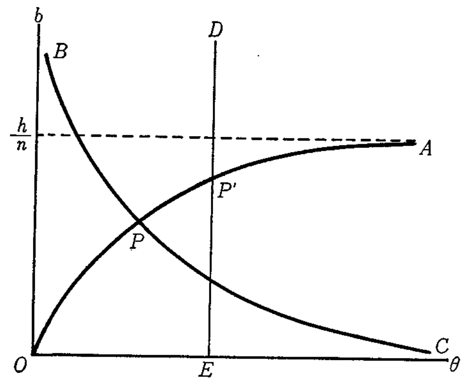
さて，$t=0$ を出発点にとり，経済は均衡条件 (3.1)～(3.3) にしたがって進展してゆくものとする．ゼロ時点において過去の歴史的事実として，新設備の労働に対する集約度，および有効労働単位当り投資が，次のように，有界な範囲に与えられていると仮定する．

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} &\underline{b}_0 \leqq b_T \leqq \bar{b}_0 \quad (\text{すべての } T<0 \text{ について}),\\ &\underline{h}_0 \leqq h_T \leqq \bar{h}_0 \quad (\text{すべての } T<0 \text{ について}). \end{aligned}$$

ただし $\underline{b}_0$, $\bar{b}_0$, $\underline{h}_0$, $\bar{h}_0$ は正の実数で，$\underline{b}_0 \leqq b^* \leqq \bar{b}_0$, $\underline{h}_0 \leqq h^* \leqq \bar{h}_0$ とする．また b_T, h_T は $T<0$ について積分可能と仮定する．そうすると，(3.7) のもとで，すべての $t \geqq 0$ に対して b_t, h_t は正であるとともに連続である．

そこでまず，(3.4) と (3.6) を満す b と h のそれぞれの上界と下界を以下のように設定する．

h を与えたとき (3.4) を満す θ と b の関係は，3.3 図において，曲線 OA のようにあらわされる．他方，(3.6) を満す θ と b の関係をあらわす曲線は，要素代替の弾力性に依存してその形が規定される．(3.6) より，$\dfrac{db}{d\theta} = \lambda e^{-\lambda\theta}\dfrac{f}{(1-\sigma)bf''}$ が得られるが，直ちに明らかなように，$\sigma \lesseqgtr 1$ に応じて $\dfrac{db}{d\theta} \lesseqgtr 0$ (不等号同順)．$\sigma=1$ の場合には $\dfrac{bf'}{f}$ は定数ゆえ $\dfrac{db}{d\theta}=0$．したがって，$\sigma \leqq 1$ の場合には，(3.6) を満す θ と b の関係は，3.3 図において，曲線 BC



3.3 図

($\sigma<1$ の場合)，または直線 DE ($\sigma=1$ の場合) のようにあらわされる．したがって，(3.4) と (3.6) の両方を満す b と θ は P(または P′) であらわされる．[3] そして h を上昇させると，OA の漸近線が上方へシフトし，したがって交点 $P(P')$ も上方へシフトする．そのとき，b は上昇し，θ は下落（不変）する．

3.3図において容易に知れるように，(3.7) において仮定された $\bar{b}_0$，$\bar{h}_0$ に対して，(3.4) と (3.6) を満すとともに，$\bar{b}\geqq\bar{b}_0$，$\bar{h}\geqq\bar{h}_0$ となるように，$\bar{b}$，$\bar{h}$ を定めることが可能である．そのとき (3.4)，(3.6) を満す θ を $\underline{\theta}$ とする．このようにして

$$
\begin{aligned}
&\bar{b}\geqq\bar{b}_0,\quad \bar{h}\geqq\bar{h}_0,\\
(3.8)\qquad &\bar{b}=\bar{h}\frac{1-e^{-n\underline{\theta}}}{n},\\
&\frac{\bar{b}f'(\bar{b})}{f(\bar{b})}=1-e^{-\lambda\underline{\theta}}.
\end{aligned}
$$

同様にして，次のような $\underline{b}$，$\underline{h}$，$\bar{\theta}$ を見出すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\underline{b}\leqq\underline{b}_0,\quad \underline{h}\leqq\underline{h}_0\\
(3.9)\qquad &\underline{b}=\underline{h}\frac{1-e^{-n\bar{\theta}}}{n}\\
&\frac{\underline{b}f'(\underline{b})}{f(\underline{b})}=1-e^{-\lambda\bar{\theta}}
\end{aligned}
$$

このとき (3.4)～(3.6) を満す θ^* に対して

$$(3.10)\qquad \underline{\theta}\leqq\theta^*\leqq\bar{\theta}$$

という関係が成立する．[4]

次に，(3.1a)，(3.2a)，(3.3) を満すすべての可能解 $b_t(h_t)$ が，$\bar{b}(\bar{h})$ と $\underline{b}(\underline{h})$ によって，上界と下界を画されること，すなわち

---

(3) $\sigma>1$ の場合は交点 P の存在しないことがある．以下では $\sigma\leqq1$ の場合についてのみ検討する．

(4) $\sigma\leqq1$ が仮定されているので，$1-e^{-\lambda\bar{\theta}}=\dfrac{\underline{b}f'(\underline{b})}{f(\underline{b})}\geqq\dfrac{\bar{b}f'(\bar{b})}{f(\bar{b})}=1-e^{-\lambda\underline{\theta}}$．したがって $\bar{\theta}\geqq\underline{\theta}$．そのうえ，(3.4)，(3.5)，(3.6) を満す b^*，θ^* に対して，$\bar{b}\geqq\bar{b}_0\geqq b^*\geqq\underline{b}_0\geqq\underline{b}$ ゆえ，$\underline{\theta}\leqq\theta^*\leqq\bar{\theta}$．

$$(3.11)\qquad \underline{b}\leqq b_t\leqq \bar{b},\quad \underline{h}\leqq h_t\leqq \bar{h}\quad (すべての\ t>0\ に対して)$$

が成立することを示そう．

そのためには，$t<t_0$ なる t に対して $\underline{b}\leqq b_t\leqq \bar{b}$，$\underline{h}\leqq h_t\leqq \bar{h}$ を仮定したとき，$\underline{b}\leqq b_{t_0}\leqq \bar{b}$，$\underline{h}\leqq h_{t_0}\leqq \bar{h}$ となることを証明すればよい．

次のような最大問題を設定する．

$$\operatorname*{Max}_{x,y} J(x,\ y)=s\int_0^{\theta(t)} e^{-(\lambda+n)T}\frac{f(y(T))}{y(T)}x(T)dT,$$

ただし，$x(T)$，$y(T)(T\geqq 0)$ は，$\underline{h}\leqq x(T)\leqq \bar{h}$，$\underline{b}\leqq y(T)\leqq \bar{b}$，かつ

$$1=\int_0^{\theta(t)}\frac{x(T)}{y(T)}e^{-nT}dT$$

を満す積分可能関数であり，$\underline{\theta}\leqq\theta(t)\leqq\bar{\theta}$ とする．

最大関数 x^*，y^* は，$x^*(T)=\bar{h}$，$y^*(T)=\bar{b}$ $(0\leqq T\leqq \theta(t)$ に対して)．そのとき $\theta(t)=\underline{\theta}$.[(5)] したがって次の関係式が成立する．[(6)]

$$J(x^*,\ y^*)=\bar{h}s\int_0^{\underline{\theta}}\frac{f(\bar{b})}{\bar{b}}e^{-(\lambda+n)T}dT\leqq \bar{h}s\int_0^{\theta^*}\frac{f(b^*)}{b^*}e^{-(\lambda+n)T}dT$$

$$=\bar{h}s\frac{f(b^*)}{b^*}\,\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{\lambda+n}=\bar{h}.$$

この結果より，$h(t_0)\leqq J(x^*,\ y^*)\leqq\bar{h}$，$\theta(t_0)\geqq\underline{\theta}$ が導かれる．同様の議論により，$h(t_0)\geqq\underline{h}$，$\theta(t_0)\leqq\bar{\theta}$.

次に，

$$f(b_{t_0})-b_{t_0}f'(b_{t_0})=f(b_{t_0-\theta(t_0)})e^{-\lambda\theta(t_0)}\leqq f(\bar{b})e^{-\lambda\bar{\theta}}$$
$$=f(\bar{b})-\bar{b}f'(\bar{b})^{(7)}$$

ゆえ，$b_{t_0}\leqq\bar{b}$．逆に，$f(b_{t_0-\theta(t_0)})e^{-\lambda\theta(t_0)}\geqq f(\underline{b})e^{-\lambda\bar{\theta}}$ を考慮すれば，$b_{t_0}\geqq\underline{b}$．以上により，(3.11) が証明された．

ところで，h_t，b_t は正値で，すべての t に対して一様有界である．したがっ

---

(5)　(3.8) によって明らかである．

(6)　中央部不等式は $\underline{\theta}\leqq\theta^*$，$\bar{b}\geqq b^*$ にもとづく．右辺等式は (3.5) にもとづく．

(7)　中央部不等式は次のようにして求まる．$t_0-\theta(t_0)<t_0$ ゆえ，仮定により $b_{t-\theta(t_0)}\leqq\bar{b}$．よって $f(b_{t_0-\theta(t_0)})\leqq f(\bar{b})$．また $\theta(t_0)\geqq\underline{\theta}$ ゆえ，$e^{-\lambda\theta(t_0)}\leqq e^{-\lambda\underline{\theta}}$．したがって $f(b_{t_0-\theta(t_0)})e^{-\lambda\theta(t_0)}\leqq f(\bar{b})e^{-\lambda\underline{\theta}}$.

て $\theta(t)$ もそうである．可能な最高の設備耐用年限は

$$1=\frac{h}{\bar{b}}\int_0^{\hat{\theta}} e^{-nT}dT$$

を満す $\hat{\theta}$ である．すなわち $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{n\bar{b}}{\underline{h}}\right)$.

すべての $t\geqq 0$ に対して $\theta(t)\leqq\hat{\theta}$．そこで，時間の流れを継続的な区間 $[t_{i-1}, t_i)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ に分割する．ただし $t_0=0$, $t_i=t_{i-1}+2\hat{\theta}$ とする．そのとき

$$\text{(3.12)}\qquad \limsup_t h_t\leqq h^*, \quad \limsup_t b_t\leqq b^*$$

を導く．

いま，$t\geqq t_{i-1}$ なるすべての t に対して，$h_t\leqq\alpha^{(i-1)}$, $b_t\leqq\beta^{(i-1)}$ となり，

$$1=\frac{\alpha^{(i-1)}}{\beta^{(i-1)}}\int_0^{\gamma(i-1)} e^{-nT}dT$$

$$f'(\beta^{(i-1)})=\frac{f(\beta^{(i-1)})}{\beta^{(i-1)}}[1-e^{-\lambda\gamma(i-1)}]$$

となるような $\alpha^{(i-1)}$, $\beta^{(i-1)}$ が存在すると仮定する．

任意の $t\geqq t_{i-1}+\hat{\theta}$ を定める． すでに (3.11) の証明に際してあらわれたような h_t の最大値を $\hat{\alpha}^{(i)}$ であらわすと

$$\hat{\alpha}^{(i)}=\alpha^{(i-1)}s\int_0^{\gamma(i-1)}\frac{f(\beta^{(i-1)})}{\beta^{(i-1)}}e^{-(\lambda+n)T}dT.$$

明らかに $\alpha^{(i-1)}>h^*$, $\beta^{(i-1)}>b^*$．なぜならば，もしそうでなければ証明すべきことはなくなるから．したがって $\gamma^{(i-1)}<\theta^*$ が成立する．それは，$\beta^{(i-1)}>b^*$, $\sigma\leqq 1$ により次式が導かれることから，明らかである．

$$1-e^{-\lambda\gamma(i-1)}=\frac{\beta^{(i-1)}f'(\beta^{(i-1)})}{f(\beta^{(i-1)})}<\frac{b^*f'(b^*)}{f(b^*)}=1-e^{-\lambda\theta^*}.$$

以上により

$$\hat{\alpha}^{(i)}<\alpha^{(i-1)}s\int_0^{\gamma(i-1)}\frac{f(\beta^{(i-1)})}{\beta^{(i-1)}}e^{-(\lambda+n)T}dT<\alpha^{(i-1)}s\int_0^{\theta^*}\frac{f(b^*)}{b^*}e^{-(\lambda+n)T}dT$$
$$=\alpha^{(i-1)}.$$

すなわち，$\hat{\alpha}^{(i)}<\alpha^{(i-1)}$.

さて，任意の $t\geqq t_i$ を考える．$t-\hat{\theta}\leqq T<t$ に対して，$k_T\leqq\hat{\alpha}^{(i)}$，$b_T\leqq\beta^{(i-1)}$ を与えると，b_T の最大値（$\beta^{(i)}$ とする）は

$$f'(\beta^{(i)})=\frac{f(\beta^{(i-1)})}{\beta^{(i-1)}}(1-e^{-\lambda\hat{\gamma}^{(i)}})$$

によって示される．ただし $\hat{\gamma}^{(i)}$ は

$$1=\frac{\hat{\alpha}^{(i)}}{\beta^{(i-1)}}\int_0^{\hat{\gamma}^{(i)}}e^{-nT}dT$$

によって定義されるものとする．ところで

$$\hat{\alpha}^{(i)}\int_0^{\hat{\gamma}^{(i)}}e^{-nT}dT=\beta^{(i-1)}=\alpha^{(i-1)}\int_0^{\gamma^{(i-1)}}e^{-nT}dT$$

において，$\hat{\alpha}^{(i)}<\alpha^{(i-1)}$ を考慮すれば，$\hat{\gamma}^{(i)}>\gamma^{(i-1)}$．また，そのとき $\beta^{(i)}<\beta^{(i-1)}$.(8) 最後に，$\alpha^{(i)}$，$\gamma^{(i)}$ として

$$f'(\beta^{(i)})=\frac{f(\beta^{(i)})}{\beta^{(i)}}(1-e^{-\lambda\gamma^{(i)}})$$

$$1=\frac{\alpha^{(i)}}{\beta^{(i)}}\int_0^{\gamma^{(i)}}e^{-nT}dT$$

によって定義され，$\hat{\alpha}^{(i)}\leqq\alpha<\alpha^{(i-1)}$，$\hat{\gamma}^{(i)}\geqq\gamma^{(i)}>\gamma^{(i-1)}$ となるようなものをえらぶことができる．

このようにして，$t\geqq t_i$ なるすべての t に対して $h_t\leqq\alpha^{(i)}$，$b_t\leqq\beta^{(i)}$ がえられた．そして，$\{\alpha^{(i)}\}$，$\{\beta^{(i)}\}$ はいずれも減小数列である．さらに $\lim_{i\to\infty}\alpha^{(i)}=h^*$，$\lim_{i\to\infty}\beta^{(i)}=b^*$, $\lim_{i\to\infty}\gamma^{(i)}=\theta^*$．初期値としては，(3.11) において導かれた $\bar{h}$，$\bar{b}$，$\underline{\theta}$ によって，$\alpha^{(0)}=\bar{h}$，$\beta^{(0)}=\bar{b}$，$\gamma^{(0)}=\underline{\theta}$ とすればよい．以上により (3.12) が証明された．

次に，

$$\text{(3.13)}\qquad \liminf_t h_t\geqq h^*,\quad \liminf_t b_t\geqq b^*$$

---

(8) $\hat{\gamma}^{(i)}>\gamma^{(i-1)}$ ゆえ，$\dfrac{\beta^{(i)}f'(\beta^{(i)})}{f(\beta^{(i)})}=1-e^{-\lambda\hat{\gamma}^{(i)}}>1-e^{-\lambda\gamma^{(i-1)}}$ $=\dfrac{\beta^{(i-1)}f'(\beta^{(i-1)})}{f(\beta^{(i-1)})}$．さらに $\sigma\leqq 1$ を考慮すれば，$\beta^{(i)}<\beta^{(i-1)}$．

の成立することも，同様の方法で証明できる.

(3.12) と (3.13) を結びつければ，$\lim_{t\to\infty} h_t = h^*$，$\lim_{t\to\infty} b_t = b^*$. そのとき (3.3) により $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\theta^*$.

以上により，要素の代替弾力性が1をこえない場合には，均衡成長径路が安定であることが明らかになった.

§4　完全予見と均衡成長

1　労働の最適配分条件の変更とその影響　前節までの議論は，(1.6) で示されているような最適労働配分条件，すなわち，労働の限界生産物が賃金率にひとしくなるよう新機械の労働配分を決定することを前提した. しかし，事後的に要素代替が不能な場合には，ひとたび機械が据えつけられると，それを使用するかぎり，同量の労働を配分しつづけなくてはならない. 賃金率が将来にわたって一定であるときには，(1.6) にもとづく雇用決定は合理的である. しかし，これまで示されたように，均衡成長過程において賃金は一定成長率で上昇してゆく. したがって，機械の生産力は時間を通じて一定であるのに，労働費用は時間を通じて上昇してゆくことになる. ゆえに，(1.6) にもとづく雇用決定は，新機械設定時においては合理的であるが，それ以後は経済的廃棄のおこなわれるまで，非合理的でありつづけることになる. このような非合理性は要素の事後的代替が不能な場合において多少とも不可避であるが，それをできるだけ最小限におさえる試みが必要である. それは賃金の将来予想を考慮に入れて，労働の限界生産力が現行賃金以上になるよう新機械への労働配分を決定することである. その一つの方策は，現行投資の現在価値に対してもうこれ以上の労働は何の貢献もしないというところで労働雇用を停止することである.

このように，将来予想を考慮に入れて，雇用決定の最適条件を変更した場合，均衡成長の様相はどのように変るか，それが以下の課題である.

現行投資の現在価値 $V(t)$ は

$$(4.1) \qquad V(t)=\int_t^{t+\theta}[Q_t-w(T)L_t]e^{-r(t)(T-t)}dT$$

であらわされる．$r(t)$は t 時の市場利子率とする．賃金率が λ の成長率で上昇することを考慮すれば

$$V(t)=\int_t^{t+\theta}[Q_t-w(t)L_te^{\lambda(T-t)}]e^{-r(t)(T-t)}dT.$$ (1)

したがって上述の最適労働配分条件は

$$0=\frac{\partial V(t)}{\partial L_t}=\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}\int_t^{t+\theta}e^{-r(t)(T-t)}dT-w(t)\int_t^{t+\theta}e^{-[r(t)-\lambda](T-t)}dT$$

によってあらわされる．これより

$$(4.2) \qquad w(t)=\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}\,\frac{r(t)-\lambda}{r(t)}\,\frac{1-e^{-r(t)\theta}}{1-e^{-(r(t)-\lambda)\theta}}.$$

したがって，$r(t)\geqq 0$，$\theta\geqq 0$ に対して $w(t)\leqq\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}$. すなわち，新機械配分労働の限界生産力は賃金以下になることはない．ところで，均衡成長径路においては

$$\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}=(f-bf')e^{\lambda t}$$

でなくてはならぬから，これを(4.2)に代入すれば

$$(4.3) \qquad w(t)=\frac{r(t)-\lambda}{r(t)}\,\frac{1-e^{-r(t)\theta}}{1-e^{-[r(t)-\lambda]\theta}}(f-bf')e^{\lambda t}.$$

次に，純利潤ゼロという競争均衡の条件 $V(t)=K_t$ は，(4.1)により

$$1=\int_t^{t+\theta}\left[\frac{Q_t}{K_t}e^{-r(t)(T-t)}-w(T)\frac{L_t}{K_t}e^{-r(t)(T-t)}\right]dT$$

となるが，均衡成長過程において成立すべき関係

$$\frac{Q_t}{K_t}=\frac{f}{b},\quad \frac{L_t}{K_t}=\frac{e^{-\lambda t}}{b},\quad w(T)=w(t)e^{\lambda(T-t)}$$

を代入して，整理すれば，次式がえられる．

$$(4.4) \qquad w(t)=\left[\frac{r(t)-\lambda}{r(t)}\,\frac{1-e^{-r(t)\theta}}{1-e^{-[r(t)-\lambda]\theta}}f-\frac{[r(t)-\lambda]b}{1-e^{-[r(t)-\lambda]\theta}}\right]e^{\lambda t}$$

---

(1) 将来利子率については，t 時の市場利子率が一定のまま持続すると予想する．

(4.3)，(4.4)において

$$(4.5) \qquad f'=\frac{r}{1-e^{-r\theta}}$$

が導かれる．[2]

資本設備の経済的耐用年限は，均衡成長下において，(1.7)より

$$w(t)=\frac{Q_{t-\theta}}{L_{t-\theta}}=e^{\lambda(t-\theta)}f$$

によって決定されるが，これに(4.3)を考慮すれば

$$(4.6) \qquad 1-\frac{bf'}{f}=e^{-\lambda\theta}\frac{r}{r-\lambda}\,\frac{1-e^{-(r-\lambda)\theta}}{1-e^{-r\theta}}.$$

これがゼロ予見のモデルの均衡条件(1.15)にとってかわる条件である．

最後に，貯蓄・投資の均衡条件は，均衡成長下において(1.16)であらわされるが，それを(4.5)に辺々相乗ずれば

$$(4.7) \qquad \frac{bf'}{f}=s\frac{r}{\lambda+n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{1-e^{-r\theta}}$$

が導かれる．

以上述べたように，均衡条件は (4.5)，(4.6)，(4.7) の三式によってあらわされる．それらを同時に満す解 (b^*，θ^*，r^*) が存在するならば，他の変数はすべてこれらに依存して決定される．それは次のようにあらわされる．

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} Q^*(t)&=\frac{n}{\lambda+n}\,\frac{1-e^{-(\lambda+n)*}}{1-e^{-n\theta*}}L(0)f^*e^{(\lambda+n)t} \\ Q^*{}_t&=\frac{nL(0)f^*}{1-e^{-n\theta*}}e^{(\lambda+n)t} \\ K^*{}_t&=\frac{nL(0)b^*}{1-e^{-n\theta*}}e^{(\lambda+n)t} \\ w^*(t)&=e^{-\lambda\theta*}f^*e^{\lambda t}=\frac{r^*-\lambda}{r^*}\,\frac{1-e^{-r^*\theta*}}{1-e^{-(r^*-\lambda)\theta*}}(f^*-b^*f'^*)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

2　均衡利子率と資本設備経済的耐用年限　(4.5)～(4.7)を満す均衡成長

(2)　$r(t)$ は t に依存しない定数となるゆえ，単に r であらわす．

解 b^*, θ^*, r^* が存在したとき，利子率と設備経済的寿命がどのように関連しているか，その様相をグラフによって明らかにする．

(4.5)～(4.7)において b を与えるならば，θ と r の関係は 2 次元のグラフによって示すことができる．

(4.7)を図示するに当って，次の事実に注意すべきである．それは，(4.7)において，$s \gtreqless \beta(b)$ の必要十分条件が $r \gtreqless \lambda+n$（不等号同順）ということである．[3] ただし $\beta(b) \equiv \dfrac{bf'(b)}{f(b)}$ とする．したがって，(4.7)のグラフは三つのケースにわかれる．

先ず $\beta(b) > s$ の場合（ケース 1）．このときには $r > \lambda+n$．したがって(4.7)により，$1 < \dfrac{\beta(b)}{s} < \dfrac{r}{\lambda+n}$．ところで，いま $\bar{r}$ を与えたとき，関数 H を

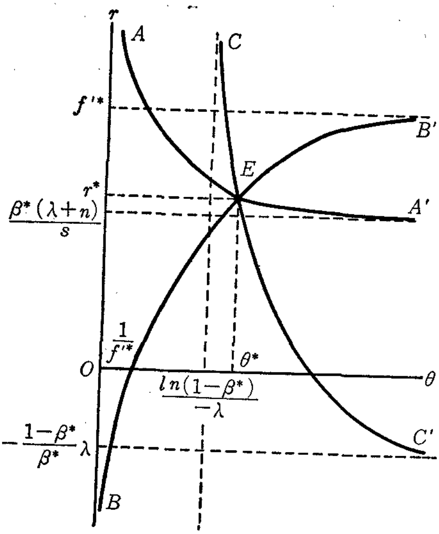
$$H(\bar{r},\ \theta) = \frac{\bar{r}}{\lambda+n} \frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{1-e^{-\bar{r}\theta}}$$

によって定義する．そうすると $\lim\limits_{\theta\to 0} H(\bar{r},\ \theta)=1$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} H(\bar{r},\ \theta)=\dfrac{\bar{r}}{\lambda+n}>1$, $\dfrac{\partial H(\bar{r},\ \theta)}{\partial\theta} > 0$（$\theta>0$ に対して）．したがって，(4.7) を満す $\theta>0$（それを $\bar{\theta}$ とする）が存在する．そして $\bar{r}$ を大きくすると $\bar{\theta}$ は小さくなり，$\bar{r}\to\infty$ に対して $\bar{\theta}\to 0$．他方 $\bar{r}\to\dfrac{\beta(b)}{s}(\lambda+n)$ のとき $\bar{\theta}\to\infty$．このようにして b を与えたときに (4.7) を満す r と θ の関係は 3.4a 図において AA' 曲線のようにあらわされる．

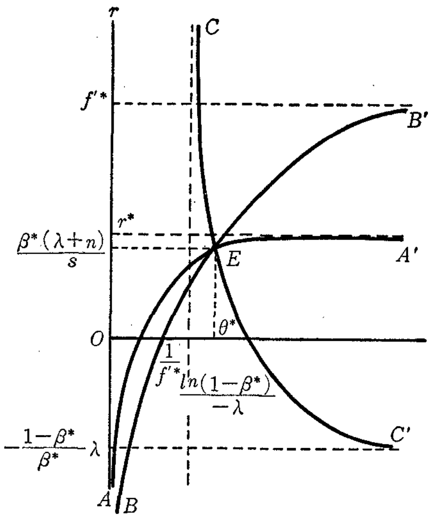
次に，$\beta(b) < s$ の場合（ケース 2）．$r < \lambda+n$ が成立する．したがって $1 > \dfrac{\beta(b)}{s} > \dfrac{r}{\lambda+n}$, $\lim\limits_{\theta\to 0} H(\bar{r},\ \theta)=1$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} H(\bar{r},\ \theta)=\dfrac{\bar{r}}{\lambda+n}<1$, $\dfrac{\partial H(\bar{r},\theta)}{\partial\theta} < 0$（$\theta>0$ に対して）．したがって(4.7) を満す $\bar{\theta}>0$ が存在する．また，$\bar{r}$ を引上げると $\bar{\theta}$ も大きくなり，$\bar{r}\to-\infty$ に対して $\bar{\theta}=0$.他方 $\bar{r}\to\dfrac{\beta(b)}{s}(\lambda+n)$ のとき $\bar{\theta}\to\infty$．以上により求める r と θ の関係図は 3.4b 図のAA'曲線のようになる．

---

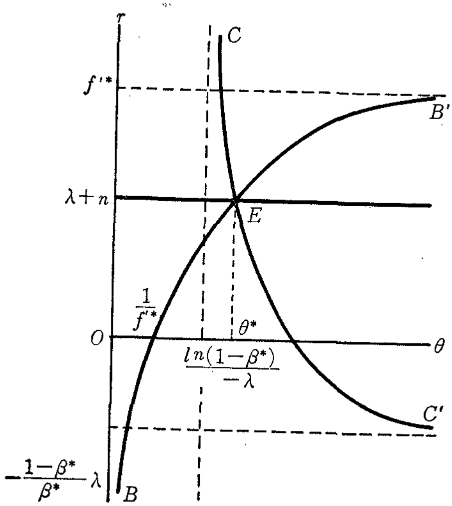
(3) $h(x) \equiv \dfrac{x}{1-e^{-x\theta}}$ と定義するとき，$\theta>0$ に対して $h'(x)=\dfrac{1-(1+x\theta)^{-x\theta}}{(1-e^{-x\theta})^2} > 0$ が成立することを考慮すればよい．



3.4a図



3.4b図



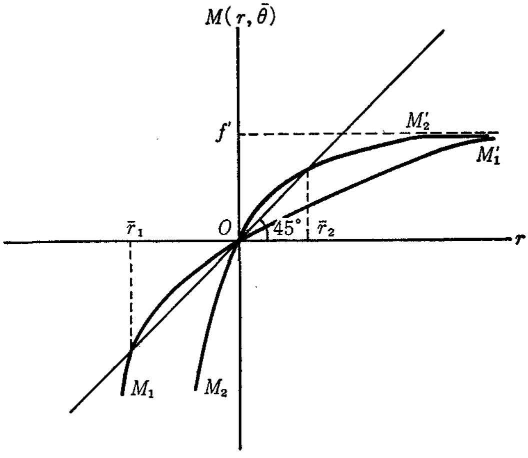
3.4c図

最後に $\beta(\bar{b})=s$ の場合（ケース3）．$r=\lambda+n$ となるから，3.4c図の AA' 曲線のように θ 軸に平行な直線であらわされる．以上で，$\bar{b}$ の与えられたときの(4.7)を満す θ と r の関係の図示がおわった．

次に，$\bar{b}$ が与えられたときの(4.5)を図示しよう．関数 M を次のように定義する．

$$M(r,\ \bar{\theta})\equiv(1-e^{-r\bar{\theta}})f'$$

そうすると $\bar{\theta}>0$ のとき[4]，$r\gtreqless 0$ に応じて $M(r,\ \bar{\theta})\gtreqless 0$（不等号同順），$\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{M}(r,\ \bar{\theta})=f'$，$\lim\limits_{r\to\infty} M(r,\ \bar{\theta})=-\infty$．また，$\dfrac{\partial M(r,\ \bar{\theta})}{\partial r}=\bar{\theta}f'e^{-r\bar{\theta}}>0$[5]，$\dfrac{\partial^2 M(r,\ \bar{\theta})}{\partial r^2}=-\bar{\theta}^2 f'e^{-r\bar{\theta}}<0$．他方，$r\gtreqless 0$ に応じて，$\dfrac{\partial M(r,\ \theta)}{\partial \theta}=rf'e^{-r\theta}\gtreqless 0$（不等号同順）．このようにして $M(r,\ \bar{\theta})$を図示すれば，3.5図における M_iM_i' 曲線のようにあらわされる．M_1M_1' は $\bar{\theta}$ の比較的小さいとき，M_2M_2' は $\bar{\theta}$ の比較的大きいときの $M(r,\ \bar{\theta})$である．ところで，$\bar{\theta}$ を与えたとき，(4.5) を満す r は $M(r,\ \bar{\theta})=r$ となる r である（これを $\bar{r}$ であらわす）が，それは3.5



3.5図

(4) $\bar{\theta}\leqq 0$ に対しては (4.5) を満す解は存在しない．

(5) $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\partial M(r,\bar{\theta})}{\partial r}=\bar{\theta}f'$，$\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\partial M(r,\bar{\theta})}{\partial r}=0$，$\lim\limits_{r\to-\infty}\dfrac{\partial M(r,\bar{\theta})}{\partial r}=\infty$ に注意．

図において M_iM_i' 曲線と 45° 線の交点の横軸座標で示される．そこで，$\tilde{\theta}$ を連続的に変化させたときの $\bar{r}$ の軌跡を求めるならば，それが(4.5)の図示にほかならない．それは，3.4図における BB' 曲線のようにあらわされる．[6]

最後に，b を与えたとき (4.6) を満す θ と r の関係は，3.4図において CC' 曲線のようにあらわされる．(4.6) において，$r\to\infty$ のとき $\theta\to-\frac{1}{\lambda}\log[1-\beta(b)]$ がえられ，$r\to-\frac{1-\beta(b)}{\beta(b)}\lambda$ のとき $\theta\to\infty$ がえられるので[7]，垂直漸近線は $\theta=-\frac{1}{\lambda}\log[1-\beta(b)]$，水平漸近線は $r=-\frac{1-\beta(b)}{\beta(b)}\lambda$ である．

以上により (4.5)〜(4.7) の図示が完了した．任意の b については三つの曲線は同一点で交叉する必然性はないが，b の均衡成長解 (b^*) に対しては，図に示されたように，三つの曲線は同一点 (E) で交叉する．そして交点 E の座標が，それぞれ θ^*，r^* にほかならない．

そこで次のことが明らかである．まず，r^*とθ^* は有限値 (finite solution) である．次に，θ^* は三つのケースのいずれにおいても $-\frac{1}{\lambda}\log[1-\beta(b)]>0$ より大きい．そして，r^* は常に投資の限界生産力 f' より小さいが，成長率に対してはケース毎に異る関係がみられる．ケース1では $r^*>\lambda+n>0$，ケース2では $r^*<\frac{\beta(b^*)}{s}(\lambda+n)$，ケース3では $r^*=\lambda+n>0$.

上述において注意すべきことは，θ^* と b^* の正値性は常に保証されているが，r^* の正値性はケース2において必ずしも保証されないことである．そこで r^* の正値性が保証される条件を求めよう．それは3.4 b 図に示されたように，CC' 曲線の横軸切片 OP が AA' 曲線の横軸切片 OQ より大であることである．そして，前者は

---

(6) BB' 曲線の水平軸切片は，$r\to0$ のときの θ の値である．(4.5) の右辺は $r\to0$ のとき $\frac{1}{\theta}$ に収束する．したがって切片は，$\theta=\frac{1}{f'}$.

(7) $r\to-\frac{1-\beta(b)}{\beta(b)}\lambda$ のとき，$r-\lambda\to-\frac{\lambda}{\beta(b)}$，$\frac{r}{r-\lambda}\to1-\beta(b)$ ゆえ，(4.6) において $e^{\lambda\theta}=\frac{1-e^{\frac{\lambda}{\beta}\theta}}{1-e^{\frac{1-\beta}{\beta}\lambda\theta}}$ が成立する．したがって $1=\frac{1-e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta}}{1-e^{-\frac{1-\beta}{\beta}\lambda\theta}}$.　これが成立つのは $\theta=\infty$ のときだけである．

$$1-\beta(b)=\frac{1-e^{-\lambda\theta}}{\lambda\theta_1} \tag{4.9}$$

を満す θ_1 であり，後者は

$$\frac{\beta(b)}{s}=\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2}}{(\lambda+n)\theta_2} \tag{4.10}$$

を満す θ_2 である.[8] したがって，もし

$$s\leqq\frac{\beta(b^*)}{1-\beta(b^*)} \tag{4.11}$$

ならば，r^* の正値性は保証される．実際，(4.11)のもとでは，(4.9)，(4.10) により，$\dfrac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2}}{(\lambda+n)\theta_2}\geqq\dfrac{1-e^{-\lambda\theta_1}}{\lambda\theta_1}$，したがって $(\lambda+n)\theta_2\leqq\lambda\theta_1$，よって $\theta_1>\theta_2$ となるからである．以上により，$s>\beta(b^*)$ であっても，$s\leqq\dfrac{\beta(b^*)}{1-\beta(b^*)}$ ならば，r^* は正値となることが明らかになった.

§5　完全予見下の比較動学的分析

1　貯蓄増加の効果　§4において導かれた均衡条件 (4.5)～(4.7) は次のように書きかえることができる．ただし $\beta=\beta(b)=\dfrac{bf'(b)}{f(b)}$ とする.[1]

$$f'=\frac{r}{1-e^{-r\theta}} \tag{5.1}$$

$$\frac{1-\beta}{f'}=\frac{e^{-\lambda\theta}-e^{-r\theta}}{r-\lambda} \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{s}\frac{b}{f}=\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{\lambda+n} \tag{5.3}$$

これらを s について微分すると，次のような連立方程式体系をうる.

$$(1-e^{-r\theta})^2f''\frac{db}{ds}-\{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}\}\frac{dr}{ds}+r^2e^{-r\theta}\frac{d\theta}{ds}=0 \tag{5.4}$$

---

(8)　(4.9)，(4.10) は，(4.6)，(4.7) において $r\to0$ のとき成立する関係式である.

(1)　(5.2)，(5.3) は (4.5) を (4.6)，(4.7) にそれぞれ代入してえたものである.

$$(5.5)\qquad (r-\lambda)^2\left(\frac{1-\beta}{f'}\right)'\frac{db}{ds}+\{e^{-\lambda\theta}-(1+r\theta-\lambda\theta)e^{-r\theta}\}\frac{dr}{ds}$$
$$+(\lambda-r)(re^{-r\theta}-\lambda e^{-\lambda\theta})\frac{d\theta}{ds}=0$$

$$(5.6)\qquad \frac{1}{s}\left(\frac{b}{f}\right)'\frac{db}{ds}-e^{-(\lambda+n)\theta}\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{s^2}\frac{\beta}{f'}=0$$

その解は次の通りである.

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\beta}{f'}}{\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{b}{f'}\right)'D(\theta,\ b,\ r)-e^{-(\lambda+n)\theta}}$$

$$(5.7)\qquad \frac{db}{ds}=D(\theta,\ b,\ r)\frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{dr}{ds}=\frac{r^2e^{-r\theta}+(1-e^{-r\theta})^2f''D(\theta,\ b,\ r)}{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}}\frac{d\theta}{ds}$$

ただし

$$D(\theta,\ b,\ r)=$$
$$\frac{(r-\lambda)(re^{-r\theta}-\lambda e^{-\lambda\theta})\{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}\}-r^2e^{-r\theta}\{e^{-\lambda\theta}-(1+r\theta-\lambda\theta)e^{-r\theta}\}}{(r-\lambda)^2\{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}\}\left(\dfrac{1-\beta}{f'}\right)'+(1-e^{-r\theta})^2\{e^{-\lambda\theta}-(1+r\theta-\lambda\theta)e^{-r\theta}\}f''}$$

とする. なお, $\left(\dfrac{b}{f}\right)'=\dfrac{f-bf'}{f^2}$, $\left(\dfrac{1-\beta}{f'}\right)'=\dfrac{f''}{ff'^2}(bf'\sigma-f)$.

ところで, $D(\theta^*,\ b^*,\ r^*)$ の符号について確定的なことは何もいえないので, $\dfrac{d\theta^*}{ds}$, $\dfrac{db^*}{ds}$, $\dfrac{dr^*}{ds}$の符号は不明である. それは θ^*, r^*, b^*, およびパラメーター λ, n, 代替弾力性 σ^* の大きさに依存する.

かって Matthews は $\dfrac{d\theta^*}{ds}$ の符号が σ^* の大きさに一意的に依存して決定されることを論証しようとした.(2) 以下, Matthews の方法をこの議論に適用してみよう.

(5.1), (5.2)より

(2) Matthews〔33〕(pp. 169—170. 脚注 9) 参照.

$$\frac{1}{1-\beta}=e^{\lambda\theta}\frac{r-\lambda}{r}\frac{1-e^{-r\theta}}{1-e^{-(r-\lambda)\theta}}$$

がえられるが，右辺をテーラー展開し，２次以上の項を無視すれば，

(5.2a)
$$\frac{1}{1-\beta}=1+\frac{\lambda\theta}{2+\theta(\lambda-r)}.$$

これを s について微分すれば

(5.8)
$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{[2+\theta(\lambda-r)]^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)'\frac{db}{ds}-\frac{\theta^2}{2}\frac{dr}{ds}.$$

なお，$\left(\frac{1}{1-\beta}\right)'=\frac{(1-\sigma)bf''}{(1-\beta)^2f}$, Matthews は $\frac{dr^*}{ds}<0$, $\frac{db^*}{ds}>0$ を自明の理として仮定する．したがって，$\sigma^*=1$ のときには，$\left(\frac{1}{1-\beta^*}\right)'=0$ となり，$\frac{d\theta^*}{ds}>0$ がえられる．また $\sigma^*>1$ ならば，$\left(\frac{1}{1-\beta^*}\right)'>0$ となり，$\frac{d\theta^*}{ds}>0$ が成立する．そして $\frac{d\theta^*}{ds}=0$ となるのは

$$\left(\frac{1}{1-\beta^*}\right)'=\frac{\lambda\theta^{*2}}{[2+\theta^*(\lambda-r^*)]^2}\frac{\frac{dr^*}{ds}}{\frac{db^*}{ds}}$$

が成立するほど σ^*が１より十分小さいときである．このようにして，貯蓄増加が資本設備の経済的寿命を引上げるか引下げるかの分岐点は，賃金一定の予想のもとでは $\sigma=1$ であったのに対し，賃金上昇を完全予見する場合には $\sigma=1-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$となる．

すでに明らかなように，以上の Matthews の論証方法は，$\frac{dr^*}{ds}$ および $\frac{db^*}{ds}$ が $\frac{d\theta^*}{ds}$ より先決されていることを前提している．Matthews によれば，$\frac{dr^*}{ds}<0$ を前提した根拠は次の通りである．(3)

投資率 s の上昇は，均衡において，賃金率 w^* の上昇をもたらす．しかし w^* の上昇は利潤率の減小を結果する．そして利潤率は，均衡において，利子率 r^* にひとしいと考えてよい．以上により $\frac{dr^*}{ds}<0$ が成立する．

(3) Matthews〔33〕(p. 170) 参照.

上述のモデルに照してみれば,このような Matthews の議論は循環論にすぎない．実際，(4.8) において $w^*(t)=e^{\lambda t}e^{-\lambda\theta^*}f^*$ であるから，s 上昇の w^* に対する影響は $\dfrac{d\theta^*}{ds}$ および $\dfrac{db^*}{ds}$ に依存するからである．

また，循環論から逃れるために，(5.2) のかわりに (5.2a) を代用して，(5.2a)，(5.1)，(5.3) の相互依存システムにおいて $\dfrac{d\theta^*}{ds}$，$\dfrac{db^*}{bs}$，$\dfrac{dr^*}{ds}$の同時決定を導いたときにも，それぞれの解の符号は不確定である．(4)

ただ，$\sigma=1$ の $C.E.S.$ 生産関数の場合には，Matthews の帰結がある条件のもとで成立する．以下，それを説明する．

$\sigma=1$ の $C.E.S.$ 関数は Cobb-Douglas 型となるので，均衡条件 (5.1)～(5.3) において，$\beta(b)$ は b に依存しない定数となる．したがって，(5.1)～(5.3)において，b^* の決定と r^*, θ^* の決定は分解可能になる．いいかえれば，(5.2) と (5.3) において，r^* と θ^* が同時に決定され，そののち b^* が (5.1)において決定される．そこで，s の上昇の r^*，θ^* への影響については，その大体の傾向を，(5.2a)，(5.3) を s について微分することにより知ることができる．

β は定数であるから，(5.2a)より

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{\theta^2}{2}\frac{dr}{ds} \tag{5.9}$$

がえられる．他方，(5.3) より

$$\xi(r,\ \theta)\frac{dr}{ds}+\eta(r,\ \theta)\frac{d\theta}{ds}+\frac{r(\lambda+n)(1-e^{-n\theta})^2}{s^2r}=0 \tag{5.10}$$

が導かれる．ただし

---

(4) たとえば $\dfrac{d\theta^*}{ds}$ は次のようにあらわされる．

$$\frac{d\theta^*}{ds}=\frac{\dfrac{1}{s^2}\dfrac{b^*}{f^*}}{\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{b^*}{f^*}\right)'E(r^*,\theta^*,b^*)-e^{-(\lambda+n)\theta^*}},$$

ただし

$$E(r,\theta,b)=\frac{2\lambda\{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}+\lambda\theta^2r^2e^{-r\theta}\}}{\{1-(1+r\theta)e^{-r\theta}\}\{2+\theta(\lambda-r)\}^2\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)'-\lambda\theta^2(1-e^{-r\theta})^2f''}.$$

$$(5.11)\qquad \xi(r,\ \theta)=\frac{\beta(\lambda+n)(1-e^{-r\theta})^2}{sr^2}+\theta e^{-r\theta}[e^{-(\lambda+n)\theta}-1]$$

$$(5.12)\qquad \eta(r,\ \theta)=(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta}(1-e^{-r\theta})-re^{-r\theta}[1-e^{-(\lambda+n)\theta}]$$

とする．(5.9) と (5.10) より $\dfrac{dr}{ds}$ および $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めれば次の通りである．

$$(5.13)\qquad \frac{dr}{ds}=\frac{2\beta(\lambda+n)(1-e^{-n\theta})^2}{s^2r[\theta^2\eta(r,\ \theta)-2\xi(r,\ \theta)]}$$

$$(5.14)\qquad \frac{d\theta}{ds}=-\frac{\beta\theta^2(\lambda+n)(1-e^{-n\theta})^2}{s^2r[\theta^2\eta(r,\ \theta)-2\xi(r,\ \theta)]}$$

(5.13), (5.14) において直ちにわかることは，$\dfrac{dr^*}{ds}$ および $\dfrac{d\theta^*}{ds}$ の符号が $\eta(r^*,\ \theta^*)$ および $\xi(r^*,\ \theta^*)$に依存することである．そこでこれらの符号を検討しよう．(5.11) に (5.3) を考慮すれば

$$\xi(r^*,\ \theta^*)=\frac{1}{r^*}[1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}][1-(1+r^*\theta^*)e^{-r^*\theta^*}]>0$$

が得られる．[5] また，(5.12)は

$$\eta(r,\ \theta)=(1-e^{-r\theta})(1-e^{-(\lambda+n)\theta})\left[\frac{\lambda+n}{e^{(\lambda+n)\theta}-1}-\frac{r}{e^{r\theta}-1}\right]$$

のように書きかえられる．したがって，$r^*\gtreqless\lambda+n$ に応じて $\eta(r^*,\ \theta^*)\gtreqless0$（不等号同順）．ところが上述の議論において[6]，$r^*\gtreqless\lambda+n$ の必要十分条件は $s\gtreqless\beta$（不等号同順）であった．したがって，$s\gtreqless\beta$ に応じて $\eta(r^*,\ \theta^*)\gtreqless0$（不等号同順）が成立することが明らかになった．

これらのことを (5.13), (5.14) に考慮すれば，$s\geqq\beta$ の場合には明らかに $\dfrac{dr^*}{ds}<0$, $\dfrac{d\theta^*}{ds}>0$．ところが $s<\beta$ の場合には $\dfrac{dr^*}{ds}$ および $\dfrac{d\theta^*}{ds}$の符号は不明である．ただ両者の符号が互に異ることだけは確かである．なお，$\dfrac{dr^*}{ds}<0$ であり，かつ$\dfrac{d\theta^*}{ds}>0$ のときには，$\dfrac{db^*}{ds}>0$ となることが，(5.4) において明らかである．

---

(5) $\theta^*>0$ ゆえ，$1-(1+r^*\theta^*)e^{-r^*\theta^*}>0$と なることに注意．

(6) p.74 参照．

以上により，$\frac{\beta}{1-\beta} \geqq s \geqq \beta$ という条件のもとでは，Cobb-Douglas 世界において貯蓄率増加は資本設備の経済的寿命を引きのばし，利子率を引き下げるであろう．これが Matthews の評言の妥当する極限である．

2 完全予見と黄金律　ここで，一般の生産関数に戻って，完全予見のもとに均衡成長の黄金律が成立するかどうかを検討しよう．

均衡成長径路において，賃金分前は

$$(5.15)\quad D_L{}^* = \frac{w^*(t)L(t)}{Q^*(t)}$$
$$= [1-\beta(b^*)]\,\frac{r^*-\lambda}{r^*}\,\frac{\lambda+n}{n}\,\frac{(1-e^{-r\theta^*})(1-e^{-n\theta^*})}{(1-e^{-(r^*-\lambda)\theta^*})(1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})}$$

であらわされる．ところが $s \gtreqless \beta(b^*)$ は $r^* \gtreqless \lambda+n$（不等号同順）と同値である．[7] したがって，$s \gtreqless \beta(b^*)$ に応じて $D_L{}^* \gtreqless 1-\beta(b^*)$ が成立する（不等号同順）ことが (5.15) によって明らかである．また，$r^*=\lambda+n$ ならば $s=1-D_L{}^*$ であることが判明する．[8]

他方，(5.15) を (4.6) に代入して整理すれば，

$$(5.15a)\qquad D_L{}^* = \frac{\lambda+n}{n}\,\frac{e^{n\theta^*}-1}{e^{(\lambda+n)\theta^*}-1}$$

がえられる．すなわち，賃金分前は設備の経済的寿命の減小関数である．したがって，要素代替弾力性が 1 の場合には，$\frac{\beta}{1-\beta} \geqq s \geqq \beta$ という枠内における貯蓄率 s の上昇は，賃金分前を引下げるであろう．

さて，均衡成長が最大消費径路であるための必要条件は，ゼロ予見の場合と同様に，(2.19) であらわされる．[9] このモデルでは $\frac{db^*}{ds}$ と $\frac{d\theta^*}{ds}$ の符号は定まらないが，それがどのような値をとろうと，$\frac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}=0$ と $\frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}=0$ が同一条件のもとで成立するならば，その条件は (2.19) を満すことになる．

---

(7) p. 74 参照．

(8) $r^*=\lambda+n$ ならば $s=\beta^*$ と同時に $1-D_L{}^*=\beta^*$．これより $s=1-D_L{}^*$ が導かれる．逆が必ずしも導かれないことに注意．

(9) $C^*(0)$ は (2.18) であらわされる．

$\dfrac{\partial C^*(0)}{\partial \theta^*}=0$ という条件は，§2と同様に

$$(5.16)\qquad \frac{b^*}{f^*}=\frac{n+\lambda e^{-(\lambda+n)\theta^*}-(\lambda+n)e^{-\lambda\theta^*}}{n(\lambda+n)}$$

をいみする．ところが (5.1)，(5.2) より

$$(5.17)\qquad \frac{b^*}{f^*}=\frac{(r^*-\lambda)+\lambda e^{-r^*\theta^*}-r^*e^{-\lambda\theta^*}}{r^*(r^*-\lambda)}$$

がえられる．したがって (5.16)，(5.17) において

$$(5.18)\qquad r^*=\lambda+n$$

が成立する．

次に，§2と同様にして

$$(5.19)\qquad \frac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}=\frac{nL(0)}{\lambda+n}\,\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})f'^*-(\lambda+n)}{1-e^{-n\theta^*}}.$$

そこで (5.18) を仮定すれば

$$(5.20)\qquad (1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})f'^*-(\lambda+n)=(1-e^{-r^*\theta^*})f'^*-r^*.$$

ところが (5.1) により，(5.20) の右辺は ゼロである．これを (5.19) に考慮すれば，$\dfrac{\partial C^*(0)}{\partial b^*}=0.$

このようにして，(5.19) は最大消費均衡成長の 必要条件 (2.19) を満すことが明らかになった.[10] 消費を 最大にするような 均衡成長径路に おいては，均衡利子率は均衡成長率にひとしく，貯蓄率は利潤分前にひとしい．

3　総括　　最後に，本節をおわるに際して，将来賃金に関する予想の差異にもとづく最適労働配分条件の差異が，それぞれのモデルにおける均衡成長径路の諸変数の値にどのような差異をもたらしたかを総括することにしよう．

1）機械の 経済的耐用年限 θ^* は，ゼロ予見モデルより完全予見モデルの方がより大である．なぜならば，両モデルとも，同一の貯蓄・投資均等条件

---

(10)　(5.19) が (2.22) を満すならば必要充分条件であるが，その保証はない．(5.19) のもとでは $\dfrac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^{*2}}<0$，$\dfrac{\partial^2 C^*(0)}{\partial \theta^{*2}}<0$，$\dfrac{\partial^2 C^*(0)}{\partial b^*\partial \theta^*}>0$ ゆえ，もし $\dfrac{\partial b^*}{\partial s}\dfrac{\partial \theta^*}{\partial s}<0$ となるならば，充分性が満される．

$$(1.16) \qquad 1-e^{-(\lambda+n)\theta}=\frac{\lambda+n}{s}\frac{b}{f}$$

にしたがうが，ゼロ予見モデルでは，これと

$$(1.15) \qquad \theta=-\frac{1}{\lambda}\log[1-\beta(b)]$$

との連立によって，θ^* が決定される．ところが，完全予見モデルでは，3.4図において明らかなように，θ^* は

$$\theta^* > -\frac{1}{\lambda}\log[1-\beta(b^*)]$$

を満している．したがって，完全予見モデルの方が θ^* はより大である．

その経済学的意味づけは次の通りである．ゼロ予見の場合，賃金が労働の限界生産物にひとしくなるよう新機械に対する労働配分を決定する．それに対し，完全予見の場合では，賃金が労働の限界生産物にひとしくなる前に労働の雇用をストップする．(11) したがって，新投資の労働需要は完全予見の場合の方がより小である．古い機械の経済的廃棄はそれだけおくれることになる．すなわち，技術進歩が設備の稼得する準地代に喰い込むのがおくれるのである．

2）資本設備の有効労働に対する結合比率 b^* も，完全予見モデルの方がより大である．実際，両モデルとも $\dfrac{db^*}{d\theta^*}>0$ であることから，θ^* の大きい方が b^* も大である．これは，同一量の投資に対して，完全予見モデルの方が雇用労働量がより少いから両者の比である b はより大になることを物語っている．

3）賃金率 $w^*(t)$ は不定であるが，賃金分前 $D_L{}^*$ は完全予見モデルの方がより小さい．すなわち，賃金率は，いずれのモデルにおいても

$$w^*(t)=e^{\lambda t}e^{-\lambda\theta^*}f^*$$

であらわされるが(12)，b^* の大きいことの効果と θ^* の大きいことの効果は互に反対方向に働らくので，いずれが強いかに依存して $w^*(t)$ の大小はきまる．しかし，賃金分前は，いずれのモデルも

(11) (1.6) と (4.2) を比較せよ．

(12) (1.7)，(1.17) および (4.8) をみよ．

$$D_L{}^* = \frac{\lambda+n}{n}\frac{e^{n\theta^*}-1}{e^{(\lambda+n)\theta^*}-1}$$

であり[13]，これは θ^* の減小関数である．したがって θ^* のより大きい完全予見モデルの方が $D_L{}^*$ はより小である．均衡成長径路において，賃金は時間とともに上昇してゆくのに，それを定常的とする誤った予想にもとづき雇用決定をおこなうゼロ予見モデルに比して，賃金上昇を完全に予想して雇用決定をおこなうモデルにおいて，総産出量に対して賃金の喰い込む割合が小さくなるのは当然の結果であろう．

4）総産出量 $Q^*(t)$，消費 $C^*(t)$ はどちらのモデルの方が大きいか不明である．それらは

$$Q^*(t) = e^{(\lambda+n)t}L(0)\frac{n}{\lambda+n}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}f^*$$

$$C^*(t) = (1-s)Q^*(t)$$

によってあらわされるが，[14] b^* の大きいことは $Q^*(t)$ および $C^*(t)$ を高めるが θ^* の大きいことは $Q^*(t)$ および $C^*(t)$ を低める．どちらの効果が強いかによって，$Q^*(t)$ および $C^*(t)$ は大となるか，小となるかである．その経済学的解釈は次の通りである．完全予見の場合の方が，機械の経済的寿命が長く，したがって資本ストックの平均年令が高い．すなわち，古い機械がより永く使われることになる．これがより低い産出量をもたらす原因となる．ところが他面，完全予見モデルでは投資の有効労働に対する結合比率がより高いので，有効労働単位当り生産性はより大である．したがって，同一技術進歩率と同一労働供給のもとでは，産出量はより大である．以上の相反する二つの効果の合成が産出量の高低を決定するのである．

---

(13)　(2.13)，(5.15 a) をみよ．
(14)　(1.8)，(1.17)，および (4.8) をみよ．

Ⅳ 要素の事後的非代替と均衡成長

——二部門モデル——

§ 1 均衡成長のモデル(1)

1 モデル これまで一種類の財が存在し，それが消費財としても資本財としても使用可能であることが仮定されていたが，本章においてこの仮定をやめ，消費財と資本財の二種類の財が存在し，互に転用可能でないとする．資本財非減価の単純化仮定は持続し，要素代替の事前的可能・事後的不能が前提される．そして労働増大的技術進歩の場合のみを取扱う．生産部門は資本財生産部門と消費財生産部門の二部門に分割されるが，諸変数に付した下つき添字の1を前者，2を後者の指標とする．技術的条件，および定義式は次のようにあらわされる．

(1.1) $$k(t)=F_1[e^{\lambda_1 t}l_1(t),\ k_1(t)]$$

(1.2) $$c(t)=F_2[e^{\lambda_2 t}l_2(t),\ k_2(t)]$$

(1.3) $$I(t)=\int_{t-\theta_1(t)}^{t}k(T)\,dT$$

(1.4) $$C(t)=\int_{t-\theta_2(t)}^{t}c(T)\,dT$$

(1.5) $$L(t)=\int_{t-\theta_1(t)}^{t}l_1(T)\,dT+\int_{t-\theta_2(t)}^{t}l_2(T)\,dT$$

(1.6) $$Y(t)=C(t)+p(t)I(t)$$

ただし，$l_i(t)$ は労働投入量，$k_i(t)$ は新設備の投入量，λ_i は技術進歩率（定数），$\theta_i(t)$ は使用設備の最高年令，$k(T)$ は資本財生産部門における vintage T の資本設備による資本財産出量，$c(T)$ は消費財生産部門における vintage T の資本設備による消費財産出量，$I(t)$ は総投資，$C(t)$ は総消費，$L(t)$ は総労働需要，$p(t)$ は消費財であらわした資本財の価格，$Y(t)$ は総産出をあ

(1) § 1は旧稿〔63〕の一部（pp.10～22）に若干の修正をほどこしたものである．

らわす.

次に，労働需給，貯蓄・投資，新資本財需給の均等条件は，それぞれ

$$L(t)=L(0)e^{nt} \tag{1.7}$$

$$sY(t)=p(t)\,I(t) \tag{1.8}$$

$$I(t)=k_1(t)+k_2(t) \tag{1.9}$$

によってあらわされる．ただし，n は労働供給の増加率，s は貯蓄率で，いずれも時間に依存せず，一定とされている．

行動関係式は以下のようにあらわされる．まず，将来賃金一定の予想を仮定すれば，新設備に対する最適労働配分は

$$w(t)=\frac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)}, \tag{1.10}$$

$$w(t)=p(t)\frac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)} \tag{1.11}$$

によって支配され，古い設備の経済的廃棄は

$$w(t)=\frac{c(t-\theta_2(t))}{l_2(t-\theta_2(t))} \tag{1.12}$$

$$w(t)=p(t)\frac{k(t-\theta_1(t))}{l_1(t-\theta_1(t))} \tag{1.13}$$

によって決定される．[2] 最後に，新投資の部門間配分は

$$\frac{\partial c(t)}{\partial k_2(t)}=p(t)\frac{\partial k(t)}{\partial k_1(t)} \tag{1.14}$$

つまり，投資の限界生産力均等化によって決定される．[3]

二部門 putty-clay vintage モデルは，以上のような (1.1)～(1.14) の方程式体系によって構成される．変数は，各時点において，$l_1(t)$，$l_2(t)$，$k_1(t)$，$k_2(t)$，$\theta_1(t)$，$\theta_2(t)$，$k(t)$，$c(t)$，$p(t)$，$w(t)$，$C(t)$，$I(t)$，$L(t)$，および

---

(2) 労働が過剰要素にならないことを仮定しているので，$L(0)\,e^{nt}<\int_{-\infty}^{t} l_1(T)dT+\int_{-\infty}^{t} l_2(T)\,dT$.

(3) 均衡成長径路においては，新資本財限界生産力均等化は即時的準地代均等化と同値である．

$Y(t)$ の 14 個である．これは自己完結的な体系である．

2　均衡成長　さて，上述の体系の均衡成長解はどのような様相を示すか．二部門モデルにおいては，それぞれの部門で設備の経済的耐用年限不変のまま，産出量が恒常的な率で成長するとおくことによって，均衡成長解を求めることができる．そこで

$$\begin{aligned} &I(t)=I(0)e^{g_1t} \\ &C(t)=C(0)e^{g_2t} \qquad (1.15) \\ &\theta_i(t)=\theta_i \qquad (i=1,2) \end{aligned}$$

とする．$I(0)$，$C(0)$，g_1，g_2，θ_i は決定さるべき未定定数である．

ところで，(1.5)，(1.9) において，(1.15) のような成長解が可能であるためには

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{l}_i(t)}{l_i(t)}=\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=n \qquad (i=1,\ 2) \\ &\frac{\dot{k}_i(t)}{k_i(t)}=\frac{\dot{I}(t)}{I(t)}=g_1 \qquad (i=1,\ 2) \end{aligned} \qquad (1.16)$$

が成立しなければならない．その際

$$nL(0)=l_1(0)(1-e^{-n\theta_1})+l_2(0)(1-e^{-n\theta_2}) \qquad (1.17)$$

$$I(0)=k_1(0)+k_2(0) \qquad (1.18)$$

が導かれる．(4)

次に，(1.3) に (1.15) を考慮すれば

$$k(t)-k(t-\theta_1)=g_1I(0)e^{g_1t}$$

がえられる．その恒常成長解は

$$k(t)=\frac{g_1I(0)}{1-e^{-g_1\theta_1}}e^{g_1t}. \qquad (1.19)$$

また，同様にして (1.4) によって $c(t)$ の恒常成長解がえられる．

$$c(t)=\frac{g_2C(0)}{1-e^{-g_2\theta_2}}e^{g_2t} \qquad (1.20)$$

---

(4)　(1.5)，(1.7) において $\theta_i(t)=\theta_i$，$l_i(t)=l_i(0)e^{nt}$ を考慮すれば，(1.17) を導くことができる．また，(1.9) において $I(t)=I(0)e^{g_1t}$，$k_i(t)=k_i(0)e^{g_1t}$ とおけば，直ちに (1.18) をうる．

ところで，IIIと同様に

$$(1.21)\qquad F_i[1,\ b_i(t)]\equiv f_i[b_i(t)],\ b_i(t)\equiv\frac{k_i(t)}{e^{\lambda_i}\,l_i(t)}\quad(i=1,\ 2)$$

とおくと，(1.1)，(1.2) は

$$(1.1a)\qquad k(t)=e^{\lambda_1 t}\,l_1(t)\ f_1[b_1(t)]$$

$$(1.2a)\qquad c(t)=e^{\lambda_2 t}\,l_2(t)\ f_2[b_2(t)]$$

のようにあらわされる．なお，f_iは連続，2回微分可能，そしてf_i'も連続，また$x>0$に対して$f_i(x)>0$, $f_i'(x)>0$, $f_i''(x)<0$が仮定される．(1.1a)，(1.2a) に (1.19)，(1.20) を代入し，(1.16) を考慮すれば

$$(1.22)\qquad \frac{g_1\,I(0)}{1-e^{-g_1\theta_1}}e^{(g_1-\lambda_1-n)t}=l_1(0)\,f_1\left[\frac{k_1(0)}{l_1(0)}e^{(g_1-\lambda_1-n)t}\right]$$

$$(1.23)\qquad \frac{g_2\,C(0)}{1-e^{-g_2\theta_2}}e^{(g_2-\lambda_2-n)t}=l_2(0)\,f_2\left[\frac{k_2(0)}{l_2(0)}e^{(g_1-\lambda_2-n)t}\right]$$

がえられる．(1.22)，(1.23) がすべてのtについて成立するためには

$$g_1-\lambda_1-n=g_2-\lambda_2-n=g_1-\lambda_2-n=0$$

でなくてはならない．[5] したがって

$$(1.24)\qquad \lambda_1=\lambda_2(=\lambda)$$

$$(1.25)\qquad g_i=\lambda+n\qquad(i=1,\ 2)$$

がえられる．(1.24) は両部門の技術進歩率均等という構造的条件をあらわし，(1.25) はそのような構造的条件のもとで，両部門の産出量成長率が相等しいことを物語っている．以下の議論では，構造的条件 (1.24) が満されているものと仮定する．

そこで

$$(1.26)\qquad b_i(t)=\frac{k_i(0)}{l_i(0)}\equiv b_i,\ \ f_i\equiv f_i(b_i)\qquad(i=1,\ 2)$$

とあらわすことにすれば[6]，(1.22)～(1.25) により

(5) Fが Cobb-Douglas 型のときには，これほど強い条件は必要でない．後述する．

(6) (1.21) により $b_i(t)=\dfrac{k_i(0)}{l_i(0)}e^{(g_1-\lambda_i-n)t}$ とあらわされるが，(1.24)，(1.25) を考慮すれば，$b_i(t)=\dfrac{k_i(0)}{l_i(0)}\equiv b_i$ が導かれる．

(1.22a) $$k_1(0)=\frac{b_1}{f_1}\frac{(\lambda+n)\,I(0)}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1}}$$

(1.23a) $$k_2(0)=\frac{b_2}{f_2}\frac{(\lambda+n)\,C(0)}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2}}$$

がえられる．(1.22 a)，(1.23 a) を (1.18) に代入して，整理すれば，次式が導かれる．

(1.27) $$\left[\frac{1}{\lambda+n}-\frac{b_1}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})\,f_1}\right]I(0)=\frac{b_2}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})\,f_2}C(0)$$

ここで，均衡成長過程における行動関係式を考慮に入れなくてはならない．均衡成長のもとでは，(1.1 a)，(1.2 a)，(1.26) により

(1.28) $$\frac{\partial\,k(t)}{\partial\,l_1(t)}=(f_1-b_1\,f_1')e^{\lambda t}$$

(1.29) $$\frac{\partial\,c(t)}{\partial\,l_2(t)}=(f_2-b_2\,f_2')e^{\lambda t}$$

(1.30) $$\frac{k(t-\theta_1)}{l_1(t-\theta_1)}=f_1\,e^{\lambda(t-\theta_1)}$$

(1.31) $$\frac{c(t-\theta_2)}{l_2(t-\theta_2)}=f_2\,e^{\lambda(t-\theta_2)}$$

が成立する．ところが，(1.10)～(1.13) によって

$$\frac{\partial\,k(t)}{\partial\,l_1(t)}=\frac{k(t-\theta_1)}{l_1(t-\theta_1)}$$

$$\frac{\partial\,c(t)}{\partial\,l_2(t)}=\frac{c(t-\theta_2)}{l_2(t-\theta_2)}$$

が成立しなければならぬので，これらに (1.28)～(1.31) を代入して，整理すれば

(1.32) $$\frac{b_i\,f_i'}{f_i}=1-e^{-\lambda\theta_i}\qquad(i=1,\ 2)$$

がえられる．これが均衡成長解の存在を規制する第一条件（部門間労働配分の均衡条件）である．

次に，(1.10)，(1.11) により

$$p(t)=\frac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)}\Big/\frac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)}$$

が成立しなければならないが，これに (1.28)，(1.29) を代入すれば，$p(t)$ の均衡成長解は

$$p(t)=\frac{f_2-b_2 f_2'}{f_1-b_1 f_1'} \tag{1.33}$$

でなくてはならない．他方，均衡成長過程では，(1.1a)，(1.2a)，(1.26) により

$$\frac{\partial k(t)}{\partial k_1(t)}=f_1' \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial c(t)}{\partial k_2(t)}=f_2' \tag{1.35}$$

が成立つので，これらを (1.14) に代入すれば，次のような $p(t)$ の均衡成長解の他の表現をうる．

$$p(t)=\frac{f_2'}{f_1'} \tag{1.36}$$

体系が無矛盾であるためには，(1.33)，(1.36) により

$$b_1-\frac{f_1}{f_1'}=b_2-\frac{f_2}{f_2'} \tag{1.37}$$

が成立しなければならない．これが均衡成長解を規制する第二の条件（部門間投資配分の均衡条件）である．

ところで，(1.6)，(1.8) により

$$s\,C(t)=(1-s)p(t)I(t)$$

がえられるが，均衡成長のもとでは，これに (1.36) を考慮して

$$C(0)=\frac{1-s}{s}\,\frac{f_2'}{f_1'}\,I(0) \tag{1.38}$$

が成立しなければならない．さきに得られた (1.27) に (1.38) を考慮すれば，均衡成長解を規制する第三の条件（貯蓄・投資均等条件）がえられる．すなわち

$$\frac{f_1'}{\lambda+n}\,\frac{1-e^{-\lambda\theta_1}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1}}=\frac{1-s}{s}\,\frac{1-e^{-\lambda\theta_2}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2}}. \tag{1.39}$$

このようにして，(1.32)，(1.37)，(1.39) であらわされる三種の均衡条件を同時に満足するような b_i，$\theta_i(i=1,\ 2)$ が存在するならば，体系の均衡成長解の存在が確認されたことになる．

3　解の存在証明　(1.32)，(1.37)，(1.39) を満す均衡成長解の存在を確めるために，次のような変換 H_i を定義する．

$$
(1.40)\quad
\begin{aligned}
&H_1 : b_1 \to \theta_1' && \theta_1' = -\frac{1}{\lambda}\log\left[1-\frac{b_1\, f_1'(b_1)}{f_1(b_1)}\right]\\
&H_2 : b_1 \to b_2 && \frac{f_2(b_2)}{f_2'(b_2)} - b_2 = \frac{f_1(b_1)}{f_1'(b_1)} - b_1\\
&H_3 : b_2 \to \theta_2' && \theta_2' = -\frac{1}{\lambda}\log\left[1-\frac{b_2\, f_2'(b_2)}{f_2(b_2)}\right]\\
&H_4 : (\theta_1,\ \theta_2) \to b_1' && \frac{f_1'(b_1')}{\lambda} = \frac{1-s}{s}\phi(\theta_2) + \phi(\theta_1)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\phi(\theta_i) = \frac{\lambda+n}{\lambda}\ \frac{1-e^{-\lambda\theta_i}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_i}} \qquad (i=1,\ 2)
$$

とする．そして H_i の合成 H を次のように定義する．

$$
(1.41)\qquad H : \begin{pmatrix} b_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} \qquad
\begin{aligned}
\theta_1' &= H_1(b_1)\\
\theta_2' &= H_3 H_2(b_1)\\
b_1' &= H_4(\theta_1,\ \theta_2)
\end{aligned}
$$

そのとき，H に関して

$$
b_1' = b_1,\quad \theta_1' = \theta_1,\quad \theta_2' = \theta_2
$$

となるなよう $(b_1,\ \theta_1,\ \theta_2)$ が存在するならば，(1.32)，(1.37)，(1.39) を満す均衡成長解が存在することになる．

そのために，まず，H の定義域を規定する若干の経済学的仮定を設けよう．

仮定　1．いずれの生産部門においても，実行可能な資本・有効労働比率 b_i には上限が存在する．

これは，労働なしには生産は不可能ということを含む強いかたちの仮定

で[7]，要素間の代替が事実上 bounded substitution であることをいみする．その上限を $\hat{b}_i$ とすると，$\hat{b}_i$ をこえて資本財のみ増加（労働のみ減小）しても，生産は増加しない．すなわち

$$f_i'(b_i)=0 \quad (b_i \geqq \hat{b}_i \text{ に対して}). \tag{1.42}$$

この仮定は

$$B_1=\{b_1 \mid 0 \leqq b_1 \leqq \hat{b}_1\} \tag{1.43}$$

というコンパクトな凸集合を H_1，および $H_3 H_2$ の定義域とすることにほかならない．

仮定 2．消費財部門においては，資本財なしには正の産出は不能であり，ゼロの資本財投入に関する資本の限界生産力は有限である．[8] すなわち

$$\lim_{b_2\to 0} f_2'(b_2) < \infty. \tag{1.44}$$

仮定 3．賃金率は生存水準 $\bar{w}$ 以下には下らない．

したがって，要素代替の事後的不能のモデルでは均衡成長の過程において，一度設置された機械はいつかは必ず，陳腐化する．すなわち，θ_i は上方に有界である．θ_i の上限を $\hat{\theta}_i$ であらわすと，それは次のようにして求まる．

θ_1 に関しては，(1.13)，(1.30)，(1.36) により

$$w(t)=e^{\lambda(t-\theta_1)}\frac{f_1(b_1)\,f_2'(b_2)}{f_1'(b_1)}$$

が成立つので，仮定 3 は

$$w(0)=\frac{f_1(b_1)\,f_2'(b_2)}{f_1'(b_1)}e^{-\lambda\theta_1} \geqq \bar{w} \quad (\text{すべての } b_i \in B_i \text{ について})$$

を意味する．したがって

(7) Ⅲの一部門モデルでは，単に「労働なしには産出なし」が仮定されたが，それは，Ⅲ § 1 の注 8 (p.52) で述べたように，$\lim_{b\to\infty} f'(b) \leqq \frac{\lambda+n}{s}$ と同値である．したがって，(1.42) によってあらわされる二部門モデルの仮定は，当然前者を含む強い仮定であることが明らかである．

(8) もしこの仮定を設けなければ，資本財なしに消費財生産が可能ということになり，部門分割の意義が薄れる．なお，資本財生産に関しては，資本財投入を必ずしも不可欠としないことは不合理ではない．

$$\theta_1 \leqq -\frac{1}{\lambda}\log\frac{\bar{w}\ f_1'(b_1)}{f_1(b_1)\ f_2'(b_2)},\quad (\text{すべての } b_i \in B_i \text{ について})$$

ところが

$$\underset{b_i\in B_i}{\mathrm{Max}}\left[-\frac{1}{\lambda}\log\frac{\bar{w}\ f_1'(b_1)}{f_1(b_1)\ f_2'(b_2)}\right] \leqq -\frac{1}{\lambda}\log\left[\frac{\bar{w}\ \underset{b_1\in B_1}{\mathrm{Min}}\dfrac{f_1'(b_1)}{f_1(b_1)}}{\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2'(b_2)}\right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\log\left[\frac{\bar{w}\ f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)\ f_2'(0)}\right]$$

であるから[9]，これを考慮すれば

(1.45) $$\theta_1 \leqq -\frac{1}{\lambda}\log\frac{\bar{w}\ f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)\ f_2'(0)} \equiv \hat{\theta}_1$$

がえられる.

また，θ_2 に関しては，仮定3のもとで，(1.12)，(1.29) より，同様にして

(1.46) $$\theta_2 \leqq -\frac{1}{\lambda}\log\frac{\bar{w}}{f_2(\hat{b}_2)} \equiv \hat{\theta}_2$$

が導かれる.[10]

そこで

(1.47) $$\Theta_i = \{\theta_i \mid 0 \leqq \theta_i \leqq \hat{\theta}_i\} \qquad (i=1,\ 2)$$

と定義するならば，H_4 の定義域は直積集合 $\Theta_1 \times \Theta_2$ であらわされる．これはコ

---

(9) $\underset{b_1\in B_1}{\mathrm{Min}}\dfrac{f_1'(b_1)}{f_1(b_1)}$ となる b_1 の存在は，(1.43) の仮定により保証される．そして $f_1'>0$，$f_1''<0$ の仮定により，$\underset{b_1\in B_1}{\mathrm{Min}}\dfrac{f_1'(b_1)}{f_1(b_1)} = \dfrac{f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)}$．また，$\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2'(b_2)$ の存在も (1.43) により保証され，しかも $f_2''<0$，および (1.44) の仮定により，$0 < \underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2'(b_2) = f_2'(0) < \infty$.

(10) $w(0) = f_2(b_2)e^{-\lambda\theta_2} \geqq \bar{w}$ より，$\theta_2 \leqq -\dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\bar{w}}{f_2(b_2)}$.　ところが $\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\left[-\dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{\bar{w}}{f_2(b_2)}\right] = -\dfrac{1}{\lambda}\log\left[\dfrac{\bar{w}}{\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2(b_2)}\right]$，そして (1.43) により $\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2(b_2)$ の存在が保証され，しかも $f_2'>0$ の仮定により $\underset{b_2\in B_2}{\mathrm{Max}}\ f_2(b_2) = f_2(\hat{b}_2)$ が明らかである.

ンパクトな凸集合である.

(1.43), (1.47) により, さきに (1.41) において定義された写像 H の定義域 $B_1\times\Theta_1\times\Theta_2$ はコンパクトな凸集合となる.

さて, (1.41) において示されたように, H は $H_i(i=1, 2, 3, 4)$ の合成であるので, 順次 H_i の性質を検討しよう.

まず, H_1 について考察する. f_1, f_1' は連続関数と仮定されているゆえ, $\dfrac{b_1f_1'}{f_1}$ も連続である. したがって (1.40) において H_1 は連続写像である.

ところで b_1 は H_1 によって θ_1' を決定するが, このようにして決まる θ_1' のすべてが Θ_1 に入っていること, すなわち H は Θ_1 に関して内部写像であることを明らかにしよう. そのためには

$$\text{(1.48)} \qquad \operatorname*{Max}_{b_1\in B_1}\frac{b_1f_1'(b_1)}{f_1(b_1)}=\frac{\bar{b}_1f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}$$

$$\text{(1.49)} \qquad \bar{\theta}_1'\equiv-\frac{1}{\lambda}\log\left[1-\frac{\bar{b}_1f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}\right]$$

とするとき, $\bar{\theta}_1'\leqq\hat{\theta}_1$ が成立することを導けば十分である. これを示そう.

$\bar{b}_1\in B_1$ ゆえ, $\bar{b}_1\leqq\hat{b}_1$. したがって $f_1(\bar{b}_1)\leqq f_1(\hat{b}_1)$, 同時に $f_1'(\bar{b}_1)\geqq f_1'(\hat{b}_2)$.

よって

$$\text{(1.50)} \qquad \frac{f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)}\leqq\frac{f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}.$$

他方, 仮定3により, $\bar{b}_1\in B_1$ に対し

$$\bar{w}\leqq\frac{f_2'(b_2)}{f_1'(\bar{b}_1)}[f_1(\bar{b}_1)-\bar{b}_1\,f_1'(\bar{b}_1)].$$

したがって, これに (1.50) を考慮することによって, 次の関係式が成立する.[11]

$$\frac{\bar{w}\ f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)\ f_2'(0)}\leqq\frac{f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)}\ \frac{f_1(\bar{b}_1)-\bar{b}_1\,f_1'(\bar{b}_1)}{f_1'(\bar{b}_1)}\ \frac{f_2'(b_2)}{f_2'(0)}$$
$$\leqq\left[1-\frac{\bar{b}_1f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}\right]\frac{f_2'(b_2)}{f_2'(0)}\leqq1-\frac{\bar{b}_1f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}$$

---

(11) 中央の不等式の成立に (1.50) が関係している. 最後の不等式は, $f_2''<0$ により, すべての $b_2\in B_2$ に対し $f_2'(b_2)\leqq f_2'(0)$ が成立することから明らかである.

したがって

$$-\frac{1}{\lambda}\log\frac{\bar{w}\ f_1'(\hat{b}_1)}{f_1(\hat{b}_1)\ f_2'(0)} \geqq -\frac{1}{\lambda}\log\left[1-\frac{\bar{b}_1 f_1'(\bar{b}_1)}{f_1(\bar{b}_1)}\right].$$

ところがこの式の左辺は $\hat{\theta}_1$，右辺は $\bar{\theta}_1'$ であることが (1.45)，および (1.49) により明らかである．したがって $\bar{\theta}_1' \leqq \hat{\theta}_1$.

次に変換の積 H_3H_2 については，(1.40) において，H_2，H_3 が連続であるから，積 H_3H_2 も連続である．また

$$(1.51) \qquad \operatorname*{Max}_{b_2\in B_2}\frac{b_2 f_2'(b_2)}{f_2(b_2)} = \frac{\bar{b}_2 f_2'(\bar{b}_2)}{f_2(\bar{b}_2)}$$

$$(1.52) \qquad \bar{\theta}_2' \equiv -\frac{1}{\lambda}\log\left[1-\frac{\bar{b}_2 f_2'(\bar{b}_2)}{f_2(\bar{b}_2)}\right]$$

とすれば，$\bar{\theta}_2' \leqq \hat{\theta}_2$ をうる．なぜならば，$\hat{b}_2 \geqq \bar{b}_2$，$f_2(\hat{b}_2) \geqq f_2(\bar{b}_2)$，および $\bar{w} \leqq f_2(\bar{b}_2)-\bar{b}_2 f_2'(\bar{b}_2)$ により

$$\frac{\bar{w}}{f_2(\hat{b}_2)} \leqq \frac{f_2(\bar{b}_2)-\bar{b}_2 f_2'(\bar{b}_2)}{f_2(\bar{b}_2)}$$

が成立ち，これを (1.46)，(1.52) に考慮すれば $\bar{\theta}_2' \leqq \hat{\theta}_2$ が成立する．これは写像 H が Θ_2 に関して内部写像であることを保証する．

最後に，H_4 について検討しよう．ϕ も f_1' も連続関数であるから，H_4 は連続である．また，$\lim_{\theta_i\to 0}\phi(\theta_i)=1$，$\lim_{\theta_i\to\infty}\phi(\theta_i)=\frac{\lambda+n}{\lambda}$，$\frac{\partial\phi(\theta_i)}{\partial\theta_i}>0$ ($\theta_i \geqq 0$ に対し) であるから[12]

$$(1.53) \qquad 1 \leqq \phi(\theta_i) < \frac{\lambda+n}{\lambda} \qquad (\text{すべての } \theta_i\in\Theta_i \text{ に対し})$$

が成立する．ところで，(1.40) により

$$\phi(\theta_1) = \frac{f_1'(b_1')}{\lambda} - \frac{1-s}{s}\phi(\theta_2)$$

であるが，これに (1.53)($i=1$ のとき) を考慮すれば

$$(1.54) \qquad 1 \leqq \frac{f_1'(b_1')}{\lambda} - \frac{1-s}{s}\phi(\theta_2) < \frac{\lambda+n}{\lambda}$$

(12) その論証については，たとえば Phelps〔40〕(Appendix A, p. 285) をみよ．

が成立しなければならない．

(1.54) の左不等式を書き直すと $\phi(\theta_2) \leqq \frac{s}{1-s}\left[\frac{f_1'(b_1')}{\lambda}-1\right]$ となるが，これに (1.53) ($i=2$ のとき) を考慮すれば，$1 \leqq \frac{s}{1-s}\left[\frac{f_1'(b_1')}{\lambda}-1\right]$ が成立する．これより次式がえられる．

$$f_1'(b_1') \geqq \frac{\lambda}{s} \tag{1.55}$$

他方，(1.54) の右不等式について同様の操作をほどこすことによって

$$f_1'(b_1') < \frac{\lambda+n}{s} \tag{1.56}$$

が導かれる．[13]

(1.55)，(1.56) により，H_4 の値域の元 b_1' は

$$\frac{\lambda}{s} \leqq f_1'(b_1') < \frac{\lambda+n}{s}$$

を満さなくてはならない．したがって，b_1' の上限は $f_1'(\hat{b}_1') = \frac{\lambda}{s}$ となるような $\hat{b}_1'$ であることが明らかである．他方，(1.42) により $f_1'(\hat{b}_1) = 0$．$\frac{\lambda}{s} > 0$ ゆえ，$\hat{b}_1' < \hat{b}_1$ が成立する．このようにして，H は B_1 に関してプロパーな内部写像であることが明らかになった．

以上の議論により，(1.41) において定義された H は，コンパクトな凸直積集合 $B_1 \times \Theta_1 \times \Theta_2$ のうえに定義された一対一連続内部写像であることが明らかになった．したがって，Brouwer の不動点定理により

$$b_1' = b_1, \quad \theta_1' = \theta_1, \quad \theta_2' = \theta_2$$

となるような (b_1, θ_1, θ_2) が $B_1 \times \Theta_1 \times \Theta_2$ の中に存在する．そのような元を (b_1^*, θ_1^*, θ_2^*) とし，$H_2(b_1^*) = b_2^*$ とすると，b_i^*，θ_i^* ($i=1$, 2) は (1.32)，(1.37)，(1.39) を満す均衡成長解であることが明らかである．

---

(13) (1.54) 右不等式と (1.53) ($i=2$) とによって求まる．

§2　均衡成長径路の性格

1　諸変数の均衡成長解　諸変数の均衡成長解は θ_i^*, $b_i^*(i=1, 2)$ のタームでどのようにあらわされるか示そう．(1.8)，(1.15)，(1.25)，(1.36) により，次のような表現をうる．

$$(2.1)\qquad I^*(t)=I^*(0)e^{(\lambda+n)t}$$

$$(2.2)\qquad C^*(t)=C^*(0)e^{(\lambda+n)t}$$

$$(2.3)\qquad Y^*(t)=\left[C^*(0)+\frac{f_2'^*}{f_1'^*}I^*(0)\right]e^{(\lambda+n)t}$$

したがって，$I^*(0)$，$C^*(0)$ を θ_i^*, b_i^* であらわせばよい．

そのために，まず (1.17)，(1.18) および (1.26) により $l_i(0)$ $(i=1, 2)$ を求める．[1]

$$(2.4)\qquad l_1(0)=\frac{nb_2L(0)-(1-e^{-n\theta_2})I(0)}{b_2(1-e^{-n\theta_1})-b_1(1-e^{-n\theta_2})}$$

$$(2.5)\qquad l_2(0)=\frac{(1-e^{-n\theta_1})\ I(0)-nb_1L(0)}{b_2(1-e^{-n\theta_1})-b_1(1-e^{-n\theta_2})}$$

次に，(1.26)，(1.22 a)，(1.23 a) により

$$I(0)=\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})f_1}{\lambda+n}l_1(0)$$

$$C(0)=\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})f_2}{\lambda+n}l_2(0)$$

がえられるが，これらに (2.4)，(2.5) を代入して整理すれば，次のような結果が成立する．

$$(2.6)\quad I^*(0)$$
$$=\frac{nb_2L(0)(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*}{b_2(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})+\{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*\}(1-e^{-n\theta_2^*})}$$

(1)　(1.26) において $k_i(0)=b_i l_i(0)$ $(i=1, 2)$．これを (1.18) に代入して，$I(0)=b_1 l_1(0)+b_2 l_2(0)$ がえられる．これと (1.17) より解 $l_i(0)$ がえられる．

$$(2.7)\qquad C^*(0)=\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2^*})f_2^*}{\lambda+n}$$

$$\times\frac{nL(0)\{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*\}}{b_2^*(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})+\{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*\}(1-e^{-n\theta_2^*})}$$

次に，賃金率は，(1.10)，(1.29) により，均衡成長径路において

$$(2.8)\qquad w^*(t)=(f_2^*-b_2^*f_2'^*)e^{\lambda t}$$

であらわされ，賃金分前は (1.7)，(1.8)，(1.36)，(2.1)，(2.8) により

$$(2.9)\qquad D_L^*=\frac{w^*(t)L(t)}{Y(t)}=\frac{sf_1'^*(f_2^*-b_2^*f_2'^*)}{f_2'^*}\frac{L(0)}{I^*(0)}$$

となる．これに (2.6) を代入すれば

$$(2.10)\qquad D_L^*=\frac{sf_1'^*(f_2^*-b_2^*f'_2{}^*)\,[b_2^*(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})}{f'_2{}^*f_1^*nb_2^*(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})}$$

$$\underline{+\{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*\}(1-e^{-n\theta_2^*})]}$$

がえられる．

さて，各部門の固定設備に対する投資の収益率 $r_i(i=1,\ 2)$ はどのようにあらわされるか検討しよう．

vintage T の設備に対する投資の収益率を $r_i(T)$ であらわすと，均衡成長径路において，それは次式を満足する．

$$(2.11)\qquad \int_T^{T+\theta_i^*}q_i^*(T,\ t)e^{-r_i(T)(t-T)}dt=1\quad(i=1,\ 2)$$

ただし $q_i(T,\ t)$ は各部門における vintage T の設備の t 時 $(t\geqq T)$ における準地代をあらわす．したがって

$$(2.12)\qquad q_1^*(T,\ t)=\frac{p^*(t)\,k^*(T)-w^*(t)\,l_1^*(T)}{p^*(t)\,k_1^*(T)}$$

$$=\frac{f_1^*}{b_1^*}-\frac{(f_1^*-b_1^*f_1'^*)}{b_1^*}e^{\lambda(t-T)}$$

$$(2.13)\qquad q_2^*(T,\ t)=\frac{c^*(T)-w^*(t)l_2^*(T)}{p^*(t)\,k_2^*(T)}=\frac{f_2^*f_1'^*}{b_2^*f_2'^*}$$

$$-\frac{f_1'^*(f_2^*-b_2^*f_2'^*)}{b_2^*\,f_2'^*}e^{\lambda(t-T)}$$

となる.[(2)]

(2.12), (2.13) を (2.11) に代入して, 計算をおこなえば, 次式が導かれる.

$$(2.14)\quad \frac{f_1{}^*(1-e^{-r_1(T)\theta_1{}^*})}{b_1{}^*\,r_1(T)}-\frac{f_1{}^*-b_1{}^*f_1{}'^*}{b_1{}^*}\,\frac{1-e^{-[r_1(T)-\lambda]\theta_1{}^*}}{r_1(T)-\lambda}=1$$

$$(2.15)\quad \frac{f_1{}'^*f_2{}^*}{b_2{}^*f_2{}'^*}\,\frac{1-e^{-r_2(T)\theta_2{}^*}}{r_2(T)}-\frac{f_1{}'^*(f_2{}^*-b_2{}^*f_2{}'^*)}{b_2{}^*f_2{}'^*}\,\frac{1-e^{-[r_2(T)-\lambda]\theta_2{}^*}}{r_2(T)-\lambda}=1$$

これらにより $r_i(T)$ はいずれも T に依存しない定数となることがわかる. そこでそれを単に r_i であらわし, (1.32) を (2.14), (2.15) に考慮するならば

$$(2.16)\quad \frac{1-e^{-r_i\theta_i{}^*}}{r_i(1-e^{-\lambda\theta_i{}^*})}-\frac{e^{-\lambda\theta_i{}^*}(1-e^{-(r_i-\lambda)\theta_i{}^*})}{(r_i-\lambda)(1-e^{-\lambda\theta_i{}^*})}=f_1{}'^*\qquad (i=1,\ 2)$$

がえられる. これが $b_1{}^*$, $\theta_1{}^*$, $\theta_2{}^*$ を先決変数とする $r_i(i=1,\ 2)$ の決定式である.

2　均衡成長の比較動学　ここで, 貯蓄率の変化が, θ_i と b_i の変化を通じて, 諸変数の均衡成長解にどのような影響をおよぼすかという比較動学的分析をおこなう.

§1において導かれた体系の均衡条件 (1.32), (1.37), (1.39) をそれぞれ s について微分すれば,

$$(2.17)\qquad \beta_i{}'\frac{db_i}{ds}=\lambda e^{-\lambda\theta_i}\frac{d\theta_i}{ds}\quad (i=1,\ 2),$$

$$(2.18)\qquad G_1\frac{db_1}{ds}=G_2\frac{db_2}{ds},$$

(2)　(2.12), (2.13) において, $q_1{}^*(T,\ T)=q_2{}^*(T,\ T)=f_1{}'^*$ であるから, 両部門における新設備の即時的準地代はいずれも投資財部門の新設備の限界生産力にひとしくなって均等化する. これは, 新投資の限界生産力の部門間均等という新資本財の最適配分原理が, 均衡成長径路において, 新設備の即時的準地代の部門間均等をもたらすことをいみしている. また, 逆に, $q_1(T,\ T)=q_2(T,\ T)$ と仮定すれば, 均衡成長のもとでは $pf_1{}'=f_2{}'$ が成立する. したがって $p(T)\dfrac{\partial k(T)}{\partial k_1(T)}=\dfrac{\partial c(T)}{\partial k_2(T)}$. すなわち, 新設備の即時的準地代部門間均等化は, 均衡成長のもとでは, 新資本財の限界生産力部門間均等化をもたらす. このようにして, 均衡成長径路において, 新資本財限界生産力均等化と即時的準地代均等化は同値であることがわかる.

$$(2.19)\qquad \frac{f_1''}{\lambda}\frac{db_1}{ds}-\phi'(\theta_1)\frac{d\theta_1}{ds}=-\frac{\phi(\theta_2)}{s^2}+\frac{(1-s)\phi'(\theta_2)}{s}\frac{d\theta_2}{ds}.$$

ただし

$$(2.20)\qquad \beta_i\equiv\beta_i(b_i)=\frac{b_if_i'}{f_i}$$

$$(2.21)\qquad G_i=\left(\frac{f_i}{f_i'}-b_i\right)'$$

$$(2.22)\qquad \phi(\theta_i)=\frac{\lambda+n}{\lambda}\frac{1-e^{-\lambda\theta_i}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_i}}$$

とする．(2.17)～(2.19) の解は，均衡成長径路において，次のようにあらわされる．

$$(2.23)\qquad \frac{d\theta_1{}^*}{ds}=\frac{\dfrac{\phi(\theta_2{}^*)}{s^2}}{\phi'(\theta_1{}^*)-\dfrac{f_1''^*e^{-\lambda\theta_1{}^*}}{\beta_1'^*}+\dfrac{(1-s)\,\phi'(\theta_1{}^*)}{s}\dfrac{G_1{}^*}{G_2{}^*}\dfrac{\beta_2'^*}{\beta_1'^*}\,e^{\lambda(\theta_2{}^*-\theta_1{}^*)}}$$

$$(2.24)\qquad \frac{d\theta_2{}^*}{ds}=\frac{G_1{}^*}{G_2{}^*}\frac{\beta_2'^*}{\beta_1'^*}\,e^{\lambda(\theta_2{}^*-\theta_1{}^*)}\,\frac{d\theta_1{}^*}{ds}$$

$$(2.25)\qquad \frac{db_i{}^*}{ds}=\frac{\lambda e^{-\lambda\theta_i{}^*}}{\beta_i'^*}\frac{d\theta_i{}^*}{ds}$$

ところが (2.20)～(2.22) により

$$\beta_i'=\frac{b_if_i''}{f_i}(1-\sigma_i)\gtreqqless 0\quad(\sigma_i\lesseqqgtr 1\ に応じて),$$

$$G_i=\frac{f_if_i''}{f_i'^2}<0,$$

$$\phi'(\theta_i)>0\quad(\theta_i>0\ に対して),$$

が導かれるので，次の関係がえられる．

$$(2.26)\qquad \frac{f_1''e^{-\lambda\theta_1}}{\beta_1'}=\frac{f_1e^{-\lambda\theta_1}}{b_1(1-\sigma_1)}\lesseqgtr 1\quad(\sigma_1\gtreqless 1\ に応じて)$$

$$(2.27)\qquad \begin{aligned}&\frac{\beta_2'}{\beta_1'}>0\quad(\sigma_i>1(i=1,\ 2)\ か，\sigma_i<1(i=1,\ 2)\ のとき)\\&\frac{\beta_2'}{\beta_1'}<0\quad(\sigma_1,\ \sigma_2\ の一方が\ 1\ より大で，他方が\ 1\ より小のとき)\end{aligned}$$

$$\frac{G_1}{G_2} > 0 \tag{2.28}$$

(2.27), (2.28) を (2.24), (2.25) に考慮すれば, $\frac{d\theta_i^*}{ds}$, $\frac{db_i^*}{ds}$ の相互関係について, 次のことが明らかである.

(1) σ_1^* と σ_2^* がともに1より大か, ともに1より小のときには, $\frac{d\theta_1^*}{ds}$ と $\frac{d\theta_2^*}{ds}$ は同符号であるが, σ_1^* と σ_2^* の一方が1より大で, 他方が1より小のときには, $\frac{d\theta_1^*}{ds}$ と $\frac{d\theta_2^*}{ds}$ は異符号である. すなわち, 貯蓄増加が資本設備の経済的耐用年限に及ぼす効果が部門間で逆行しないのは, 要素代替が均衡点においてともに弾力的であるか, ともに非弾力的である場合に限る.

(2) それぞれの部門において, $\sigma_i^*>1$ ならば $\frac{db_i^*}{ds}$ と $\frac{d\theta_i^*}{ds}$ は同符号, $\sigma_i^*<1$ ならば $\frac{db_i^*}{ds}$ と $\frac{d\theta_i^*}{ds}$ は異符号である. すなわち, 貯蓄増加による capital deepening と capital lengthening が同一方向に働らくのは, 要素代替が均衡点において弾力的である場合に限る.

上述に加えて, (2.26) を (2.23) に考慮すれば, $\frac{d\theta_i^*}{ds}$ と $\frac{db_i^*}{ds}$ の符号について, 少くとも次のような諸結果を導くことができる.

(3) $\sigma_i^*>1$ $(i=1,\ 2)$ のときには, $\frac{d\theta_i^*}{ds}>0$, $\frac{db_i^*}{ds}>0$ $(i=1,\ 2)$. すなわち, 両部門ともに要素代替が均衡点において弾力的であるならば, 貯蓄増加は両部門において capital lengthening と capital deepening を惹起する.

(4) σ_1^* が1より小であっても, 1に十分近い値のときには, $\sigma_2^*>1$ ならば, $\frac{d\theta_1^*}{ds}<0$, $\frac{d\theta_2^*}{ds}>0$, かつ $\frac{db_i^*}{ds}>0$ $(i=1,\ 2)$ ということが起りうる.(3)

---

(3) $\sigma_1^*<1<\sigma_2^*$ のもとでは $\frac{\beta_2'^*}{\beta_1'^*}<0$. また σ_1^* が1に近いほど $\frac{f_1^* e^{-\lambda\theta_1^*}}{b_1^*(1-\sigma_1^*)}$ は大きく, $\phi'(\theta_1^*)$ の絶対値を圧倒するに至る. したがって, (2.23) により $\frac{d\theta_1^*}{ds}<0$, (2.24) により $\frac{d\theta_2^*}{ds}>0$, (2.25) により $\frac{db_i^*}{ds}>0$.

逆に，σ_2^*が1より小であっても，1に十分近い値のときには，$\sigma_1^*>1$ ならば，$\dfrac{d\theta_1^*}{ds}>0$，$\dfrac{d\theta_2^*}{ds}<0$，かつ $\dfrac{db_i^*}{ds}>0$ $(i=1,\ 2)$ ということが起りうる．これらは(3)の逆の非成立をいみする．

(5) $\sigma_1=1$ のときには，$\beta_1'=0$ であるから[(4)]，β_1 は b_1 に依存しない定数である．したがって $\dfrac{\partial\theta_1}{\partial s}=0.$[(5)] よって (2.17)～(2.19) により，次式が導かれる．

$$\frac{d\theta_2}{ds}=\frac{\dfrac{\phi(\theta_2)}{s^2}}{\dfrac{(1-s)\phi'(\theta_2)}{s}-\dfrac{f_1''e^{-\lambda\theta_2}}{\beta_2'}\dfrac{G_2}{G_1}}$$

$$\frac{db_1}{ds}=\frac{\lambda e^{-\lambda\theta_2}}{\beta_2'}\frac{G_2}{G_1}\frac{d\theta_2}{ds}$$

$$\frac{db_2}{ds}=\frac{G_1}{G_2}\frac{db_1}{ds}$$

これらにより，$\sigma^*_2>1$ のとき $\dfrac{d\theta_2^*}{ds}>0$，$\dfrac{db_i^*}{ds}>0$ $(i=1,\ 2)$ となるが，$\sigma_2^*<1$のとき必ずしも $\dfrac{d\theta_2^*}{ds}<0$とは限らない．逆に，$\sigma_2=1$ の場合にも，同様にして[(6)]，$\sigma_1^*>1$ であれば $\dfrac{d\theta_1^*}{ds}>0$，$\dfrac{db_i^*}{ds}>0$ $(i=1,\ 2)$ となるが，$\sigma_1^*<1$が必ずしも $\dfrac{d\theta_1^*}{ds}<0$ をひきおこすとは限らない．

以上により，貯蓄率と資本・有効労働比率および設備耐用年限の均衡値との間の関係がかなり明らかになったが，これをⅢの一部門モデルの場合[(7)]と比較

(4) $\sigma_1=1$のときには Cobb-Douglas 型となるゆえ，β_1は定数，したがって $\beta_1'=0$.

(5) (2.17) において，$\beta_1'=0$ とすれば，$\dfrac{d\theta_1}{ds}=0$ をうる．

(6) 解は，$\dfrac{d\theta_1}{ds}=\dfrac{\dfrac{\phi(\theta_2)}{s}}{\phi'(\theta_1)-\dfrac{f_1''e^{-\lambda\theta_1}}{\beta_1}}$，$\dfrac{db_1}{ds}=\dfrac{\lambda e^{-\lambda\theta_1}}{\beta_1'}\dfrac{d\theta_1}{ds}$，$\dfrac{db_2}{ds}=\dfrac{G_1}{G_2}\dfrac{db_1}{ds}$ となる．

(7) pp. 56 参照．

して極立った相異点を述べると，次の通りである．

(1)　一部門モデルでは $\dfrac{db^*}{ds}>0$ が常に成立したが，二部門モデルでは $\dfrac{db_i^*}{ds}<0$ がおこりうる．ただし，$\dfrac{db_1^*}{ds}$ と $\dfrac{db_2^*}{ds}$ は常に同符号である．このようにして，二部門モデルでは貯蓄増加が必ずしも capital deepening を結果するとは限らない．

(2)　一部門モデルでは，$\sigma^*\gtreqless 1$ に応じて，$\dfrac{d\theta^*}{ds}\gtreqless 0$（不等号同順）．ところが，二部門モデルでは，両部門とも $\sigma_i^*>1$ のときには，$\dfrac{d\theta_i^*}{ds}>0$ であるが，両部門とも $\sigma_i^*<1$ のとき $\dfrac{d\theta_i^*}{ds}<0$ となるとは限らない．なお，両部門とも $\sigma_i^*=1$ のときには $\dfrac{d\theta_i^*}{ds}=0$．このようにして，貯蓄増加が設備の経済的廃棄を早めることは要素代替が非弾力的なことの影響によってであるが，その影響力は，二部門モデルでは一部門モデルほど強くはない．二部門モデルでは，要素代替がかなり非弾力的な場合にも，貯蓄増加が設備廃棄をおくらせることがある．

さて，最後に，貯蓄増加が諸変数均衡水準にどのように影響するか考察しよう．(2.6)～(2.10) において明らかなように，s の上昇は，b_i^*，θ_i^* を通じて，$I^*(0)$，$C^*(0)$，$w^*(0)$，D_L^* などに影響するが，その様相は複雑である．

$I^*(0)$ に対しては，sの上昇の効果は次のようなかたちをとる．

$$\begin{aligned}(2.29)\qquad \frac{dI^*(0)}{ds}=&\frac{\partial I^*(0)}{\partial b_1^*}\frac{db_1^*}{ds}+\frac{\partial I^*(0)}{\partial b_2^*}\frac{db_2^*}{ds}\\&+\frac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_1^*}\frac{d\theta_1^*}{ds}+\frac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_2^*}\frac{d\theta_2^*}{ds}\end{aligned}$$

そこで右辺の項のうち

$$(2.30)\qquad \frac{\partial I^*(0)}{\partial b_i^*}>0,\quad \frac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_i^*}<0\quad (i=1,\ 2)$$

を明らかにしよう．

(2.6) は次のように3通りに書きかえることができる．

$$\text{(2.6}a\text{)}\quad I^*(0)=\frac{nb_2^*L(0)(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})(1-e^{-n\theta_2^*})+\dfrac{b_2^*(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})}{f_1^*}-(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_2^*})\dfrac{b_1^*}{f_1^*}}$$

(2.6b)

$$I^*(0)=\frac{nL(0)(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})}{(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})+\dfrac{[(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1-(\lambda+n)b_1^*](1-e^{-n\theta_2^*})}{b_2^*}}$$

(2.6c)

$$I^*(0)=\frac{nL(0)b_2^*f_1^*}{(1-e^{-n\theta_2^*})f_1^*+\dfrac{b_2^*(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}-\dfrac{b_1^*(1-e^{-n\theta_2^*})}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}}$$

まず，$f_1'^*>0$, $\left(\dfrac{b_1^*}{f_1^*}\right)'>0$ ゆえ，(2.6a) において $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial b_1^*}>0$ をうる．また

$$\text{(2.31)}\qquad (1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*>0$$

ゆえ[8]，(2.6b) において $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial b_2^*}>0$ の成立が明らかである．次に，(2.6c) より直ちに $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_1^*}<0$ が導かれ，(2.6)，(2.31) により $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_2^*}<0$ がわかる．以上により (2.30) が導かれた．

(2.30) と $\dfrac{db_i^*}{ds}$, $\dfrac{d\theta_i^*}{ds}$ についての前述の考察[9]を併用すれば，(2.29) において貯蓄増加の投資財総生産に及ぼす効果を知ることができる．それは要素代替の弾力性に依存して複雑な様相を呈するが，次の事柄は明白である．まず，

---

(8) (1.32) において，$f_1^*=\dfrac{b_1^*f_1'^*}{1-e^{-\lambda\theta_1^*}}$ ゆえ，$(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*-(\lambda+n)b_1^*=f_1'^*b_1^*\left[\dfrac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}{1-e^{-\lambda\theta_1^*}}-\dfrac{\lambda+n}{f'^*}\right]>0$．最後の不等式は (1.39) において $\dfrac{f_1'^*}{\lambda+n}-\dfrac{1-e^{-\lambda\theta_1^*}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}>0$ が成立することから明らかである．

(9) pp. 103 参照.

(10) $\sigma_i^*=1\,(i=1,\ 2)$ の場合は含まない．

$\sigma_i^* \geq 1$ ($i=1$, 2) のときには[10], $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial b_i^*}\dfrac{db_i^*}{ds}>0$, $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_i^*}\dfrac{d\theta_i^*}{ds}<0$. 逆に, σ_i^*が両部門とも十分小さいときには, $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial b_i^*}\dfrac{db_i^*}{ds}>0$, $\dfrac{\partial I^*(0)}{\partial \theta_i^*}\dfrac{d\theta_i^*}{ds}>0$. つまり, 均衡における要素代替の弾力性が大きい場合には, 貯蓄増加の投資財生産に関する capital deepening effect は正であるが, capital lengthening effect は負になる. そして, 代替弾力性が非常に低いときには, 両効果とも正である.

貯蓄増加の消費財生産に及ぼす影響は, (2.7) によって予想される通り, 極めて複雑である. (2.7) において明白なことは, $\dfrac{\partial C^*(0)}{\partial \theta_2^*}<0$ ということだけである.

§3 Cobb-Douglas 関数の場合

本章のこれまでの分析においては, 生産関数F_iの弾力性σ_iに関して特別の限定を加えなかったが, もしすべてのb_iについて, $\sigma_i=1$と仮定するならば, 議論が修正されなくてはならない. すでに述べたように[1], 均衡成長が存在するための技術進歩の構造的条件として, 両部門における技術進歩率が相等しいこと, すなわち$\lambda_1=\lambda_2$が必要であったが, $\sigma_i=1$の場合にはこの条件が不要になる. そのため, 両部門において異った率の均衡成長率が可能になる. また, $\sigma_i=1$の一次同次関数F_iは Cobb-Douglas 型をとるので, 産出量の要素に対する弾力性が構造的な定数となる. そして均衡成長径路において, この構造定数が明確な役割を演じることになる. とりわち資本設備の経済的耐用年限に対してである. 以下, これらのことを明らかにしよう.[2]

生産関数が Cobb-Douglas 型の場合, (1.1), (1.2) におけるF_iおよび

(1) p. 90 参照.

(2) 旧稿〔62〕は, 同様に Johansen 仮設 (putty-clay モデル) のもとに, 同一の問題を取扱ったが, それは「体化された技術進歩」の場合と「体化されない技術進歩」の場合との比較分析という観点からであった.

f_iは次のようなかたちをとる.(3)

$$(3.1)\qquad F_i[e^{\lambda_i t}l_i(t),\ k_i(t)]=[e^{\lambda_i t}l_i(t)]^{\alpha_i}[k_i(t)]^{1-\alpha_i}$$

$$(3.1a)\qquad f_i[b_i(t)]=b_i(t)^{1-\alpha_i}$$

ただしα_iは産出量の有効労働に対する弾力性で，$0<\alpha_i<1$とする．そのとき

$$(3.2)\qquad \frac{\partial}{\partial l_i(t)}F_i[e^{\lambda_i t}l_i(t),\ k_i(t)]=\alpha_i e^{\lambda_i t}b_i(t)^{1-\alpha_i}$$

$$(3.3)\qquad \frac{F_i[e^{\lambda_i[t-\theta_i(t)]}l_i(t-\theta_i(t)),\ k_i(t-\theta_i(t))]}{l_i(t-\theta_i(t))}$$

$$=e^{\lambda_i(t-\theta_i(t))}b_i(t-\theta_i(t))^{1-\alpha_i}$$

$$(3.4)\qquad \frac{\partial}{\partial k_i(t)}F_i[e^{\lambda_i t}l_i(t),\ k_i(t)]=(1-\alpha_i)b_i(t)^{-\alpha_i}$$

§1における定義式および条件式 (1.1)〜(1.4) は，このような特殊なかたちにおいて，そのまま妥当する．

次に，均衡成長径路は，(1.14)，(1.15) における未定定数 $I(0)$，$C(0)$，g_i，θ_iを定めることによって明らかになる．以下それをおこなう．

(1.17)〜(1.23) はそのまま妥当する．(1.17)，(1.18) を再記すれば，

$$(3.5)\qquad nL(0)=l_1(0)(1-e^{-n\theta_1})+l_2(0)(1-e^{-n\theta_2}),$$

$$(3.6)\qquad I(0)=k_1(0)+k_2(0).$$

そして (1.22)，(1.23) は次のようにあらわされる．

$$(3.7)\qquad \frac{g_1 I(0)}{1-e^{-g_1\theta_1}}e^{(g_1-\lambda_1-n)t}=l_1(0)b_1(0)^{1-\alpha_1}e^{(1-\alpha_1)(g_1-\lambda_1-n)t}$$

$$(3.8)\qquad \frac{g_2 C(0)}{1-e^{-g_2\theta_2}}e^{(g_2-\lambda_2-n)t}=l_2(0)b_2(0)^{1-\alpha_2}e^{(1-\alpha_2)(g_1-\lambda_2-n)t}$$

(3.7)，(3.8) より明らかなことは

$$(3.9)\qquad g_1=\lambda_1+n$$

---

(3) 生産関数 (3.1) において $[e^{\lambda_i t}l_i(t)]^{\alpha_i}[k_i(t)]^{1-\alpha_i}=l_i(t)^{\alpha_i}[e^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\lambda_i t}k_i(t)]^{1-\alpha_i}$ となるから，以下の分析は $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\lambda_i$ の率での資本増大的 (Solow 中立的) な技術進歩がおこなわれているものと読みかえることが可能である．このように Cobb-Douglas 関数をとるかぎり，労働増大的進歩と資本増大的進歩との形の上での差は解消する．

(3.10) $$g_2=\lambda_1+n+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)$$

が成立しなければならないことである．そのとき，$I(0)$，$C(0)$ は

(3.11) $$I(0)=l_1(0)^{\alpha_1}k_1(0)^{1-\alpha_1}\frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{g_1}$$

(3.12) $$C(0)=l_2(0)^{\alpha_2}k_2(0)^{1-\alpha_2}\frac{1-e^{-g_2\theta_2}}{g_2}$$

であらわされる．(3.9)，(3.10) より直ちにわかるように，$\lambda_2\gtreqqless\lambda_1$ に応じて $g_2\gtreqqless g_1$（不等号同順）．また，$b_i(t)=\dfrac{k_i(0)}{l_i(0)}e^{(g_1-\lambda_i-n)t}$ については (3.9)，(3.10) を代入して

(3.13) $$b_1(t)=b_1(0)$$

(3.14) $$b_2(t)=b_2(0)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$$

が成立する．もはや消費財部門の新設備の資本集約度は，均衡成長径路において必ずしも一定でなく，部門間の技術的生産性の上昇率の差に応じて変動する．

また，(2.13)，(2.14) を (2.2)～(2.4) に代入すれば，均衡成長のもとでは

(3.2a) $$\frac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)}=\alpha_2\,b_2(0)^{1-\alpha_2}\,e^{[\lambda_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)]t}$$

(3.2b) $$\frac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)}=\alpha_1 b_1(0)^{1-\alpha_1}\,e^{\lambda_1 t}$$

(3.3a) $$\frac{c(t-\theta_2(t))}{l_2(t-\theta_2(t))}=b_2(0)^{1-\alpha_2}\,e^{[\lambda_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)](t-\theta_2)}$$

(3.3b) $$\frac{k(t-\theta_1(t))}{l_1(t-\theta_1(t))}=b_1(0)^{1-\alpha_1}\,e^{\lambda_1(t-\theta_1)}$$

(3.4a) $$\frac{\partial c(t)}{\partial k_2(t)}=(1-\alpha_2)b_2(0)^{-\alpha_2}\,e^{\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

(3.4b) $$\frac{\partial k(t)}{\partial k_1(t)}=(1-\alpha_1)b_1(0)^{-\alpha_1}$$

とならなければならないことがわかる．したがって，部門間労働配分に関する均衡条件，$\dfrac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)}=\dfrac{k(t-\theta_1(t))}{l_1(t-\theta_1(t))}$ および $\dfrac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)}=\dfrac{c(t-\theta_2(t))}{l_2(t-\theta_2(t))}$ に (3.2a)， (3.2*b*), (3.3*a*), (3.3*b*) を代入して，整理することによって

$$\theta_1 = -\frac{\log \alpha_1}{\lambda_1} \tag{3.15}$$

$$\theta_2 = -\frac{\log \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{3.16}$$

がえられる．

均衡価格 $p(t)$ は二様にあらわされる．

$$p(t) = \frac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)} \Big/ \frac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{b_2(0)^{1-\alpha_2}}{b_1(0)^{1-\alpha_1}} e^{\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)t} \tag{3.17}$$

$$p(t) = \frac{\partial c(t)}{\partial k_2(t)} \Big/ \frac{\partial k(t)}{\partial k_1(t)} = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \frac{b_2(0)^{-\alpha_2}}{b_1(0)^{-\alpha_1}} e^{\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)t} \tag{3.18}$$

したがって，これらを等置することにより

$$\frac{b_2(0)}{b_1(0)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \tag{3.19}$$

がえられる．これが (1.37) に相当する部門間投資配分に関する均衡条件である．

最後に，均衡成長過程における貯蓄・投資均等条件は

$$\frac{C(0)}{I(0)} = \frac{1-s}{s} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{b_2(0)^{1-\alpha_2}}{b_1(0)^{1-\alpha_1}} \tag{3.20}$$

のようにあらわされる．(4) したがって，(3.20), (3.11), (3.12) により

$$\frac{l_2(0)}{l_1(0)} = \frac{1-s}{s} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{g_2}{g_1} \frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{1-e^{-g_2\theta_2}} \tag{3.21}$$

がえられる．そして (3.5), (3.21) により，$l_i(0)$ を求めることができる．

$$l_1(0) = L(0)\left[(1-e^{-n\theta_1}) + \frac{1-s}{s} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{g_2}{g_1} \frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{1-e^{-g_2\theta_2}} (1-e^{-n\theta_2})\right]^{-1} \tag{3.22}$$

$$l_2(0) = L(0)\left[(1-e^{-n\theta_2}) + \frac{s}{1-s} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{g_1}{g_2} \frac{1-e^{-g_2\theta_2}}{1-e^{-g_1\theta_1}} (1-e^{-n\theta_1})\right]^{-1} \tag{3.23}$$

$k_i(0)$ は (3.6), (3.11), (3.19) のタームで，次のようにあらわされる．

---

(4) 貯蓄・投資均等条件は $sC(t) = (1-s)p(t)I(t)$ となるが，$C(t) = C(0)e^{g_2 t}$, $I(t) = I(0)e^{g_1 t}$ を代入し，$p(t)$ に (3.17) を代入して，整理すれば，(3.20) がえられる．

$$(3.24)\ k_1(0)=l_1(0)\left[\frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{g_1}\right]^{\frac{1}{\alpha_1}}\left[1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\frac{l_2(0)}{l_1(0)}\right]^{-\frac{1}{\alpha_1}}$$

$$(3.25)\ k_2(0)=l_2(0)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\left[\frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{g_1}\right]^{\frac{1}{\alpha_1}}\left[1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\frac{l_2(0)}{l_1(0)}\right]^{-\frac{1}{\alpha_1}}$$

なお，(3.22)～(3.25) における g_i，θ_i は (3.9)，(3.10)，(3.15)，(3.16) によって与えられる．

このようにして，(3.22)～(3.25) により，(3.11)，(3.12) における $I(0)$，$C(0)$ は結局，パラメーター α_i，λ_i，s および $L(0)$ のみによってあらわされることが明らかである．ここに未定定数 $C(0)$，$I(0)$，g_i，θ_i はすべて確定する．すなわち．均衡成長径路の存在が確認された．そして，諸変数の均衡成長解は次のようにあらわされる．

$$(3.26)\qquad I^*(t)=l_1(0)^{\alpha_1}k_1(0)^{1-\alpha_1}\frac{1-e^{-g_1\theta_1}}{g_1}e^{g_1t}$$

$$(3.27)\qquad C^*(t)=l_2(0)^{\alpha_2}k_2(0)^{1-\alpha_2}\frac{1-e^{-g_2\theta_2}}{g_2}e^{g_2t}$$

$$(3.28)\qquad w^*(t)=\alpha_2\left[\frac{k_2(0)}{l_2(0)}\right]^{1-\alpha_2}e^{(g_2-n)t}$$

$$(3.29)\qquad p^*(t)=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\frac{k_2(0)}{l_2(0)}\right]^{1-\alpha_2}\left[\frac{k_1(0)}{l_1(0)}\right]^{\alpha_1-1}e^{\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

ただし $l_i(0)$，$k_i(0)$ は (3.22)～(3.25)，g_i は (3.9)，(3.10)，θ_i は (3.15)，(3.16) によってあらわされるものとする．

これらの結果を分析して，$\sigma_i=1$ の場合における均衡成長径路の特長を述べれば，次の通りである．

(1) 投資以外の経済諸量の均衡成長率の決定因として，技術進歩率，労働力成長率のほかに，消費財部門の生産関数労働指数 (α_2) が加わる．そして，先に指摘したように，資本財部門と消費財部門の技術進歩率の格差が両部門の産出量成長率の格差となってあらわれる．貯蓄率が成長率に関係しないことは，一般の場合と同様である．

(2) 資本財生産における技術進歩は，資本財産出量，消費財産出量，および

賃金率に対して，それぞれの成長率に positively に影響するが，資本財価格上昇率に対しては negatively に影響する．他方，消費財生産における技術進歩は，消費財産出量，資本財価格，および賃金率について，それぞれの成長率に positively に影響する．

(3) 労働力増加率は，両部門の産出量成長率に対し positively に影響するが，賃金率，資本財価格の変化率には無関係である．

(4) $\lambda_i=\lambda$，すなわち両部門の技術進歩率がひとしいときには，両部門とも産出量は $\lambda+n$ の率で成長し，賃金率は技術進歩に歩調を合せて上昇（すなわち λ の率で成長）してゆき，資本財価格は不変にとどまる．これは§1において導き出した状況にほかならない．

(5) 極立った特徴は，設備の経済的耐用年限の均衡値にみられる．まず，θ_i の決定は技術進歩率と生産関数労働指数にのみ依存し，労働力増加率や貯蓄率から独立である．さらに，(3.15)，(3.16) により

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda_1}=\frac{\log\alpha_1}{\lambda_1{}^2}<0$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_1}=\frac{(1-\alpha_2)\log\alpha_2}{[(1-\alpha_2)\lambda_1+\alpha_2\lambda_2]^2}<0$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_2}=\frac{\alpha_2\log\alpha_2}{[(1-\alpha_2)\lambda_1+\alpha_2\lambda_2]^2}<0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda_2}=0$$

が導かれる．すなわち，資本財生産において技術進歩が高まることは両部門の設備の経済的耐用年限を短縮するが，消費財生産における技術進歩の高まりは消費財部門の設備の経済耐用年限のみ短縮する．(5) $\lambda_1=0$ のときには，資本財部門にのみ，設備の経済的廃棄が生じない．$\lambda_2=0$であっても，$\lambda_1\neq0$である限

(5) 技術進歩率の上昇による設備経済的耐田年限短縮の弾力性を計算すると，次のようになる．$-\frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda_1}\frac{\lambda_1}{\theta_1}=1$，$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_1}\frac{\lambda_1}{\theta_2}=\frac{(1-\alpha_2)\lambda_1}{(1-\alpha_2)\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}<1$，$-\frac{\partial\theta_2}{\partial\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\theta_2}=\frac{\alpha_2\lambda_2}{(1-\alpha_2)\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}<1$．

り，両部門とも設備の経済的廃棄は有限期間内に発生する．

また，資本財生産においても，消費財生産においても，労働集約度の増大（α_iの上昇）は，それぞれの部門において設備の経済的耐用年限を短縮することが，(3.15)，(3.16) において解析される．

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{\alpha_1\lambda_1}<0,$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_2}=-\frac{\lambda_1\left(\dfrac{1-\alpha_2}{\alpha_2}+\log\alpha_2\right)+\lambda_2(1-\log\alpha_2)}{[(1-\alpha_2)\lambda_1+\alpha_2\lambda_2]^2}<0.$$

(6) 貯蓄率は，均衡における設備の経済的耐用年限や諸量の均衡成長率には関係しないが，均衡水準値に対しては影響する．(3.22)～(3.25) において直ちに

$$\frac{\partial l_1(0)}{\partial s}>0,\quad \frac{\partial l_2(0)}{\partial s}<0,\quad \frac{\partial k_1(0)}{\partial s}>0$$

が明らかである．すなわち，貯蓄増加は，消費財部門雇用水準を低め，投資財部門雇用水準を高める．そして資本財部門への投資を増大させる．

また，(3.26) において $\dfrac{\partial I(0)}{\partial l_1(0)}>0$, $\dfrac{\partial I(0)}{\partial k_1(0)}>0$ であるから，s の上昇の $I(0)$ に対する影響は

$$\frac{\partial I(0)}{\partial s}=\frac{\partial I(0)}{\partial l_1(0)}\frac{dl_1(0)}{ds}+\frac{\partial I(0)}{\partial k_1(0)}\frac{dk_1(0)}{ds}>0$$

で示される．他方，(3.6) により

$$\frac{\partial k_2(0)}{\partial s}=\frac{\partial I(0)}{\partial s}-\frac{\partial k_1(0)}{\partial s}.$$

このようにして，貯蓄率の上昇は総投資水準と資本財部門投資水準を高めることは明らかであるが，消費財部門投資水準に対しては両者の差に依存して不確定である．

s の $C(0)$ に対する影響は複雑である．しかし $\alpha_1=\alpha_2$, $\lambda_1=\lambda_2$ の場合，すなわち両部門の生産関数が同一の構造をもち，技術進歩の部門間格差の存在しない場合には，$s=1-\alpha$ のとき，最大消費径路が実現することがわかる．実際，$\alpha_i=\alpha(i=1,\ 2)$, $\lambda_i=\lambda(i=1,\ 2)$ ならば，(3.9)，(3.10) より $g_1=g_2=\lambda+n$,

(3.15), (3.16) により $\theta_1=\theta_2=-\frac{\log\alpha}{\lambda}\equiv\theta$. そして (3.12), (3.23), (3.25) において

$$C(0)=A(1-s)s^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\quad A=\frac{L(0)}{1-e^{-n\theta}}\left[\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{\lambda+n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

が成立する．そして，直ちに

$$\frac{\partial C(0)}{\partial s}=\frac{A}{\alpha}\,s^{\frac{1}{\alpha}-2}(1-\alpha-s),$$

$$\frac{\partial^2 C(0)}{\partial s^2}=-\frac{A}{\alpha}(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-4}<0\,.$$

(7) 最後に，賃金分前 $D_L(t)$ は

$$D_L(t)=\frac{w(t)L(t)}{Y(t)}=(1-s)\,L(0)e^{nt}\,\frac{w(t)}{C(t)}$$

であらわされるが，均衡成長径路においては，これに (3.27), (3.28) を代入し，(3.23) を考慮して整理すれば

$$D_L{}^*(t)=(1-s)\frac{\alpha_2 g_2(1-e^{-n\theta_2})}{1-e^{-g_2\theta_2}}+s\,\frac{\alpha_1 g_1(1-e^{-n\theta_1})}{1-e^{-g_1\theta_1}}.$$

若干の計算により $\frac{\partial D_L(t)}{\partial n}>0$ がわかる．(6)

このようにして均衡成長径路において，賃金分前は時間に依存することなく一定であり，労働力増加率に positively に依存する．貯蓄率との関係は，α_i, λ_i, n の値に依存して不確定であるが，$\alpha_i=\alpha$, $\lambda_i=\lambda(i=1,\ 2)$ という特殊な場合には，相対的分前は貯蓄率から独立であることがわかる．実際，この場合には

$$D_L{}^*(t)=\frac{\alpha(\lambda+n)(1-e^{-n\theta})}{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}$$

が成立するからである． なお，$\lambda>0$, $0<\alpha<1$ ゆえ，$D_L(t)<\alpha(\lambda+n)<\lambda+n$. すなわち賃金分前が成長率をこえることはできない．

---

(6) $\frac{d}{dg_i}\left(\frac{g_i}{1-e^{-g_i\theta_i}}\right)=\frac{1-(1+g_i\theta_i)e^{-g_i\theta_i}}{(1-e^{-g_i\theta_i})^2}>0$ を考慮すればよい．

§4　完全予見と均衡成長

最後に，賃金一定の予想という極端な仮定のかわりに，賃金上昇の完全予想というもう一つの極端な仮定をおこなった場合，均衡成長体系はどのように変化するか，簡単な考察を試みる．

ゼロ予見のモデルは (1.1)～(1.14) によって構成されたが，完全予見の場合，そのなかの行動関係式の一部が以下のように変化する．

一部門モデルの場合と同じ様に，ゼロ予見のもとでは賃金と労働の限界生産力の均等が成立つよう新設備の労働雇用が決定されたのに対し，完全予見のもとでは新投資の現在価値に対する労働の限界貢献がゼロになるところで雇用を打切る．それは

$$V_1(t) \equiv \int_t^{t+\theta_1} [p(t)k(t) - w(T)l_1(t)] e^{-r(t)(T-t)} dT \tag{4.1}$$

$$V_2(t) \equiv \int_t^{t+\theta_2} [c(t) - w(T)l_2(t)] e^{-r(t)(T-t)} dT \tag{4.2}$$

とするとき

$$\frac{dV_i(t)}{dl_i(t)} = 0 \quad (i=1,\ 2) \tag{4.3}$$

によってあらわされる．ただし，$V_i(t)$ は新投資現在価値，$r(t)$ は市場利子率とする．[1] (4.1)～(4.3) が，(1.10)，(1.11) にとりかわる関係式である．

次に，新資本財の部門間配分に際して，ゼロ予見のモデルでは，投資の限界生産力の均等化，すなわち即時的準地代の均等化がおこなわれたのに対し，完全予見のモデルでは，即時的準地代だけでなく，将来にわたる準地代の流れも含めて，その割引された現在価値（投資1単位当り）の均等化が新しい配分原理となる．それは

$$\frac{V_i(t)}{k_i(t)} = p(t) \quad (i=1,\ 2) \tag{4.4}$$

によってあらわされる．これが (1.14) にとりかわる関係式である．

(1)　完全予見のもとでは，各部門の投資収益率 $r_i(t)$ は，市場利子率 $r(t)$ に一致する．

なお，完全競争のもとで機械の経済的耐用年限を規定する関係式 (1.12), (1.13) はそのまま妥当する．すなわち

$$w(t)=p(t)\frac{k(t-\theta_1(t))}{l_1(t-\theta_1(t))}, \tag{4.5}$$

$$u(t)=\frac{c(t-\theta_2(t))}{l_2(t-\theta_2(t))}. \tag{4.6}$$

以上により，新しいモデルは (1.1)〜(1.9) および (4.1)〜(4.6) の合計 17 個の式によって構成される.[(2)] そして変数は前モデルの 14 個に新たに $r(t)$, $V_1(t)$, $V_2(t)$ が加わり，計 17 個となる．体系は自己完結的である．

さて，このモデルにおいて均衡成長径路を規制する諸関係はどのように変化するか．上述において明らかなように，モデルを構成する方程式のうち変化するのは行動関係式だけであるから，(1.15)〜(1.31) は新モデルにおいても同様に成立する．したがって，§1 (1.32) 以下の均衡条件がどのように変るかを検討すればよい．(4.1)，(4.2) において

$$w(T)=w(t)e^{x(t-T)} \tag{4.7}$$

と置き，(4.3) を展開して，整理すれば，

$$w(t)=p(t)\frac{\partial k(t)}{\partial l_1(t)}\int_t^{t+\theta_1} e^{-r(t)(T-t)}\,dT\Big/\int_t^{t+\theta_1} e^{(x-r(t))(T-t)}\,dT,$$

$$w(t)=\frac{\partial c(t)}{\partial l_2(t)}\int_t^{t+\theta_2} e^{-r(t)(T-t)}\,dT\Big/\int_t^{t+\theta_2} e^{(x-r(t))(T-t)}\,dT.$$

均衡成長のもとでは，これらは次のようになる．

(4.8)

$$w(t)=e^{\lambda t}(f_1-b_1f_1')p(t)\int_t^{t+\theta_1} e^{-r(t)(T-t)}\,dT\Big/\int_t^{t+\theta_1} e^{(x-r(t))(T-t)}\,dT$$

(4.9)

$$w(t)=e^{\lambda t}(f_2-b_2f_2')\int_t^{t+\theta_2} e^{-r(t)(T-t)}\,dT\Big/\int_t^{t+\theta_2} e^{(x-r(t))(T-t)}\,dT$$

同様にして，均衡成長径路上の (4.4) は次のようにパラフレイズされる．

$$p(t)=p(t)\frac{f_1}{b_1}\int_t^{t+\theta_1} e^{-r(t)(T-t)}dT-w(t)\frac{e^{-\lambda t}}{b_1}\int_t^{t+\theta_1} e^{(x-r(t))(T-t)}dT \tag{4.10}$$

---

(2) (4.1)〜(4.6) に 8 個の独立な式が含まれている．

$$(4.11)\quad p(t)=\frac{f_2}{b_2}\int_t^{t+\theta_2} e^{-r(t)(T-t)}\,dT-w(t)\frac{e^{-\lambda t}}{b_2}\int_t^{t+\theta_2} e^{(x-r(t))(T-t)}\,dT$$

(4.8)〜(4.11) によって，$r(t)=r$ (定数)，$p(t)=p$ (定数) が導かれ，次のような諸関係が成立する.(3)

$$(4.12)\qquad f_1'=\frac{r}{1-e^{-r\theta_1}}$$

$$(4.13)\qquad f_2'=\frac{r}{1-e^{-r\theta_2}}\,p$$

$$(4.8a)\qquad w(t)=e^{\lambda t}p(f_1-b_1f_1')\frac{r-\lambda}{\lambda}\,\frac{1-e^{-r\theta_1}}{1-e^{-(r-\lambda)\theta_1}}$$

$$(4.9a)\qquad w(t)=e^{\lambda t}(f_2-b_2f_2')\frac{r-\lambda}{\lambda}\,\frac{1-e^{-r\theta_2}}{1-e^{-(r-\lambda)\theta_2}}$$

ところが，(4.5)，(4.6) に，それぞれ (1.30)，(1.31) を考慮すれば，均衡成長下における賃金率を次のようにあらわすこともできる.

$$(4.14)\qquad w(t)=e^{\lambda(t-\theta_1)}\,pf_1$$

$$(4.15)\qquad w(t)=e^{\lambda(t-\theta_2)}\,f_2$$

したがって，(4.8a)，(4.9a)，(4.14)，(4.15) において，直ちに次のような関係が導かれる.(4)

$$(4.16)\qquad e^{-\lambda\theta_1}\,pf_1=e^{-\lambda\theta_2}\,f_2$$

$$(4.17)\qquad 1-\frac{b_if_i'}{f_i}=e^{-\lambda\theta_i}\left[\frac{r}{r-\lambda}\,\frac{1-e^{-(r-\lambda)\theta_i}}{1-e^{-r\theta_i}}\right]\quad(i=1,\ 2)$$

このようにしてえられた (4.12)，(4.13)，(4.16)，(4.17) が，§1の (1.32)，(1.37) に代るべき均衡条件，すなわち，部門間労働配分および投資配分の均衡条件である.

---

(3) (4.10)，(4.11) における $w(t)$ に，それぞれ (4.8)，(4.9) を代入して，展開し，整理すれば，$f_1'=\dfrac{r(t)}{1-e^{-r(t)\theta_1}}$，$f_2'=\dfrac{r(t)}{1-e^{-r(t)\theta_2}}\,p(t)$ が導かれる．前者より，$r(t)$ が t に依存しないこと，さらに後者より，$p(t)$ が t に依存しないことが明らかである．すなわち，(4.12)，(4.13) をうる．(4.12)，(4.13) を (4.8)，(4.9) に考慮すれば，$x=\lambda$，したがって (4.8a)，(4.9a) が導かれる．

(4) (4.14)，(4.15) の等置により (4.16) をうる．他方，(4.8a) と (4.14)，(4.9a) と (4.15) の等置により，(4.17) をうる．

最後に，均衡成長過程における貯蓄・投資均衡条件は，§1と同様にして

$$\left\{\frac{1}{\lambda+n}-\frac{b_1}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})f_1}\right\}I(0)=\frac{b_2}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})f_2}C(0)$$

であらわされる.[5] ところが，(1.6)，(1.8) により，均衡成長のもとでは

$$C(0)=\frac{1-s}{s}\,pI(0)$$

が成立する．したがって，これら二式より

$$\text{(4.18)}\quad \frac{1}{\lambda+n}-\frac{b_1}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})f_1}=\frac{1-s}{s}\,\frac{pb_2}{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})f_2}$$

がえられる．

このようにして，体系における均衡成長径路の存在は，(4.12)，(4.13)，(4.16)，(4.17) および (4.18) の6個の式を満す b_1，b_2，θ_1，θ_2，p，r の存在に依存することが明らかになった．

ここでは，解の存在問題には立入らないで，解の存在した場合に成立する関係として，ゼロ予見下で成立しなかったものを述べよう．それは，均衡成長径路において利子率が産出量成長率にひとしいときには，利潤分前が貯蓄率にひとしいということである．以下，それを導く．

総産出量の均衡成長解は

$$Y^*(t)=\frac{1}{s}\,p^*I^*(0)\,e^{(\lambda+n)t}$$

であらわされる．ただし

$$\text{(4.19)}\quad I^*(0)$$
$$=\frac{nb_2L(0)(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})f_1^*}{(\lambda+n)[b_2^*(1-e^{-n\theta_1^*})-b_1^*(1-e^{-n\theta_2^*})]+f_1^*(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})(1-e^{-n\theta_2^*})}$$

とする．したがって，賃金分前の均衡値は

$$\text{(4.20)}\quad D_L^*=\frac{w^*(t)L(t)}{Y(t)}=s(f_1^*-b_1^*f_1'^*)\frac{r^*-\lambda}{r^*}\,\frac{1-e^{-r^*\theta_1^*}}{1-e^{-(r^*-\lambda)\theta_1^*}}\,\frac{L(0)}{I^*(0)}$$

(5) (1.27) に相当する．

となる.(6)

そこで，もし $r^*=\lambda+n$ とすれば，(4.19)，(4.20) により

$$(4.21)\quad D_L^*(t)=s\left(1-\frac{b_1^*f_1'^*}{f_1^*}\right)\left[1-\frac{b_1^*(1-e^{-n\theta_2^*})}{b_2^*(1-e^{-n\theta_1^*})}+\frac{(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*})(1-e^{-n\theta_2^*})f_1^*}{b_2^*(\lambda+n)(1-e^{-n\theta_1^*})}\right]$$

がえられる．他方，(4.12) により，$r^*=\lambda+n$ のとき

$$\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}{\lambda+n}=\frac{1}{f_1'^*}$$

が成立する．これを (4.21) に代入して，整理すれば

$$(4.21a)\quad D_L^*=s\left(1-\frac{b_1^*f_1'^*}{f_1^*}\right)\left[1+\frac{b_1^*}{b_2^*}\left(\frac{f_1^*}{b_1^*f_1'^*}-1\right)\frac{1-e^{-n\theta_2^*}}{1-e^{-n\theta_1^*}}\right]$$

ところが，$r^*=\lambda+n$ のときには，(4.8a)，(4.9a)，(4.12)，(4.13) において

$$(4.22)\quad \frac{1-e^{-n\theta_2^*}}{1-e^{-n\theta_1^*}}=\frac{f_2^*-b_2^*f_2'^*}{p^*(f_1^*-b_1^*f_1'^*)}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2^*}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}}$$

$$(4.23)\quad 1-e^{-(\lambda+n)\theta_1^*}=\frac{\lambda+n}{f_1'^*}$$

$$(4.24)\quad 1-e^{-(\lambda+n)\theta_2^*}=\frac{(\lambda+n)p^*}{f_2'^*}$$

がえられる.(7) これらより直ちに次式が導かれる．

$$(4.25)\quad \frac{1-e^{-n\theta_2^*}}{1-e^{-n\theta_1^*}}=\frac{f_1'^*(f_2^*-b_2^*f_2'^*)}{f_2'^*(f_1^*-b_1^*f_1'^*)}$$

(4.25) を (4.21a) に代入して，整理すれば

$$(4.21b)\quad D_L^*=s\frac{f_2^*}{b_2^*f_2'^*}\left(1-\frac{b_1^*f_1'^*}{f_1^*}\right).$$

他方，(4.18) において $\lambda+n=r^*$ とおき，さらに (4.23)，(4.24) を考慮すれば，

(6) $w^*(t)$ としては (4.8a) を使用する．

(7) (4.22) は (4.8a)，(4.9a) により，(4.23) は (4.12) より，(4.24) は (4.13) より，それぞれえられる．

$$\frac{1-s}{s}=\frac{f_2^*}{b_2^* f_2'^*}\left(1-\frac{b_1^* f_1'^*}{f_1^*}\right). \tag{4.26}$$

(4.21b), (4.26) によって $1-D_L^*=s$ が明らかである.

V　固定係数と均衡成長

§1　均衡成長の一部門モデル

1　モデル　　まず，技術的仮定は次の通りである．資本と労働は，事前的にも事後的にも代替不能であり，技術進歩は新らしい vintage 資本の技術的労働生産性の上昇としてあらわれる．財は一種類で，それを資本財としても消費財としても利用可能である．

さて，資本が有効に利用されているときには，個別的生産関数は次のようにあらわされる．

$$Q_t = \lambda_t L_t = \mu_t K_t \tag{1.1}$$

ただし，K_t は vintage t の資本財の投資量，L_t はそれと組合される労働量，Q_t は vintage t の資本財の粗産出率である．λ_t は vintage t の資本財に配分された労働の 技術的生産力，μ_t は同じく資本財１単位の技術的生産力をあらわす．

技術進歩が恒常的な率で進行し，労働増大的（Harrod 中立的）であると仮定するならば，[1]

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &\lambda_t = \lambda_0 e^{\lambda t} \\ &\mu_t = \mu \qquad （すべての\ t\ に対し）. \end{aligned}$$

したがって，vintage t の資本財と労働の結合比率は $\dfrac{K_t}{L_t} = \dfrac{\lambda_0}{\mu} e^{\lambda t}$ であらわされ，１単位の資本財の雇用する労働量は，技術進歩の進行につれ，継続的に λ の率で減小してゆく．

ここで，過剰労働のケースを除外するため $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{\mu}{\lambda_0} e^{-\lambda T} K_T dT > L(t)$ がすべての t について成立すると仮定する．左辺は最大可能雇用量，右辺 $L(t)$ は t

(1)　資本増大的技術進歩がおこなわれているときには，貯蓄率一定と設備耐用年限の一定とは両立しない．そして $\theta(t)$ を変数としても，貯蓄率一定は投資，および雇用の恒常成長と両立しない．これらの論証については，Solow, Tobin, von Weizsäcker and Yaari〔54〕(pp. 113〜115) 参照．

時労働供給をあらわす．なお，労働供給は一定率 n で増加するので

$$L(t)=L(0)e^{nt}. \tag{1.3}$$

そのとき，完全雇用の条件は

$$L(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t} L_T\,dT=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_{t-\theta(t)}^{t} e^{-\lambda T}K_T\,dT \tag{1.4}$$

であらわされる．したがって，総産出量 $Q(t)$ は

$$Q(t)=\int_{t-\theta(t)}^{t} Q_T dT=\lambda_0\int_{t-\theta(t)}^{t} e^{\lambda T}L_T dT=\mu\int_{t-\theta(t)}^{t} K_T dT \tag{1.5}$$

となる．

行動関係式のうち，貯蓄・投資均等条件は

$$sQ(t)=K_t. \tag{1.6}$$

将来賃金についてのゼロ予見を仮定すれば，完全競争のもとにおいて賃金率 $w(t)$ は雇用労働の限界生産力にひとしくなるよう決定される．そしてその限界生産力を上廻る労働生産性をもつ vintage の機械のみが使用される．ところで，(1.5)，(1.4)より，それぞれ

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial\theta(t)}=\mu K_{t-\theta(t)}$$

$$\frac{\partial L(t)}{\partial\theta(t)}=\frac{\mu}{\lambda_0}\,e^{-\lambda(t-\theta(t))}K_{t-\theta(t)}$$

がえられる．この二式により

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial L(t)}=\frac{\partial Q(t)}{\partial\theta(t)}\Big/\frac{\partial L(t)}{\partial\theta(t)}=\lambda_0 e^{-\lambda(t-\theta(t))}=\lambda_{t-\theta(t)}$$

が成立する．したがって上述の条件は

$$w(t)=\lambda_{t-\theta(t)} \tag{1.7}$$

によってあらわされる．

以上，(1.1)，(1.3)～(1.7)の方程式体系において，変数は Q_t，L_t，$L(t)$，$Q(t)$，$\theta(t)$，$w(t)$，したがって体系は自己完結的である．

2　均衡成長　モデルの均衡成長解は，

$$\theta(t)=\theta \qquad (\text{すべての } t \text{ について}) \tag{1.8}$$

とおくことによって求まる．結果は次の通りである．[2]

$$(1.9) \qquad L_t=\frac{nL(0)}{1-e^{-n\theta}}e^{nt}$$

$$(1.10) \qquad Q_t=\frac{n\lambda_0 L(0)}{1-e^{-n\theta}}e^{(\lambda+n)t}$$

$$(1.11) \qquad Q(t)=\frac{n}{\lambda+n}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta}}{1-e^{-n\theta}}\lambda_0 L(0)e^{(\lambda+n)t}$$

$$(1.12) \qquad K_t=\frac{n\lambda_0 L(0)}{\mu(1-e^{-n\theta})}e^{(\lambda+n)t}$$

$$(1.13) \qquad w(t)=\lambda_0 e^{\lambda(t-\theta)}$$

したがって，(1.8)において想定された θ の値が矛盾なく求まるならば，均衡成長径路の存在が確められたことになる．

(1.6)に(1.11)，(1.12)を考慮すれば

$$(1.14) \qquad \theta=-\frac{1}{\lambda+n}\log\left(1-\frac{\lambda+n}{s\mu}\right)$$

が導かれる．したがって，非負の θ が存在するための条件は

$$(1.15) \qquad s\mu \geqq \lambda+n$$

であることがわかる．このようにして，(1.15)が満されるかぎり，均衡成長解が存在する．以下ではこの条件が満されていると仮定する．

さて，(1.14)において明らかなように，$\theta(t)$ の均衡成長解 θ^* は，s，λ，n などに依存する．そこで，これらパラメーターの変化が均衡成長径路にどのように影響するか，

s 変化の影響については，(1.14)において

$$(1.16) \qquad \frac{d\theta^*}{ds}=\frac{1-e^{(\lambda+n)\theta^*}}{s(\lambda+n)}<0$$

となるので，これを諸変数の均衡成長解に考慮すればよい．

(1.9)～(1.13)を θ で微分すれば，直ちに明らかなように

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial\theta}<0,\quad \frac{\partial K_t}{\partial\theta}<0,\quad \frac{\partial Q_t}{\partial\theta}<0,\quad \frac{\partial w(t)}{\partial\theta}<0.$$

(2)　(1.3)，(1.4)，(1.8) から，$L(o)e^{nt}=\int_{t-\theta}^{t}L_T dT$ がえられる．(1.9) はこの定差方程式の恒常成長解である．前述の体系を構成する方程式に (1.9) を考慮することによって，(1.10)～(1.13) が導かれる．

したがって

$$\frac{\partial Q^*(t)}{\partial s}=\frac{\partial Q^*(t)}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}>0,\quad \frac{\partial K_t^*}{\partial s}=\frac{\partial K_t^*}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}>0,$$

$$\frac{\partial Q_t^*}{\partial s}=\frac{\partial Q_t^*}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}>0,\quad \frac{\partial w^*(t)}{\partial s}=\frac{\partial w^*(t)}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}>0.$$

すなわち，貯蓄増加は，資本設備の経済的廃棄を早めることを通じて，すべての変数の均衡成長解の値を高める．

なお，貯蓄率変化に対する産出量変化の対数的反応は，均衡成長径路において

$$(1.17)\qquad \frac{1}{Q^*(t)}\frac{dQ^*(t)}{ds}=\frac{1}{s}\frac{1\quad D_L^*}{D_L^*}$$

によってあらわされる．ただし D_L^* は均衡成長下の 賃金分前である．なぜならば，(1.16)，(1.11)により

$$(1.18)\qquad \frac{1}{Q^*(t)}\frac{dQ^*(t)}{ds}=\frac{1}{Q^*(t)}\frac{dQ^*(t)}{d\theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}=\frac{1}{s}\left(\frac{n}{\lambda+n}\frac{e^{\lambda\theta^*}-e^{-n\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}-1\right)$$

が導かれるが，他方，賃金分前は

$$(1.19)\qquad D_L^*=\frac{\lambda+n}{n}\frac{e^{-\lambda\theta^*}-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}$$

となり，[8] (1.18)，(1.19)によって(1.17)が成立する．

次に，貯蓄率一定のもとに，技術進歩率や労働供給増加率が変化したとき，θ^* はどような影響をうけるか．(1.14)において，

$$(1.20)\qquad \frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}=\frac{\partial\theta^*}{\partial n}=\frac{1-\{1+(\lambda+n)\theta^*\}e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{(\lambda+n)^2e^{-(\lambda+\ )\theta^*}}>0.$$

したがって，λ または n の高まりは θ^* を高めることがわかる．すなわち，技術進歩の促進や労働供給の増大は資本設備の経済的耐用年限をひきのばすことが明らかになった．

さて，利子率 $r(t)$ の均衡値はどのようにあらわされるか．vintage T の資本財1単位の準地代 $q_T(t)$ は，均衡成長下において

$$q_T^*(t)=\mu\left[1-\frac{w^*(t)}{\lambda_T}\right]$$

---

(3) $D_L(t)=\dfrac{w(t)L(t)}{Q(t)}$ に (1.3)，(1.11)，(1.13)を代入することによって求まる．

によってあらわされる．したがって，競争均衡条件は

$$1=\mu\int_{t}^{t+\theta^*}[1-e^{-\lambda\theta^*}e^{\lambda(t-T)}]e^{-r(t)(T-t)}dT$$

となり，これを展開すれば，$r(t)$ は t に依存しない定数となり，

$$1=\frac{\mu}{r}(1-e^{-r\theta^*})-\frac{\mu}{r-\lambda}(e^{-\lambda\theta^*}-e^{-r\theta^*}). \tag{1.21}$$

(1.21) によって規定される r が θ^* と矛盾なく存在するためにはどのような条件が満されなくてはならないか．(1.21) の右辺を $G(r)$ によってあらわすと，$G(-\infty)=\infty$，$G(\infty)=0$，$G'(r)<0$ ゆえ，5.1図に示されるように，一意的な r^* が存在する．しかし，r^* の正値性は必ずしも保証されない．それでは，r^* の正値を保証する条件はどのようなものか．直ちにわかるように，もし

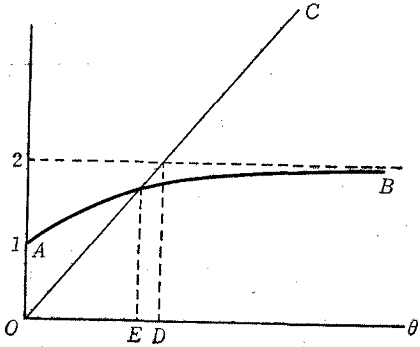
$$\mu\int_{t}^{t+\theta^*}(1-e^{-\lambda(T-t-\theta^*)})dT>1$$

ならば，$r^*>0$．これは，展開して整理することにより，$\lambda\mu\theta^*+e^{-\lambda\theta^*}>2$ をいみする．したがって，もし

$$\theta^*\geqq\frac{2}{\lambda\mu} \tag{1.22}$$

ならば，この条件は満される．[4] そこで，(1.14)を考慮すれば，(1.22)は

(4) これは5.2図によって説明することができる．水平軸に θ をとり，OC直線は $\lambda\mu\theta$ をあらわし，曲線ABは $2-e^{-\lambda\theta}$ をあらわす．そのとき，$\lambda\mu\theta+e^{-\lambda\theta}>2$ という条件は，θ に対応するOC上の点がAB上の点の上に在ることをいみする，そのためには θ がOEより大でなくてはならない．そこで，もし θ がODより大であれば，θ はOEより大である．θ がODより大であるという条件が (1.22) にほかならない．



5.2図

$$(1.23) \qquad s \geqq \frac{\dfrac{\lambda+n}{\mu}}{1-e^{-\frac{\lambda+n}{\lambda}\frac{2}{\mu}}}$$

と同値である．このようにして，非負の均衡利子率の成立を保証するためには，s は(1.15)で示されたような均衡解存在条件 $s\geqq\dfrac{\lambda+n}{\mu}$ では十分でなくなり，更に強い条件として，たとえば(1.23)が成立するときには，均衡成長のみならず，正の均衡利子率の存在が保証されることが明らかになった．

ここで，(1.23)が満されているとして，θ^* と r^* の関係を検討しよう．先に定義したように

$$G(r)=\frac{\mu}{r}-\frac{\mu}{r}\,\frac{re^{-\lambda\theta^*}-\lambda e^{-r\theta^*}}{r-\lambda}$$

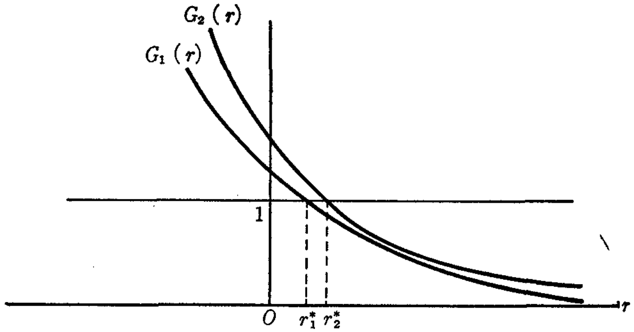
とするとき，

$$(1.24) \qquad \frac{\partial G(r)}{\partial\theta^*}=\lambda\mu\frac{e^{-\lambda\theta^*}-e^{-r\theta^*}}{r-\lambda}\geqq 0.$$

したがって，5.1図において示したように(5)，

$$(1.25) \qquad \frac{\partial r^*}{\partial\theta^*}>0.$$

つまり，資本設備の経済的耐用年限のより大きい均衡成長経路において，均衡利子率はより大である．



5.1図

(5) 5.1図の説明．θ^* の低い場合の $G(r)$ が $G_1(r)$ によって，θ^* の高い場合の $G(r)$ が $G_2(r)$ によって図示されている．(1.24) がいみするように，θ^* の上昇は $G(r)$ を上方へシフトさせる．したがって (1.21) を成立させる r，すなわち $G(r^*)=1$ を満す r^* は，図に示されたように，θ^* の低い場合の方がより大である．つまり $r_2^*>r_1^*$．

このようにして，r^* と θ^* の関係が明らかになれば，パラメーターs，λ，n などの変化が均衡利子率に及ぼす影響を導くことができる．それは次のようにあらわされる．

$$\frac{\partial r^*}{\partial s}=\frac{\partial r^*}{\partial \theta^*}\frac{d\theta^*}{ds}<0,$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial \lambda}=\frac{\partial r^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial \lambda}>0,$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial n}=\frac{\partial r^*}{\partial \theta^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial n}>0.$$

また，均衡賃金水準に対するこれらのパラメーター変化の効果は次のように解析される．[6]

$$\frac{\partial w^*(0)}{\partial s}=\frac{\partial w^*(0)}{\partial \theta^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial s}>0.$$

$$\frac{\partial w^*(0)}{\partial \lambda}=-\lambda_0 e^{\lambda\theta^*}\left(\theta^*+\lambda\frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}\right)<0,$$

$$\frac{\partial w^*(0)}{\partial n}=\frac{\partial w^*(0)}{\partial \theta^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial n}<0.$$

以上により，貯蓄率の上昇は均衡利子率を低め，賃金水準を引上げる．他方，貯蓄性向不変のまま技術進歩率や労働力増加率が高まるときには，均衡利子率は上昇し，賃金水準は下落する．

最後に，最大消費径路に関する黄金律が，このモデルにおいても成立することを導く．

(1.14)，(1.19) より，それぞれ次式がえられる．

$$s=\frac{\lambda+n}{\mu}\frac{1}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}},$$

$$1-D_L{}^*=1-\frac{\lambda+n}{n}\frac{e^{-\lambda\theta^*}-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}.$$

したがって，もし $s=1-D_L{}^*$ ならば，

$$1=\frac{\mu}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})-\frac{\mu}{n}(e^{-\lambda\theta^*}-e^{-(\lambda+n)\theta^*})$$

---

(6)　(1.13) により，$\dfrac{\partial w^*(0)}{\partial\theta^*}=-\lambda\lambda_0 e^{-\lambda\theta^*}<0$ がえられることを考慮すればよい．

が成立する．これに (1.21) を考慮すれば，$r^*=\lambda+n$．また，逆に $r^*=\lambda+n$ を仮定すれば $s=1-D_L^*$ がえられる．

ところで，消費水準 $C(0)$ は，均衡成長下においては，(1.11)，(1.12) により，次のように求まる．

$$C^*(0)=Q^*(0)-K_0^*=\frac{n\lambda_0L(0)}{1-e^{-n\theta^*}}\left(\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{\lambda+n}-\frac{1}{\mu}\right)$$

したがって，$C^*(0)$ 最大の必要条件は次の通りである．

$$0=\frac{\partial C^*(0)}{\partial\theta^*}=n\lambda_0L(0)\left[-\frac{ne^{-n\theta^*}}{(1-e^{-n\theta^*})^2}\left(\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{\lambda+n}-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{1-e^{-n\theta^*}}\right]$$

これを整理すれば，

$$1=\frac{\mu}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})-\frac{\mu}{n}(e^{-\lambda\theta^*}-e^{-(\lambda+n)\theta^*}).$$

これに (1.21) を考慮すれば，$r^*=\lambda+n$.

$r^*=\lambda+n$ が $C^*(0)$ を最大にする十分条件であることは，若干の計算によって確めることができる．[7]

$$\left.\frac{\partial^2C^*(0)}{\partial\theta^{*2}}\right|_{r^*=\lambda+n}=-\frac{n\lambda_0L(0)}{(1-e^{-n\theta^*})^2}\left[\lambda e^{-(\lambda+n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})+4ne^{-(\lambda+2n)\theta^*}\right]<0.$$

§ 2　完全予見と均衡成長

事前的に要素代替の可能な putty-clay モデルにおいて，将来についての予想のちがいは新投資の労働雇用の決定式に反映したが，事前的にも，事後的にも要素結合比率の固定される clay-clay モデルにおいて，将来に対する予

---

(7) その計算は次の通りである．$\left.\frac{\partial^2C^*(0)}{\partial\theta^{2*}}\right|_{r^*=\lambda+n}$

$$=n\lambda_0L(0)\Big[-\frac{-n^2e^{-n\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})^2+2(1-e^{-n\theta^*})(ne^{-n\theta^*})^2}{(1-e^{-n\theta^*})^3}\frac{e^{-\lambda\theta^*}}{n}$$
$$-\frac{ne^{-n\theta^*}}{(1-e^{-n\theta^*})^2}e^{-(\lambda+n)\theta^*}+\frac{-(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})-ne^{-n\theta^*}e^{-(\lambda+n)\theta^*}}{(1-e^{-n\theta^*})^2}\Big]$$
$$=\frac{n\lambda_0L(0)}{(1-e^{-n\theta^*})^3}[ne^{-(\lambda+n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})^2-3ne^{-(\lambda+2n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})$$
$$-(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})^2-ne^{-(\lambda+2n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})]$$
$$=\frac{n\lambda_0L(0)}{(1-e^{-n\theta^*})^2}[-\lambda e^{-(\lambda+n)\theta^*}(1-e^{-n\theta^*})-4ne^{-(\lambda+2n)\theta^*}]$$

想のちがいは行動関係式にどのように反映するか. putty-clay モデルにおいて採択した関係式が結果的に成立するよう, 賃金率が決定されると考えよう. つまり, ゼロ予見の場合, (1.7)によって示されたように, 賃金率が総雇用の限界生産力にひとしくなったのに対し, 完全予見のもとでは, 将来収益の現在価値に対する限界労働の貢献がゼロになるよう賃金決定がなされると考える. したがって, このような予見のちがいにもとづく企業者反応のちがいは, $\theta(t)$, $Q(t)$, K_t, Q_t, L_t などの均衡成長解には影響しない. 賃金, および利子率の均衡成長解にのみ影響を及ぼす.[1]

vintage t の資本財の将来収益の現在価値は

$$V(t)=\int_t^{t+\theta}\left[Q_t-w(t)e^{\lambda(T-t)}L_t\right]e^{-r(t)(T-t)}dT$$

によってあらわされるが, 完全予見のもとでの前述の行動関係式は次のようにあらわされる.

$$0=\frac{dV(t)}{dL_t}=\int_t^{t+\theta}\left[\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}-w(t)\,e^{\lambda(T-t)}\right]e^{-r(t)(T-t)}dT \tag{2.1}$$

これを解けば,

$$w(t)=\frac{r(t)-\lambda}{r(t)}\,\frac{1-e^{-r(t)\theta}}{1-e^{-(r(t)-\lambda)\theta}}\,\lambda_0e^{\lambda t}. \tag{2.2}$$

したがって$w(t)$は, $r(t)$ が決定されないかぎり, 決定しない, それでは $r(t)$ はどのように決定されるか.

競争均衡の条件は $V(t)=K_t$ によってあらわされる. よって, $\dfrac{dV(t)}{dK_t}=1.$ したがって

$$\int_t^{t+\theta}\frac{d(Q_t-w(t)\,e^{\lambda(T-t)}L_t)}{dK_t}e^{-r(t)(T-t)}dT=1. \tag{2.3}$$

ところが

$$\begin{aligned}\frac{d}{dK_t}(Q_t-w(t)e^{\lambda(T-t)}L_t)&=\frac{\partial Q_t}{\partial K_t}+\left(\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}-w(t)e^{\lambda(T-t)}\right)\frac{dL_t}{dK_t}\\&=\mu+\left(\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}-w(t)e^{\lambda(T-t)}\right)\frac{\mu}{\lambda_t}\end{aligned}$$

---

(1) putty-clay モデルにおいて, 完全予想の導入が r, θ, b の相互依存をもたらし, すべての変数の均衡成長解に影響したのと対象的である.

ゆえ，これを(2.3)に代入して，整理すれば

$$\mu\int_t^{t+\theta} e^{-r(t)(T-t)}dT+\frac{\mu}{\lambda_t}\int_t^{t+\theta}\left(\frac{\partial Q_t}{\partial L_t}-w(t)\,e^{\lambda(T-t)}\right)e^{-r(t)(T-t)}dT=1.$$

これに(2.1)を考慮すれば，左辺第2項がゼロとなるので，結局

$$\mu\,\frac{1-e^{-r(t)\theta}}{r(t)}=1 \qquad (2.4)$$

が成立する．これが均衡利子率 $r(t)$の決定式である．直ちに明らかなように $r(t)$は t に依存しない．以下，それを単に r^* であらわす．

(2.4)を(2.2)に代入すれば，賃金率の均衡成長解がえられる．

$$w^*(t)=\frac{\lambda^0}{\mu}\,\frac{r^*-\lambda}{1-e^{-(r^*-\lambda)\theta^*}}\,e^{\lambda t} \qquad (2.5)$$

均衡利子率 r^* は，(2.4)によれば，μ，θ^* に依存するが，θ^*は，(1.14)に示されたように，λ，n，μ，s に依存して決定される．そこで，この均衡利子率の正値性は保証されているであろうか，検討しよう．いま

$$H(r,\ \theta)\equiv\mu\frac{1-e^{-r\theta}}{r}$$

と定義する．そのとき，

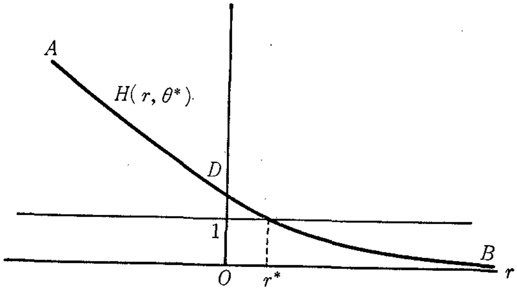
$$\frac{\partial H(r,\ \theta)}{\partial r}=\mu\frac{(1+r\theta)e^{-r\theta}-1}{r^2}<0.$$

さらに，$\lim\limits_{r\to\infty} H(r,\ \bar\theta)=0$，$\lim\limits_{r\to-\infty} H(r,\ \bar\theta)$，$\lim\limits_{r\to 0} H(r,\ \bar\theta)=\mu\bar\theta$.(2) これらを考慮して，均衡利子率の決定を図示すれば，5.3図のようになる．r を水平軸にとり，$H(r,\ \theta)$を垂直軸にとれば，θ^* を与えたときの $H(r,\ \theta^*)$は，曲線 AB のようにあらわされる．(2.4)の指示にしたがい，均衡利子率は r^* にきまる．したがって，もし $H(r,\ \theta^*)$ の垂直軸切片 OD が1より大であれば，r^* は正である．ところが，OD は $\mu\theta^*$ という値であるから，r^* の正値性を保証する必要十分条件は

$$\mu\theta^*>1. \qquad (2.6)$$

---

(2) テーラー展開により，$H(r,\theta)=\mu(\theta-\frac{\theta^2}{2!}r+\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{\theta^n}{n!}r^{n-1}+\cdots\cdots)$ とあらわされることに注意すれば，これらは直ちにしたがう．



5.3 図

ところが，(1.15)が満されていりかぎり，(1.14)により，(2.6) は常に満されることがわかる．実際，(1.15)が満されているとき，(1.14),(2.6)により

$$\mu\theta^* = -\frac{\mu}{\lambda+n}\log\left(1-\frac{\lambda+n}{s\mu}\right) > 1$$

が成立しなければならないが，これは

$$\frac{\lambda+n}{s\mu} + e^{-\frac{\lambda+n}{\mu}} > 1 \tag{2.7}$$

をいみする．$0<s<1$ を考慮すれば，(2.7) は常に満されている．[(3)] このようにして，ゼロ予見のもとでは均衡利子率の正値性は必ずしも保証されなかったのに対し，完全予見のもとでは θ^* の正値性条件が満されている限り，正の均衡利子率が成立することが明らかになった．

さて，パラメーター s, λ, n などの変化は r^* にどのような影響を及ぼすか．(2.4)により

$$\frac{dr^*}{d\theta^*} = \frac{r^* e^{-r^*\theta^*}}{\dfrac{1}{\mu} - \theta^* e^{-r^*\theta^*}} > \frac{r^* e^{-r^*\theta^*}}{\theta^*(1-e^{-r^*\theta^*})} > 0 \tag{2.8}$$

がえられる．したがって，(1.16)を考慮するならば，

$$\frac{dr^*}{ds} = \frac{dr^*}{d\theta^*}\frac{d\theta^*}{ds} < 0.$$

---

(3) $F(x) \equiv \frac{1}{s}x + e^{-x}$ と定義するとき，$F(0)=1$，$F'(x) = \frac{1}{s} - e^{-x} > 0$ ($x>0$ に対して)．$x = \frac{\lambda+n}{\mu}$ とおけば (2.7) が明らかである．

すなわち，貯蓄率の上昇は均衡利子率を低める．同様にして，$\dfrac{dr^*}{d\lambda}>0$，および$\dfrac{dr^*}{dn}>0$．技術進歩の促進や人口増加率の上昇は均衡利子率を高める働らきをもっている．これらの結果は，ゼロ予見の場合と同一である．

最後に，賃金水準の決定因について検討する．(2.5)は次のようにあらわされる．

$$w^*(0)=\frac{\lambda_0}{\mu}\psi(r^*,\ \theta^*), \tag{2.5a}$$

ただし，

$$\psi(r,\ \theta)=\frac{r-\lambda}{1-e^{-(r-\lambda)\theta}} \tag{2.9}$$

とする．したがって

$$\frac{d\psi(r,\ \theta)}{d\theta}=\frac{\partial\psi(r,\ \theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi(r,\ \theta)}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}. \tag{2.10}$$

(2.10)の右辺第一項はθ変化の賃金に対する直接的影響をあらわし，第二項はrに対する影響を媒介とする間接的影響をあらわす．

(2.9)において，直ちに次式が導かれる．

$$\frac{\partial\psi(r^*,\theta^*)}{\partial\theta^*}=-\frac{(r^*-\lambda)^2e^{-(r^*-\lambda)\theta^*}}{(1-e^{-(r^*-\lambda)\theta^*})^2}<0$$

$$\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial r^*}=\frac{1-\{1+(r^*-\lambda)\theta^*\}e^{-(r^*-\lambda)\theta^*}}{(1-e^{-(r^*-\lambda)\theta^*})^2}>0$$

ところが，(2.8)より$\dfrac{dr^*}{d\theta^*}>0$ゆえ，

$$\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial r^*}\frac{dr^*}{d\theta^*}>0.$$

ゼロ予見のもとでは直接的影響だけが存在した．(4) したがって，貯蓄増加は賃金上昇をもたらした．ところが完全予見のもとでは，直接的影響と間接的影響は反対方向に働らく．すなわち，貯蓄増加は資本設備の経済的耐用年限を短

(4) p. 127参照.

縮することを通じての直接的効果として賃金上昇を惹き起す一方，経済的耐用年限の短縮が均衡利子率の下落を通じて賃金下落を惹き起す．純効果は両影響力の相対的強度に依存する．

さらに，技術進歩や労働供給の変化の賃金水準に及ぼす影響は

$$\frac{\partial w^*(0)}{\partial n}=\frac{\lambda_0}{\mu}\left(\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial\theta^*}+\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial r^*}\frac{dr^*}{d\theta^*}\right)\frac{\partial\theta^*}{\partial n},$$

$$\frac{\partial w^*(0)}{\partial\lambda}=\frac{\lambda_0}{\mu}\left[\left(\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial\theta^*}+\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial r^*}\frac{dr^*}{d\theta^*}\right)\frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}+\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial\lambda}\right]$$

によってあらわされる．ところで，

$$\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial\lambda}=\frac{[1+(r^*-\lambda)\theta^*]\,e^{-(r^*-\lambda)\theta^*}-1}{(1-e^{-(r^*-\lambda)\theta^*})^2}<0.$$

また，(1.20)により，$\frac{\partial\theta^*}{\partial n}>0$, $\frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}>0$．したがって，$\theta$ 変化の間接的効果が直接的効果より小さい場合，すなわち $\left|\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial r^*}\frac{dr^*}{d\theta^*}\right|<\left|\frac{\partial\psi(r^*,\ \theta^*)}{\partial\theta^*}\right|$ のときには，$\frac{\partial w^*(0)}{\partial n}<0$, $\frac{\partial w^*(0)}{\partial\lambda}<0$ が成立する．つまり，ゼロ予見の場合と同一結果となる．

§3　均衡成長の安定分析

§1において，条件(1.15)が満されているときには，体系の均衡成長解が存在することが示された．そして，θ が(1.14)であらわされるような値を示すとき，他の諸変数の均衡成長解は諸パラメーター，および θ によってあらわされることが明らかになった．したがって，体系の一般解が時間の経過につれてその均衡成長解に収束してゆくかどうかという安定問題は，$\theta(t)$ の一般解が $\theta(t)$ の均衡成長解 θ^* に収束するかどうかの問題に帰着する．そこで，以下においてその検討をおこなう．(1)

まず，新しい集約変数 $h(t)$ を次のように定義する．

(1) 安定性の証明の手法は Solow, Tobin, von Weizsäcker and Yaari [54] (pp. 89—98) にもとづく．

$$h(t)\equiv\frac{K_t}{e^{\lambda t}L(t)} \tag{3.1}$$

そうすると，完全雇用の条件(1.4)は

$$1=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_{t-\theta(t)}^{t}e^{-n(t-T)}h(T)dT \tag{3.2}$$

のようにあらわされる．他方，(1.5)，(1.6)，(3.1)により，貯蓄・投資均等条件は

$$h(t)=s\mu\int_{t-\theta(t)}^{t}e^{-(\lambda+n)(t-T)}h(T)dT \tag{3.3}$$

となる．(3.2)と(3.3)が§1のモデルの，いわば，縮約形である．なお，(3.2)，(3.3)は次のように書きかえることができる．

$$1=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_{0}^{\theta(t)}e^{-nT}h(t-T)dT, \tag{3.2 a}$$

$$h\,(t)=s\mu\int_{0}^{\theta(t)}e^{-(\lambda+n)T}h(t-T)dT. \tag{3.3 a}$$

この縮約モデルの均衡成長解は次のようにあらわされる．

$$\theta^*=-\frac{1}{\lambda+n}\log\left(1-\frac{\lambda+n}{s\mu}\right) \tag{3.4}$$

$$h^*=\frac{n\lambda_0}{\mu(1-e^{-n\theta^*})} \tag{3.5}$$

注意すべきは，(3.2a)，(3.3a)において，$h(t)$ が h^* に収束するならば，$\theta(t)$ は θ^* に収束するということである．したがって，体系の安定性の検討は $h(t)$ が h^* に収束するかどうかの検討に帰着する．

(3.2a)，(3.3a)は微分可能であるから(2)，これらを t について微分して，整理すれば，

$$h(t)-\frac{n\lambda_0}{\mu}+e^{-n\theta(t)}h(t-\theta(t))(\dot{\theta}(t)-1)=0 \tag{3.6}$$

$$\dot{h}(t)=(s\mu-\lambda-n)h(t)+s\mu e^{-(\lambda+n)\theta(t)}h(t-\theta(t))(\dot{\theta}(t)-1) \tag{3.7}$$

---

(2) その証明は Solow, Tobin, von Weizsäcker and Yaari〔54〕(p. 91) 参照．

が導かれる.[3] これらより$h(t-\theta(t))(\dot{\theta}(t)-1)$を消去すれば,

$$(3.8)\qquad \dot{h}(t)=(s\mu-\lambda-n)h(t)-(s\mu h(t)-sn\lambda_0)e^{-\lambda\theta(t)}.$$

これが体系の時間径路を規定する微分方程式である.

ところで,(3.4),(3.5)により

$$s\mu-(\lambda+n)=s\mu\left(1-\frac{n\lambda_0}{h^*\mu}\right)e^{-\lambda\theta^*}$$

がえられるので,これを(3.8)に代入して,整理すれば

$$(3.9)\qquad \dot{h}(t)=s\mu h(t)\left[e^{-\lambda\theta^*}\left(1-\frac{n\lambda_0}{h^*\mu}\right)-e^{-\lambda\theta(t)}\left(1-\frac{n\lambda_0}{h(t)\mu}\right)\right]$$

が導かれる.したがって次のような関係が成立する.

$$\theta(t)\geqq\theta^*,\ h(t)\leqq h^* \text{ ならば},\ \dot{h}(t)\geqq 0,$$

$$\theta(t)\leqq\theta^*,\ h(t)\geqq h^* \text{ ならば},\ \dot{h}(t)\leqq 0.$$

さて,愈々安定分析をおこなう段階に達した.均衡成長解の存在を保証するため,$s\mu\geqq\lambda+n$ が仮定されているので,安定分析は $s\mu=\lambda+n$ の場合と,$s\mu>\lambda+n$ の場合に分けておこなう.

i) $s\mu=\lambda+n$ の場合.

この場合,基本方程式(3.8)は

$$(3.8\,a)\qquad \dot{h}(t)=(n\lambda_0-\mu h(t))se^{-\lambda\theta(t)}$$

となる.[4] そして次の関係が成立する.

$$h(t)\lesseqgtr\frac{n\lambda_0}{\mu} \text{ ならば},\ \dot{h}(t)\gtreqless 0 \text{ (不等号同順)}.$$

---

(3) (3.6) は次のようにして導き出される.(3.2 a) を t について微分し,$\dfrac{\partial h(t-T)}{\partial t}=-\dfrac{\partial h(t-T)}{\partial T}$ を考慮すれば,$0=-\int_0^{\theta(t)}e^{-nT}\dfrac{\partial h(t-T)}{\partial T}dT+e^{-n\theta(t)}\,h(t-\theta(t))\dot{\theta}(t)$.したがって $0=-\left[e^{-nT}h(t-T)\right]_0^{\theta(t)}-\int_0^{\theta(t)}ne^{-nT}\,h\,(t-T)\,dT+e^{-n\theta(t)}\times h(t-\theta(t))\dot{\theta}(t)$.ところが,右辺第二項は,(3.2 a) により,$-\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ となる.これを代入して,展開すれば (3.6) がえられる.(3.7) も同様の手法によって (3.3a) より導かれる.

(4) この場合,$\theta^*=\infty$,$h^*=\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$

$$h(0) \gtreqless \frac{n\lambda_0}{\mu} \text{ ならば, } h(t) \gtreqless \frac{n\lambda_0}{\mu} \text{ (不等号同順).}$$

いずれの場合も，$h(t)$は単調で有界，したがって収束する．その極限をδであらわす．他方，関数Hを

$$H(t) \equiv s\mu \int_{-\infty}^{t} e^{-(\lambda+n)(t-T)} h(T)\,dT \tag{3.10}$$

と定義する．もちろん，$H(t) \geqq 0$．そのとき，

$$\dot{H}(t) = s\mu h(t) - (\lambda+n)H(t) = (\lambda+n)(h(t) - H(t)) \leqq 0.$$

したがって$H(0) < +\infty$を仮定するならば，$\lim_{t\to\infty} H(t)$は存在する．それをdとする．また

$$\lim_{t\to\infty} \dot{H}(t) = (\lambda+n) \lim_{t\to\infty}(h(t) - H(t)) = (\lambda+n)(\delta - d).$$

すなわち$\dot{H}(t)$は収束する．ところが，$H(t)$が収束するのであるから，$\lim_{t\to\infty} \dot{H}(t) = 0$でなくてはならない．したがって$\delta = d$，すなわち

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} H(t). \tag{3.11}$$

そこで，(3.3)，(3.10)，(3.11)により，$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty = \theta^*$.

次に，任意の$\varepsilon > 0$について，vを次のように定義する．

$$\varepsilon = s\mu \int_{v}^{\infty} e^{-nT} dT = \frac{s\mu}{n} e^{-nv}$$

そのとき，(3.2 a)より

$$1 - \varepsilon = \frac{\mu}{\lambda_0} \int_0^v e^{-nT} h(t-T)\,dT + \frac{\mu}{\lambda_0} \int_v^{\theta(t)} e^{-nT} h(t-T)\,dT - s\mu \int_v^{\infty} e^{-nT} dT,$$

他方，(3.3 a)，(3.2 a)により

$$h(t) = s\mu \int_{t-\theta(t)}^{t} e^{-(\lambda+n)(t-T)} h(t-T)\,dT \leqq s\mu \int_{t-\theta(t)}^{t} e^{-n(t-T)} h(t-T)\,dT = s\lambda_0.$$

したがって，次の関係が成立する．

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leqq \frac{\mu}{\lambda_0} \int_0^v e^{-nT} h(t-T)\,dT + s\mu \int_v^{\theta(t)} e^{-nT} dT - s\mu \int_v^{\infty} e^{-nT} dT \\ &\leqq \frac{\mu}{\lambda_0} \int_0^v e^{-nT} h(t-T)\,dT \end{aligned} \tag{3.12}$$

また，tを十分大きくとれば

$$(3.13)\qquad \frac{\mu}{\lambda_0}\int_0^v e^{-nT}h(t-T)dT \leqq 1$$

が成り立つ.[(5)] (3.12), (3.13)により

$$1-\varepsilon \leqq \frac{\mu}{\lambda_0}\int_0^v e^{-nT}h(t-T)dT \leqq 1.$$

そこで, $t\to\infty$ とすれば

$$1-\varepsilon \leqq \frac{\mu\delta}{n\lambda_0}(1-e^{-nT}) \leqq 1.$$

したがって,

$$1-\varepsilon \leqq \delta\left(\frac{\mu}{n\lambda_0}-\frac{\varepsilon}{s\lambda_0}\right) \leqq 1.$$

ε は任意であるから, $\delta=\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ でなくてはならない. このようにして, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=\dfrac{n\lambda_0}{\mu}=h^*$ が証明された.[(6)]

ii) $s\mu>\lambda+n$ の場合

(3.5) において $h^*>\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ となるが, $h(t)$について

$$(3.14)\qquad h(t) \geqq \frac{n\lambda_0}{\mu} \qquad (\text{すべての } t\geqq t_0 \text{ に対して})$$

となるような t_0 が存在することを導く.

もし $h(t)\leqq\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ ならば, (3.8)により, $\dot{h}(t)>0$. したがって$h(t_0)\geqq\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ となるような t_0 が存在するならば, すべての $t\geqq t_0$ について $h(t)\geqq\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$. また, すべての $t\geqq 0$ について $h(t)<\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ ということはない. なぜならば, い

---

(5) (3.2 a) は次のように書きかえられる. $\dfrac{\mu}{\lambda_0}\displaystyle\int_0^v e^{-nT}h(t-T)dT=1-\frac{\mu}{\lambda_0}\int_v^{\theta(t)} e^{-nT}h(t-T)dT$. t を充分大きくとって, $\theta(t)>v$ とすることができる (なぜならば $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=\infty$ ゆえ). したがって (3.13) 成立.

(6) $n>0$ が仮定されているが, $n=0$ の場合については, 議論を若干修正するだけで, 安定性は容易に導かれる. Solow, Tobin, von Weizsäcker and Yaari[54] (p. 94) 参照.

ま，すべての $t \geqq 0$ について $h(t) < \frac{n\lambda_0}{\mu}$ となると仮定すると，(3.8) により $\dot{h}(t) > 0$（すべての t に対して）．また，同じ仮定により，(3.6) より $1-\dot{\theta}(t) = \frac{d(t-\theta(t))}{dt} < 0$ が成立する．したがって(3.2)において，$\dot{h}(t) > 0$，および $\frac{d(t-\theta(t))}{dt} < 0$ を考慮すれば，$h(t)$ が収束することがわかる．その極限を δ とすると

$$h(t) < \delta \leqq \frac{n\lambda_0}{\mu} \qquad (\text{すべての } t \text{ について}).$$

これを(3.2 a)に代入すれば

$$1 < \frac{\mu\delta}{\lambda_0 n}(1-e^{-n\theta(t)}) \leqq 1-e^{-n\theta(t)}.$$

すなわち $e^{-n\theta(t)} < 0$ でなくてはならない．しかしこれは不可能である．よって，$h(t_0) \geqq \frac{n\lambda_0}{\mu}$ となるような t_0 が存在しなければならない．

次に

(3.15) $\qquad s\mu > \lambda + n$ ならば，$\lim_{t\to\infty} (t-\theta(t)) = \infty$

となることを導く．

(3.6)，(3.14)により

$$1-\dot{\theta}(t) = \frac{d(t-\theta(t))}{dt} \geqq 0 \qquad (\text{すべての } t \geqq t_0 \text{ について})$$

が成立つが，(3.6)の変形

$$e^{n(t-\theta(t))}h(t-\theta(t))\frac{d(t-\theta(t))}{dt} = \left(h(t) - \frac{\lambda_0 n}{\mu}\right)e^{nt}$$

において，もし $t\to\infty$ のとき $\lim_{t\to\infty}(t-\theta(t)) < \infty$ と仮定すれば，左辺は収束する．したがって右辺は収束しなければならない．すなわち

$$\lim_{t\to\infty}\left(h(t) - \frac{\lambda_0 n}{\mu}\right)e^{nt} < \infty.$$

しかし，そのためには $\lim_{t\to\infty} \dot{h}(t) = 0$ でなければならない．他方，$\lim_{t\to\infty} (t-\theta(t)) < \infty$ の仮定により，$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$．したがって，(3.8)により

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}=s\mu-(\lambda+n)>0.$$

そこで，(3.14)により$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)\neq 0$ を考慮すれば，$\lim\limits_{t\to\infty}\dot{h}(t)\neq 0$．これは前述に矛盾する．よって $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\theta(t))=\infty$ でなくてはならない．以上により，(3.14)において，すべての $t\geqq t_0$ について $h(t)\geqq\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$ となるような t_0 が存在し，したがって (3.6) により，t_0 時以後の t に対しては $\dfrac{d(t-\theta(t))}{dt}>0$，換言すれば，$t-\theta(t)$は時間の経過とともに大きくなってゆく．しかも(3.15)の示すように，それはいくらでも大きくなってゆく．そこで，$[t_0,\ \infty)$ を継起的区間$[t_{n-1},\ t_n)(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$に分割する．ただし，$t_n=t_{n-1}+\theta(t_n)$とする．そのとき，$h(t)$および$\theta(t)$の時間径路を，$[t_{n-1},\ t_n)$ の区間において継起的に観察することによって，それの均衡成長径路への収束性を導くことができる．

まず

(3.16) $$\limsup_{t\to\infty} h(t)\leqq h^*$$

を明らかにする．

(3.2)，(3.3)により

$$h(t)=s\mu\int_{t-\theta(t)}^{t}e^{-(\lambda+n)(t-T)}h(T)dT\leqq s\mu\int_{t-\theta(t)}^{t}e^{-n(t-T)}h(T)dT=s\lambda_0.$$

そこで $s\lambda_0=a_0$ とおくと，すべての $t\geqq 0$ に対して，$h(t)\leqq a_0$．そのとき

(3.17) $$h(t)\leqq a_n<a_{n-1} \qquad (\text{すべての } t\geqq t_n \text{ について})$$

を満すような減小数列 $\{a_i\}$ を作ることができる．[7] 以下，それを導く．そのためには

(3.18) $$h(t)\leqq a_{n-1} \qquad (\text{すべての } t\geqq t_{n-1} \text{ に対し})$$

を満す a_{n-1} が存在すると仮定したとき，t を固定して，$a_n<a_{n-1}$，かつ $h(t)\leqq a_n$ となるような a_n が存在することを導けばよい．

(3.18) は

$$h(t-T)\leqq a_{n-1} \quad (\text{すべての } 0\leqq T\leqq\theta(t) \text{ に対して})$$

をいみする．そこで，$\varphi(T)=h(t-T)e^{-nT}$ とおいて，次のような問題を設定

(7) (3.17) が成立すれば当然，$h(t)\leqq a_i$ (すべての $t\geqq t_i$ について)．

する．

$[0,\ \theta(t)]$ のうえで定義された実数値関数 φ であって

$$0 \leqq \varphi(T) \leqq a_{n-1}e^{-nT}$$

$$1=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_0^{\theta(t)} \varphi(T)\,dT$$

を満すものについて

$$\underset{\varphi}{\mathrm{Max}}\ J(\varphi)=s\mu\int_0^{\theta(t)} e^{-\lambda T}\varphi(T)dT$$

を求めよ．

その解は次の通りである．$\underset{\varphi}{\mathrm{Max}}\ J(\varphi)=J(\varphi^*)$ とすると，

$$\begin{aligned} \varphi^*(T) &= a_{n-1}e^{-nT} && (0 \leqq T < v), \\ &= 0 && (v \leqq T \leqq \theta(t)). \end{aligned}$$

ただし

$$1=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_0^{v} a_{n-1}e^{-nT}dT=\frac{\mu}{\lambda_0 n}(1-e^{-nv})a_{n-1}$$

とする．したがって

$$J(\varphi^*)=\frac{s\mu a_{n-1}}{\lambda+n}\left[1-\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu a_{n-1}}\right)^{\frac{\lambda+n}{n}}\right] \tag{3.19}$$

が成立する．[8] (3.19)の右辺を a_n とすると，

$$a_n \geqq s\mu\int_0^{\theta(t)} e^{-\lambda T}\varphi(T)\,dT \geqq s\mu\int_0^{\theta(t)} e^{-(\lambda+n)T}h(t-T)dT = h(t).$$

さらに，(3.19)の変形

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{s\mu}{\lambda+n}\left[1-\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu a_{n-1}}\right)^{\frac{\lambda+n}{n}}\right]$$

において，$a_{n-1} > h^*$ とすれば[9]，(3.4)，(3.5)を考慮して

---

(8) $J(\varphi^*)=s\mu\int_0^{v} e^{-(\lambda+n)T}a_{n-1}dT=\frac{s\mu a_{n-1}}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)v})$ において，$e^{-v}=\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$ なることを考慮すれば，(3.19) が導かれる．

(9) $a_{n-1} \leqq h^*$ ならば証明すべきことはなくなる．

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{s\mu}{\lambda+n}\left[1-\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu h^*}\right)^{\frac{\lambda+n}{n}}\right]=\frac{s\mu}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta^*})=1$$

がえられる．これより $a_n<a_{n-1}$.

以上により，減小数列 $\{a_i\}$ $(i=0,1,\cdots\cdots\cdots)$ がえられたが， $\lim_{i\to\infty} a_i=h^*$(10) を考慮するならば，(3.16)の成立が導かれる．

次に

(3.20) $$\liminf_{t\to\infty} h(t)\geqq h^*$$

を導く．

$c_0=\dfrac{n\lambda_0}{\mu}$とおけば，(3.14)において，すべての $t\geqq t_0$ に対して，$h(t)\geqq c_0$ が成立する．そのとき

(3.21) $$h(t)\geqq c_n>c_{n-1} \qquad (\text{すべての } t\geqq t_n \text{ について})$$

を満すような増加数列 $\{c_i\}$ $(i=0,1,\cdots\cdots\cdots)$ を作ることができる．実際，

(3.22) $$h(t)\geqq c_{n-1}$$

となるような c_{n-1} が存在したとするならば，(3.2a)，(3.22)により

(3.23) $$\theta(t)\leqq-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu c_{n-1}}\right)$$

がえられる．(11) 他方，(3.17)，(3.22)により

$$c_{n-1}\leqq h(t-T)\leqq a_0=s\lambda_0 \qquad (T\in[0,\ \theta(t)]\text{に対し}).$$

そこで $\varphi(T)=h(t-T)e^{-nT}$ とおいて，

$$c_{n-1}e^{-nT}\leqq\varphi(T)\leqq s\lambda_0 e^{-nT}$$

$$1=\frac{\mu}{\lambda_0}\int_0^{\theta(t)}\varphi(T)\,dT$$

という条件のもとで

$$\underset{\varphi}{\mathrm{Min}}\ J(\varphi)=s\mu\int_0^{\theta(t)}e^{-\lambda T}\varphi(T)dT$$

を求めるという問題を設定する．

---

(10) (3.20) に関して $a_n=a_{n-1}$ とおき，方程式を解けば求まる．

(11) $\displaystyle\int_0^{\theta(t)} c_{n-1}e^{-nT}dT\leqq\frac{\lambda_0}{\mu}$ を解いて，整理すれば求まる．

$\underset{\varphi}{\mathrm{Min}}\ J(\varphi)=J(\varphi^{**})$とすると

$$\varphi^{**}(T)=c_{n-1}e^{-nT} \qquad (0\leqq T<v),$$
$$=s\lambda_0 e^{-nT} \qquad (v\leqq T\leqq\theta(t)).$$

ただし，v は

$$\int_0^v c_{n-1}e^{-nT}dT+\int_v^{\theta(t)} s\lambda_0 e^{-nT}d\,T=\frac{\lambda_0}{\mu}$$

を満すものとする．これは

$$\frac{1}{n}[c_{n-1}+(s\lambda_0-c_{n-1})e^{-nv}-s\lambda_0 e^{-n\theta(t)}]=\frac{\lambda_0}{\mu}$$

のようにあらわされるので，

$$(3.24) \qquad \frac{dv}{d\theta(t)}=\frac{s\lambda_0 e^{-n(\theta(t)-v)}}{s\lambda_0-c_{n-1}}.$$

ところで

$$J(\varphi^{**})=\frac{s\mu}{\lambda+n}[c_{n-1}+(s\lambda_0-c_{n-1})e^{-(\lambda+n)v}-s\lambda_0 e^{-(\lambda+n)\theta(t)}]$$

ゆえ，これを $\theta(t)$ で微分し，(3.24)を考慮すれば，

$$\frac{dJ(\varphi^{**})}{d\theta(t)}=\frac{s\mu}{\lambda+n}\Big[-(\lambda+n)(s\lambda_0-c_{n-1})e^{-(\lambda+n)v}\frac{dv}{d\theta(t)}+s\lambda_0(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta(t)}\Big]$$
$$=s^2\mu\lambda_0 e^{-n\theta(t)}(e^{-\lambda\theta(t)}-e^{-\lambda v})\leqq 0.$$

これは，$\theta(t)$ が大きいほど$J(\varphi^{**})$は小さいことをあらわす．そこで，(3.23)を考慮して

$$\theta(t)=-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu c_{n-1}}\right)$$

とおき，これを $J(\varphi^{**})$ に代入し，v を $\theta(t)$ におきかえるならば，

$$J(\varphi^{**})\geqq\frac{s\mu c_{n-1}}{\lambda+n}[1-e^{-(\lambda+n)\theta(t)}]=\frac{s\mu c_{n-1}}{\lambda+n}\left[1-\left\{1-\frac{\lambda_0 n}{\mu c_{n-1}}\right\}^{\frac{\lambda+n}{n}}\right]$$

がえられる．この最右項を c_n と定義すれば，

$$h(t)\geqq J(\varphi^{**})\geqq c_n$$
$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{s\mu}{\lambda+n}\left[1-\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu c_{n-1}}\right)^{\frac{\lambda+n}{n}}\right]$$

が成立つ．ところが，(3.4)，(3.5)により，

$$\frac{s\mu}{\lambda+n}\left[1-\left(1-\frac{\lambda_0 n}{\mu h^*}\right)^{\frac{\lambda+n}{n}}\right]=1.$$

そこで，$c_{n-1}<h^*$ とすれば[12]，$c_n>c_{n-1}$ が導かれる．

以上により増加数列 $\{c_i\}$ $(i=0,1,\cdots\cdots\cdots)$がえられた．前述と同様にして，(3.20)が成立する．

(3.16)と(3.20)によって，$\lim_{t\to\infty} h(t)=h^*$，したがって，$\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\theta^*$．ここに，体系の安定性が証明された．

§4　二部門成長モデルの場合

1　モデル　下つき添字の1によって資本財生産部門，2によって消費財生産部門をあらわす．$k_i(t)$ を t 時におけるそれぞれの部門の新機械投入量とし，$l_i(t)$ を $k_i(t)$ と組合される労働量とする．事前的にも，事後的にも，要素代替が不能な場合，資本が有効に利用されているときのそれぞれの部門における vintage t の個別的生産関数は

(4.1)　$$k(t)=\lambda_1(t)l_1(t)=\mu_1(t)k_1(t)$$

(4.2)　$$c(t)=\lambda_2(t)l_2(t)=\mu_2(t)k_2(t)$$

によってあらわされる．$k(t)$ は資本財部門における vintage t の機械の粗産出率，$c(t)$ は消費財部門における vintage t の機械の粗産出率である．$\lambda_i(t)$ は vintage t の資本財のそれぞれの部門における技術的労働生産性，$\mu_i(t)$ は vintage t の資本財のそれぞれの部門における技術的生産性とする．そこで，技術進歩の Harrod 中立性と，技術進歩率の部門間均等を仮定するならば[1]，

(4.3)　$$\lambda_i(t)=\lambda_i(0)e^{\lambda t}\qquad (i=1,\ 2),$$

(4.4)　$$\mu_i(t)=\mu_i\qquad (i=1,\ 2).$$

(4.1)～(4.4) によって

(4.5)　$$l_i(t)=\frac{\mu_i}{\lambda_i(0)}\,e^{-\lambda t}k_i(t)\qquad (i=1,\ 2)$$

---

(12)　$c_{n-1}\geqq h^*$ の場合は証明すべきことなし．

(1)　この仮定をおかないとき 均衡成長が 不可能となることは putty-clay 一般モデルの場合と同様である．

がえられる．これが各部門の新機械のもたらす労働需要である．総労働供給は

(4.6) $$L(t)=L(0)e^{nt}$$

によってあらわされるので，完全雇用の条件は次式のようにあらわされる．[(2)]

(4.7) $$L(0)e^{nt}=\int_{t-\theta_1(t)}^{t} l_1(T)dT+\int_{t-\theta_2(t)}^{t} l_2(T)dT.$$

$\theta_i(t)$ はそれぞれの部門において t 時に使用される資本財の最高年令とする．

また，資本財部門総産出高 $I(t)$，消費財部門総産出高 $C(t)$ および総産出 $Y(t)$ は，それぞれ，次のようにあらわされる．

(4.8) $$I(t)=\int_{t-\theta_1(t)}^{t} \lambda_1(0)e^{\lambda T}l_1(T)dT=\int_{t-\theta_1(t)}^{t} \mu_1 k_1(T)dT$$

(4.9) $$C(t)=\int_{t-\theta_2(t)}^{t} \lambda_2(0)e^{\lambda T}l_2(T)dT=\int_{t-\theta_2(t)}^{t} \mu_2 k_2(T)dT$$

(4.10) $$Y(t)=C(t)+p(t)I(t)$$

ただし，$p(t)$ は消費財であらわした資本財価格とする．

貯蓄・投資均等条件，および新資本財部門間配分条件は次の通りである．

(4.11) $$sY(t)=p(t)I(t)$$

(4.12) $$I(t)=k_1(t)+k_2(t)$$

賃金率は，それぞれの部門における雇用労働の限界生産物価値にひとしくなるよう決定されるとする（ゼロ予見下の最適条件）ならば[(3)]，

---

(2) 過剰労働のケースが排除されているので，すべての t について $\int_{-\infty}^{t}\frac{\mu_1}{\lambda_1(0)}e^{-\lambda T}k_1(T)dT+\int_{-\infty}^{t}\frac{\mu_2}{\lambda_2(0)}e^{-\lambda T}k_2(T)dT>L(t)$ が成立している．

(3) clay-clay モデルにおいて労働の限界生産物というとき，それは Extensive marginal productivity of labour を指す．(4.13) は次のようにして求められる．$L(t)$ のうち，それぞれの部門に配分される労働量を $L_i(t)=\int_{t-\theta_i(t)}^{t} l_i(T)dT$ $(i=1,2)$ とするとき，$\frac{\partial L_i(t)}{\partial\theta_i(t)}=l_i(t-\theta_i(t))$．他方，(4.8)，(4.9) において，$\frac{\partial I(t)}{\partial\theta_1(t)}=\mu_1 k_1(t-\theta_1(t))$，$\frac{\partial C(t)}{\partial\theta_2(t)}=\mu_2 k_2(t-\theta_2(t))$．したがって，$\frac{\partial I(t)}{\partial L_1(t)}=\frac{\partial I(t)}{\partial\theta_1(t)}\Big/\frac{\partial L(t)}{\partial\theta_1(t)}=\lambda_1(t-\theta_1(t))$，$\frac{\partial C(t)}{\partial L_2(t)}=\frac{\partial C(t)}{\partial\theta_2(t)}\Big/\frac{\partial L_2(t)}{\partial\theta_2(t)}=\lambda_2(t-\theta_2(t))$．したがって最適条件は (4.13) のようにあらわされる．

(4.13) $$w(t)=p(t)\lambda_1(t-\theta_1(t))=\lambda_2(t-\theta_2(t)).$$

他方，資本財価格の決定は，即時的限界（平均）生産物価値の均等化を通じておこなわれる．

(4.14) $$p(t)=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

以上述べられた (4.1)，(4.2)，および (4.6)～(4.14) に含まれる13個の連立方程式体系において，変数は $l_i(t)$，$k_i(t)$，$\theta_i(t)$，$(i=1,\ 2)$，$k(t)$，$c(t)$，$I(t)$，$C(t)$，$L(t)$，$Y(t)$，$p(t)$ である．体系は自足する．

2 均衡成長 上述のモデルにおいて

(4.15) $$\theta_i(t)=\theta_i \qquad (i=1,\ 2)$$

(4.16) $$l_i(t)=l_i(0)e^{x_it} \qquad (i=1,\ 2)$$

(4.17) $$k_i(t)=k_i(0)e^{y_it} \qquad (i=1,\ 2)$$

とおくことによって，均衡成長径路を求めることができる．x_i, y_i, θ_i, $l_i(0)$, $k_i(0)$ が決定されるべき未定定数である．

(4.7) に (4.15)，(4.16) を代入すれば

(4.18) $$x_i=n \quad (i=1,2)$$

(4.19) $$nL(0)=l_1(0)(1-e^{-n\theta_1})+l_2(0)(1-e^{-n\theta_2})$$

が成立たなければならない．(4.19) が完全雇用条件の縮約的表現にほかならない．

また，(4.15)，(4.16)，(4.18) を (4.8)，(4.9) に代入すれば，

(4.20) $$I(t)=\frac{\lambda_1(0)l_1(0)}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})e^{(\lambda+n)t}$$

(4.21) $$C(t)=\frac{\lambda_2(0)l_2(0)}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})e^{(\lambda+n)t}$$

がえられる．他方，(4.10)，(4.11)，(4.14) により

$$\frac{1-s}{s}\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\,I(t)=C(t)$$

ゆえ，これに (4.20)，(4.21) を代入して，整理すれば，

$$(4.22)\qquad \frac{1-s}{s}\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{\lambda_2(0)l_2(0)}{\lambda_1(0)l_1(0)}\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_2}}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1}}.$$

これが均衡成長下の貯蓄・投資均等条件に相当する.

さらに,(4.17),(4.20) を (4.12) に考慮すれば,均衡成長径路上では

$$(4.23)\qquad y_i=\lambda+n \qquad (i=1,\ 2)$$

$$(4.24)\qquad \frac{\lambda_1 l_1(0)}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})=k_1(0)+k_2(0)$$

が成り立たなくてはならない. (4.24) が均衡成長下の新資本財部門間配分条件に相当する.

次に,(4.5) に (4.16),(4.17),(4.18),(4.23) を考慮することにより,固定係数の技術的条件

$$(4.25)\qquad \lambda_i(0)l_i(0)=\mu_i k_i(0) \qquad (i=1,\ 2)$$

のようにあらわされる.

最後に,均衡成長下における労働の外延的限界生産力の部門間均等化の条件は

$$(4.26)\qquad \frac{\mu_1}{\lambda_1(0)}e^{\lambda\theta_1}=\frac{\mu_2}{\lambda_2(0)}e^{\lambda\theta_2}.$$

これは (4.3),(4.13),(4.14),(4.15) よりしたがう.

以上により,均衡成長径路を規制する条件は (4.19),(4.22),(4.24),(4.25) ($i=1,\ 2$),(4.26) の6個の式であらわされる.そこで決定さるべき未知数は θ_i, $l_i(0)$, $k_i(0)$,($i=1,\ 2$) の6個である.

ところが,$l_i(0)$ の正値解が存在するならば,そしてそのときにのみ,$k_i(0)$ は正値解をもつことが,(4.25) ($i=1,\ 2$) によって明らかである. そこで,(4.25) ($i=1,\ 2$),(4.24) において $k_i(0)$ ($i=1,\ 2$) を消去すれば,次式がえられる.

$$(4.27)\qquad \frac{\lambda_1(0)l_1(0)}{\lambda+n}(1-e^{-(\lambda+n)\theta_1})=\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}l_1(0)+\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}l_2(0)$$

したがって, 均衡成長径路が存在するかどうかの問題は,(4.19),(4.22),(4.26),(4.27) を満す θ_i, $l_i(0)$,($i=1,\ 2$) の正値解が存在するかどうかの

問題に帰着する．

3　解の存在　上に導かれた均衡条件，(4.19)，(4.22)，(4.26)，(4.27)のうち，(4.22)，(4.27) において $l_i(0)$ $(i=1,\ 2)$ を消去すれば，

$$\phi(\theta_1)+\frac{1-s}{s}\,\phi(\theta_2)=\frac{\mu_1}{\lambda+n} \tag{4.28}$$

がえられる．ただし

$$\phi(\theta_i)=\frac{1}{1-e^{-(\lambda+n)\theta_i}} \tag{4.29}$$

とする．他方，(4.26) は次のように書きかえられる．

$$\theta_2=\theta_1+\frac{1}{\lambda}\log\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1} \tag{4.26a}$$

したがって，条件 (4.19)，(4.22)，(4.26)，(4.27) を満すような正の θ_i，$l_i(0)$，$(i=1,\ 2)$ が存在するかどうかの検討は，二つの問題に分けておこなうことができる．第一は，(4.28)，(4.26a) を満す正の $\theta_i(i=1,\ 2)$ が存在するかどうかの問題，第二は，θ_i の正値解が存在するとき，(4.19)，(4.27) を満す $l_i(0)$ $(i=1,\ 2)$ の正値解が存在するかどうかの問題である．まず，第二の問題を検討しよう．

θ_i の正値解を $\theta_i{}^*$ とし，それを与えるとき，(4.19)，(4.27)はいずれも$l_i(0)$ $(i=1,\ 2)$ に関する直線の方程式である．したがっても，もし二つの直線の交点が第一象限の内点に在るならば $l_i(0)$ の正値性が保証される．5.4図に描かれたように，(4.19) は右下りの直線 AB のようにあらわされるので，(4.27) が5.4図の CD のように右上りとなるならば，交点 $l_i{}^*(0)$ は第一象限の内点に在ることがわかる．そこで，(4.27) において直線 CD の勾配を求めれば，それは

$$\frac{\lambda_1(0)\mu_2}{\lambda_2(0)}\left(\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1{}^*}}{\lambda+n}-\frac{1}{\mu_1}\right).$$

したがって，交点$l_i{}^*(0)$ の正値性の必要十分条件は次のようにあらわされる．

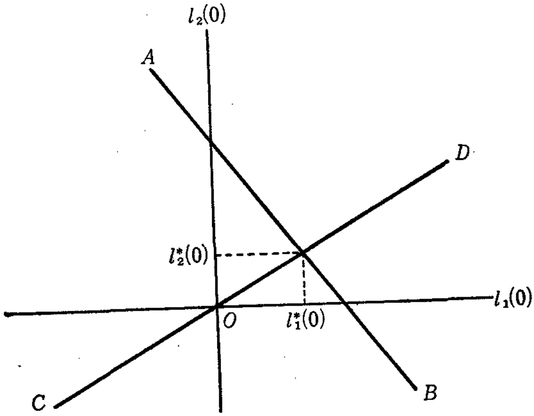
$$1-e^{-(\lambda+n)\theta_1{}^*}>\frac{\lambda+n}{\mu_1} \tag{4.30}$$

ところが，$\theta_1{}^*>0$ ゆえ，$0<1-e^{-(\lambda+n)\theta_1{}^*}<1$．よって，もし $\lambda+n\geqq\mu_1$ な

らば，(4.30) は満すことはできない．つまり，経済学的に有意味な均衡成長解が存在するためには

$$(4.31)\qquad \mu_1>\lambda+n$$

でなくてはならないことがわかる．



5.4 図

さて，第一の問題の検討をおこなわなければならない．(4.26a) と (4.28) を図示することによって，解存在のための条件を求めよう．

θ_1 をを水平軸，θ_2 を垂直軸にとるとき，(4.26a) は 45° の勾配をもつ右上りの直線である．その際，$\frac{1}{\lambda}\log\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ が垂直軸の切片である．$\frac{\lambda_i(0)}{\mu_i}$ は初期時点における資本財・労働結合比率（資本集約度）をあらわすので，両部門の資本集約度がひとしい場合には，5.5 図における A_1A_1' のように，(4.26a) は原点を通る直線となる．そして，消費財部門が資本財部門より資本集約的な場合には A_2A_2'，逆の場合には A_3A_3' のようにあらわされる．

次に (4.28) はどのように図示されるか．図は s，μ_1，λ，n の値に依存して種々の様相を呈するが，図示に先立ち，次のことが明らかである．それは，(4.28) を満す θ_i の正値解が存在するためには

$$(4.32)\qquad s\mu_1\geqq\lambda+n$$

でなくてはならないことである．実際，(4.28) は書き直して

$$(4.28a) \qquad s\psi(\theta_1)+(1-s)\psi(\theta_2)=\frac{s\mu_1}{\lambda+n}$$

となるが，$\theta_i>0$ のとき $\psi(\theta_i)\geqq 1$ ゆえ，これを (4.28a) に考慮すれば (4.32) が導かれる．

$1>s>0$ ゆえ，(4.32) が満されるときには (4.31) は自ら満される．したがって，(4.32) の条件のもとで (4.28) を図示すればよい．

(4.28) において，$\theta_1=0$ のとき $\theta_2=0$.[4] そして，

$$(4.33) \qquad \frac{d\theta_2}{d\theta_1}=-\frac{s}{1-s}\left[\frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_2)}\right]^2 e^{(\lambda+n)(\theta_2-\theta_1)}<0.^{(5)}$$

また，(4.28) の制約のもとで，$\lim_{\theta_1\to\infty}\theta_2=\hat{\theta}_2$, $\lim_{\theta_1\to-\infty}\theta_2=\bar{\theta}_2$, $\lim_{\theta_2\to\infty}\theta_1=\hat{\theta}_1$, $\lim_{\theta_2\to-\infty}\theta_1=\bar{\theta}_1$ と定義するならば，$\hat{\theta}_i$, $\bar{\theta}_i$, ($i=1$, 2) は次のような関係式によって規定されなければならない．[6]

$$(4.34) \qquad 1-e^{-(\lambda+n)\hat{\theta}_2}=\frac{\dfrac{1}{s}-1}{\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-1}\equiv\zeta$$

$$(4.35) \qquad 1-e^{-(\lambda+n)\bar{\theta}_2}=\frac{\dfrac{1}{s}-1}{\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}}\equiv\xi$$

$$(4.36) \qquad 1-e^{-(\lambda+n)\hat{\theta}_1}=\frac{1}{1+\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-\dfrac{1}{s}}\equiv\phi$$

---

(4) 任意の $\varepsilon>0$ を与えて，$\theta_1=\varepsilon$ とおくと，$\psi(\theta_1=\varepsilon)>0$. $\frac{1-s}{s}>0$ ゆえ，(4.28) を成立せしめるように $\theta_1=-\delta$ ($\delta>0$) を適当にきめることができる．$\frac{\partial\psi}{\partial\theta_i}<0$ ゆえ，$\varepsilon\to 0$ につれて，$\delta\to 0$．

(5) (4.28) より $\psi'(\theta_1)+\frac{1-s}{s}\psi'(\theta_2)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}=0$, (4.29) より $\psi'(\theta_2)=-(\lambda+n)\times e^{(\lambda+n)\theta_i}\psi(\theta_i)^2$ が求まる．これらより (4.33) が導かれる．

(6) (4.29) において $\lim_{\theta_i\to\infty}\psi(\theta_i)=1$, $\lim_{\theta_i\to-\infty}\psi(\theta_i)=0$. これらを (4.28) に考慮し，$\hat{\theta}_i$, $\bar{\theta}_i$ の定義式をあてはめれば，(4.34)〜(4.37) が導かれる．

$$(4.37) \qquad 1-e^{-(\lambda+n)\bar{\theta}_1}=\frac{\lambda+n}{\mu_1}\equiv\eta$$

さて (4.32) の満される場合を二つのケースに分けて，(4.28) を図示し，均衡解が存在するかどうかを検討する．

i) $s\mu_1>\lambda+n$ の場合

この場合，(4.34)，(4.35) により，$0<\xi<\zeta<1$．したがって，$0<\bar{\theta}_2<\hat{\theta}_2<\infty$．他方，(4.36)，(4.37) により，$0<\eta<\phi<1$．したがって，$0<\bar{\theta}_1<\hat{\theta}_1<\infty$．

なお，$\bar{\theta}_1<\theta_1<\hat{\theta}_1$ となる θ_1 について (4.28) を満す θ_2 は存在しない．なぜならば，$\bar{\theta}_1<\theta_1<\hat{\theta}_1$ のとき，$\psi(\bar{\theta}_1)>\psi(\theta_1)>\psi(\hat{\theta}_1)$ であるが，(4.28)，(4.29)，(4.36)，(4.37) を考慮すれば，

$$\frac{\mu_1}{\lambda+n}>\frac{\mu_1}{\lambda+n}-\left(\frac{1}{s}-1\right)\psi(\theta_2)>1+\frac{\mu_1}{\lambda+n}-\frac{1}{s}$$

がえられる．これは $0<\psi(\theta_2)<1$ をいみする．ところが，これを満す θ_2 は存在しないことが (4.29) より明らかである．

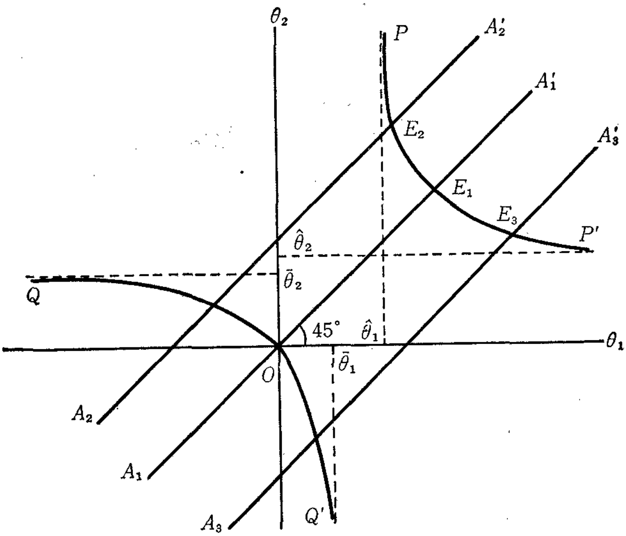
同様にして，$\bar{\theta}_2<\theta_2<\hat{\theta}_2$ なる θ_2 についても (4.28) を満す θ_1 は存在しない．(7)

以上の解析にもとずき，(4.28) を満す θ_1 と θ_2 の関係は5.5図における双曲線 (PP'，QQ') によってあらわされる．

5.5図において明らかなように，(4.26a) を満す直線と，(4.28) を満す双曲線との交点は二つ存在するが，$\theta_i(i=1,\ 2)$ の正値性が保証されるのは E_i で，

---

(7) $\bar{\theta}_2<\theta_2<\hat{\theta}_2$ のとき，(4.34)，(4.35) によって，$\psi(\bar{\theta}_2)=\dfrac{\frac{\mu_1}{\lambda+n}}{\frac{1}{s}-1}>\psi(\theta_2)>\psi(\hat{\theta}_2)=\dfrac{\frac{\mu_1}{\lambda+n}-1}{\frac{1}{s}-1}$．したがって，$\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}>\dfrac{1-s}{s}\psi(\theta_2)>\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-1$．(4.28) により，これは $0>-\psi(\theta_1)>-1$ をいみする．書きなおせば，$0<\psi(\theta_1)<1$．これを満す θ_1 は存在しない．



5.5 図

その座標が均衡解 $\theta_i{}^*$ をあらわす.(8)

このようにして，$s\mu_1 > \lambda + n$ の場合には，有限の一意的な正値均衡解 $\theta_i{}^*$ が存在することが明らかになった．両部門の資本集約度の差異は，均衡成長解の存在とは無関係であるが，資本設備の経済的耐用年限の均衡値について部門間格差をひきおこす．5.5図に示されているように，$\dfrac{\lambda_2(0)}{\mu_2} \gtreqless \dfrac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ に応じて $\theta_2{}^* \gtreqless \theta_1{}^*$（不等号同順)．つまり，より資本集約的な部門の方が設備の経済的寿命はより長い.

ii)　$s\mu_1 = \lambda + n$ の場合

この場合，(4.34)，(4.36) において，$\zeta = \phi = 1$ ゆえ，$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \infty$．他方，(4.35)，(4.37) において，$0 < \xi < 1$，$0 < \eta < 1$ ゆえ，$0 < \bar{\theta}_2 < \infty$，$0 < \bar{\theta}_1 < \infty$．そして i) の場合と同様にして，$\bar{\theta}_1 < \theta_1 < \hat{\theta}_1$ なる θ_1 について (4.28) を満

(8) $\dfrac{\lambda_2(0)}{\mu_2} = \dfrac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のときには E_1，$\dfrac{\lambda_2(0)}{\mu_2} > \dfrac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のときには E_2，$\dfrac{\lambda_2(0)}{\mu_2} < \dfrac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のときには E_3 によって均衡点があらわされている.

す θ_2 は存在しない．また，$\bar{\theta}_2<\theta_2<\hat{\theta}_2$ なる θ_2 について (4.28) を満す θ_1 も存在しない．

このようにして (4.28) を満す θ_1 と θ_2 の関係は，5.5図における曲線 QQ'，および $\theta_1=\theta_2=\infty$ によってあらわされることがわかる．したがって，(4.26a) と (4.28) を同時に満足する θ_i の正値均衡解は，$\theta_i^*=\infty$ ($i=1$, 2) となる．

以上により (4.32) は体系の均衡成長解が存在するための必要十分条件であることが明らかになった．(4.32) を (1.15) と比較すれば興味深い．一部門モデルにおける均衡成長解存在のための条件と同じ条件が，資本財生産部門についてのみ満されるならば，二部門モデルの均衡成長解は存在する．

§5　二部門均衡成長の比較動学

(4.32) が満されている体系においては，(4.28)，(4.26a) において θ_i^*($i=$1, 2) が一意的に決定され，次に (4.19)，(4.27) において $l_i^*(0)$ ($i=1$, 2) が決定される．そして，他の諸変数の均衡成長解はすべて θ_i^*, $l_i^*(0)$ によってあらわされる．したがって，パラメーター s, λ, n などの変化が諸変数の均衡成長解に及ぼす影響を知るためには，s, λ, n の変化の θ_i^*, $l_i^*(0)$ への影響を考察すればよい．

はじめに貯蓄変化の影響を考察する．(1) θ_i^* に対する影響は明白である．(4.26a)，(4.28) より

$$(5.1)\qquad \frac{d\theta_i^*}{ds}=\frac{\psi(\theta_2^*)}{s[s\psi'(\theta_1^*)+(1-s)\psi'(\theta_2^*)]}<0\qquad (i=1,\ 2)$$

がえられる．これは5.5図における曲線 PP' の左下方シフト，したがって均衡点 E_i の左下方シフトをいみする．なぜならば，(4.34)，(4.36) において

$$\frac{\partial\zeta}{\partial s}=-\frac{1}{s^2\left(\frac{\mu_1}{\lambda+n}-1\right)}<0$$

---

(1)　s の変域は $1>s\geqq\frac{\lambda+n}{\mu_1}$ によって制限される．

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=-\frac{1}{s^2\left(1+\frac{\mu_1}{\lambda+n}-\frac{1}{s}\right)^2}<0$$

となることから，$\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial s}<0$, $\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial s}<0$ が導かれ，これは漸近線の負方向シフトをあらわすからである．このようにして，貯蓄増加は両部門の資本設備の経済的廃棄を促進することがわかる．

貯蓄変化が $l_i{}^*(0)$ に及ぼす影響は複雑である．(4.19), (4.27) において，$l_i{}^*(0)$ を求めれば次のようになる．

(5.2) $$l_1{}^*(0)=\frac{nL(0)}{\beta+\alpha\gamma}$$

(5.3) $$l_2{}^*(0)=\frac{\alpha nL(0)}{\beta+\alpha\gamma}$$

ただし

$$\alpha=\frac{\mu_2\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}\left(\frac{1-e^{-(\lambda+n)\theta_1{}^*}}{\lambda+n}-\frac{1}{\mu_1}\right)$$

$$\beta=1-e^{-n\theta_1{}^*}$$

$$\gamma=1-e^{-n\theta_2{}^*}$$

とする．直ちに明らかなように，$\frac{d\alpha}{d\theta_1{}^*}>0$, $\frac{d\beta}{d\theta_1{}^*}>0$, $\frac{d\gamma}{d\theta_2{}^*}>0$. (5.2), (5.3) を s によって微分すれば，次の通りである．

(5.4)

$$\frac{dl_1{}^*(0)}{ds}=-\frac{nL(0)}{(\beta+\alpha\gamma)^2}\left[\frac{d\beta}{d\theta_1{}^*}\frac{d\theta_1{}^*}{ds}+\gamma\frac{d\alpha}{d\theta_1{}^*}\frac{d\theta_1{}^*}{ds}+\alpha\frac{d\gamma}{d\theta_2{}^*}\frac{d\theta_2{}^*}{ds}\right]>0$$

(5.5)

$$\frac{dl_2{}^*(0)}{ds}=\frac{nL(0)}{(\beta+\alpha\gamma)^2}\left[\beta\frac{d\alpha}{ds}-\alpha\frac{d\beta}{ds}-\alpha^2\frac{d\gamma}{ds}\right]$$

$$=\left[\frac{\lambda_1(0)\mu_2}{\lambda_2(0)}e^{-(\lambda+n)\theta_1{}^*}(1-e^{-n\theta_1{}^*})-\alpha(ne^{-n\theta_1{}^*}-\alpha ne^{-n\theta_2{}^*})\right]\frac{d\theta_i{}^*}{ds}$$

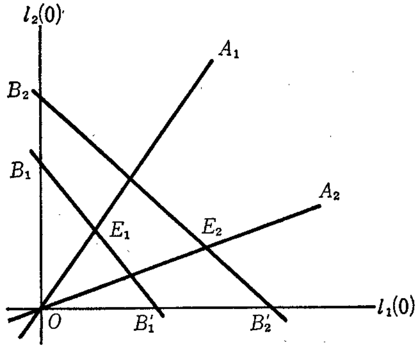
この結果を図解しよう．(5.6図)．いま，$s_1<s_2$とし，$s=s_i$ のときの(4.27)を図示したものが直線 OA_i である．その勾配が α である．他方，$s=s_i$ のと

きの (4.19) を図示すれば直線 B_iB_i' のようにあらわされる．したがって，$s=s_1$ のときの均衡点は E_1，$s=s_2$ のときの均衡点は E_2 である．均衡点の座標が $l_i^*(0)(i=1,\ 2)$ をあらわしている．

5.6 図において，s の上昇は θ_i^* の変化を通じて，次のように二つの方向から $l_i^*(0)$ に影響することがわかる．

(1) s の上昇は θ_i を減小させる——(5.1)．s の上昇によって古い設備が廃棄され，同時にその設備に配分されていた労働が解放される．したがって廃棄を免れた比較的新しい設備，および新設備に配分されるべき労働量が増加する．これは両部門において同じ様に作用する．このことが直線 B_1B_1' から直線 B_2B_2' へのシフトによってあらわされている．

(2) s の上昇は投資を増大する．それは，一定労働供給のもとでは，直接に消費財部門から投資財部門への労働移動を惹き起す．このような部門間労働移動が，直線 OA_1 から直線 OA_2 への時計廻り回転によってあらわされている．その効果は，資本財部門が消費財部門にくらべてより資本集約的であるほど，大きい．[2]



5.6図

貯蓄増加の $l_i^*(0)$ に対する究極の影響は，このような二つの効果の合成である．そこで明らかなことは，貯蓄増加は必ず資本財部門雇用 $l_1^*(0)$ を高める

(2) それは $\dfrac{d\alpha}{d\theta_1}=\mu_1 e^{-(\lambda+n)\theta_1}\dfrac{\lambda_1(0)}{\mu_1}\Big/\dfrac{\lambda_2(0)}{\mu_2}$ によって明らかである．

ということである．消費財部門雇用 $l_2^*(0)$ に対しては相反する二方向の効果の合成となり，どちらの効果が強く働らくかによって，$l_2^*(0)$ は高まることもあるが，低まることもある．

さて，こんどは，貯蓄率一定のまま，人口増加や技術進歩に変化が生じたとき，資本設備の経済的寿命はどのような影響をうけるか．

労働力増加率 n の変化の影響は明白である．(4.28)，(4.26a) を n によって微分すれば，

$$s\left[\frac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial n}+\frac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dn}\right]+(1-s)\left[\frac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial n}+\frac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dn}\right]=-\frac{s\mu_1}{(\lambda+n)^2},$$

$$\frac{d\theta_2}{dn}=\frac{d\theta_1}{dn}.$$

他方，(4.29) において

$$\frac{\partial\psi(\theta_i)}{\partial n}=-\theta_i e^{-(\lambda+n)\theta_i}\psi(\theta_i)^2.$$

したがって

$$\frac{d\theta_i}{dn}=-\frac{A(\theta_1,\ \theta_2)}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}}\qquad(i=1,\ 2)\tag{5.6}$$

ただし

$$A(\theta_1,\theta_2)=s\theta_1\psi(\theta_1)\left[\frac{1}{(\lambda+n)\theta_1}-e^{-(\lambda+n)\theta_1}\psi(\theta_1)\right]$$
$$+(1-s)\theta_2\psi(\theta_2)\left[\frac{1}{(\lambda+n)\theta_2}-e^{-(\lambda+n)\theta_2}\psi(\theta_2)\right]$$

とする．ところが

$$\frac{1}{(\lambda+n)\theta_i^*}-e^{-(\lambda+n)\theta_i^*}\psi(\theta_i^*)=\frac{1}{(\lambda+n)\theta_i^*}-\frac{1}{e^{(\lambda+n)\theta_i^*}-1}>0,$$

ゆえに $A(\theta_1^*,\ \theta_2^*)>0$．また $\dfrac{\partial\psi(\theta_1^*)}{\partial\theta_1^*}<0$ ゆえ，$s\dfrac{\partial\psi(\theta_1^*)}{\partial\theta_1^*}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2^*)}{\partial\theta_2^*}<0$．これらを (5.6) に考慮すれば $\dfrac{d\theta_i^*}{dn}>0$ $(i=1,\ 2)$ が明らかである．このようにして，労働力増加の高まりは資本設備の経済的廃棄をおくらせること

がわかる．もちろん，n の上昇は (4.32) に制約される．すなわち $n \leqq s\mu_1 - \lambda$ という制限内において n の大きいほど θ_i^* $(i=1,\ 2)$ が大きい．このことは，5.5 図において曲線 PP' の左上方シフト，したがって交点 E_i の左上方シフトとなってあらわれる．[3]

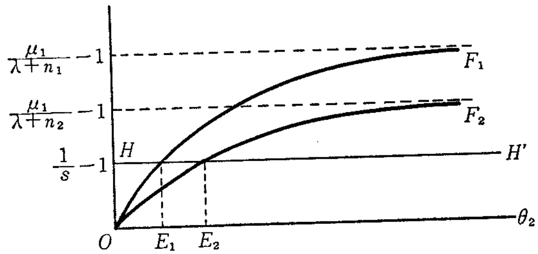
次に技術進歩率 λ の変化の θ_i^* に及ぼす影響は (4.28), (4.26a) において求めることができる．それは次のような結果を示す．

$$(5.7)\qquad \frac{d\theta_1}{d\lambda}=\frac{(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}\dfrac{\delta}{\lambda^2}-A(\theta_1,\ \theta_2)}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}}$$

$$(5.8)\qquad \frac{d\theta_2}{d\lambda}=\frac{-s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}\dfrac{\delta}{\lambda^2}-A(\theta_1,\ \theta_2)}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}}$$

---

(3) たとえば漸近線 $\hat{\theta}_2$ の正方向シフトは次のように説明される．(4.34) において，$\hat{\theta}_2$ は $\dfrac{1-s}{s}=\left(\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-1\right)(1-e^{-(\lambda+n)\hat{\theta}_2})$ を満さなければならない．いま，$F(\theta_2)=\left(\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-1\right)(1-e^{-(\lambda+n)\theta_2})$ と定義すれば，$F(0)=0$，$F(\infty)=\dfrac{\mu_1}{\lambda+n}-1$，$\dfrac{\partial F(\theta_2)}{\partial\theta_2}=(\lambda+n)e^{-(\lambda+n)\theta_2}>0$．したがって，5.7 図において，$F(\theta_2)$ は，n が大きいとき曲線 OF_1，n の小さいとき曲線 OF_2 のようにあらわされる．(4.34) を満す θ_2 は $F(\hat{\theta}_2)=\dfrac{1-s}{s}$ となる $\hat{\theta}_2$ であるが，これは $F(\theta_2)$ 曲線と水平線 HH' の交点の横軸座標であらわされる．



5.7 図

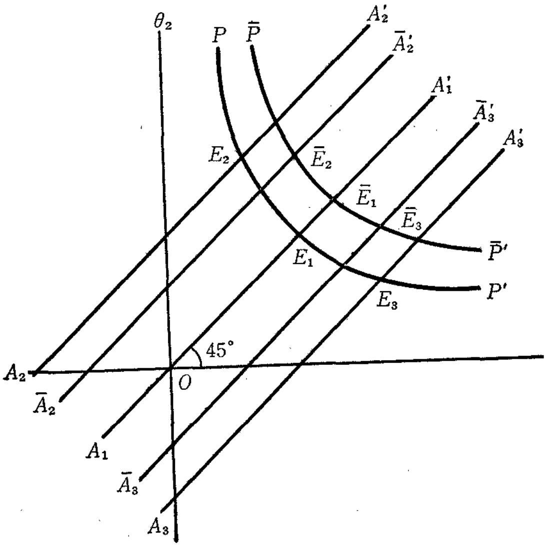
図において明らかなように，交点は，n の上昇につれて右方へシフトする．したがって，横軸座標は E_1 から E_2 へとシフトする．すなわち $\hat{\theta}_2$ は大きくなる．

ただし,

$$\delta=\log \frac{\lambda_2(0)}{\mu_2} \Big/ \frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$$

とする．したがって，$\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2} \gtreqless \frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ に応じて $\delta \gtreqless 0$（不等号同順）．よって，$\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2} \geqq \frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ ならば，$\frac{d\theta_1{}^*}{d\lambda} > 0$．逆に，$\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2} \leqq \frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ ならば，$\frac{d\theta_2{}^*}{d\lambda} > 0$．これが $\frac{d\theta_i{}^*}{d\lambda}$ の符号について導かれるせいぜいの帰結である．

そこで，λ の変化が $\theta_i{}^*$ に及ぼす影響を図示するならば，5.8図の通りである．



5.8図

(4.28) は曲線 PP'，または曲線 $\bar{P}\bar{P}'$ のように描かれる．ただし PP' は λ の低い場合，$\bar{P}\bar{P}'$ は λ の高い場合に相当する．他方，λ の低い場合の(4.26a) は直線 A_iA_i'，λ の高い場合の (4.26a) は直線 $\bar{A}_i\bar{A}_i'$ であらわされる．ただし $\bar{A}_1\bar{A}_1'=A_1A_1'$ とする．なお，A の下つき添字 i は部門間資本集約度の差違の指標である．$i=1$ は $\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}=\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のケース，$i=2$ は $\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2} > \frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のケー

ス，$i=3$ は $\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}<\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ のケースをあらわす．

5.8 図においてみられるように，技術進歩率 λ の高まりの $\theta_i{}^*$ に及ぼす影響は二つの方向に分解される．

(1) 曲線 PP' から曲線 $\bar{P}\bar{P}'$ への北東方向シフトは，ちょうど n の増大による θ_i の変化と同様の効果をあらわしている．これは (5.7) と (5.8) における右辺共通項

$$-\frac{A(\theta_1,\ \theta_2)}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}}$$

に対応する．そして，この共通項は (5.6) と同じかたちであることに注意すべきである．このようにして λ の上昇は，n の上昇と同じように，両部門とも θ_i を高める効果をもっている．

(2) 直線 A_iA_i' から直線 $\bar{A}_i\bar{A}_i'$ へのシフトは，n 変化の場合にみられない λ 変化固有の効果をあらわしている．これは，(5.7)，(5.8) のそれぞれの右辺から共通項を除いた残余の項に対応する．残余項をそれぞれ $R_i\,(i=1,\ 2)$ であらわすと，

$$R_1=\frac{(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}\dfrac{\delta}{\lambda^2}}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}},$$

$$R_2=-\frac{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}\dfrac{\delta}{\lambda^2}}{s\dfrac{\partial\psi(\theta_1)}{\partial\theta_1}+(1-s)\dfrac{\partial\psi(\theta_2)}{\partial\theta_2}}.$$

直ちに明らかなように，R_i の符号は δ に依存する．$\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}>\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ の場合，すなわち消費財部門が資本財部門より資本集約的な場合には $R_1>0,\ R_2<0$，言いかえれば，λ の上昇は資本財部門における設備の経済的廃棄をひきのばし，消費財部門のそれを早める．これは直線 A_2A_2' から直線 $\bar{A}_2\bar{A}_2'$ へと南東方向シフトによってあらわされている．逆に，$\frac{\lambda_2(0)}{\mu_2}<\frac{\lambda_1(0)}{\mu_1}$ の場合，すなわち

資本財部門の方がより資本集約的な場合には，λ の上昇は資本財部門における設備の経済的廃棄を早め ($R_1<0$)，消費財部門のそれを引きのばす ($R_2>0$)．これは，直線 A_3A_3' から直線 $\bar{A}_3\bar{A}_3'$ への北西方向シフトによってあらわされる．最後に，両部門の資本集約度がひとしいときには，$R_i=0$，すなわち直線 A_1A_1' は動かない．

技術進歩率の高まりの究極の効果は，これらの二つの効果の合成果である．それは，5.7図において交点 E_i から交点 $\bar{E}_i$ へのシフトとしてあらわされている．注目すべきは，技術進歩の高度化が資本設備の陳腐化を促進するか，延期するかについて一定の傾向は存在しないことである．技術進歩の高度化によって設備陳腐化が促進される理論的根拠は存在しない．のみならず，前述のように[4]，陳腐化が延期されることさえ生じるのである．[5]

---

(4) p. 157参照.
(5) 一部門モデルにおいてはそれが一般的である．(1.20) 参照.

参 考 文 献

〔1〕 Akerlof, G. and W. D. Nordhaus, "Balanced Growth—A Razor's Edge?", *International Economic Review,* Oct. 1967, pp. 343—348.

〔2〕 Allais, M., "The Influence of the Capital-Output Ratio on Real National Income", *Econometrica,* Oct. 1962, pp. 700—728.

〔3〕 Allen, R. G. D., *Macro-Economic Theory,* 1967.

〔4〕 Arrow, K., Chenery, H., Minhas, B. and R. M. Solow, "Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics,* Aug. 1961, pp. 225—250.

〔5〕 Black, J., "Technical Progress and Optimum Savings", *Review of Economic Studies,* Jun. 1962, pp. 238—240.

〔6〕 Brown, E. M., *On the Theory and Measurement of Technological Change,* 1966.

〔7〕 Burmeister E., "The Existence of Golden Ages and Stability in the Two-Sector Model", *Quarterly Journal of Economics,* Feb. 1967, pp. 147—154.

〔8〕 Diamond, P. A., "Techical Change and the Measurement of Capital", *Review of Economic Studies,* Oct. 1965, pp. 289—298.

〔9〕 Domar, E. D., "Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment", *Econometrica,* Apr. 1946, reprinted in his *Essays in the Theory of Economic Growth,* 1957, pp. 70—82.

〔10〕 Fei, J. C. H. and G. Ranis, "Innovational Intensity and Factor Bias in the Theory of Growth", *International Economic Review,* May 1965, pp. 182—198.

〔11〕 Fisher, F. M., "Embodied Technical Change and the Existence of an Aggregate Capital Stock", *Review of Economic Studies,* Oct. 1965, pp. 263—287.

〔12〕 Green, H. A. J., *Aggregation in Economic Analysis,* 1964.

〔13〕 ——————, "Embodied Progress, Investment, and Growth", *American Economic Review,* Mar. 1966, pp. 138—151.

〔14〕 Hahn, F. H. and R. C. O. Matthews, "The Theory of Economic Growth", *Economic Journal,* Dec. 1964, pp. 779—902.

〔15〕 Harrod, R. F., *Toward a Dynamic Economics,* 1956.

〔16〕 Hicks, J. R., *The Theory of Wages,* 1st edition 1932, 2nd edition 1963.

〔17〕 Howrey, E. P., "Technical Change, Capital Longevity, and Economic

Growth", *American Econoic Review,* May 1965, pp. 398—410.

[18] Inada, K., "On a Two-sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization", *Review of Ecnomic Studies,* Jun. 1963, pp. 119—127.

[19] ————, "Economic Growth and Factor Substitution", *International Economic Review,* Sep. 1964, pp. 318—327.

[20] ————, "Economic Growth and Factor Substitution: A Reply", *International Economic Review,* Jun. 1967, pp. 252—253.

[21] Johansen, L., "Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth", *Econometrica,* Apr. 1959, pp. 157—176.

[22] Kaldor, N. and J. A. Mirrlees, "A New Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies,* Jun. 1962, pp. 174—192.

[23] Kemp, M. C., Sheshinski, E. and P. C. Thānh, "Economic Growth and Factor Substitution", *International Econmic Review,* Jun. 1967, pp. 243—251.

[24] Kemp, M. C. and P. C. Thānh, "On a Class of Growth Models", *Econometrica* Apr. 1966, pp. 257—282.

[25] Koyck, L. M. and M. J. t'Hooft-Welvaars, "Economic Growth, Marginal Productivity of Capital, and the Rates of Interest", in *The Theory of Interest Rates,* edited by Hahn, F. H. and F. P. R. Brechling, 1965, pp. 242—266.

[26] Kurz, M., "Substitution versus Fixed Production Coefficients: A Comment", *Econometrica,* Jan.-Apr. 1963, pp. 207—217.

[27] Leontief, W. W., "A Note on the Interrelation of Subsets of Independent Variables of a Continuous Function with Continuous First Derivatives", *Bulletin of the American Mathematical Society,* 1947, pp. 343—350.

[28] ————————, "Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships", *Econometrica,* Oct. 1947, pp. 361—373.

[29] Levhari, D., "Exponential Growth and Golden Rules in Vintage Capital Models", *Metroeconomica,* Maggio-Agosto, 1966, pp. 154—166.

[30] Levhari, D. and E. Sheshinski, "On the Sensitivity of Level of Output to Savings: Embodiment and Disembodiment", *Quarterly Journal of Economics,* Aug. 1967, pp. 524—528.

[31] Marty, A. L., "The Neoclassical Theorem", *American Economic Review,* Sep. 1964, pp. 1026—1029.

[32] Massell, B. F., "Investment, Innovation, and Growth", *Econometrica,*

Apr. 1962, pp. 239—252.
[33] Matthews, R. C. O., "The New View of Investment: Comment", *Quarterly Journal of Economics,* Feb. 1964, pp. 164—172.
[34] Meade, J. E., *A Neo-Classical Theory of Growth,* 1961.
[35] Nelson, R. R., "Aggregate Production Functions and Medium-Range Growth Projections", *American Economic Review,* Sep. 1964, pp. 575—606.
[36] Pearce, I. F., "The End of the Golden Age in Solovia: A Further Fable for Growthmen Hoping to be 'One Up' on Oiko", *American Economic Review,* Dec. 1962, pp. 1088—1097.
[37] Phelps, E. S., "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, *American Economic Review,* Sep. 1961, pp. 638—643.
[38] ——————, "The New View of Investment: A Neoclassical Analysis", *Quarterly Journal of Economics,* Nov. 1962, pp. 548—567.
[39] ——————, "The End of the Golden Age in Solovia : Comment, *American Economic Review,* Dec. 1962, pp. 1097—1099.
[40] ——————, "Substitution, Fixed Proportions, Growth and Distribution", *International Economic Review,* Sep. 1963, pp. 265—287.
[41] ——————, "Second Essay on the Golden Rule of Accumulation", *American Economic Review,* Sep. 1965, pp. 793—814.
[42] ——————, *Golden Rules of Economic Growth,* 1967.
[43] Phelps, E. S. and M. E. Yaari, "The New View of Investment: Reply", *Quarterly Journal of Economics,* Feb. 1964, pp. 172—176.
[44] Pyatt, G., "A Production Functional Model", in *Econometric Analysis for National Economic Planning,* edited by Hart, P. E., Mills, G. and J. K. Whitaker, 1964, pp. 105—128.
[45] Robinson, J., "The Classification of Inventions", *Review of Economic Studies,* Feb. 1938, pp. 139—142.
[46] ——————, "A Neo-Classical Theorem", *Review of Economic Studies,* Jun. 1962, pp. 219—226.
[47] Salter, W. E. G., *Productivity and Technical Change,* 1960.
[48] ——————, "Productivity Growth and Accmulation as Historical Processes", Paper read to *the Internatinal Congress on Economic Development,* Vienna, Aug.-Sep. 1962, pp. 266—294.
[49] Sheshinski, E., "Balanced Growth and Stability in the Johansen Vintage Model", *Review of Economic Studies,* Apr. 1967, pp. 239—248.
[50] Solow, R. M., "Technical Change and the Aggregate Production

Function", *Review of Economics and Statistics*, Aug. 1957, pp. 312—320.

[51] Solow, R.M., "Investment and Technical Progress", in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, edited by Arrow, K. J., Karlin, S. and P. Suppes, 1960, pp. 81—104.

[52] ————, "Substitution and Fixed Proportions in the Theory of Capital", *Review of Economic Studies*, Jun. 1962, pp. 207—218.

[53] ————, *Capital Theory and the Rate of Return*, 1963.

[54] Solow, R. M., Tobin, J., von Weizsäcker, C. C. and M. Yaari, "Neoclassical Growth with Fixed Factor Proportion", *Review of Economic Studies*, Apr. 1966, pp. 79—115.

[55] Swan, T. W., "Growth Models: Of Golden Ages and Production Functions", in *Economic Development with Special Refence to East Asia*, Proceedings of International Economic Conference, edited by Berrill, K. E., 1963, pp. 3—18.

[56] Uzawa, H., "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium", *Review of Economic Studies*, Feb. 1961, pp. 117—124.

[57] ————, "On a Two-sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, Oct. 1961, pp. 40—47.

[58] ————, "On a Two-sector Model of Economic Growth: II", *Review of Economic Studies*, Jun. 1963, pp. 105—118.

[59] Weizsäcker, C. C. von, *Wachstum, Zins und Optimale Investitionsquote*, 1962.

[60] ————————, *Zur Ökonmischen Theorie des Technischen Fortschritts*, 1966.

[61] 山谷恵俊, "技術進歩，経済成長と利子率"，大阪府立大学経済研究，第38号，昭和40年10月，pp. 1—13.

[62] ————, "技術進歩と二部門成長モデル"，大阪府立大学経済研究，第46号，昭和42年2月，pp. 126—148.

[63] ————, "均衡成長と要素代替——vintage モデルにおける均衡成長解の存在証明——"，大阪府立大学経済研究，第51号，昭和42年12月，pp. 1—23.

著者紹介

山谷恵俊（やまたに しげとし）

1954年　京都大学経済学部卒業
1957年　京都大学大学院経済学研究科修士課程修了
現　在　大阪府立大学経済学部助教授
著　書　『成長理論の研究』（共著），大阪府立大学経済学部，1961年．
訳　書　『ゲール・線型経済学』（共訳），紀伊国屋書店，1964年．

昭和43年3月25日　印刷
昭和43年3月31日　発行

著者　山　谷　恵　俊

発行所　大阪府立大学経済学部
堺市百舌鳥梅町4丁804

印刷所　株式会社　天理時報社
奈良県天理市川原城町300

大阪府立大学経済研究叢書

第1冊	西村孝夫著	イギリス東インド会社史論	<昭 35>
第2冊	福原行三著	J. S. ミルの経済政策論研究	<昭 35>
第3冊	和田貞夫著	点集合と経済分析	<昭 35>
第4冊	内田勝敏著	ブリティシュ・トロピカル・アフリカの研究	<昭 36>
第5冊	永島　清著	国際経済と経済変動	<昭 36>
第6冊	大野吉輝 山谷恵俊著 岡本武之	成長理論の研究	<昭 36>
第7冊	竹安繁治著	近世土地政策の研究	<昭 37>
第8冊	谷山新良著	保険の性格と構造	<昭 37>
第9冊	佐藤浩一著	現代賃金論序説	<昭 37>
第10冊	藤井定義著	幕末の経済思想	<昭 38>
第11冊	渡瀬　浩著	経営の社会理論	<昭 38>
第12冊	今川　正著	線型計画と地域社会	<昭 38>
第13冊	馬渕　透著	国際金融と国民所得	<昭 39>
第14冊	鍬田邦夫著	金融理論と金融政策	<昭 39>
第15冊	村上義弘著	行政法および行政行為の本質	<昭 39>
第16冊	鈴木和蔵著	減価償却政策と維持計慮	<昭 40>
第17冊	岡本武之著	ケインズ主義経済理論序説	<昭 40>
第18冊	片上　明著	イギリス「社会改良」時代の研究	<昭 40>
第19冊	風間鶴寿著	相続法の総論的課題 —相続開始・代襲相続・放棄—	<昭 41>
第20冊	前田英昭著	企業行動の理論	<昭 41>
第21冊	盛　秀雄著	日本国憲法の主原則	<昭 42>
第22冊	石田喜久夫著	自然債務の研究	<昭 42>
第23冊	稲葉四郎著	経済学の根底	<昭 42>
第24冊	武部善人著	産業構造分析	<昭 43>
第25冊	山谷恵俊著	技術進歩と均衡成長	<昭 43>