大阪公立大学
Osaka Metropolitan University
学術情報リポジトリ

企業の最適な投資政策,
研究・開発政策および宣伝・広告政策について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-10-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 前田, 英昭 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00016600

大阪府立大学経済研究叢書　第35冊

企業の最適な投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策について

前田英昭著

大阪府立大学経済学部

大阪府立大学経済研究叢書 第35冊

企業の最適な投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策について

前田英昭 著

大阪府立大学経済学部

はしがき

私が企業をとりまく諸問題の研究に従事するようになってから，かなりの時が経過した．しかるに，能力の不足と生来の怠惰の故にいまだ見るべき成果を得ていない．顧りみて悔恨の情を禁じ得ない．

本稿は私が昭和44年3月に東京大学に提出した学位請求論文である．本稿に展開されている議論はきわめて形式的なものであり，問題の皮相のみをとらえているにすぎないといわざるを得ない．読み返してみるとき，私自身にとっても満足できない点が多々存在するが，ここには敢てそのままの形で発表し，その彫琢は別の機会に果したい．尚，以下の議論の一部は，先に，「企業の最適投資政策：その存在と最適条件」（大阪府立大学「経済研究」第13巻6号，昭和43年12月），"On Optimal Capital Investment, Research and Development, and Advertising Policies," *Bulletin of University of Osaka Prefecture*, Serie D., Vol. Ⅷ (1969) に発表されていることを付記しておく．

本稿を研究叢書の一冊として刊行することを許して下さった大阪府立大学経済学部当局に対して深甚の謝意を表するものである．

昭和46年2月

著　　者

目　　次

序 …… 1
第1章　基本的モデル …… 6
1.1.　モデルの構成 …… 6
1.2.　最適な生産物価格と産出量の決定 …… 12
1.3.　最適投資政策の決定 …… 16
1.3.1.　標的集合が x 空間全体の場合 …… 19
1.3.2.　標的集合がコンパクトな凸集合の場合 …… 63
第2章　非線型拡張費用関数の下での投資政策 …… 70
2.1.　モデルの構成 …… 70
2.2.1.　標的集合が x 空間全体の場合 …… 70
2.2.2.　標的集合がコンパクトな凸集合の場合 …… 87
2.3.　資本ストックの終期状態の評価 …… 90
第3章　生産技術の研究・開発と宣伝・広告政策 …… 99
3.1.　モデルの構成 …… 99
3.2.　最適な生産物価格と産出量の決定 …… 102
3.3.　最適な研究・開発政策と資本財投資政策の決定 …… 105
3.3.1.　標的集合が (x, σ) 空間全体の場合 …… 107
3.3.2.　標的集合がコンパクトな凸集合の場合 …… 120
3.4.　非線型拡張費用関数 …… 124
3.5.　最適な宣伝・広告政策，研究・開発政策および資本財投資政策の決定 …… 131
むすびに代えて：残された問題 …… 139
（参照文献） …… 140

序

企業の投資行動は経済学において最も精力的な研究がなされている分野の一つである．資本理論を企業の最適化問題としてはっきりと教えたのは Hicks〔10〕であるといってよいであろうが，その後における実証的あるいは理論的な発展には著しいものがある．[1] われわれもまた，以下において，企業の投資政策を問題にしようとするものであるが，それはまさに九牛の一毛を加えるにすぎないといわざるを得ないことかも知れない．

さて，われわれは，企業の目的は，各時点において総収入と総費用の差として定義される純収入全体の計画期間にわたる現在価値を最大にすることであると想定する．[2] このような想定に対しては，周知のように，有力な異論がとなえられている．まず第一に，企業が最大化すべき目的が何かということについて論者の見解は必ずしも一致していていない．[3] 現在価値の最大化に代るべき基準として提唱されているものには，平均内部収益率の最大化，企業の所有する資本に対する収益率の最大化あるいは，市場利子率を上まわる内部収益率をもつ計画への投資等々がある．また最大化の原理（あるいは完全な合理性の仮定）そのものに対する批判も有力である．[4] しかしながら，企業の over time の行動を問題にするとき，その現在価値の最大化が企業の目的としての意義を持たないとは考えられず，少くとも第一次接近としては，最も重要な目的であ

---

1) 最近におけるすぐれた理論的成果のうちには次のようなものがある．Arrow, K.J.〔1〕,〔2〕,〔3〕, Arrow, K. J., M. Beckmann and S. Karlin〔4〕, Dhrymes, P. J.〔7〕, Eisner, R. and R. H. Strotz〔8〕. Haavelmo, T〔9〕, Jorgenson, D. W.〔11〕. Manne, A. S.〔18〕. Massé, P. B. D.〔19〕. Smith, V. L.〔26〕. Zabel, E.〔27〕. Lutz, F. A. and D. C. Hague (eds)〔16〕所収のいくつかの論文などである．また．Eisner, R. and R. H. Strotz〔8〕は 1960 年頃までの成果を知る上で便利である．

2) ただし，第 2 章の最後で，われわれは，計画期間の終りにおける企業の状態に関する評価を含んだ目的汎関数を扱っている．

3) この点の指摘は，たとえば Lutz, F. A.〔15〕などに見られる。

4) たとえば，Simon, H. A .〔23〕,〔24〕,〔25〕, Cyert, R. M. and J. G. March〔6〕など．

ると思わる．

企業がその現在価値を最大にすることを目的として行動するとき，したがわなければならない主要な制約には二種類のものがある．その第一は，技術的な生産可能性の制約である．種々の投入物と産出物を関係づける生産可能性の集合は，一般に，生産関数によって要約される．そこでは，産出量のフローはいわゆる可変的生産要素のフローと資本用役のフローの関数として表わされ，資本用役のフローは過去からの純投資の流れを加え合わせることによって得られる資本財のストックによって規定される．しかし，生産関数は必ずこのような形で表わされねばならないということはなく，産出量を資本財の投入量の関数と表わしてもよいし，普通の意味での生産関数の考えそのものを放棄してしまうこともできる．[5] われわれは，資本用役のフローは資本財のストックに比例することを仮定して，それぞれの時点における産出量（フロー）を，可変的生産要素の投入量（フロー）と資本財のストックとの関数として表わしている．すなわち，企業の生産関係は，過去のフローの蓄積である資本財のストックと，可変的生産要素の投入量および産出量のフローの関係としてとらえられているわけである．

企業の生産過程をこのように考えると，生産物の産出量，販売量および需要量の関係に適当な仮定をもうけることによって，それぞれの資本財ストックに対して，フロー変数に関する最適な政策が，生産関数の制約の下で得られる．われわれのモデルでは，フロー変数に関する最適化の問題は，販売高と可変的生産要素の投入量にかかわる費用（operating cost と呼ぶ）との差として定義される operating profit の最大化の問題として定式化されている．産出量とか可変的生産要素の投入量などのフロー変数が上の意味で最適に決定されると，operating profit は資本ストックの関数として得られる．したがって，このとき，企業にとって残された問題は，その現在価値を最大にするように資本ストックを決定することである．

---

5) たとえば，Malinvaud, E. [17].

しかし，operating profit 関数は，一般に，生産技術の水準，生産諸要素の供給条件，生産物に対する需要条件などのシフトにしたがって，時と共にシフトするものであると考えることができる．ところが，生産関数や生産物に対する需要関数などは，企業の主体的な行動，たとえば，生産技術の研究・開発であるとか生産物の宣伝・広告などによってシフトさせることのできるものである．

われわれは企業の外部でなされる技術的進歩が企業の技術水準に与える影響を軽視するつもりはないが，過去および現在における生産技術の研究・開発費の蓄積もまた企業の技術水準に対して非常に大きな影響を与えるものであることを認識しなければならない．そこで，われわれは，生産技術の研究・開発費を一種の「粗投資」と考えることができ，その蓄積を一つのストックとして定義することができる．また，生産物に関する過去および現在の宣伝・広告費は，生産物に対する顧客を増すことによって，また消費者の嗜好とか選好表を変化させることによって，生産物に対する需要関数に影響を与える．したがってここでも，宣伝・広告費を一つの「粗投資」と考えることができるのであって，その蓄積を一つのストックとして定義することができる．[6)]

かくして，operating profit 関数に入ってくる生産技術とか生産物に対する需要条件は，単なるパラメターとしてではなく，むしろ決定変数の一つとして考えた方がよいであろう．このように operating profit 関数が資本ストックと上の二つのストックとの関数として得られるとき，企業はその現在価値を最大にするために，資本ストックに関する政策だけでなく，生産技術の研究・開発と生産物の宣伝・広告に関する政策をも決定しなければならないことになる．

企業がその現在価値を最大にしようとするとき，フローの概念である粗投資と資本ストックとがどのような関係にあるかを明らかにしておくことが必要である．この関係が現在価値最大化に際しての第二の主要な制約である．われわ

---

6) Nerlove, H. and K. J. Arrow〔20〕, Dhrymes, P. J.〔7〕

れは，分析を容易にするために，異なった時点に獲得された資本財が提供する用役は生産において完全に代替的であることを仮定する．したがって，それぞれの資本財が提供する用役は，過去において獲得された資本財の和から償却分を差し引いて得られる資本ストックに比例することになる．そして，任意の時点における償却の大きさは，蓄積された資本財のストックに比例するものであることを仮定する．もちろん，償却あるいは置換投資に関する想定としてはこれが可能な唯一のものではない．たとえば，置換投資はある過去の時点になされた粗投資に等しいとか，過去の粗投資の加重平均（ウエイトは個々の設備の“survival curves”から導かれる）に等しいとかというような仮説をたてることも可能である．われわれは，主として，分析を簡単化するという目的のために，上のように想定する．

生産技術の研究・開発費とか広告費も，支出された時点から時間が経過するにつれて，その効果が段々と小さくなって行くものと考えられるから，それらに関して定義されるストックも，資本ストックと同様に，時と共に「摩滅」して行くものであると想定する．

ところで，資本市場が全く完全であることを仮定すると，企業は任意の時点において任意の大きさの資本財を固定された価格で売買することが可能になり，粗投資は可逆的なものになり，企業の資本政策はいわゆる“myopic”な性質をもつものとなる．しかし，現実には，資本財の再販売価格は一般に置換費用に比べてかなり低くなると考えられるから，われわれは，やや極端ではあるが，資本財の再販売は不可能であることを想定し，粗投資は非負でなければならないものと仮定する．生産技術の研究・開発費や宣伝・広告費の性格は本来このようなものである．粗投資の非可逆性の仮定は Arrow〔3〕によって採用されている仮定であるが，われわれは，資本財への粗投資も，生産技術の研究開発，宣伝・広告への粗投資も，単に非負であるばかりでなく，それぞれのある最大値を越えることはできないものと仮定する．尚，以下の議論の中には，ストック変数のとり得る値の範囲について制約がおかれている場合がある．

このようないくつかの制約の下で，企業の最適な投資政策，研究・開発政

策，および宣伝・広告政策を求めようとするとき，非常に有用な tool の一つはいわゆる optimal control の理論である．われわれはその tool を用いて議論を展開する．[7)]

さて，この小論の構成は次のようになっている．第1章では，可変的生産要素市場，資本財市場における完全競争と，生産物市場における不完全競争を仮定した上で，生産物価格，産出量および資本財投資に関する最適政策について論じる．そのとき，資本ストックの値について何の制約もない場合と計画期間の終りにおける資本ストックの状態について制約が課される場合の二つが考察されている．第2章以下でも，ストック変数の値について制約がない場合と計画期間の終りにおけるそれらの値について制約がある場合の両方が論じられる．また，可変的生産要素の市場が完全競争の状態にあるという仮定と，生産物市場が不完全競争の状態にあるという仮定は第2章以下でも保持される．第1章と第2章では生産技術の研究・開発政策と宣伝・広告政策は論じられていない．第2章では，粗投資にかかわる費用（われわれは expansion costと呼んでいる）が粗投資水準の厳密な凸関数として与えられている場合を扱う．また，目的汎関数の中に，計画期間の終りにおける企業の状態が独立した項目として入っている場合について考察する．最後の第3章では，expansion cost が粗投資について線型である場合と厳密な凸関数である場合の両方について，生産技術の研究・開発政策，宣伝・広告政策を資本財への投資政策と共に考察する．

---

7) 以下における技術的な議論のうち，多くの部分を Lee, E. B. and L. Markus〔14〕に負っている．

第1章　基本的モデル

1.1　モデルの構成

まず議論の出発点として単純なモデルを構成し，そこでの企業の最適政策を考察する．そのために以下に述べるような性格をもつ企業を考えよう．

企業の目的は下に定義される現在価値をある長さの計画期間中に最大にすることであると想定する．そして，企業は，各時点において，n種類の資本ストックとm種類の可変的生産要素を用いて1種類の生産物を生産しているものとする．[1)]

いま，時点tにおける総収入を$R(t)$，総費用を$C(t)$によって表わすと，純収入$W(t)$は

$$W(t)=R(t)-C(t) \tag{1.1}$$

で与えられる．

純収入$W(t)$が(1.1)のように与えられるとき最大化されるべき企業の現在価値は，割引純収入の計画期間にわたる積分として下のように定義される．すなわち

$$L=\int_0^T e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}W(t)dt \tag{1.2}$$

ここで，$r(\tau)$は時点τにおける時間割引率，Tは計画期間の長さである．

以下の議論を簡単にするために$r(\tau)$が時を通じて一定であり，

$$r(\tau)=r>0$$

であると仮定すると，現在価値（1.2）は下のように書きかえることができる．

$$L=\int_0^T e^{-rt}W(t)dt \tag{1.3}$$

---

1)　可変的生産要素とは，ここでは，その使用量の時間に関する変化率からも，使用量変更の決定と現実の変更との間の時間の長さからも独立な cost schedule にしたがって，その使用量を変え得る生産要素をいう．

そこで，純収入を構成する諸要因について考察しよう．

まず総収入関数について考える．企業の収入は生産物の販売によるものだけであることを仮定すると，総収入 $R(t)$ は生産物価格 $p(t)$ と販売量 $\rho(t)$ の積として表わすことができる．[2] すなわち

$$R(t)=p(t)\rho(t) \tag{1.4}$$

いま，生産物の在庫水準は常にゼロであり，生産物に対する需要は常に満され，したがって，需要の backlog はないものと仮定すると，時点 t における生産物の需要量を $q(t)$，産出量を $z(t)$ で表わすとき，計画期間中のすべての t に対して次の関係が成立する．

$$\rho(t)=q(t)=z(t) \tag{1.5}$$

ここで，生産物に対する需要関数については次のように想定する．すなわち，需要量 $q(t)$ は生産物価格 $p(t)$ の関数として

$$q(t)=D[p(t),t] \tag{1.6}$$

によって表わされるものとし，関数 D は企業にとって既知であると仮定する．ここで時間 t が関数 D の中に陽表的に含まれていることは，需要量が，企業自身の販売促進費，競争企業の価格とか国民所得その他の諸要因の影響を受けて時と共にシフトし得ることを意味するものである．

ここでは，さしあたり，そのようなシフトはないものとし，需要関数 (1.6) は次のように表わされるものと仮定する．[3]

$$q(t)=D[p(t)] \tag{1.7}$$

そして，関数 D は $0\leqq t\leqq T$ なる t に対して

$$\frac{dD}{dp}<0 \tag{1.8}$$

なる性質をもつことを仮定する．[4]

---

2) したがって，一度獲得された資本財の再販売などは行なわれず，また，生産物の持越在庫品（もしそれがあったとしても）の価格も新しい製品の価格と同じであることが仮定されたことになる．

3) 販売促進費ないし広告宣伝費を含むモデルは後に考察する．

4) したがって，ここでは，生産物市場における不完全競争を考えていることになる．

以上の諸仮定により，総収入関数 (1.4) は，生産物価格 $p(t)$ の関数として

$$R(t)=p(t)z(t)=p(t)D[p(t)] \tag{1.9}$$

と表わされることになる．時点 t における総収入は，したがって，生産物価格を決定することによって決定される．

さて，次に，純収入を構成する第二の要因である総費用関数について考えよう．

総費用は，ここでは，可変的生産要素の投入量にかかわる部分(これを operating cost と呼ぶ) と，粗投費の水準にかかわる部分（これを expansion cost と呼ぶ）とから成るものと仮定し，次のように表わす．[5]

$$C(t)=C^{-}[y_1(t),\ \cdots\cdots,\ y_m(t),\ t]+S[I_1(t),\ \cdots\cdots,\ I_n(t),\ t] \tag{1.10}$$

ここで，$y_i(t)$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ は第 i 可変的要素の投入量，$I_i(t)$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ は第 i 資本財の粗投資水準である．また，関数 C^{-} と S に時間 t が陽表的に含まれていることは，可変的生産要素価格，資本財価格などが変化することによって，それらの関数が時と共にシフトし得ることを意味するものである．

いま，関数 C^{-} と S とが，それぞれ，可変的生産要素価格とそれらの使用量，資本財価格とそれらの粗投資水準の積として表わされることを仮定すると，可変的生産要素価格を $v_i(t)$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$，資本財価格を $w_i(t)$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わすとき，総費用関数 (1.10) は次のように変形される．[6]

$$C(t)=\sum_{i=1}^{m} v_i(t)y_i(t)+\sum_{i=1}^{n} w_i(t)I_i(t)$$

ここで，ベクトル $v(t)$，$w(t)$，$y(t)$，$I(t)$ を，それぞれ

$$v(t)=[v_1(t)\quad v_2(t)\quad \cdots\cdots\quad v_m(t)]$$

$$w(t)=[w_1(t)\quad w_2(t)\quad \cdots\cdots\quad w_n(t)]$$

---

5) 資本ストックの維持費用などは明示的にはとり上げない．また，生産技術の研究・開発，広告宣伝などを含むモデルではそれらに関する費用が含まれてくるが，それらについては後に考察する．

6) expansion cost が粗投資水準の厳密な凸関数として表わされる場合については後に考察する．

$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \qquad I(t)=\begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ \vdots \\ I_n(t) \end{pmatrix}$$

によって定義すると，上の総費用関数 $C(t)$ は次のように表わすことができる．

$$C(t)=v(t)y(t)+w(t)I(t) \tag{1.11}$$

ここでは，可変的生産要素，資本財の各市場において，それぞれの時点で完全競争の状態が成立し，それら各財の価格は企業にとって与件であり，企業は，各時点において，それらの財の任意の量を各市場で成立した競争価格で購入できるものとする．したがって，各時点における総費用は，可変的生産要素の投入量と粗投資の水準を決定することによって決定されることになる．

以上述べてきたことによって，時点 t における企業の純収入 (1.1) と，計画期間にわたる現在価値 (1.3) は，それぞれ，下のように定義される．

$$W(t)=p(t)D[p(t)]-[v(t)y(t)+w(t)I(t)] \tag{1.12}$$

$$L=\int_0^T \{p(t)D[p(t)]-[v(t)y(t)+w(t)I(t)]\}e^{-rt}dt \tag{1.13}$$

さて，企業は，(1.13)で与えられる現在価値を最大にするように行動するわけであるが，そのとき，以下に述べる制約を満すように行動しなければならない．

まず，われわれは，資本用役の時間に関する変化率は純投資に比例するものと考えることができ，さらに，その比例定数は資本ストック1単位当りの資本用役の単位数と解釈できることに注意しよう．

そこで，われわれは，資本ストックが完全に利用されることを想定し，この比例定数が1であることを仮定する．純投資は粗投資から置換投資を差し引いたものであるから，置換投資が資本ストックに比例し，その比例定数が時を通じて一定であることを仮定すると，(1.13)で表わされる現在価値を最大価値を最大にしようとする企業がしたがわなければならない一つの制約は次の形に表わすことができる．

$$dx_i(t)/dt=I_i(t)-\delta_i x_i(t) \qquad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{1.14}$$

ここで，$x_i(t)$ は時点 t における第 i 資本財のストック，δ_i ($0<\delta_i<1$ と仮定する) ($i=1$, ……, n) は置換投資の割合である．

さらに，第 i 資本ストックの初期水準を x_{i0} ($i=1$, ……, n) で表わすと，$x_i(t)$ の満さなければならない $t=0$ における境界条件は

$$x_i(0)=x_{i0} \qquad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{1.15}$$

である．[7]

いま，n 次元ベクトル $x(t)$，x_0 と n 次の対角行列 δ をそれぞれ

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_0=\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}, \quad \delta=\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

によって定義すると，(1.14)，(1.15)はそれぞれ下のように書きかえることができる．

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

$$x(0)=x_0 \tag{1.17}$$

企業が現在価値の最大化をはかるときに満さなければならない次の制約は生産関数の制約である．すなわち，産出量と，可変的生産要素の投入量，資本ストックの水準とは，生産関数

$$z(t)=f[x(t),\ y(t),\ t] \tag{1.18}$$

によって制約される．関数 f に時間 t が陽表的に含まれていることは，生産関数が時と共に変化すること，生産技術の変化があることを示し，t は技術水準を表わすパラメターと解釈される．

ここでは，さしあたり，技術変化はないものと想定し，生産関数(1.18)を次

---

7) 資本ストックに関する初期条件 (1.15) の他に，計画期間中またはその終点において $x_i(t)$ の満さなければならない制約がつけ加えられることがある．また，粗投資 $I_i(t)$ についてもそのとる値の範囲が限定されることがある．これらの制約については後で述べることにする．

のように表わす.[8)]

$$z(t)=g[x(t),\ y(t)] \tag{1.19}$$

ここで，関数 g はすべての正の x，y に対して，2次までの偏導関数をもつこと，その等産出量曲線はすべて原点に対して凸であり，かつ滑らかであることを仮定する.

さて，企業が (1.13) で与えられるその現在価値を最大にしようとするとき，先に述べたいくつかの制約の範囲内でその値を自由に選ぶことのできる変数は，生産物価格 $p(t)$，産出量 $z(t)$．可変的生産要素の投入量 $y(t)$，粗投資の水準 $I(t)$，および資本ストックの水準 $x(t)$ である.[9)] これらのうち，われわれの仮定の下では，産出量は生産物価格が決定されると，(1.5) と (1.7) によって決定され，可変的生産要素の投入量は，産出量と資本ストックの水準が決定されるとそれらの要素価格に応じて決定される．また，資本ストックの水準は粗投資の水準に応じて (1.16) と (1.17) によって決定される．したがって，企業がその現在価値を最大にするために，各時点においてその値を決定しなければならない変数は生産物価格と粗投資の水準とである．尚，計画期間の長さ T は，計画期間の初めにあらかじめ決定されているものと考えよう.[10)]

かくして，企業にとっての問題は，汎関数 (1.13) が制約 (1.16)，(1.17)，(1.19) の下で最大になるように生産物価格と粗投資の水準を決定することである．尚，議論を展開するために若干の仮定を追加することが必要となることがあるが，それらは議論の過程で順次明らかにされて行くはずである.

---

8) 企業による生産技術の研究・開発あるいは新技術の導入について明示的に考慮せず，しかもそれらのための費用も考慮せずに，技術進歩をモデルの中にとり入れることは，技術進歩が，いわば天から無償で与えられるものであることを仮定したことになる．企業による研究・開発政策を含んだモデルは後に考察する.

9) ただし，先に述べたように，$x(t)$ と $I(t)$ については後で追加的な制約が加えられる。

10) 計画期間の長さが，ここでのように，有限かつ固定的であると仮定するときには，目的汎関数の中に計画期間の終りにおける資本ストックの価値を加えた方が妥当かも知れない．これについては後に考察する.

1.2 最適な生産物価格と産出量の決定

前節の議論にしたがえば，企業は各時点において二種類の決定——生産物価格と粗投資水準の決定を行なわなければならない．これらのうちで，生産物価格の決定は，われわれの仮定の下では，比較的容易に行なうことができる．

われわれは，生産物に対する需要関数は企業にとって既知であって，その需要は常に満され，生産物の在庫水準は常にゼロであることを仮定したから，計画期間中の任意の時点における生産物価格は過去および将来の生産物価格の決定から独立に決定することができる．したがって，われわれは，各時点において，与えられた水準の粗投資と資本ストックに対して最適であるようにまず生産物価格を決定し，ついでその価格に応じて粗投資の水準を決定すればよいことになる．

そこで，まず，生産物価格の決定について考えよう．ここでのモデルでは生産物価格が決定されると，(1.5) と (1.7) とから産出量は一義的に決定され，逆に産出量が決定されるとそれに応じて生産物価格が決定される．したがって，生産物価格決定の問題は産出量決定の問題におきかえることができる．

いま，時点 t における operating profit を

$$\Pi(t)=p(t)z(t)-v(t)y(t) \tag{1.20}$$

によって定義すると，産出量（したがって生産物価格）は(1.20)で与えられる operating profit を生産関数

$$z(t)=g[x(t),\ y(t)] \tag{1.19}$$

の制約の下で最大にするように決定すればよい．価格 $p(t)$ は産出量 $z(t)$ に応じて定まるから，(1.20) を

$$\Pi(t)=p[z(t)]z(t)-v(t)y(t) \tag{1.21}$$

と書きかえておく．[11] また，この最大化問題においては生産関数(1.19)に含ま

---

11) このとき仮定 (1.8) は $dp/dz<0$ の形になる．

れている資本ストックの水準 $x(t)$ は所与であることに注意すべきである.[12)]

このように問題を構成すると，operating profit $\Pi(t)$ を最大にする産出量決定の問題は通常用いられる方法によって解くことができる．以下それを二つの段階に分けて説明する．尚，この節では，表現を簡単にするために，必要のない限り，時間 t を省いた形で諸変数を表現することにする．

はじめに，与えられた水準の産出量を生産するための費用が，与えられた可変的生産要素価格の下で最小になるための条件を求める．これはいわゆる要素の最小費用結合を求める問題である．われわれは先に，生産関数 g は（与えられた任意の資本ストック $x>0$ に対して）すべての正の y に関する連続な2次までの偏導関数をもつことを仮定した．したがって，与えられた任意の産出量を生産するのに必要な費用（operating cost）が，与えられた可変的生産要素価格と資本ストックの下で最小になるための第1次条件は，λ を Lagrangean Multiplier とするとき

$$G=vy+\lambda[g(x,\ y)-z] \tag{1.22}$$

を y と λ について偏微分してゼロとおいた方程式が成立することである．すなはち，

$$v_i+\lambda g_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \tag{1.23}$$

$$g(x,\ y)=z \tag{1.19}$$

ここで，$g_i\equiv\partial g/\partial y_i>0$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ である．

また費用最小の第2次条件は

$$F\equiv\begin{vmatrix} g_{11}\cdots\cdots g_{1m} & g_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ g_{m1}\cdots\cdots g_{mm} & g_m \\ g_1\ \cdots\cdots g_m & 0 \end{vmatrix}$$

とし，その $(k+1)$ 次 $(2\leqq k\leqq m)$ の縁付き首座小行列式を

12) したがって，先に述べた資本ストックと資本用役に関する仮定により，資本用役の水準も所与である．

$$F^{(k)} \equiv \begin{vmatrix} g_{11} \cdots\cdots g_{1k} & g_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ g_{k1} \cdots\cdots g_{kk} & g_k \\ g_1 \cdots\cdots g_k & 0 \end{vmatrix}$$

で表わせば，

$$\lambda^{k-1}F^{(k)}<0 \tag{1.24}$$

が成立することである．条件(1.23)により λ は負であるから，この条件は，F の縁付き首座小行列式が $k=2$ のものから順に正，負，正，負，……となることである．ただし，上の表現において，$g_{ij}\equiv\partial^2 g/\partial y_i \partial y_j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$ である．生産関数に関する前節の仮定により，この条件(1.24)は満されている．

したがって，与えられた可変的要素価格と資本ストックの下で，与えられた産出量を生産するための operating cost を最小にする可変的生産要素の組合せは，方程式(1.23)と(1.19)とを y_i $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ と λ について解くことによって得られる．この解は，一般に，産出量，資本ストックおよび可変的生産要素価格の関数として得られるはずである．

そこで，このような可変的生産要素の投入量 y_i $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ をこれらの関数として次のように表わす．

$$y_i=y_i(z,\ x,\ v) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \tag{1.25}$$

(1.25)の形で可変的生産要素の最小費用結合が求められると，次には operating profit Π を最大にするように産出量を決定することが問題になる．

そこで，(1.25) においてすべての x と v を固定したままで z だけを変化させると，与えられた資本ストックと可変的生産要素価格の下で operating profit を最大にする産出量を決定することができる．いま，このような最小費用結合の下での operating cost を

$$C^-=C^-(z,\ x,\ v) \tag{1.26}$$

によって表わすと，operating profit Π は次式によって与えられる．

$$\Pi=p(z)z-C^-(z,\ x,\ v) \tag{1.27}$$

かくして，Π が与えられた x と v の下で最大になるための第1次条件は

$$z\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+p(z)-\frac{\partial C^{-}}{\partial z}=0 \tag{1.28}$$

が成立することであり，また，第2次条件は

$$z\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+2\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial^2 C^{-}}{\partial z^2}<0 \tag{1.29}$$

が成立することである．

(1.29) の成立を仮定して，(1.28) を z について解くと，operating profit を最大にする各時点の産出量が，与えられた資本ストックと可変的生産要素価格の下で決定される．そこでこのような産出量を x と v の関数として

$$z=z(x,\ v) \tag{1.30}$$

によって表わす．

また，各時点における operating profit を最大にする産出量が (1.30) のように決定されると，各時点における最適生産物価格は(1.5)と(1.7)とから，上のような最適産出量に応じて決定されるから，その最適生産物価格は

$$p=p(x,\ v) \tag{1.31}$$

の形に表わすことができる．

以上により，企業が，与えられた資本ストックと可変的生産要素価格の下で，産出量を $z(x,\ v)$ に，また生産物価格を $p(x,\ v)$ に決定するとき，各時点における operating profit Π は最大になる．そこで，このような operating profit を

$$\Pi=\Pi(x,\ v) \tag{1.32}$$

によって表わすことにする．そして，(1.32) で表わされる operating profit Π は資本ストック x の凹関数であることを仮定する．operating profit が (1.32)で与えられるとき，時点 t における純収入(1.12)は

$$W=\Pi(x,\ v)-wI \tag{1.33}$$

によって，また，現在価値(1.13)は

$$L=\int_0^T[\Pi(x,\ v)-wI]e^{-rt}dt \tag{1.34}$$

によって与えられる．

かくして，企業にとって残された問題は，(1.34)を最大にするように各時点の粗投資，したがって，資本ストックの水準を決定することである．

1.3 最適投資の決定

産出量と生産物価格が前節におけるように決定されると，企業にとって残された問題は汎関数(1.34)を(1.16)と(1.17)の制約の下で最大にするように，各時点における粗投資水準を決定することである．

ところで，ここでのモデルにおいては，可変的生産要素の価格 $v(t)$ は企業にとって与件である．そしてそれらは，さしあたり，以下の議論に影響を与えないから，表現を簡単にするために(1.32)で与えられる operating profit を $\Pi[x(t),\ t]$ によって表わすことにし，時間 t を関数 Π に陽表的に含めることによって Π が（可変的生産要素価格の変化に応じて）時と共にシフトし得るものであることを表わす．

また，今までの定式化では，問題を現在価値最大化の問題として扱ってきたのであるが，以下の議論においては現在価値に -1 を乗じて得られる負の現在価値の最小化の問題として扱うことにする．

さて，このとき，企業にとっての問題は，汎関数

$$J=\int_0^T \{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{1.35}$$

を制約

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

$$x(0)=x_0 \tag{1.17}$$

の下で最小にする粗投資水準 $I(t)$ を決定することである．

周知のように，この種の問題は変分学の手法を用いることによって扱うことができる．ここでは，Pontryagin の maximum principle をはじめとして近時発展のいちじるしい，いわゆる最適制御（optimal control）の理論によって扱うことにする．[13)]

---

13) たとえば，Pontryagin, L. S. et al. [21]，Lee, E. B. & L. Markus [14] など．

われわれの資本ストック $x(t)$ と粗投資 $I(t)$ は，optimal control の理論において，それぞれ状態変数(state variables)，制御変数(control variables)と呼ばれているものに相当する．また，粗投資と資本ストックの関係を規定する微分方程式体系(1.16)は，制御 $I(t)$ と状態 $x(t)$ を結びつける制御プロセス(control process) と呼ばれ，汎関数(1.35) は目的汎関数とか，費用汎関数，あるいは performance index などと呼ばれている．

さて，上のような問題は，制御変数 $I(t)$ と状態変数 $x(t)$ に，また計画期間の長さ T などについて課される制約にしたがって，いろいろな形の問題として定式化されるのであるが，それらについては，それぞれ項を改めて論じることにしよう．

ただし，以下において定式化されるすべての問題において次のことを仮定する．

(1) $I(t)$ は計画期間に属するすべての t に対して Lesbegue 可測であり，かつその値は

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

なる制約を満さなければならないものとする．ここで，ベクトル $I_{\max}$ は

$$I_{\max} = \begin{pmatrix} I_{1\max} \\ I_{2\max} \\ \vdots \\ I_{n\max} \end{pmatrix}$$

なる n 次元ベクトル，0はゼロベクトルである．また，$I_{i\max}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ は正かつ有限なる実数であり，$I_{\max}$ は最大可能な粗投資水準から成るベクトルである．そこで，制約(1.36)を満す I から成る，n 次元ベクトル空間 R^n の集合を Ω で表わし，粗投資に関する制約集合と呼ぶ．Ω はコンパクトな凸集合である．

このとき，$I(t)$ は区間 $[0,\ T]$ から Ω の中への Lesbegue 可測な関数であり，微分方程式体系(1.16)は，与えられた初期条件の下で，$0 \leqq t \leqq T$ の部分区間において唯一つの絶対連続な解 $x(t)$ をもつ．このことは，周知のように微

分方程式に関する Carathéodory の存在定理の結果である.[14] この $x(t)$ を制御関数 $I(t)$ に対応するトラジェクトリと呼ぶ. トラジェクトリ $x(t)$ は連続で, 測度ゼロの点を除いて導関数をもち, 微分方程式体系(1.16)はほとんどすべての点で満される.

(2) operating profit $\Pi[x(t), t]$ は, すべての $x>0$ に対して, 2次までの偏導関数をもち, $\Pi[x(t), t]\geqq 0$, $\partial\Pi/\partial x_i>0$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ なる凹関数である.

次に, 以下における議論を展開するに際して有用ないくつかの概念を定義しておく.[15]

(1) 標的集合　投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の値が n 次元の x 空間 R^n のある集合に属することがあらかじめ要請されているとき, この集合を標的集合 (target set) と呼ぶ. 標的集合は R^n の唯一点のこともあり得るし, R^n 全体のこともある. また, それは時間 t の関数として与えられることもあるし, 固定されている場合もある.

(2) 許容投資政策—許容制御関数　可測な制御関数—投資政策のうちで, 資本ストックの初期状態 x_0 を制御プロセス (1.16) にしたがって与えられた標的集合に属する点に移し, かつその値が制約集合 Ω に属するすべての投資政策—制御関数の類を許容投資政策類—許容制御関数類 (class of admissible control functions) と呼び, 記号 Δ で表わす. 以下における議論の対象は Δ に属する投資政策である.

(3) 最適投資政策—最適制御関数　われわれの問題は目的汎関数(1.35)を最小にする投資政策を Δ の中から選びだすことである. そこで汎関数 J を投資政策の関数として $J(I)$ と表わすとき, Δ に属する任意の許容投資政策 $I(t)$ に対して

---

14) たとえば, Coddington, E. A. & N. L. Levinson〔5〕, Lee, E. B. & L. Markus〔13〕, 〔14〕.

15) 尚, それらの定義は, 定式化される問題の異なるにつれて, それぞれ, やや異なったものとなることに注意すべきである. 詳細については, 必要に応じて, それぞれの項で述べることにする.

$$J(I^*) \leqq J(I)$$

が成立する許容投資政策 I^* を最適投資政策—最適制御関数と呼ぶ.

(4) 制御可能プロセス　ある制御プロセスにおいて，資本ストックの初期状態 x_0 をあらかじめ定められた標的集合の点に移す許容投資政策—許容制御関数が少くとも一つは存在するとき，その制御プロセスは制御可能なプロセスであるという.

(5) 到達可能点集合　資本ストックの初期状態 $x(0)=x_0$ から始まって，(1.16)にしたがって制御され，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリを $x(t)$ とするとき，そのすべての終期状態 $x(T)\in R^n$ の集合を資本ストックの到達可能点集合と呼び，$A(T)$ で表わす。また$A(T)$ の境界点から成る集合を $\partial A(T)$ で表わす.

(6) 極値投資政策—極値制御関数　資本ストックの初期状態 x_0 を，制御プロセス (1.16) にしたがって，集合 $\partial A(T)$ に属する終期状態に移す投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を極値投資政策—極値制御関数と呼ぶ. そのような投資政策に対応する資本ストックのトラジェクトリを極値トラジェクトリと呼ぶ.

(7) 正規プロセス　ある制御プロセスにおいて，資本ストックの初期状態 x_0 を，集合 $\partial A(T)$ に属する同一の終期状態に移す任意の二つの極値投資政策 $I^1(t)$, $I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで $I^1(t)=I^2(t)$ であるとき，その制御プロセスは正規プロセス (normal process) であるという.

以上において，次項以下の議論の展開に際して重要な役割をはたすいくつかの概念を簡単に説明した. これらの他にも必要な概念があるけれども，それらについてはその都度定義することにしたい.

1.3.1 標的集合が x 空間全体の場合

まず最初に，資本ストックの値については何の制約も課されていない場合，すなわち，計画期中の標的集合が x 空間 R^n 全体の場合における最適投資政策

について考える.[16]

このとき，われわれの問題は，資本ストックの初期状態x_0を制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

にしたがって，x空間R^nのある点に移し，しかも目的汎関数

$$J(I)=\int_0^T\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{1.35}$$

を最小にする投資政策—最適投資政策—を，制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{1.36}$$

を満すものの中から選ぶことである.

さて，この問題を解くために，初期状態x_0から始まり，プロセス(1.16)にしたがって制御され，$I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の到達可能点集合 $A(T)$ の性質から調べることにしよう.

さて，optimal control の理論においてよく知られた結果を援用すると，[17] 集合 $A(T)$ の性質について，われわれは次のことを主張することができる.

[主張1] 資本ストックの初期状態x_0から始まり，粗投資に関する制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \tag{1.36}$$

をもつ，資本ストックと粗投資の間の制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

の到達可能点集合 $A(T)$ はコンパクトな凸集合である.

[証明] はじめに$A(T)$がコンパクトであること，すなわち，R^nにおいて閉かつ有界であることを証明する．そのためには，$A(T)$の任意の点列 $\{x^\nu(T)\}$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ から，ある極限 $\bar{x}(T)\in A(T)$ に収束する部分列を選べる

---

16) この場合，集合Δが空でなく，制御プロセス (1.16) が制御可能であることはほとんど自明である.

また，われわれの問題が経済学的な意味を失わないためには，少くとも $x(t)\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq T)$ でなければならないが，variation-of-parameter formula によれば，微分方程式体系 (1.16) の解は初期条件 (1.17) の下で

$$x(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I(\tau)d\tau$$

となるから，$I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対してはこの条件は満されている.

cf. Coddington, E. A. & N. L. Levinson〔5〕ch. 3.

17) たとえば，Schmaedeke, W. W.〔22〕. Lee, E. B. & L.Markus〔14〕.

ことを証明すればよい．

そこで，$x^{\nu}(T)$ に対応する (1.16) の解 $x^{\nu}(t)$ と，トラジェクトリ $x^{\nu}(t)$ を産み出す投資政策 $I^{\nu}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を考える．いわゆる，variation-of-parameter formula によれば

$$x^{\nu}(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^{\nu}(\tau)d\tau \tag{1.37}$$

が成立する．

ところで，与えられた有限区間において可測であり，与えられたコンパクトな凸集合にその値をもつすべてのベクトル関数族は点列として弱収束であることが知られているから，投資政策—制御関数 $I^{\nu}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ の集合は弱コンパクトであり，ある投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に弱収束する部分列 $\{I^{\nu_i}(t)\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が存在する．すなわち，

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^{\nu_i}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}\bar{I}(\tau)d\tau \tag{1.38}$$

投資政策 $\bar{I}(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリを $\bar{x}(t)$ とすると，(1.37)，(1.38)により

$$\bar{x}(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}\bar{I}(\tau)d\tau=\lim_{i\to\infty}x^{\nu_i}(t)$$

したがって，

$$\lim_{i\to\infty}x^{\nu_i}(T)=\bar{x}(T)\in A(T)$$

よって，到達可能点集合 $A(T)$ はコンパクトである．

次に，$A(T)$ が凸集合であることを証明する．そのためには，$A(T)$ に属する任意の 2 点 $x^1(T)$ と $x^2(T)$ を結ぶ線分

$$(1-\mu)x^1(T)+\mu x^2(T),\qquad 0\leqq\mu\leqq 1$$

が $A(T)$ に属することを示せばよい．

$x^1(T)$，$x^2(T)$ に対応する (1.16) の解を，それぞれ，$x^1(t)$，$x^2(t)$ とし，それらを産み出す投資政策を，それぞれ，$I^1(t)$，$I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ とする．さらに，投資政策 $I^{\mu}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を

$$I^{\mu}(t)=(1-\mu)I^1(t)+\mu I^2(t) \tag{1.39}$$

によって定義すると，$I^{\mu}(t)$に対応する資本ストックのトラジェクトリ$x^{\mu}(t)$は

$$x^{\mu}(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^{\mu}(\tau)d\tau$$

によって与えられる．これは，(1.39)によって，

$$x^{\mu}(t)=(1-\mu)[e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^1(\tau)d\tau]$$

$$+\mu[e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^2(\tau)d\tau$$

と表わされ，したがって

$$x^{\mu}(t)=(1-\mu)x^1(t)+\mu x^2(t)$$

$$x^{\mu}(T)=(1-\mu)x^1(T)+\mu x^2(T)$$

となる．よって到達可能点集合$A(T)$は凸集合である．　　（証明終り）

以上において，われわれは，計画期間の終りにおける各資本ストックの水準はn次元空間R^nにおけるコンパクトな凸集合を形成することを証明した．

次に，ある投資政策—制御関数が極値投資政策—極値制御関数であるための条件について考察する．すなわち，資本ストックの初期状態x_0を，計画期間の終りに，到達可能点集合$A(T)$の境界点集合$\partial A(T)$に属する終期状態に移す投資政策はどのようなものであるかを検討する．

そのために，微分方程式体系

$$dx(t)/dt=-\delta x(t)$$

の随伴方程式体系

$$d\eta(t)/dt=\eta(t)\delta$$

を導入する．ここで$\eta(t)$は$\eta_i(t)$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）を成分とするn次元行ベクトルである．この随伴方程式体系は

$$\eta(t)=\eta_0 e^{t\delta}$$

なる形の解をもつ．ただし，η_0は定数ベクトルである．そして，$\eta_0 \neq 0$ならば，この$\eta(t)$は区間$0 \leqq t \leqq T$においてゼロでないノントリビアルな解である．

さて，われわれは，ある投資政策が極値投資政策であるための条件につい

て，次のように主張することがきる.[18]

[主張2] 資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ，粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{1.16}$$

を考える．投資政策 $I(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，$0 \leqq t \leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$\eta(t) I(t) = \max_{I \in \Omega} \eta(t) I \tag{1.40}$$

を満す，微分方程式体系

$$d\eta(t)/dt = \eta(t)\delta \tag{1.41}$$

のトリビルでない解が存在するとき，またそのときに限って極値投資政策である．

[証明] はじめに，$I(t)$ が極値投資政策であれば，[主張2] の要求するような随伴方程式の解が存在することを証明する．

さて，$I(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ が極値投資政策で資本ストックの初期状態 x_0 をトラジェクトリ

$$x(t) = e^{-\delta t} x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)\delta} I(\tau) d\tau$$

によって終期状態 $x(T) \in \partial A(T)$ に移すものと仮定する．

到達可能点集合 $A(T)$ はコンパクトな凸集合であるから，境界点 $x(T)$ において $A(T)$ に対する支持超平面が存在する．$x(T)$ におけるこの超平面に対する外向きの法線ベクトルを $\eta(T)$ で表わす．

トリビアルでない随伴トラジェクトリを

$\eta(t) = \eta_0 e^{t\delta}, \qquad \eta(T) = \eta_0 e^{T\delta}$

によって定義し，$\eta(t)$ と $x(t)$ の内積を求めると，

---

18) この［主張2］は，いわゆる time optimal control の問題における maximum principle とほとんど同じ内容のものである。
cf. Pontryagin, L. S. et al. [21]

$$\eta(t)x(t)=\eta_0x_0+\int_0^t\eta_0e^{\tau\delta}I(\tau)d\tau$$

$$=\eta_0x_0+\int_0^t\eta(\tau)I(\tau)d\tau \qquad (1.42)$$

したがって

$$\eta(T)x(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(\tau)I(\tau)d\tau \qquad (1.43)$$

である.

ところで，いま，区間 [0，T] に属する，正の長さをもったある部分区間において

$$\eta(t)I(t)<\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が成立するものと仮定し，投資政策 $I^1(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を次のように定義する.[19]

$$\eta(t)I^1(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

このとき，投資政策 $I^1(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリを $x^1(t)$ とすると $\eta(t)x^1(t)$ は (1.42) と同様に求められて，$\eta(T)$ と $x^1(T)$ の内積は

$$\eta(T)x^1(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(\tau)I^1(\tau)d\tau \qquad (1.44)$$

によって与えられる.

しかるに，投資政策 $I^1(t)$ の定義により

$$\int_0^T\eta(\tau)I(\tau)d\tau<\int_0^T\eta(\tau)I^1(\tau)d\tau$$

であるから，(1.43)と(1.44)により

$$\eta(T)x(T)<\eta(T)x^1(T) \qquad (1.45)$$

でなければならない.

ところが，$\eta(T)$ は，境界点 $x(T)$ における到達可能点集合 $A(T)$ の支持超平面に対する外向き法線ベクトルとして定義したのであるから，不等式(1.45)の成立はこのことに反する．この不等式の成立は点 $x^1(T)$ が支持超平

19) 投資政策 $I^1(t)$ の可測性については，Lee, E. B. & L. Markus〔14〕，pp.160—163.

面によって集合 $A(T)$ から分離されることを意味するが，$x^1(T)$ は境界点集合 $\partial A(T)$ に属する点であるから，このことは不可能である．

したがって，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで

$$\eta(t)I(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

でなければならない．

次に，トルビアルでないある随伴トラジェクトリ

$$\eta(t)=\eta_0 e^{\delta t}$$

に対して，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.40) を満すことを仮定し，このとき $I(t)$ は極値投資政策であることを証明する．

そのためには，投資政策 $I(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の終期状態が到達可能点集合 $A(T)$ の内点ではなく，その境界点となっていることを示せばよい．前半の証明と同じく帰謬法によって証明する．

そこで，$x(t)$ の終期状態 $x(T)$ が集合 $A(T)$ の内点であると想定しよう．

指定された随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ に対して

$$\eta(T)x(T)<\eta(T)x^2(T)$$

なる点 $x^2(T)\in A(T)$ を考える．資本ストックのトラジェクトリ $x^2(t)$ を産み出す投資政策を $I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ とすると，上の想定により，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで

$$\eta(t)I^2(t)\leqq\eta(t)I(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が成立することになる．そこで，上と同様にして，$\eta(T)$ と $x(T)$，$\eta(T)$ と $x^2(T)$ の内積を求めると，

$$\eta(T)x^2(T)\leqq\eta(T)x(T)$$

なる結論が得られる．

しかるに，これは矛盾であるから，$x(T)$ で表わされる資本ストックの終期状態は到達可能点集合 $A(T)$ の境界点でなければならない．　（証明終り）

この［主張2］は，適当な随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ に対して，計画期間中のほとんどすべての時点において最大値条件(1.40)を満す投資政策は，資本ス

トッタの初期状態 x_0 を到達可能点集合の境界点に移すこと，そして，極値投資政策は，そのような条件を満す投資政策にかぎることを主張している．

次に，投資政策に関する制約(1.36)をもつわれわれの制御プロセス(1.16)が正規プロセスであること，すなわち，資本ストックの初期状態 x_0 を到達可能点集合 $A(T)$ の境界点集合 $\partial A(T)$ の各点に移す極値投資政策—極値制御関数は，それぞれ唯一つであることを証明する．[20]

[主張3] 資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{1.16}$$

の到達可能点集合 $A(T)$ の各境界点に資本ストックの初期状態 x_0 を移す極値投資政策はそれぞれ唯一つである．

[証明] $\bar{I}(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，資本ストックの初期状態 x_0 を終期状態 $\bar{x}(T) \in \partial A(T)$ に移す極値投資政策であるとする．$\bar{I}(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $\bar{x}(t)$ は極値トラジェクトリである．

到達可能点集合 $A(T)$ は，[主張1] により凸かつコンパクトであるから，$A(T)$ はその境界点 $\bar{x}(T)$ において支持超平面をもつ．

$\eta(t)$ を，$\eta(T)$ が点 $\bar{x}(T)$ における $A(T)$ の外向き法線となるような随伴トラジェクトリとする．このとき，[主張2] により，計画期間 $[0, T]$ のほとんどすべてのとところで最大値条件

$$\eta(t)\bar{I}(t) = \max_{I \in \Omega} \eta(t) I$$

が成立する．

さて，資本ストックの初期状態 x_0 を同一の終期状態 $\bar{x}(T) \in \partial A(T)$ に移す投資政策を $I(t)$ で表わし，それに対応する資本ストックのトラジェクトリを $x(t)$ とする．

以下において，上のような二つの投資政策 $\bar{I}(t)$ と $I(t)$ とが計画期間 $[0, T]$

---

20) この〔主張3〕と本質的には同じ内容のものが，La Salle によってこことは異なった仕方で証明されている．La Salle, J. P. [12].

のほとんどすべてのところで一致しなければならないことを証明する．

そこで，区間 $[0,\ T]$ の正の長さをもつある部分区間において

$$\eta(t)I(t)<\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が成立することを仮定しよう．

variation-of-parameter formula によって，$x(T)$ と $\eta(T)$ を求め，それらの内積をつくれば，

$$\eta(T)x(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(t)I(t)dt$$

であり，$I(t)$ を $\bar{I}(t)$ に，$x(t)$ を $\bar{x}(t)$ に特定化すると

$$\eta(T)\bar{x}(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(t)\bar{I}(t)dt$$

であるから，上の仮定の下では

$$\eta(T)x(T)<\eta(T)\bar{x}(T)$$

が成立しなければならない．

しかしながら，この不等式の成立は，資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の終期状態が $\bar{x}(T)$ であるという先の仮定に反する．

よって，$\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ と同一の終期状態をもたらす投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，最大値条件

$$\eta(t)I(t)=\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

を $0\leqq t\leqq T$ なるほとんどすべての t に対して満すものでなければならない．

さらに，上の条件を同一の $\eta(t)$ に対して成立せしめるためには，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべての点で

$$I(t)=\bar{I}(t)$$

でなければならない．よって，資本ストックと粗投資の間の制御プロセス (1.16)は正規プロセスである．　（証明終り）

以上は，資本ストックの初期状態 x_0 をプロセス (1.16) にしたがって到達可能点集合 $A(T)$ の境界点で表わされる終期状態に移す投資政策は，それぞれ唯一つであることを主張するものである．

ところで，制御プロセス (1.16) が正規プロセスであることを利用すると，

[主張1]の結果を強めることができる．そこで，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ が R^n における厳密に凸なる（strictly convex）集合であることを証明しよう．

[主張4] 資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ，粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{1.16}$$

の到達可能点集合 $A(T)$ は厳密に凸であり，内点をもつ．

[証明] 帰謬法によって証明する．そこで逆に，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ が厳密には凸でないことを仮定する．[主張1] により，$A(T)$ はコンパクトな凸集合であるから，その支持超平面 Q が存在する．この支持超平面 Q と $A(T)$ との共通集合 $Q \cap A(T)$ は二つ以上の点を含むものとする．このとき，それらを結ぶコンパクトな線分 l が存在する．そして，線分 l に属する2点 P_a，P_b に資本ストックの初期状態 x_0 を移す投資政策を，それぞれ，$I^a(t)$，$I^b(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ で表わす．

いま，区間 $\boldsymbol{T}: 0 \leqq t \leqq T$ の可測な部分集合 B に対して $2n$ 次元の実ベクトル

$$\Gamma(B) = \begin{pmatrix} \int_B e^{\tau\delta} I^a(\tau) d\tau \\ \int_B e^{\tau\delta} I^b(\tau) d\tau \end{pmatrix}$$

を考えると，ベクトル集合関数 $\Gamma(B)$ はある値

$$\Gamma(B) = \begin{bmatrix} \beta_a \\ \beta_b \end{bmatrix}, \qquad \Gamma(\phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をとる．ここで ϕ は空集合である．

測度理論に関する Liapnov の結果によれば，[21]

$$\Gamma(B_{\frac{1}{2}}) = \Gamma(\boldsymbol{T} - B_{\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} \beta_{\frac{a}{2}} \\ \beta_{\frac{b}{2}} \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

---

21) cf. Lee, E. B. & L. Markus [14], pp.163—164.

となるような区間 $\boldsymbol{T}$ の部分集合 $B_{\frac{1}{2}}$ が存在する.[22] ここで，点 P_a と P_b とは異なった点であるから，$\beta_a \neq \beta_b$ であり，部分区間 $B_{\frac{1}{2}}$ と $(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})$ とは共に零集合 (null set) ではない.

いま，$I^1(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を，部分区間 $B_{\frac{1}{2}}$ において $I^a(t)$ に等しく，また部分区間 $(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})$ において $I^b(t)$ に等しい投資政策と定義し，$I^2(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を，$B_{\frac{1}{2}}$ において $I^b(t)$ に，$(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})$ において $I^a(t)$ に等しい投資政策と定義する．すなわち

$$I^1(t)=\begin{cases} I^a(t) & \text{for } t \in B_{\frac{1}{2}} \\ I^b(t) & \text{for } t \in (\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$$I^2(t)=\begin{cases} I^a(t) & \text{for } t \in (\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}) \\ I^b(t) & \text{for } t \in B_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

このとき，投資政策 $I^1(t)$，$I^2(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリを，それぞれ，$x^1(t)$，$x^2(t)$ とすると，それらの終期状態は

$$\left.\begin{aligned} x^1(T)&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{B_{\frac{1}{2}}} e^{t\delta}I^a(t)dt+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}} e^{t\delta}I^b(t)dt \\ x^2(T)&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{B_{\frac{1}{2}}} e^{t\delta}I^b(t)dt+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}} e^{t\delta}I^a(t)dt \end{aligned}\right\} \quad (1.47)$$

によって与えられる.

他方，P_a，P_b は，それぞれ，投資政策 $I^a(t)$，$I^b(t)$ による資本ストックの終期状態であるから

$$\left.\begin{aligned} P_a&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}} e^{t\delta}I^a(t)dt \\ P_b&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}} e^{t\delta}I^b(t)dt \end{aligned}\right\} \quad (1.48)$$

となる．(1.46) を考慮すると，(1.47) と (1.48) により次の関係式が得られる.

$$x^1(T)=x^2(T)=\frac{1}{2}(P_a+P_b) \quad (1.49)$$

---

22) $\boldsymbol{T}$-$B_{\frac{1}{2}}$ は $\boldsymbol{T}$ と $B_{\frac{1}{2}}$ との差集合である.

ところが，制御プロセス（1.16）は正規プロセスである（[主張3]）から，(1.49) の左半分の成立は計画期間 $\boldsymbol{T}: 0 \leqq t \leqq T$ のほとんどすべてのところで $I^1(t)=I^2(t)$ であることを意味する．そしてこのことは，部分区間 $B_{\frac{1}{2}}$ と（$\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}$）のほとんどすべてのところで，$I^a(t)=I^b(t)$ であることを意味する．

しかるに，このことは，点 P_a と P_b とが線分 l に属する異なった終期状態であるという先の仮定に反する．

よって，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ は厳密に凸でなければならない．（証明終り）

さて，以上において証明されたことがらを要約すると次のようになる．

投資政策に関する制約(1.36)をもち，資本ストックの初期状態 x_0 から始まる制御プロセス(1.16)は，計画期間の終りにおける資本ストックの終期状態から成る集合を n 次元ベクトル空間における厳密に凸でコンパクトな集合とならしめること，さらに，この到達可能点集合の各境界点で表わされる資本ストックの組合せは，それぞれ，唯一通りの投資政策によって達成されることが明らかにされた．また，資本ストックの与えられた初期状態を上の境界点集合に属する終期状態に移す投資政策はどのようなものであるかが明らかにされたのである．

いままでの議論には最小にすべき目的汎関数（負の現在価値）(1.35)は登場していない．そこで，以下の議論においては，それを議論の中に導入する．

そのために，新しい状態変数 $x^0(t)$ を

$$x^0(t)=\int_0^t \{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{1.50}$$

$$x^0(0)=0 \tag{1.51}$$

によって，またベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

によって定義する．

このとき，$J(I)=x^0(T)$ となるから，最小にすべきものは新しい状態変数 $x^0(t)$ の $t=T$ における値である．また $\boldsymbol{x}(t)$ の初期状態を

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\x_0\end{bmatrix}$$

によって表わす．

状態変数 $x^0(t)$ を上のように定義すると，$x^0(t)$ に関する制御プロセスは

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{1.52}$$

となる．

初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関する制約 (1.36) をもつ制御プロセス (1.52)，(1.16)の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}(T)$ で表わすと，$\boldsymbol{A}(T)$ は $\boldsymbol{x}_0$ から始まるトラジェクトリ $\boldsymbol{x}(t)$ のすべての終期状態から成る集合であり，$\boldsymbol{x}(t)$ は微分方程式体系(1.52)，(1.16)の投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対する解である．

さて，$I(t)$ の値はコンパクトな制約集合 Ω に属するから，目的汎関数と資本ストックの到達可能集合 $\boldsymbol{A}(T)$ は $(n+1)$ 次元ベクトル空間 R^{n+1} において有界である．そして，$\boldsymbol{A}(T)$ の x 空間 R^n への射影は厳密に凸なるコンパクトな集合 $A(T)$ である．われわれは，以下において，集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の幾何学的性質を問題にするのであるが，そのとき $x^0(T)$を垂直方向に測るものとすれば，$\boldsymbol{A}(T)$ の上方境界 (upper boundary) がどのような形のものであるかは問う必要はなく，その下方境界 (lower boundary) のみが問題である．それは，われわれが，目的汎関数（負の現在価値）$J(I)=x^0(T)$ の最小化の問題を扱かっているらである．

さて，ここでは，拡大された制御プロセス(1.52)，(1.16)にしたがって，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点に移す投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を極値投資政策と呼ぶことにし，集合 $\boldsymbol{A}_v$ を次のように定義する．すなわち，$\chi^0\leqq x^0$ なる点 $(\chi^0,x)\in\boldsymbol{A}(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,x)\in R^{n+1}$ の集合として $\boldsymbol{A}_v$ を定義する．[23]

---

23) したがって，$\boldsymbol{A}_v$ の下方境界の点は $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点である．

このとき，$J(I)=x^0(T)$ を最小ならしめる最適政策の存在が次のように主張できる．

[主張5]　初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{1.52}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

を考える．このとき，集合 $\boldsymbol{A}_v$ は R^{n+1} における閉凸集合である．したがって，集合 $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ に属し，それは資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ 上で定義された凸超曲面を形成し，負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適投資政策が存在する．

[証明]　最初に集合 $\boldsymbol{A}_v$ が閉集合であることを証明する．そのために，R^{n+1} の点

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix} a^0 \\ a \end{bmatrix}$$

に収束する点列

$$\boldsymbol{a}^\nu=\begin{bmatrix} a^{0\nu} \\ a^\nu \end{bmatrix}$$

を考える．集合 $\boldsymbol{A}_v$ の定義により，$x^\nu(T)=a^\nu$，$x^{0\nu}(T)\leqq a^{0\nu}$ なるトラジェクトリ

$$\boldsymbol{x}^\nu(t)=\begin{bmatrix} x^{0\nu}(t) \\ x^\nu(t) \end{bmatrix}$$

をもつ投資政策 $I^\nu(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ の列を見つけることができる．さらに，[主張1] により，投資政策列（の部分列，ただし同じ記号で表わす）$I^\nu(t)$ がある投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に弱収束し，対応する資本ストックのトラジェクトリの列 $x^\nu(t)$ があるトラジェクトリ $\bar{x}(t)$ に弱収束するものと想定することができる．すなわち，

$$\lim_{\nu\to\infty} I^\nu(t)=\bar{I}(t)\subset\Omega \quad (0\leqq t\leqq T)$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{\nu}(t)=\bar{x}(t)$$

よって次の不等式が成立する．

$$\lim_{\nu\to\infty} a^{0\nu}=\bar{a}^0\geqq\lim_{\nu\to\infty}\inf x^{0\nu}(T) \tag{1.53}$$

また，制約集合 Ω がコンパクトな凸集合であり，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ が R^{n+1} において有界であることにより，

$$\lim_{\nu\to\infty}\inf x^{0\nu}(T)\geqq\bar{x}^0(T) \tag{1.54}$$

が成立する．

したがって，(1.53) と (1.54) により，投資政策 $\bar{I}(t)$ に対応するトラジェクトリ

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}^0(t)\\ \bar{x}(t)\end{bmatrix}$$

の終期状態は

$$\bar{\boldsymbol{x}}(T)=\begin{bmatrix}\bar{x}^0(T)\\ \bar{a}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{A}(T)$$

である．よって，$\bar{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{A}_v$ となり，$\boldsymbol{A}_v$ が R^{n+1} における閉集合であることが証明されたことになる．

ところで，もし終期状態 $\bar{\boldsymbol{a}}$ が到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属するならば，$\bar{x}^0(T)=\bar{a}^0$，$\bar{x}(T)=\bar{a}$ となり，したがって，投資政策 $\bar{I}(t)$ は初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\bar{\boldsymbol{a}}$ に移す．よって，集合 $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界は $\boldsymbol{A}(T)$ に属する．

最後に，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界（したがって $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界）が凸であることを証明する．

二つの投資政策 $I^1(t)$，$I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の 2 点を，それぞれ，$\boldsymbol{x}^1(T)$，$\boldsymbol{x}^2(T)$ とする．いま，点 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P^0\\ P\end{bmatrix}$$

を，

$$\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{x}^1(T)+(1-\mu)\boldsymbol{x}^2(T)\qquad(0\leqq\mu\leqq1)$$

$$\boldsymbol{x}^i(T)=\begin{bmatrix} x^{0i}(T) \\ x^i(T) \end{bmatrix} \qquad (i=1,\ 2)$$

によって定義すると，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界が凸超曲面であることを証明するためには，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\boldsymbol{P}$ に移す投資政策が構成できて，終期状態 $\boldsymbol{P}$ が到達可能であること，すなわち $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{A}(T)$ なることを示せばよい．

そこで，対応するトラジェクトリ $x^{0\mu}(t)$，$x^\mu(t)$ をもつ投資政策 $I^\mu(t)$ を

$$I^\mu(t)=\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t) \qquad (0\leqq\mu\leqq1)$$

によって定義する．このとき，投資政策 $I^\mu(t)$ による資本ストックの終期状態は，[主張1]の証明で示されたように

$$x^\mu(T)=\mu x^1(T)+(1-\mu)x^2(T)=P$$

である．他方 $J(I^\mu)=x^{0\mu}(T)$ については

$$\begin{aligned} x^{0\mu}(T)&=\int_0^T\{w(t)I^\mu(t)-\Pi[x^\mu(t),\ t]\}e^{-rt}dt \\ &=\int_0^T\{w(t)[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)] \\ &\qquad\qquad -\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt \end{aligned}$$

が成立するが，この右辺の被積分関数の第一要素は I について1次であり，関数 Π は x について凹であることが仮定されいるから，

$$\begin{aligned} &\int_0^T\{w(t)[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)]-\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt \\ &\leqq\mu\int_0^T\{w(t)I^1(t)-\Pi[x^1(t),\ t]\}e^{-rt}dt \\ &\qquad\qquad +(1-\mu)\int_0^T\{w(t)I^2(t)-\Pi[x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt \\ &=\mu x^{01}(T)+(1-\mu)x^{02}(T) \\ &=P^0 \end{aligned}$$

したがって

$$x^{0\mu}(T)\leqq P^0$$

ところで，$I^1(t)$，$I^2(t)$ の値は計画期間 $[0,\ T]$ においてコンパクトな凸集合 $\Omega\subset R^n$ に属するのであるから，それらに対応する資本ストックのトラジェク

トリ $x^1(t)$, $x^2(t)$ の終期状態 $x^1(T)$, $x^2(T)$ は共に資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ に属する．したがって P^0 が

$$x^{01}(T)=\int_0^T\{w(t)I^1(t)-\Pi[x^1(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$

$$x^{02}(T)=\int_0^T\{w(t)I^2(t)-\Pi[x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$

の非負凸1次結合として表わされることを考えると，負の現在価値と資本ストックの終期状態 $\boldsymbol{P}$ は到達可能であることがわかる．すなわち，$\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{A}(T)$ である．

以上により，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ 上の凸超曲面であり，集合 $\boldsymbol{A}_v$ は R^{n+1} における凸集合である．到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は凸超曲面であるから，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界には $x^0(T)$ の値が最小になる点があり，この点は到達可能であるから，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ をこの点に移す最適投資政策が存在する．

（証明終り）

以上は，資本ストックの初期状態 x_0 をプロセス (1.16) にしたがって制御するとき，負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適投資政策が，制約 (1.36) を満すものの中に存在することを主張するものである．

ところで，その存在が証明された最適投資政策は，上に示されたように，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する終期状態に移すものでなければならないから，それは，先に定義した極値投資政策でなければならない．そこで，次に，ある投資政策が拡張された制御プロセス (1.52), (1.16) に対して極値投資政策であるための必要かつ充分な条件を明らかにしよう．

[主張6] 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad(0\leqq t\leqq T)\tag{1.36}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}\tag{1.52}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t)\tag{1.16}$$

を考える．対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ をもつ投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$

は，微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned} &d\eta^0(t)/dt=0,\ \ \eta^0(t)\leqq 0 \\ &\frac{d\eta(t)}{dt}=\eta^0\frac{\partial\Pi[\bar{x}(t),\ t]}{\partial x}\cdot e^{-rt}+\eta(t)\delta \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

を満し，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$\eta^0 w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}[\eta^0 w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I] \tag{1.56}$$

を満す，ゼロでない $(n+1)$ 次の行ベクトル $\boldsymbol{\eta}(t)=[\eta^0\ \ \eta(t)]$ が存在するとき，またそのときに限って極値投資政策である．

[証明]　はじめに，投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ と，それに対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ および随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}(t)$ が微分方程式体系 (1.52)，(1.16) および (1.55) を満し，最大値条件 (1.56) を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すものと仮定し，このとき終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ が到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界点集合に属すること，すなわち $\bar{I}(t)$ は極値投資政策であることを証明する．[24] そのためには，任意の投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対するトラジェクトリを

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

とするとき，不等式

$$\boldsymbol{\eta}(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)\geqq\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}(T) \tag{1.57}$$

が成立することを証明すればよい．この不等式から，(1) $\eta_0<0$ ならば，$\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ は $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界点集合に属し，(2) $\eta^0=0$ ならば $\boldsymbol{A}_v$ の lateral boundary に属することになる．しかし，$\eta^0=0$ ならば，投資政策 $\bar{I}(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $\bar{x}(t)$ は，[主張 2] の意味での極値トラジェクトリであり，したがって資本ストックの終期状態 $\bar{x}(T)$ は到達可

---

24)　$\bar{I}(t)$ に対応するトランジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ は

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} \bar{x}^0(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}$$

である．

能点集合 $A(T)\subset R^n$ の境界点集合 $\partial A(T)$ に属する．さらに，集合 $\partial A(T)$ の各点に資本ストックの初期状態 x_0 を移す極値投資政策はそれぞれ唯一つである（[主張3]）から，投資政策 $\bar{I}(t)$ は境界点 $\bar{x}(T)$ に x_0 を移す唯一つの投資政策である．したがって，終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ は $\bar{x}(T)$ の垂直方向にある $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の唯一つの点である．

以上により，終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ はいずれの場合にも到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点であり，したがって投資政策 $\bar{I}(t)$ は極値投資政策であるということになる．

かくして，問題は不等式 (1.57) の成立を証明することである．

そのために，内積 $\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{x}(t)$ を時間 t について微分しておく．$d\eta^0(t)/dt=0$ を考慮すると，

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{x}(t)]=\eta^0\frac{dx^0}{dt}+\eta(t)\frac{dx}{dt}+\frac{d\eta}{dt}x(t)$$

である．

これを用いると，$\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}(T)-\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{x}_0$ は (1.55) を考慮すれば次のように求められる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}(T)-\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{x}_0\\
&=\int_0^T[\eta^0dx^0/dt+\eta(t)dx/dt+d\eta/dtx(t)]dt\\
&=\int_0^T\{\eta^0[w(t)I(t)-\Pi(x(t),\ t)]e^{-rt}+\eta(t)[I(t)-\delta x(t)]\\
&\qquad+[\eta^0\frac{\partial\Pi[\bar{x},\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta]x(t)\}dt\\
&=\int_0^T\{\eta^0[\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ t)}{\partial x}x(t)-\Pi(x(t),\ t)e^{-rt}\\
&\qquad+\eta^0w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)\}dt
\end{aligned}\tag{1.58}$$

ここで，$I(t)$ を $\bar{I}(t)$ に，また $x(t)$ を $\bar{x}(t)$ に特定化して同じように $\boldsymbol{\eta}(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)-\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{x}_0$ を求めると，

$$\boldsymbol{\eta}(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)-\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{x}_0$$

$$=\int_0^T\{\eta^0[\frac{\partial\Pi[\bar{x},\ t]}{\partial x}\bar{x}(t)-\Pi(\bar{x}(t),\ t)]e^{-rt}$$
$$+\eta^0 w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)\}dt \qquad (1.59)$$

となる.

ところで，投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところにおいて最大値条件 (1.56) を満すことを仮定したから，$[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで

$$\eta^0 w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)\leqq\eta^0 w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t) \qquad (1.60)$$

が成立する．また，operating profit Π は x の凹関数であることが仮定されているから，

$$\frac{\partial\Pi[\bar{x}(t),\ t]}{\partial x}\cdot\bar{x}(t)-\Pi[\bar{x}(t),\ t]\leqq\frac{\partial\Pi[\bar{x}(t),\ t]}{\partial x}x(t)-\Pi[x(t),\ t] \quad (1.61)$$

である.

(1.55) を考慮すると，(1.58)，(1.59)，(1.60) および (1.61) によって不等式(1.57)の成立が示される.

今度は逆に，対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ をもつ投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が極値投資政策であり，したがって，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界にある終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ に移すものと仮定する.

そこで，$\boldsymbol{\eta}(T)=[\eta_0\ \eta(T)]$ を R^{n+1} の凸集合 $\boldsymbol{A}_v$ に対する $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ における外向き法線ベクトルとする．このとき，明らかに，$\eta_0\leqq 0$ であり，資本トックの終期状態 $\bar{x}(T)$ がその到達可能点集合 $A(T)$ の境界上にあるとき $\eta^0=0$ である．いま，$\boldsymbol{\eta}(t)$ を，$t=T$ における終期条件 $\boldsymbol{\eta}(T)$ の下での随伴微分方程式体系(1.55)の解として定義すると，証明すべきことは，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.56) が成立することである．このことを $\eta^0<0$ の場合と $\eta^0=0$ の場合に分けて証明する.

まず，$\eta^0=0$ の場合は，$\eta(T)$ は境界点 $\bar{x}(T)$ における到達可能点集合 $A(T)$ の外向き法線ベクトルであり，このとき

$$\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで成立することは，すでに [主張 2]

において示されている．

次に，$\eta^0<0$ の場合について証明する．

この場合は $\eta^0=-1$ としても一般性を失わないからそのように仮定する．さて，投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が，計画期間 $[0,\ T]$ の正の長さをもつある部分区間において最大値条件(1.56)を満さないものと仮定し，投資政策 $\tilde{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を次のように定義する．

$$-w(t)\tilde{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\tilde{I}(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I]$$

そして，K を，区間 $(0,\ T)$ の正の長さをもつコンパクトな部分区間であって，その上で投資政策 $\bar{I}(t)$ と $\tilde{I}(t)$ とが共に連続であり，かつある定数 $\gamma>0$ に対して

$$-w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)<-w(t)\tilde{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\tilde{I}(t)-\gamma$$

であるような部分区間であるとする．そこで，集合 $K\cap(t_1,\ t_1+\varepsilon)$ がすべての小さい $\varepsilon>0$ に対して測度 $\varepsilon[1+0(\varepsilon)]$ (ここで $\lim_{\varepsilon\to 0}0(\varepsilon)=0$) をもつような時点 $t_1\in K$ をとり出す．そして投資政策 $I^\varepsilon(t)$ を次のように定義する．

$$I^\varepsilon(t)=\begin{cases}\tilde{I}(t) & (K\cap(t_1,\ t_1+\varepsilon)\text{ に属する }t\text{ に対して})\\ \bar{I}(t) & ([0,\ T]\text{ のその他の }t\text{ に対して})\end{cases}$$

このとき，充分に小さい $\varepsilon>0$ に対して，投資政策 $I^\varepsilon(t)$ に対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^\varepsilon(t)$ は，投資政策 $\bar{I}(t)$ に対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ を一様に近似する．すなわち，計画期間 $[0,\ T]$ において，ある $h>0$ に対して

$$|\boldsymbol{x}^\varepsilon(t)-\bar{\boldsymbol{x}}(t)|<h\varepsilon$$

である．$(\partial\Pi/\partial x)e^{-rt}$ は連続であるから，

$$\left|\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ t)}{\partial x}[x^\varepsilon(t)-\bar{x}(t)]e^{-rt}-\Pi[x^\varepsilon(t),\ t]e^{-rt}+\Pi[\bar{x}(t),\ t]e^{-rt}\right|<\varepsilon 0(\varepsilon)$$

が成立する．

そこで，この証明の前半における計算を利用すると

$$\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}^\varepsilon(T)-\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{x}_0$$

$$=\int_0^T\left\{-\left[\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ t)}{\partial x}x^\varepsilon(t)-\Pi(x^\varepsilon(t),\ t)\right]e^{-rt}\right.$$

$$-w(t)I^{\varepsilon}(t)e^{-rt}+\eta(t)I^{\varepsilon}(t)\Big\}dt$$

であるから，以上により

$$\boldsymbol{\eta}(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)-\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(T)$$

$$\leqq\int_0^T\left\{\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ t)}{\partial x}[x^{\varepsilon}(t)-\bar{x}(t)]-\Pi[x^{\varepsilon}(t),\ t]+\Pi[\bar{x}(t),\ t]\right\}e^{-rt}dt$$

$$-\gamma\varepsilon[1+0(\varepsilon)]$$

よって，充分に小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$\boldsymbol{\eta}(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)<\boldsymbol{\eta}(T)\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(T)$$

が成立する．

しかるに，$\boldsymbol{\eta}(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する点 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ における $\boldsymbol{A}(T)$ の外向き法線ベクトルであるから，このことは不可能である．したがって，極値投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}(t)$ の下で最大値条件(1.56)を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すものでなければならない．

（証明終り）

以上の［主張5］と［主張6］において，われわれの問題には最適投資政策が存在すること，[25] それは極値投資政策でなければならないこと，そして，ある投資政策が極値投資政策であるための必要かつ充分な条件が何であるかが明らかにされた．したがって，最適投資政策は極値投資政策の中に含まれているわけであり，ある投資政策が極値投資政策であることは，その政策が最適投政策であるための必要条件となっている．

そこで，次に，ある投資政策が最適投資政策であるための一つの充分条件を明らかにしよう．

［主張7］ 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad(0\leqq t\leqq T)\tag{1.36}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}\tag{1.52}$$

25） ただし，最適投資政策が唯一つであるということまでも証明されたわけではない．

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

を考える．対応するトラジェクトリ

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

をもつ投資政策 $I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，$x^*(t)$，$I^*(t)$ および $\eta(t)$ が微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta,\ \ \eta(T)=0 \tag{1.62}$$

を満し，かつ計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I] \tag{1.63}$$

を満すならば，最適投資政策である．[26]

[証明]　$I^*(t)$，$\boldsymbol{x}^*(t)$，および $\eta(t)$ は (1.62)，(1.63) を満すものとし，トラジェクトリ

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

をもつ任意の投資政策を $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ とする．

[主張 6] における計算と同様にして $-x^0(t)+\eta(t)x(t)$ を t について微分すると，

$$\frac{d}{dt}[-x^0(t)+\eta(t)x(t)]=-\frac{dx^0}{dt}+\frac{d\eta}{dt}x(t)+\eta(t)\frac{dx}{dt}$$

であるから，(1.52)，(1.16)，(1.62) を考慮すると，[27]

$$\begin{aligned}&-x^0(T)-\eta(0)x_0\\&=\int_0^T\{-[w(t)I(t)-\Pi(x(t),\ t)]e^{-rt}+\left[-\frac{\partial\Pi(x^*,\ t)}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta\right]x(t)\\&\qquad+\eta(t)[I(t)-\delta x(t)]\}dt\end{aligned} \tag{1.64}$$

が得られる．

ここで，投資政策を $I^*(t)$ に，対応する資本ストックのトラジェクトリを

26)　$\eta^0=-1$ であることに注意．
27)　$\eta(T)=0$ であることに注意．

$x^*(t)$ に特定化すると，$-x^{0*}(T)-\eta(0)x_0$ が (1.64) と同様に求められる．これらの二つの式を用いると，

$$-x^{0*}(T)+x^0(T)$$
$$=\int_0^T\left\{\frac{\partial\Pi(x^*,\ t)}{\partial x}[x(t)-x^*(t)]e^{-rt}+[\Pi(x^*(t),\ t)-\Pi(x(t),\ t)]e^{-rt}\right.$$
$$\left.+[-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)]-[-w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)]\right\}dt \tag{1.65}$$

が得られる．

ところで，投資政策 $I^*(t)$ は計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件を満すのであるから，$[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)\geqq -w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)$$

が成立する．また，operating profit Π は x の凹関数であることが仮定されているから

$$\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}[x(t)-x^*(t)]\geqq\Pi[x(t),\ t]-\Pi[x^*(t),\ t]$$

が成立する．

よって，(1.65) の右辺の被積分関数は計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで非負である．したがって

$$x^{0*}(T)\leqq x^0(T)$$

すなわち，投資政策 $I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適投資政策である．　　（証明終り）

さて，いままでの議論にしたがうと，その存在が証明されている最適投資政策 $I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ と，それに対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$ および随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ は，微分方程式体系

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t),\qquad x(0)=x_0$$

$$d\eta(t)/dt=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta,\ \ \eta(T)=0$$

を満し，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I]$$

を満す $I^*(t)$, $x^*(t)$, $\eta(t)$ として得られるはずである.

そこで，最適な投資政策 $I^*(t)$ に対応して，最適なトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ と随伴トラジェクトル $\eta(t)$ がどのように決定されるかを簡単に述べると次のようになる.

まず，最大値条件(1.63)によって $I^*(t)$ が $\eta(t)$ の関数として決定されると，微分方程式体系 (1.52), (1.16) は初期条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ の下で解くことができて，トラジェクトリ $x^{0*}(t)$ と $x^*(t)$ とが $\eta(t)$ の関数として得られる．そして，これらの関数を $\eta(t)$ についての微分方程式体系(1.62)に代入すると，終期条件 $\eta(T)=0$ をもつ n 個の線型微分方程式が得られ，それらを解くことによって $\eta(t)$ が決定される.

このことを下に証明しておく.

[主張 8] 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{1.52}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{1.16}$$

を考える．このとき，微分方程式体系

$$dx(t)/dt=I^*(t,\ \eta)-\delta x(t)$$

$$d\eta(t)/dt=-\frac{\partial \Pi[x(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta,\ \ \eta(T)=0$$

の解 $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ が存在する．ここで $I^*(t,\ \eta)$ は最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I]$$

によって決定される．最適投資政策は $I^*(t)=I^*(t,\ \eta^*(t))$ であり，それに対応する資本ストックの最適トラジェクトリは $x^*(t)$ である.

[証明] 投資政策 $I^*(t)$ が対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ によって初状期態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\boldsymbol{x}^*(T)$ に移す最適投資政策であるとすると，$\boldsymbol{x}^*(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する点であり，しかも可能な任意の終期状態 $\boldsymbol{x}(T)$ に対して，$x^{0*}(T)\leqq x^0(T)$ が成立し，境界点 $\boldsymbol{x}^*(T)$ において $x^0=0$

に平行な $\boldsymbol{A}(T)$ の支持超平面が存在する．したがって，ベクトル

$$\boldsymbol{\eta}^*(T)=[\eta^{0*}(T)\ \ \eta^*(T)]=[-1\quad 0]$$

はこの点における $\boldsymbol{A}(T)$ の外向き法線ベクトルとして定めることができる．いま，$\eta^*(t)$ を，$\eta^*(T)=0$ の下での微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

の解とすると，［主張6］によって，投資政策 $I^*(t)$ は随伴トラジェクトリ $\eta^*(t)$ の下で最大値条件を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満足する．すなわち，$I^*(t)=I^*(t,\ \eta^*(t))$ である．　　（証明終り）

ところで，最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I] \quad (1.66)$$

は，関数 H（Hamiltonian 関数）を

$$H=-\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}+\eta(t)[I(t)-\delta x(t)] \quad (1.67)$$

によって定義するとき，H を I について最大にすることと同値である．

ここで，以下における計算をやり易くするために

$$\varphi(t)=\eta(t)e^{rt} \quad (1.68)$$

によって定義されるベクトル関数 $\varphi(t)$ を導入する．$\varphi(t)$ は粗投資 $I(t)$ の帰属価格ベクトルと解釈される．このとき

$$d\eta(t)/dt=e^{-rt}d\varphi(t)/dt-r\varphi(t)e^{-rt}$$

であるから，境界条件 $\eta(T)=0$ をもつ微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta) \quad (1.69)$$

と変形される．ここで E は n 次の単位行列であり，$t=T$ における境界条件は $\varphi(T)=0$ である．

また，最大値条件 (1.66) と Hamiltonian 関数 (1.67) も同様に (1.68) を用いて，それぞれ，次のように変形される．

$$-w(t)I^*(t)+\varphi(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)I+\varphi(t)I] \tag{1.70}$$

$$H=-\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}+\varphi(t)[I(t)-\delta x(t)]e^{-rt} \tag{1.71}$$

したがって，最大値条件(1.70)を満す，あるいは Hamiltonian 関数 (1.71) を最大にする投資政策は，関数 H^A を

$$H^A=-w(t)I(t)+\varphi(t)I(t) \tag{1.72}$$

によって定義すると，H^A を I について最大にすることよって，$\varphi(t)$ の関数として得られる．

関数 H^A は I について 1 次関数であることに注意すると，H^A，したがって H を最大にする投資政策は次のようになる．

(1) $\varphi(t)>w(t)$ ならば，H^A の値は I の値が大きくなるほど大きくなるから，$\varphi(t)>w(t)$ が成立する $t\in[0,\ T]$ に対しては H^A を最大にする投資政策は $I^*(t)=I_{\max}$ である．

(2) $\varphi(t)=w(t)$ ならば H^A は任意の I の値に対して同一の値をとるから，$\varphi(t)=w(t)$ が成立する $t\in[0,\ T]$ に対しては H^A を最大にする投資政策は一義的に定まらず，$I^*(t)$ は $0\leqq I^*(t)\leqq I_{\max}$ なる任意の値をとればよい．

(3) $\varphi(t)<w(t)$ ならば，H^A の値は I の値が小さくなるほど大きくなるから，$\varphi(t)<w(t)$ が成立する $t\in[0,\ T]$ に対しては H^A を最大にする投資政策は $I^*(t)=0$ である．

(4) $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ の中に

(a) $\varphi_j(t)>w_j(t)$，(b) $\varphi_k(t)=w_k(t)$，(c) $\varphi_l(t)<w_l(t)$ なる $j,\ k,\ l$ が混在するならば，H^A を最大にする投資政策は

(a) $\varphi_j(t)>w_j(t)$ なる j と $t\in[0,\ T]$ に対しては $I^*_j(t)=I_{j\max}$，

(b) $\varphi_k(t)=w_k(t)$ なる k と $t\in[0,\ T]$ に対しては $0\leqq I^*_k(t)\leqq I_{k\max}$ なる任意の値，

(c) $\varphi_l(t)<w_l(t)$ なる l と $t\in[0,\ T]$ に対しては $I_l^*=0$

である．

ところで，上の (1)，(2)，(3) は (4) の特別の場合であるから，われわれは，Hamiltonian 関数を最大にする投資政策について次のように主張することが

できる．

［主張9］ Hamiltonian 関数 H を最大にする（最大値条件(1.70)を満す）投資政策は次の通りである．すなわち，計画期間 $[0,\ T]$ に属する時点 t において

(1) その価格が帰属価格より低い（$w_j(t)<\varphi_j(t)$）資本財については，可能な最大限の粗投資（$I_j{}^*(t)=I_{j\max}$）を行う．

(2) その価格が帰属価格に等しい（$w_k(t)=\varphi_k(t)$）資本財については，制約(1.36)を満す任意の大きさの粗投資（$0\leqq I_k{}^*(t)\leqq I_{k\max}$）を行う．

(3) その価格が帰属価格より高い（$w_l(t)>\varphi_l(t)$）資本財については，粗投資の水準をゼロ（$I_l{}^*(t)=0$）とする．

粗投資，資本ストック，および帰属価格の最適径路は，上の［主張9］と，境界条件 $x(0)=x_0$，$\varphi(T)=0$ をもつ先の微分方程式体系（1.16），（1.69）を用いることによって求められるのであるが，これはいわば計算の問題であるから，ここではこの問題には立ち入らないこととし，以下においては，種々の考えられる状態の下で最適径路がとり得るパターンについて検討を行うことにする．

さて，そのために若干の準備を行う．

まず，集合$\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$を記号 $\boldsymbol{I}$ で表わすことにしよう．そして，計画期間 $[0,\ T]$ に属するある t に対して，$w_i(t)<\varphi_i(t)$ が成立するとき，それらのiの集合を $\boldsymbol{I}_M(t)$，$w_i(t)=\varphi_i(t)$ の成立するiの集合を $\boldsymbol{I}_F(t)$，$w_i(t)>\varphi_i(t)$ の成立する i の集合を $\boldsymbol{I}_0(t)$ によって表わす．このとき，集合$\boldsymbol{I}_M(t)$，$\boldsymbol{I}_F(t)$，$\boldsymbol{I}_0(t)$ はそれぞれの $t\in[0,\ T]$ に対して $\boldsymbol{I}$ の部分集合であり，また，それぞれの $t\in[0,\ T]$ に対して

$$\boldsymbol{I}_M(t)\cup\boldsymbol{I}_F(t)\cup\boldsymbol{I}_0(t)=\boldsymbol{I}$$

である．さらに，それぞれの $t\in[0,\ T]$ に対して，$\boldsymbol{I}_M(t)$，$\boldsymbol{I}_F(t)$，$\boldsymbol{I}_0(t)$ のうち少くとも一つは空集合であってはならず，それらの共通部分は同一の $t\in[0,\ T]$ に対してすべて空集合でなければならない．

したがって，計画期間 $[0,\ T]$ に属するそれぞれの t に対して

（i） $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_M(t)$　　$(\boldsymbol{I}_F(t)=\boldsymbol{I}_0(t)=\phi)$

(ii) $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_F(t)$ $\quad(\boldsymbol{I}_M(t)=\boldsymbol{I}_0(t)=\phi)$

(iii) $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_0(t)$ $\quad(\boldsymbol{I}_M(t)=\boldsymbol{I}_F(t)=\phi)$

(iv) $\boldsymbol{I}_M(t)$, $\boldsymbol{I}_F(t)$ が空集合でなく

$\boldsymbol{I}_M(t)\cup\boldsymbol{I}_F(t)=\boldsymbol{I}$ $\quad(\boldsymbol{I}_0(t)=\phi)$

(v) $\boldsymbol{I}_M(t)$, $\boldsymbol{I}_0(t)$ が空集合でなく

$\boldsymbol{I}_M(t)\cup\boldsymbol{I}_0(t)=\boldsymbol{I}$ $\quad(\boldsymbol{I}_F(t)=\phi)$

(vi) $\boldsymbol{I}_F(t)$, $\boldsymbol{I}_0(t)$ が空集合でなく

$\boldsymbol{I}_F(t)\cup\boldsymbol{I}_0(t)=\boldsymbol{I}$ $\quad(\boldsymbol{I}_M(t)=\phi)$

(vii) $\boldsymbol{I}_M(t)$, $\boldsymbol{I}_F(t)$, $\boldsymbol{I}_0(t)$ が空集合でなく

$\boldsymbol{I}_M(t)\cup\boldsymbol{I}_F(t)\cup\boldsymbol{I}_0(t)=\boldsymbol{I}$

のいずれか唯一つが必ず成立する.

そこで, (i) が成立するような, 計間期間 $[0,\ T]$ の部分区間を $\boldsymbol{I}_M$ 型部分区間と呼び, 記号 $\boldsymbol{T}_M$ によって表わすことにする. 以下同様に, (ii)〜(vii) が成立する $[0,\ T]$ の部分区間を, それぞれ, $\boldsymbol{I}_F$ 型, $\boldsymbol{I}_0$ 型, $\boldsymbol{I}_{MF}$ 型, $\boldsymbol{I}_{M0}$ 型, $\boldsymbol{I}_{F0}$ 型, $\boldsymbol{I}_{MF0}$ 型の部分区間と呼び, それぞれ, 記号 $\boldsymbol{T}_F$, $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}_{MF}$, $\boldsymbol{T}_{M0}$, $\boldsymbol{T}_{F0}$, $\boldsymbol{T}_{MF0}$ によって表わす.

かくして, 上の各種の部分区間における, 資本財の現実の価格と粗投資の帰属価格との関係, Hamiltonian 関数 H を最大にする投資政策は下のようにまとめることができる.

部分区間	$w_i(t)$ と $\varphi_i(t)$ の関係	関数 H を最大にする $I^*(t)$
$\boldsymbol{I}_M$ 型 : $\boldsymbol{T}_M$	$w_i(t)<\varphi_i(t)$ for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_M(t)$	$I_{i\max}$ for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_M(t)$
$\boldsymbol{I}_F$ 型 : $\boldsymbol{T}_F$	$w_i(t)=\varphi_i(t)$ for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_F(t)$	$0\leqq I_i^*(t)\leqq I_{i\max}$ for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_F(t)$
$\boldsymbol{I}_0$ 型 : $\boldsymbol{T}_0$	$w_i(t)>\varphi_i(t)$ for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_0(t)$	0 for all $i\epsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_0(t)$
$\boldsymbol{I}_{MF}$ 型 : $\boldsymbol{T}_{MF}$	$\begin{cases} w_i(t)<\varphi_i(t) & \\ w_i(t)=\varphi_i(t) & \end{cases}$ for $\begin{matrix} i\epsilon\boldsymbol{I}_M(t) \\ i\epsilon\boldsymbol{I}_F(t) \end{matrix}$	$\begin{cases} I_{i\max} & \\ 0\leqq I_i^*(t)\leqq I_{i\max} & \end{cases}$ for $\begin{matrix} i\epsilon\boldsymbol{I}_M(t) \\ i\epsilon\boldsymbol{I}_F(t) \end{matrix}$
$\boldsymbol{I}_{M0}$ 型 : $\boldsymbol{T}_{M0}$	$\begin{cases} w_i(t)<\varphi_i(t) & \\ w_i(t)>\varphi_i(t) & \end{cases}$ for $\begin{matrix} i\epsilon\boldsymbol{I}_M(t) \\ i\epsilon\boldsymbol{I}_0(t) \end{matrix}$	$\begin{cases} I_{i\max} & \\ 0 & \end{cases}$ for $\begin{matrix} i\epsilon\boldsymbol{I}_M(t) \\ i\epsilon\boldsymbol{I}_0(t) \end{matrix}$

$\boldsymbol{I}_{FO}$ 型：$\boldsymbol{T}_{FO}$	$\begin{cases} w_i(t)=\varphi_i(t) & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ w_i(t)>\varphi_i(t) & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for	$\begin{cases} 0\leqq I_i^*(t)\leqq I_{i\max} & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ 0 & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for
$\boldsymbol{I}_{MFO}$型：$\boldsymbol{T}_{MFO}$	$\begin{cases} w_i(t)<\varphi_i(t) & i\epsilon \boldsymbol{I}_M(t) \\ w_i(t)=\varphi_i(t) & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ w_i(t)>\varphi_i(t) & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for	$\begin{cases} I_{i\max} & i\epsilon \boldsymbol{I}_M(t) \\ 0\leqq I_i^*(t)\leqq I_{i\max} & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ 0 & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for

いま，$\theta_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を，粗投資の帰属価格と資本財の現実の価格との比として，すなはち，

$$\theta_i(t)=\frac{\varphi_i(t)}{w_i(t)} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{1.73}$$

として定義すると，上の各種の部分区間において $\theta_i(t)$ のとる値は下のようになる．

部分区間	$\theta_i(t)$
$\boldsymbol{I}_M$ 型：$\boldsymbol{T}_M$	$\theta_i(t)>1$ for all $i\epsilon \boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_M(t)$
$\boldsymbol{I}_F$ 型：$\boldsymbol{T}_F$	$\theta_i(t)=1$ for all $i\epsilon \boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_F(t)$
$\boldsymbol{I}_0$ 型：$\boldsymbol{T}_0$	$\theta_i(t)<1$ for all $i\epsilon \boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_0(t)$
$\boldsymbol{I}_{MF}$ 型：$\boldsymbol{T}_{MF}$	$\begin{cases} \theta_i(t)>1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_M(t) \\ \theta_i(t)=1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \end{cases}$ for
$\boldsymbol{I}_{M0}$ 型：$\boldsymbol{T}_{M0}$	$\begin{cases} \theta_i(t)>1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_M(t) \\ \theta_i(t)<1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for
$\boldsymbol{I}_{F0}$ 型：$\boldsymbol{T}_{F0}$	$\begin{cases} \theta_i(t)=1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ \theta_i(t)<1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for
$\boldsymbol{I}_{MF0}$型：$\boldsymbol{T}_{MF0}$	$\begin{cases} \theta_i(t)>1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_M(t) \\ \theta_i(t)=1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_F(t) \\ \theta_i(t)<1 & i\epsilon \boldsymbol{I}_0(t) \end{cases}$ for

さて，われわれのモデルの仮定だけからはあまり多くのことは解明できないが，以下において，これらの各種の部分区間において資本ストックと粗投資の帰属価格の径路がどのようになっているか，また，資本ストックの変化が帰属価格にどのような影響を与えるか，資本ストックの変化が帰属価格と現実の価格の比に対してどのような影響を与えるかについて検討する．

そこで，上に述べた問題のうち後の二つの問題を考察するために，ここで次の二種類の量を定義しておく．

資本ストック $x(t)$ と粗投資の帰属価格 $\varphi(t)$ は $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対して微分方程式体系

$$dx_i(t)/dt=I_i(t)-\delta_i x_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{1.74}$$

$$d\varphi_i(t)/dt=-\frac{\partial\Pi[x(t),t]}{\partial x_i}+\varphi_i(t)(r+\delta_i) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{1.75}$$

を満すものでなければならない．(1.74) で (1.75) を割って，その結果に $x_i(t)/\varphi_i(t)$ をかけると，

$$\frac{x_i(t)}{\varphi_i(t)}\cdot\frac{d\varphi_i(t)}{dx_i(t)}=\frac{x_i(t)\left\{-\dfrac{\partial\Pi[x(t),t]}{\partial x_i}\dfrac{1}{\varphi_i(t)}+(r+\delta_i)\right\}}{I_i(t)-\delta_i x_i(t)}$$

$$\equiv E(x_i,\ \varphi_i) \tag{1.76}$$

が得られる．(1.76) で与えられる $E(x_i,\ \varphi_i)$ をここでは「帰属価格の資本ストック弾力性」と呼ぶことにする．

同様にして，(1.73)，(1.74)，(1.75) から

$$\frac{x_i(t)}{\theta_i(t)}\cdot\frac{d\theta_i(t)}{dx_i(t)}=\frac{x_i(t)[w_i(t)d\varphi_i/dt-\varphi_i(t)dw_i/dt]}{\varphi_i(t)w_i(t)[I_i(t)-\delta_i x_i(t)]}$$

$$=E(x_i,\ \varphi_i)-\frac{x_i(t)dw_i/dt}{w_i(t)[I_i(t)-\delta_i x_i(t)]}$$

$$\equiv E(x_i,\ \theta_i) \tag{1.77}$$

が得られる．(1.77) で与えられる $E(x_i,\ \theta_i)$ を「価格比の資本ストック弾力性」と呼ぶことにする．

ところで，(1.76) から

$$\frac{dx_i/dt}{x_i(t)}\cdot E(x_i,\ \varphi_i)=\frac{d\varphi_i/dt}{\varphi_i(t)}$$

であるから，帰属価格の資本ストック弾力性と資本ストックの成長率との積は帰属価格の成長率に等しいことになる．

また，同様に，(1.77) により

$$\frac{dx_i/dt}{x_i(t)}\cdot E(x_i,\ \theta_i)=\frac{d\varphi_i/dt}{\varphi_i(t)}-\frac{dw_i/dt}{w_i(t)}$$

であるから，価格比の資本ストック弾力性と資本ストックの成長率との積は帰属価格の成長率から資本財価格の成長率を差し引いたものに等しいことになる．

さて次に，資本ストック $x(t)$ のいくつかの特定の値を次のように定めておく．

まず，$dx_i^*/dt=0$ となる $x_i(t)$ の値を $x^1{}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わし，それらから成る n 次の別ベクトルを x^1 によって表わす．特に，$I_i^*(t)=I_{i\max}$ に対して $dx_i^*/dt=0$ となる $x_i^*(t)$ の値を $x_{i\max}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わす．すなはち，$x_{i\max}=I_{i\max}/\delta_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ である．$x_{i\max}$ から成る n 次列ベクトルを $x_{\max}$ で表わす．次に，$\varphi_i(t)=w_i(t)$ の条件の下で $d\varphi_i/dt=0$ ならしめる $x_i^*(t)$ の値を $x^2{}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わす．したがって，x_i^2 は，それらを成分とする n 次列ベクトルを x^2 によって表わすとき

$$\frac{\partial \Pi[x^2, t]}{\partial x}=w(t)[rE+\delta]$$

の解である．

以上のことを準備しておいて，先に定義した各部分区間においていかなる事態が生じるかを検討しよう．

(1) $\boldsymbol{I}_M$ 型部分区間：$\boldsymbol{T}_M$

部分区間 $\boldsymbol{T}_M$ に属する t に対しては，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ について $\theta_i(t)>1$ $(w_i(t)<\varphi_i(t))$ であって，関数 H を最大にする（最大値条件 (1.70) を満す）投資政策は

$$I^*(t)=I_{\max} \qquad (t\in\boldsymbol{T}_M)$$

である．よって，投資政策 $I_{\max}$ に対応する資本ストック $x^*(t)$ は部分区間 $\boldsymbol{T}_M$ において

$$dx^*(t)/dt=I_{\max}-\delta x^*(t) \tag{1.78}$$

にしたがって変動する．

ところで，部分区間 $\boldsymbol{T}_M$ は，存在するとしても，計画期間 $[0,\ T]$ の中の一箇所にだけ存在するとは限らないが，ここでは $\boldsymbol{I}_M$ 型の部分区間である一つの

部分区間をとって考える．以下の議論は他の $\boldsymbol{I}_M$ 型部分区間についても同様に成立する．

いま，このような一つの部分区間の出発点が $t_0{}^M$，終点が $t_T{}^M$ であり，この出発点における資本ストックの水準が $x_0{}^M$ であるとすると，投資政策 $I^*(t)=I_{\max}$ $(t_0{}^M \leqq t \leqq t_T{}^M)$ に対応する資本ストック $x^*(t)$ は (1.78) によって次のように与えられる．

$$x^*(t)=e^{-\delta t}x_0{}^M+\int_{t_0{}^M}^{t} e^{-(t-\tau)}I_{\max}d\tau \quad (t_0{}^M \leqq t \leqq t_T{}^M) \qquad (1.79)$$

他方，粗投資の帰属価格 $\varphi(t)$ の変動を支配する方程式は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial\pi[x^*(t),t]}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta) \quad (t_0{}^M \leqq t \leqq t_T{}^M) \qquad (1.80)$$

である．

このような $\boldsymbol{I}_M$ 型部分区間について，われわれは次のように主張することができる．

[主張10] $\boldsymbol{I}_M$ 型部分区間 $\boldsymbol{T}_M$ においては次のことがらが成立する．

(a) 最適資本ストック $x_i{}^*(t)$ の値が

$$x_i{}^*(t) \gtreqqless x^1{}_i = x_{i\max}$$

であるにしたがって

$$dx_i{}^*/dt \lesseqqgtr 0$$

となる（複号同順）．

(b) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が

$$x^*(t) \geqq x^2$$

を満すとき，粗投資の帰属価格について

$$d\varphi/dt>0$$

が成立する．

(c) $x_i{}^*(t)>x_{i\max} \geqq x^2{}_i$，$x_i{}^*(t) \geqq x^2{}_i > x_{i\max}$，または $x_i{}^*(t)>x_i{}^2 \geqq x_{i\max}$ なる $x_i{}^*(t)$ と $i \in \boldsymbol{I}$ に対しては $E(x_i{}^*,\ \varphi_i)<0$ である．

また，$x_{i\max}>x_i{}^*(t) \geqq x^2{}_i$ なる $x_i{}^*(t)$ と $i \in \boldsymbol{I}$ に対しては $E(x_i{}^*,\ \varphi_i)>0$ である．

(d) 資本財価格 $w_i(t)$ が時と共に下落しているか，あるいは時を通じて一定であるならば，$E(x_i^*, \theta_i)$ の符号について，$E(x_i^*, \varphi_i)$ の符号についてと同じことが主張できる．

[証明] はじめに，投資政策 $I^*(t)=I_{\max}$ に対応する資本ストックの最適水準 $x^*(t)$ が時と共にどの方向に変化するかを検討する．部分区間 $\boldsymbol{T_M}$ においては，$dx_i^*/dt=0$ ならしめる資本ストックの水準は，上の定義から明らかに，$x^1{}_i=x_{i\max}$ であるから，それぞれの $i\in\boldsymbol{I}$ に対して

$$x_i^*(t)\gtreqqless x^1{}_i=x_{i\max}$$

にしたがって

$$dx_i^*/dt\gtreqqless 0$$

となる．

次に，$\varphi(t)$ の変化の方向について調べる．この部分区間においては $w_i(t)<\varphi_i(t)$ がすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して成立しているから，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_i(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+\varphi_i(t)(r+\delta_i)\\&>-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)\end{aligned}\tag{1.81}$$

がすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して成立する．

また，x^2 を上のように定義すると，operating profit Π が x について凹であることにより，$x^*(t)\geqq x^2$ ならば，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{-\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)&\geqq\frac{-\partial\Pi[x^2,t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)\\&=0\end{aligned}\tag{1.82}$$

が成立する．

したがって，(1.81) と (1.82) により，$x^*(t)\geqq x^2$ ならば，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して

$$d\varphi_i/dt>0$$

である．[28]

---

28) 尚，$x^*(t)\geqq x^2$ でない場合における $d\varphi/dt$ の符号に関しては，われわれのモデルの仮定だけから確定的なことはいえない．

今度は先に定義した二つの「弾力性」について調べる．

部分区間 $\boldsymbol{T}_M$ について (1.76) を用いると，

$$\frac{I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}\cdot E(x_i^*,\ \varphi_i)=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)}+(r+\delta_i)$$

がすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して成立する．

しかるに，$t\in\boldsymbol{T}_M$ に対しては $w_i(t)<\varphi_i(t)$ がすべての $i\in\boldsymbol{I}$ について成立するから，

$$-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)}>-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_1}\ \frac{1}{w_i(t)}$$

がすべての $i\in\boldsymbol{I}$ について成立する．したがって，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ について

$$\frac{I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\varphi_i)>-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)}+(r+\delta_i)\quad(1.83)$$

が成立する．

また，(1.77) を用いると，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ について

$$\begin{aligned}\frac{I_{i\max}-\delta_i x_i(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \theta_i)&=\left[-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)}+(r+\delta_i)\right]-\frac{dw_i/dt}{w_i(t)}\\&>\left[-\frac{\partial\Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)}+(r+\delta_i)\right]-\frac{dw_i/dt}{w_i(t)}\end{aligned}\quad(1.84)$$

なる不等式が得られる．

さて，$x^*(t)\geqq x^2$ ならば，(1.82) からすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して

$$-\frac{\partial\Pi[x^*(t)_1,\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)}+(r+\delta_i)\geqq 0\quad(1.85)$$

が成立するから，(1.83) により，すべての $i\in\boldsymbol{I}$ について

$$\frac{I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$$

が得られる．

よって，$I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)\gtreqqless 0$ にしたがって，$E(x_i^*,\ \varphi_i)\gtreqqless 0$ となる．そこで，$x_i^*(t)\gtreqqless x_{i\max}$ のとき，またそのときに限って $dx_i^*/dt\gtreqqless 0$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,n$) であることを考慮すると，$E(x_i^*,\ \varphi_i)$ の符号は次のようになる．

すなわち，$x_i^*(t)>x_{i\max}\geqq x_i^2$，$x_i^*(t)\geqq x_i^2>x_{i\max}$，または $x_i^*(t)>x_i^2\geqq$

$x_{i\max}$ なる $x_i^*(t)$ と $i\in\boldsymbol{I}$ に対しては，いずれの場合も $I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)<0$ であるから，$E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ である．

また，$x_{i\max}>x_i^*(t)\geqq x_i^2$ なる $x_i^*(t)$ と $i\in\boldsymbol{I}$ に対しては $I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)>0$ であるから $E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

最後に，$E(x_i^*,\ \theta_i)$ について検討する．

(1.82) によって，$x^*(t)\geqq x^2$ ならば (1.85) が成立するから，$dw_i/dt\leqq 0$ ならば (1.84) により

$$\frac{I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \theta_i)>0$$

が得られる．したがって，このとき，$E(x_i^*,\ \theta_i)$ の符号について $E(x_i^*,\ \varphi_i)$ の符号について成立するのと同じことがらが成立する．

（証明終り）

(2) $\boldsymbol{I}_F$ 型部分区間：$\boldsymbol{T}_F$

この型の部分区間においてはすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して $\theta_i(t)=1$ $(w_i(t)=\varphi^i(t))$ であって，Hamiltonian 関数 H は

$$0\leqq I^*(t)\leqq I_{\max}\qquad (t\in\boldsymbol{T}_F)\tag{1.86}$$

なる $I^*(t)$ に対して同一の値をとる．したがって，関数 H を最大ならしめる投資政策は (1.86) を満す任意の $I^*(t)$ であり，投資政策 $I^*(t)$ に対応する資本ストック $x^*(t)$ は

$$dx^*(t)/dt=I^*(t)-\delta x^*(t)\tag{1.87}$$

にしたがって変動する．

そこで，$\boldsymbol{I}_F$ 型の部分区間である一つの部分区間をとって考える．その部分区間の出発点が $t_0{}^F$，終点が $t_T{}^F$ であり，出発点における資本ストックの水準が $x_0{}^F$ であるとすると，(1.86) を満す投資政策 $I^*(t)$ $(t_0{}^F\leqq t\leqq t_T{}^F)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$ は (1.87) により次のように与えられる．

$$x^*(t)=e^{-t\delta}x_0{}^F+\int_{t_0{}^F}^{t}e^{-(t-\tau)}I^*(\tau)d\tau\quad (t_0{}^F\leqq t\leqq t_T{}^F)\tag{1.88}$$

また，粗投資の帰属価格 $\varphi_i(t)$ と資本財価格 $w_i(t)$ とはすべての $i\in\boldsymbol{I}$ と $t\in$

$\boldsymbol{T}_F$ に対して等しいから

$$
\begin{aligned}
d\varphi_i/dt &= dw_i/dt \\
&= -\frac{\partial \Pi[x^*(t), t]}{\partial x_i} + \varphi_i(t)(r+\delta_i) \\
&= -\frac{\partial \Pi[x^*(t), t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i) \qquad (1.89)
\end{aligned}
$$

がすべての $i \in \boldsymbol{I}$ と $t \in \boldsymbol{T}_F$ に対して成立する．このとき，われわれは次のように主張することができる．

[主張11] $\boldsymbol{I}_F$ 型部分区間 $\boldsymbol{T}_F$ においては次のことが成立する．

(a) 最適資本ストック $x_i^*(t)$ の値が

$$x_i^*(t) \gtreqqless x_i^1$$

なるにしたがって

$$dx_i^*/dt \lesseqqgtr 0$$

となる．

(b) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が，$x^*(t) \geq x^2$ を満すときには $d\varphi/dt > 0$ であり，$x^*(t) \leq x^2$ を満すときには$d\varphi/dt < 0$ である．[29] $x^*(t) = x^2$ のときには $d\varphi/dt = 0$ である．

(c)(i) $x^*(t) \geq x^2$ なる場合には，$x_i^*(t) \geqq x_i^2 > x_i^1$，$x_i^*(t) > x_i^2 \geqq x_i^1$，$x_i^*(t) > x_i^1 \geqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i) < 0$ である．また，$x_i^1 > x_i^*(t) \geqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i) > 0$である．

(ii) $x^*(t) = x^2$ なる場合には，$x_i^*(t) \neq x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して$E(x_i^*, \varphi_i) = 0$ である．

(iii) $x^*(t) \leq x^2$ なる場合には，$x_i^*(t) < x_i^2 \leqq x_i^1$，$x_i^*(t) < x_i^1 \leqq x_i^2$，$x_i^*(t) \leqq x_i^2 < x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i) < 0$ である．また，$x_i^1 < x_i^*(t) \leqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i) > 0$ である．

---

29) $x^*(t) \geq x^2$はすべての $i \epsilon \boldsymbol{I}$ に対して $x_i^*(t) \geqq x_i^2$ であるが，少くとも一つの $i \epsilon \boldsymbol{I}$ について厳密な不等号が成立することを意味する．

(d) $x_i^*(t) \neq x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して

$$E(x_i^*,\ \theta_i)=0$$

である.

[証明] 部分区間 $\boldsymbol{T}_F$ において最適資本ストック $x_i^*(t)$ が時と共にどの方向に変化するかに関する命題(a)は, x_i^1 の定義を考慮するとほとんど自明である.[30]

次に, $d\varphi/dt$ について吟味する. 部分区間 $\boldsymbol{T}_F$ においては $\varphi(t)=w(t)$ であるから, $x^*(t)=x^2$ のとき $d\varphi/dt=0$ である.

また, $x^*(t) \geq x^2$ のときには, 関数 Π が x について凹であることにより, すべての $i \in \boldsymbol{I}$ について

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+\varphi_i(t)(r+\delta_i)>-\frac{\partial \Pi[x^2,\ t]}{\partial x_i}+\varphi_i(t)(r+\delta_i)=0$$

が成立する. したがって, すべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して $d\varphi_i/dt>0$ である.

逆に, 資本ストック $x^*(t)$ の値が $x^*(t) \leq x^2$ を満すときには, 上の不等式における不等号の向きが反対になるから, すべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して $d\varphi_i/dt<0$ である.[31]

今度は $E(x_i^*,\ \varphi_i)$ と $E(x_i^*,\ \theta_i)$ について調べる. 部分区間 $\boldsymbol{T}_F$ について (1.76) を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)&=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)}+(r+\delta_i)\\&=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)}+(r+\delta_i)\end{aligned}$$

が得られる. しかるに, $x^*(t) \geq x^2$, $x^*(t)=x^2$, $x^*(t) \leq x^2$ に対して, それぞれ

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)>0$$

---

30) この場合, 定義から明らかに, $x^1{}_i \leqq x_{i\max}$ である.

31) これらのいずれでもない場合については, $d\varphi_i/dt$ の符号について確定的なことはいえない.

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)=0$$

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)<0$$

がすべての $i\in \boldsymbol{I}$ について成立するから，$x^*(t)\geq x^2$，$x^*(t)=x^2$，$x^*(t)\leq x^2$ に対して，それぞれ次の不等式がすべての $i\in \boldsymbol{I}$ について成立する．

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$$

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)=0$$

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$$

そこで，$x_i^*(t)\gtreqless x_i^1$ なるとき，またそのときに限って $I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)\gtreqless 0$ であり，かつ $x_i^1\leqq x_{i\max}$ であることを考慮すると，$E(x_i^*,\ \varphi_i)$ の符号は次のようになる．

(i) $x^*(t)\geq x^2$ なる場合には，$x_i^*(t)\geqq x_i^2>x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^2\geqq x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^1\geqq x_i^2$ なる $i\in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対していずれの場合も $I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)<0$ であるから $E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ である．

また，$x_i^1>x_i^*(t)\geqq x_i^2$ なる $i\in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対しては $I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)>0$ であるから，$E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

(ii) $x^*(t)=x^2$ なる場合は $x_i^*(t)\neq x_i^1$ なる $i\in I$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)=0$ である．

(iii) $x^*(t)\leq x^2$ の場合には，$x_i^*(t)\leqq x_i^2<x_i^1$，$x_i^*(t)<x_i^2\leqq x_i^1$，$x_i^*(t)<x_i^1\leqq x_i^2$ なる $x_i^*(t)$ と $i\in \boldsymbol{I}$ に対していずれの場合も $E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ であり，$x_i^1<x_i^*(t)\leqq x_i^2$ なる $i\in \boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

最後に $E(x_i^*,\ \theta_i)$ について調べる．

部分区間 $\boldsymbol{T}_F$ について (1.77) を用いると，$\theta_i(t)=1$ であるから，すべての $i\in \boldsymbol{I}$ に対して

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \theta_i)$$

$$=\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)-\frac{dw_i/dt}{w_i(t)}$$

$$=\frac{1}{w_i(t)}\left\{-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x_i}+w_i(t)(r+\delta_i)-\frac{dw_i}{dt}\right\}$$

$$=0$$

したがって，$x_i^*(t)\neq\bar{x}_i$ なる $i\in\boldsymbol{I}$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \theta_i)=0$ である．

（証明終り）

(3) $\boldsymbol{I}_0$ 型部分区間：$\boldsymbol{T}_0$

この型の部分区間においてはすべての $i\in\boldsymbol{I}$ に対して，$\theta_i(t)<1$ $(w_i(t)>\varphi_i(t))$ であって Hamiltonian 関数 H を最大にする投資政策は

$$I^*(t)=0 \tag{1.90}$$

である．よって，$I^*(t)$ に対応する資本ストック $x^*(t)$ は，$t\in\boldsymbol{T}_0$ に対して

$$dx^*(t)/dt=-\delta x^*(t) \tag{1.91}$$

にしたがって変動する．

そこで，$\boldsymbol{I}_0$ 型部分区間である一つの部分区間をとって考える．その部分区間の出発点が t_0^0，終点が t_T^0，出発点における資本ストックの水準が x_0^0 であると，(1.90)で与えられる投資政策に対応する資本ストックのトラジェクトリは(1.91)により

$$x^*(t)=e^{-t\delta}x_0^0 \qquad (t_0^0\leqq t\leqq t_T^0)$$

によって与えられる．

他方，$\varphi(t)$ の変動を規定する方程式は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta) \tag{1.92}$$

である．

$\boldsymbol{I}_0$ 型部分区間について，われわれは次のように主張することができる．

[主張12] $\boldsymbol{I}_0$ 型部区間 $\boldsymbol{T}_0$ においては次のことが成立する．

(a) すべての正の最適資本ストックに対して $dx/dt<0$ である．

(b) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が，$x^*(t)\leqq x^2$ を満すとき $d\varphi/dt<0$ である．

(c) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が，$x^*(t) \leqq x^2$ を満すとき，すべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i) > 0$ である．

(d) 最適資本ストックの値が $x^*(t) \leqq x^2$ を満し，かつ，その価格が時と共に上昇するかあるいは一定であるような資本財については $E(x_i^*,\ \theta_i) > 0$ である．

[証明] 命題(a)の成立は(1.91)から明らかである．

次に $d\varphi/dt$ の符号について調べる．$t \in \boldsymbol{T}_0$ に対しては $w_i(t) > \varphi_i(t)$ であるから

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i} + \varphi_i(t)(r+\delta_i)$$

$$< -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i)$$

がすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して成立する．そして，$x^*(t) \leqq x^2$ とすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i) \leqq -\frac{\partial \Pi[x^2,\ t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i) = 0 \quad (1.93)$$

であるから，$x^*(t) \leqq x^2$ とすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して $d\varphi_i/dt < 0$ である．

今度は $E(x_i^*,\ \varphi_i)$ と $E(x_i^*,\ \theta_i)$ の符号について検討する．

$t \in \boldsymbol{T}_0$ に対して(1.76)を用いると，

$$-\delta_i E(x_i^*,\ \varphi_i) = -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)} + (r+\delta_i)$$

となるが，$w_i(t) > \varphi_i(t)$ であるから

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)} < -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)}$$

したがってすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$-\delta_i E(x_i^*,\ \varphi_i) < -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)} + (r+\delta_i) \qquad (1.94)$$

ところで，$x^*(t) \leqq x^2$ なる $x^*(t)$ とすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して(1.93)が成立するから

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)} + (r+\delta_i) \leqq 0$$

よって，(1.94) により，$x^*(t) \leqq x^2$ なる $x_i^*(t)$ と $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$-\delta_i E(x_i^*,\ \varphi_i) < 0$$

が成立する．したがって，$x^*(t) \leqq x^2$ なる $x_i^*(t)$ とすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$E(x_i^*,\ \varphi_i) > 0$$

である．

最後に，$E(x_i^*,\ \theta_i)$ について吟味する．

$t \in \boldsymbol{T}_0$ に対して (1.77) を用いると，

$$\begin{aligned}
&-\delta_i E(x_i^*,\ \theta_i) \\
&= -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{\varphi_i(t)} + (r+\delta_i) - \frac{dw_i/dt}{w_i(t)} \\
&< -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i}\ \frac{1}{w_i(t)} + (r+\delta_i) - \frac{dw_i/dt}{w_i(t)} \\
&= \frac{1}{w_i(t)}\left\{-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i) - \frac{dw_i}{dt}\right\} \qquad (1.95)
\end{aligned}$$

$x^*(t) \leqq x^2$ とすべての $i \in \boldsymbol{I}$ に対して (1.93) が成立するから，$dw_i/dt \geqq 0$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x_i} + w_i(t)(r+\delta_i) - \frac{dw_i}{dt} \leqq 0$$

が成立する．よって，(1.95) により，$x^*(t) \leqq x^2$ なる $x^*(t)$ と $dw_i/dt \geqq 0$ なる $i \in \boldsymbol{I}$ に対して

$$E(x_i^*,\ \theta_i) > 0$$

である．　　（証明終り）

(4)　その他の型の部分区間

上に検討した以外の型の部分区間においても同様の命題を吟味することができる．しかし，それらのすべてについて述べることは冗長にすぎるので，ここでは $\boldsymbol{I}_{MFO}$ 型部分区間 $\boldsymbol{T}_{MFO}$ についてだけ述べることにする。これ以外の型の部分区間において成立する命題は，$\boldsymbol{I}_{MFO}$ 型部分区間に関する命題から容易に導くことができる．

さて，$\boldsymbol{I}_{MFO}$ 型部分区間においては集合 $\boldsymbol{I}$ の要素の中に，$\theta_i(t) > 1\ (i \in \boldsymbol{I}_M(t))$

なるものと $\theta_i(t)=1$ $(i\in \boldsymbol{I}_F(t))$ なるもの，および $\theta_i(t)<1$ $(i\in \boldsymbol{I}_0(t))$ なるものが存在する．

$t\in \boldsymbol{T}_{MFO}$ に対して Hamiltonian 関数 H を最大にする投資政策は

$$\left.\begin{array}{ll} I_i^*(t)=I_{i\max} & (i\in \boldsymbol{I}_M(t)) \\ 0\leqq I_i^*(t)\leqq I_{i\max} & (i\in \boldsymbol{I}_F(t)) \\ I_i^*(t)=0 & (i\in \boldsymbol{I}_0(t)) \end{array}\right\} \qquad (1.96)$$

なる $I_i^*(t)$ である。よって，このような投資政策に対応する資本ストック $x^*(t)$ は部分区間 $\boldsymbol{T}_{MFO}$ において方程式体系

$$\left.\begin{array}{ll} dx_i^*(t)/dt=I_{i\max}-\delta_i x_i^*(t) & (i\in \boldsymbol{I}_M(t)) \\ dx_i^*(t)/dt=I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t) & (i\in \boldsymbol{I}_F(t)) \\ dx_i^*(t)/dt=-\delta_i x^*(t) & (i\in \boldsymbol{I}_0(t)) \end{array}\right\}$$

にしたがって変動する．

そこで，$\boldsymbol{I}_{MFO}$ 型部分区間である一つの部分区間をとって考える．その部分区間の出発点を t_0^{MFO}，終点を t_T^{MFO} とし，出発点における資本ストックベクトルを x_0^{MFO} とする．このとき，(1.96)を満す投資政策に対応する資本ストックのトラジェクトリは次のように与えられる．

$$x^*(t)=e^{-t\delta}x_0^{MFO}+\int_{t_0^{MFO}}^{t}e^{-(t-\tau)\delta}I^*(\tau)d\tau,\ (t_0^{MFO}\leqq t\leqq t_T^{MFO})$$

ここで $I^*(\tau)$ は (1.96) を満すそれぞれの $I_i^*(\tau)$ から成るベクトルであり，$x^*(t)$ は $I_i^*(t)$ に対応する $x_i^*(t)$ のベクトルである．

他方，粗投資の帰属価格の変動を支配する方程式体系は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),t]}{\partial x}+\varphi(t)(tE+\delta),\ (t_0^{MFO}\leqq t\leqq t_T^{MFO})$$

である．

このとき，われわれは，$\boldsymbol{I}_{MFO}$ 型部分区間について次のように主張することができる．

[主張13]

(a)(イ) 最適資本ストック $x_i^*(t)$ の値が，$\boldsymbol{I}_M(t)$ に属する i に対して，$x_i^*(t)\gtreqqless x_i^1=x_{i\max}$ であるにしたがって $dx_i^*/dt\gtreqqless 0$ である．

(ロ) $\boldsymbol{I}_F(t)$ に属する i に対しては，最適資本ストック $x_i^*(t)$ の値が $x_i^*(t) \gneqq x_i^1$ であるにしたがって $dx_i^*/dt \leqq 0$ である．

(ハ) $\boldsymbol{I}_0(t)$ に属する i に対しては常に $dx_i^*/dt<0$ である．

(b)(イ) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が $x^*(t) \geqq x^2$ を満すならば，$\boldsymbol{I}_M(t)$ に属するすべての i に対して $d\varphi_i/dt>0$ である．

(ロ) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が (i) $x^*(t) \geqq x^2$, (ii) $x^*(t)=x^2$, (iii) $x^*(t) \leqq x^2$ を満すとき，すべての $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ に対して，(i) の場合は $d\varphi_i/dt>0$, (ii) の場合は $d\varphi_i/dt=0$, (iii) の場合は $d\varphi_i/dt<0$ である．

(ハ) 最適資本ストック $x^*(t)$ の値が $x^*(t) \leqq x^2$ を満すならば $\boldsymbol{I}_0(t)$ に属するすべての i について $d\varphi_i/dt<0$ である．

(c)(イ) $x_i^*(t)>x_{i\max} \geqq x_i^2$, $x_i^*(t) \geqq x_i^2>x_{i\max}$ または $x_i^*(t)>x_i^2 \geqq x_{i\max}$ なる $i \in \boldsymbol{I}_M(t)$ と $x_i^*(t)$ に対しては $E(x_i^*, \varphi_i)<0$ である．また，$x_{i\max}>x_i^*(t) \geqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}_M(t)$ と $x_i^*(t)$ に対しては $E(x_i^*, \varphi_i)>0$ である．

(ロ) (i) $x^*(t) \geqq x^2$ なる場合には，$x_i^*(t) \geqq x_i^2>x_i^1$, $x_i^*(t)>x_i^2 \geqq x^1$, $x_i^*(t)>x_i^1 \geqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対していずれの場合も $E(x_i^*, \varphi_i)<0$ である．また，$x_i^1>x_i^*(t) \geqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対しては $E(x_i^*, \varphi_i)>0$ である．(ii) $x^*(t)=x^2$ なる場合は $x_i^*(t) \neq x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i)=0$ である．(iii) $x^*(t) \leqq x^2$ なる場合には，$x_i^*(t)<x_i^2 \leqq x_i^1$, $x_i^*(t)<x_i^1 \leqq x_i^2$, $x_i^*(t) \leqq x_i^2<x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対していずれの場合も $E(x_i^*, \varphi_i)<0$ である．また，$x_i^1<x_i^*(t) \leqq x_i^2$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*, \varphi_i)>0$ である．

(ハ) 最適資本ストックの値が $x^*(t) \leqq x^2$ を満すとき，$\boldsymbol{I}_0(t)$ に属するすべての i に対して $E(x_i^*, \varphi_i)>0$ である．

(d)(イ) $dw_i/dt \leqq 0$ なる $i \in \boldsymbol{I}_M(t)$ に対する $E(x_i^*, \theta_i)$ の符号については，命題 (c)(イ) における $E(x_i^*, \varphi_i)$ の符号について成立するのと同じことが成立する．

(ロ) $x_i^*(t) \neq x_i^1$ なる $i \in \boldsymbol{I}_F(t)$ と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \theta_i)=0$ である．

(ハ) $dw_i/dt \geqq 0$ なる $i \in \boldsymbol{I}_0(t)$ に対する $E(x_i^*,\ \theta_i)$ の符号については，命題(c)(ハ)における $E(x_i^*,\ \varphi_i)$ の符号について成立するのと同じことが成立する．

[証明] 上の[主張13]は，先の[主張10]から[主張12]までの証明に用いたのと同じ方法を用いると容易に証明される．よって，ここでは証明を省略する．

以上において，われわれは，資本ストックの標的集合が R^n 全体である場合について考えてきた．次項では計画期間の終りにおける標的集合が与えられたコンパクトな凸集合である場合について考察する．

1.3.2 標的集合がコンパクトな凸集合の場合

前項では，資本ストックの終期状態 $x(T)$ と負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を座標とする点 $\boldsymbol{x}(T)$ がベクトル空間 R^{n+1} のどの点であってもよいことを仮定したが，[32] ここでは $x(T)$ が R^n のあらかじめ指定されたコンパクトな凸集合に含まれることが要求されている場合について考察する．これは，企業が計画期間の終りにおける各資本ストックの水準にあらかじめ制約をもうけている場合であって，optimal control の理論において右端固定域問題と呼ばれている問題である．

さて，このように計画期間の終りにおける標的集合がコンパクトな凸集合として与えられていることを除けば，われわれのここでの問題を構成する諸条件は前項の場合と同じであると想定する．すなわち，資本ストックの初期水準は x_0，制御関数—投資政策 $I(t)$ は Lesbegue 可測であって，その値は $0 \leqq t \leqq T$ に対してコンパクトな凸集合 $\Omega \subset R^n$ に属し，$x(t)$ と $I(t)$ との間の制御プロセスは

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{1.16}$$

32) 投資政策 $I(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ は区間 $0 \leqq t \leqq T$ において負にはならないことは先に述べた．

で与えられるものとする．また，最小にすべき目的汎関数すなはち負の現在価値は

$$J(I)=\int_0^t\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \qquad (1.35)$$

によって定義されるものとする．ここで関数 Π は x について凹であることを前項の場合と同様に仮定する．

そして，資本ストックの終期状態 $x(T)$ に関する制約は有限かつ正なる $X_{i\min}$ と $X_{i\max}$ によって

$$X_{i\min}\leqq x_i(T)\leqq X_{i\max} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

のように与えられているものと仮定する．ここで，n 次元列ベクトル $X_{\min}$ と $X_{\max}$ をそれぞれ

$$X_{\min}=\begin{pmatrix} X_{1\min} \\ X_{2\min} \\ \vdots \\ X_{n\min} \end{pmatrix} \qquad X_{\max}=\begin{pmatrix} X_{1\max} \\ X_{2\max} \\ \vdots \\ X_{n\max} \end{pmatrix}$$

によって定義すると，上の制約は

$$X_{\min}\leqq x(T)\leqq X_{\max} \qquad (1.97)$$

によって表わされる．この制約 (1.97) を満す x 空間の点の集合が計画期間の終りにおける資本ストックの標的集合である．この標的集合を X で表わす．

このような標的集合を新たに制約条件として導入すると，企業にとっての問題は，資本ストックの初期状態 x_0 を計画期間の終りにコンパクトな凸集合 X のある点に移し，しかも目的汎関数 $J(I)$ を最小にする投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を選ぶこととなる．

ところで，初期状態 x_0 から始まり，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の到達可能点集合を前項の場合と同じく，$A(T)$ によって表わすと，われわれの問題が意味をもつためには，終期状態 $x(T)$ は到達可能点集合と標的集合との共通集合 $A(T)\cap X\subset R^n$ の点でなければならない．したがって，ここでの問題は，資本ストックの初期状態 x_0 を制御プロセス (1.16) にしたがって集合 $A(T)\cap X$ のある点に移し，しか

も $J(I)$ を最小にする投資政策を Ω に属するものの中から選ぶことである．

以上の議論から明らかなように，もし集合 $A(T)\cap X$ が空集合ならば，資本ストックの初期状態 x_0 を $t=T$ における標的集合 X に属する終期状態に移す許容投資政策—許容制御関数は存在しないことになり，われわれの問題は意味を失なってしまう．そこで，企業は集合 $A(T)\cap X$ が空集合とならないように，すなわち

$$A(T)\cap X\neq\phi \tag{1.98}$$

なるように $t=T$ における標的集合 X を定めているものと仮定する．

さて，以下においては，上のように定式化される問題に対する最適投資政策について主張することのできるいくつかの命題を導くことにしよう．

前項 (1.3.1) において，われわれは，初期状態 x_0 から始まり，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応して，プロセス (1.16) によって制御される資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の到達可能点集合 $A(T)$ が R^n における厳密に凸でコンパクトな集合であること ([主張 1] と [主張 4])，制御プロセス (1.16) は正規プロセスであること，すなはち，$A(T)$ の境界点集合 $\partial A(T)$ の各点に x_0 移す投資政策—極値投資政策はそれぞれ唯一つであること ([主張 3]) を明らかにし，さらに，ある投資政策が極値政策であるための必要充分条件を導出した ([主張 2])．[33]

これらの主張がここでの問題に対してもそのまま成立することは上の定式化から明らかである．それらの主張をここで再説することはしないでおく．

さて，状態変数 $x^0(t)$ を前と同様に

$$x^0(t)=\int_0^t\{w(\tau)I(\tau)-\Pi[x(\tau),\ \tau]\}e^{-r\tau}d\tau \tag{1.50}$$

$$x^0(0)=0 \tag{1.51}$$

によって定義すると，$J(I)=x^0(T)$ であって，負の現在価値 $x^0(T)$ は，$x^0(t)$ が投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ とそれに対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ によって，初期状態 $x^0(0)=0$ から

33) この場合の極値投資政策は，x_0 を $\partial A(T)$ の点に移す投資政策をいう。

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{1.52}$$

にしたがって制御された終期状態である．

初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{1.36}$$

をもつ制御プロセス (1.52)，(1.16) におけるトラジェクトリ $\boldsymbol{x}(t)$ のすべての終期状態から成る到達可能点集合を $\boldsymbol{A}(T)$ とする．尚，ここで

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\x_0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x^0(t)\\x(t)\end{bmatrix}$$

である．

到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ の上で定義された凸超曲面である（[主張 5]）．

いま，$(x^0,\ x)$ 空間 R^{n+1} における集合 $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X}=R^1\times X$$

によって定義すると，仮定 (1.98) によって，集合 $\boldsymbol{X}$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ と共通部分をもち，しかも $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}$ との共通部分は R^{n+1} における凸超曲面である．

われわれにとっての問題は，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を集合 $\boldsymbol{A}(T)\cap\boldsymbol{X}$ に属するある終期状態に移す投資政策を求めることであるが，われわれは $x^0(T)$ を最小にすることを目的としているのであるから，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}$ との共通部分にだけ注目すればよいことになる．換言すれば，$x^0(T)$が最小になるのは $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}$ との共通部分においてである．この部分に $x^0(T)$ が最小になる点一最適点の存在することは，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界が $A(T)$ 上で定義された凸超曲面であることから明らかである．

ところで，$x^0(T)$ が最小になるのには二つの場合がある．その第一は $x^0(T)$ 最小の最適点が集合 $\boldsymbol{X}$ の内側にある場合であり，他の一つは最適点が $\boldsymbol{X}$ の境界点になっている場合である．ところが，最適点が集合 $\boldsymbol{X}$ の内側の点であれば，ここでの問題は，結局のところ，前項で考察したものと同一の問題になってしまう．すなはち，この場合には，最適投資政策は計画期間の終り $t=T$ に

おける標的集合が R^n 全体である場合のそれと同一である.

かくして，ここで議論の中心となるのは最適点が集合 $\boldsymbol{X}$ の境界点集合に存在する場合である．$x^0(T)$ が最小になるのは到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界と集合 $\boldsymbol{X}$ の共通部分においてであるから，最適点が $\boldsymbol{X}$ の境界点集合に属する場合には，$x^0(T)$ が最小になる最適点は $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界点であると共に $\boldsymbol{X}$ の境界点となっているはずである.

このとき，$J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適投資政策は次の命題によって規定される.

[主張14] 切期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関する制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{1.36}$$

と資本ストックの終期状態に関する制約

$$X_{\min} \leqq x(T) \leqq X_{\max} \tag{1.97}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{w(t)I(t) - \Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{1.52}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta(t) \tag{1.16}$$

を考える．このとき，投資政策 $I^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ とそれに対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ は，$I^*(t)$，$x^*(t)$ およびトリビアルでない随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ が微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta \tag{1.99}$$

を満し，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I \in \Omega}[-w(t)Ie^{-rt} + \eta(t)I] \tag{1.100}$$

を満すとともに，$\eta(t)$ の終期状態 $\eta(T)$ が境界点 $x^*(T)$ における集合 X の内向き法線ベクトルとなっているならば，最適である．尚これらの条件のうち，最後のものは，$t=T$ における横断条件と呼ばれる.

[証明] 投資政策 $I^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$，それに対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$，および随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ が上の諸条件を満足するものと仮定する.

さて，$I^1(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を任意の許容投資政策とし，[34] それに対応するトラジェクトリを $\boldsymbol{x}^1(t)$ とする．

このとき，

$$\frac{d}{dt}[-x^0(t)+\eta(t)x(t)]=-\frac{dx^0}{dt}+\frac{d\eta}{dt}x(t)+\eta(t)\frac{dx}{dt}$$

であるから，(1.52)，(1.99)，(1.16) を利用して，先の［主張5］と［主張6］の証明におけるのと同じように

$$[-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)]-[-x^{01}(T)+\eta(T)x^1(T)]$$

を求める．そうすると，投資政策 $I^*(t)$ が計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.100) を満すことと，operating profit Π が x の凹関数であることによって

$$-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)\geq -x^{01}(T)+\eta(T)x^1(T)$$

が導かれる．

ところで $t=T$ における標的集合 X は凸集合であるから，境界点 $x^*(T)$ において支持超平面をもち，この点における X の内向き法線ベクトルが $\eta(T)$ である．したがって

$$x^{01}(T)-x^{0*}(T)\geqq\eta(T)[x^1(T)-x^*(T)]$$

しかし $x^1(T)$ は集合 X に属する点であるから，$x^1(T)$ は上の支持超平面の外側にはない．したがって，

$$\eta(T)[x^1(T)-x^*(T)]\geqq 0$$

よって，

$$x^{0*}(T)\leqq x^{01}(T)$$

である．したがって，$I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は最適投資政策である．

（証明終り）

この［主張14］は，$t=T$ における標的集合がコンパクトな凸集合 $X\subset R^n$ として与えられ，しかもプロセス (1.16) が制御可能である場合に，ある許容投

34) すなはち，$I^1(t)$ は初期状態 x_0 を集合 $A(T)\cap X$ に属する終期状態に移す投資政策である．

資政策が最適投資政策であるための充分条件を明らかにしたものである．$t=T$ における標的集合が x 空間 R^n 全体である場合におけるこのような条件は先の［主張７］に明らかにされている．これらの二つの［主張］の間の違いは，標的集合の違いを反映して，$t=T$ における横断条件が異なっているということである．

この項での問題には最適投資政策が存在することは先にのべたので，われわれは，上の［主張14］の諸条件を満す投資政策を最適投資政策として前項の場合と同様に求めることができる．ただここで注意すべきは，$t=T$ における横断条件が異なっているということである．

尚，$t=T$ における標的集合が R^n 全体である場合において，ある許容投資政策が極値投資政策であるための必要かつ充分な条件を明らかにした先の［主張６］に対応する命題がここの問題についても証明できるが，それについては割愛する．[34)]

35）このような命題は，optimal control の理論における右端固定域の問題に対する maximum principle を援用することによって証明することができる。そのような場合における maximum principle については，たとえば Pontryagin, L. S. et al.〔21〕. Lee, E. B. & L. Markus〔14〕.

第2章　非線型拡張費用関数の下での投資政策

2.1.　モデルの構成

前章では，拡張費用（expansion cost）が資本財価格と粗投資水準との積として表わされることを仮定し，また，最小化すべき目的汎関数としては計画期間にわたる負の純収入の現在価値をとりあげた．この章では，前章のモデルを次の二点で修正したモデルについて考察する．

修正の第一は，拡張費用関数 $S[I(t),\ t]$ を粗投資の厳密な凸関数とすることであり，[1] 第二は資本ストックの終期状態 $x(T)$ そのものを目的汎関数の中に導入することである．

まず最初に，拡張費用関数 $S[I(t),\ t]$ が I について厳密な凸関数であるという修正だけをとり入れたモデルについて考える．第二の修正については後に考慮する．

operating profit Π が前章におけるのと同じように導出されることを仮定すると，最小化すべき目的汎関数は下のように与えられる．

$$J(I)=\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \qquad (2.1)$$

ここで，拡張費用関数については，すべての $I(t)\geqq 0$ に対して $S[I(t),\ t]>0$ であって，連続な2次までの偏導関数をもつ厳密な凸関数であるとする．また，投資政策と operating profit に関して 1.3 に述べられている諸仮定はここでも保持されている．

2.2.1.　標的集合が x 空間全体の場合

まず，モデルを構成する諸要因は，拡張費用関数を除けば，先の1.3.1.にお

1)　$S[I(t),\ t]$ が I の単なる凸関数であると仮定することは経済学的には意味があるが，最適投資政策の存在の仕方とか最適条件に関する議論は，本質的には，1.3.1 の場合におけるものと同じになってしまう．

けるものと同じであることを仮定する．

したがって，ここでの問題は次のように要約することができる．すなわち，資本ストックの初期状態 x_0 をプロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

にしたがって，x 空間 R^n のある点に移し，しかも目的汎関数

$$J(I)=\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{2.1}$$

を最小にする投資政策を，制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

を満すものの中から選ぶことである．[2)]

さて，1.3.1. における [主張 1]〜[主張 4] には目的汎関数 $J(I)$ は登場していない．そして，ここでのモデルと1.3.1.のモデルとでは，形式的には，目的汎関数が異なっているだけであるから，先の [主張 1]〜[主張 4] はここでもまったく同じ形で成立する．それらの [主張] をここで再説することはしないでおく．

われわれが拡張費用関数の厳密な凸性を仮定するとき，1.3.1.の議論との間で最もきわだった違いが見られるのは，目的汎関数を最小にする投資政策が唯一つだということである．

この項では，以下において，最遠資政策の一義的存在を証明し，最適投資政策がどのようなものであるかを明らかにする．

そこで，新しい状態変数 $x^0(t)$ を

$$x^0(t)=\int_0^t\{S[I(\tau),\ \tau]-\Pi[x(\tau),\ \tau]\}e^{-r\tau}d\tau \tag{2.4}$$

$$x^0(0)=0 \tag{2.5}$$

によって定義する．このとき，$J(I)=x^0(T)$ であるから，われわれは $x^0(t)$ の $t=T$ における値を最小にする許容投資政策を求めればよいことになる．

また，$x^0(t)$ はプロセス

---

2) 投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の値が負にならないことは先に述べた．

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

にしたがって制御されることになる．

さて，初期状態

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\x_0\end{bmatrix}$$

から始まり，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する，プロセス(2.6),(2.2)の到達可能点集合を，前と同様に，$\boldsymbol{A}(T)$ によって表わし，[3] 集合 $\boldsymbol{A}_v$ を $\chi^0\leqq x^0$ なる点 $(\chi^0,\ x)\in\boldsymbol{A}(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,\ x)\in R^{n+1}$ の集合と定義する．

このとき，計画期間中における $I(t)$ の値はコンパクトな制約集合 Ω に属するから，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ は $(n+1)$ 次元ベクトル空間 R^{n+1} において有界であって，$\boldsymbol{A}(T)$ の x 空間 R^n の射影は厳密に凸なるコンパクト集合 $A(T)$（x_0 から始まる資本ストックの到達可能点集合）である．

拡張費用関数を $w(t)I(t)$ から厳密に凸なる関数 $S[I(t),\ t]$ におきかえるとき，[主張5] に対応して，次のような命題を証明することができる．

[主張1] 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad(0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

をもつ制御ピロセス

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．集合 $\boldsymbol{A}_v\subset R^{n+1}$ は閉凸集合であり，$\boldsymbol{A}_v$ の下方境界は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ に属する．集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)\subset R^n$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面を形成し，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ の最小値は集合 $\boldsymbol{A}_v$ の（したがって $\boldsymbol{A}(T)$ の）下方境界の唯一点で達成される．そして最適投資政策が存在する．

[証明] $\boldsymbol{A}_v$ が閉集合であること，$\boldsymbol{A}_v$ の下方境界が到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ に

---

3) 初期状態 x_0 から始まり，$I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対する制御プロセス (2.2) の到達可能点集合（資本ストックの到達可能点集合）は前と同じく $A(T)$ である．

属することは，第1章の［主張5］におけるのと同じように証明できるので，その証明はここでは省略する．

以下においては，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界（したがって集合 $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界）が厳密に凸であることを証明する．

二つの投資政策 $I^1(t)$，$I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界上の2点を，それぞれ，$\boldsymbol{x}^1(T)$，$\boldsymbol{x}^2(T)$ とする．いま，点 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P^0\\ P\end{bmatrix}$$

を，

$$\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{x}^1(T)+(1-\mu)\boldsymbol{x}^2(T)\qquad(0<\mu<1)$$

$$\boldsymbol{x}^i(T)=\begin{bmatrix}x^{0i}(T)\\ x^i(T)\end{bmatrix},\qquad(i=1,\ 2)$$

によって定義すると，集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界が厳密に凸なる超曲面であることを証明するためには，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\boldsymbol{P}$ に移す許容投資政策が構成できて，しかも点 $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{A}(T)$ の内点になっていることを示せばよい．

そこで，投資政策 $I^\mu(t)$ を

$$I^\mu(t)=\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)$$

によって定義し，それに対応するトラジェクトリを $x^{0\mu}(t)$，$x^\mu(t)$ とする．

ここで，資本ストックの終期状態が

$$x^\mu(T)=\mu x^1(T)+(1-\mu)x^2(T)=P\tag{2.7}$$

となることは，既に第1章の［主張1］の証明の中で明らかにされている．

次に負の現在価値 $x^{0\mu}(T)$ について調べる．

$$\begin{aligned}x^{0\mu}(T)&=\int_0^T\{S[I^\mu(t),\ t]-\Pi[x^\mu(t),\ t]\}e^{-rt}dt\\&=\int_0^T\{S[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t),t]-\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),t]\}e^{-rt}dt\end{aligned}$$

であるが，この右辺の被積分関数のうち，拡張費用 S は I について厳密に凸であり，operating profit Π は x について凹であることが仮定されているから，

$$S[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t),\ t]-\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ t]$$
$$<\mu\{S[I^1(t),t]-\Pi[x^1(t),\ t]\}+(1-\mu)\{S[I^2(t),\ t]-\Pi[x^2(t),\ t]\}$$

が成立する．したがって

$$\int_0^T\{S[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t),\ t]-\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$
$$<\mu\int_0^T\{S[I^1(t),\ t]-\Pi[x^1(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$
$$+(1-\mu)\int_0^T\{S[I^2(t),\ t]-\Pi[x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$
$$=\mu x^{01}(T)+(1-\mu)x^{02}(T)$$
$$=P^0$$

よって

$$x^{0\mu}(T)<P^0 \tag{2.8}$$

が成立する．

ところで，投資政策 $I^1(t)$，$I^2(t)$ の値は計画期間 $[0,\ T]$ においてコンパクトな凸集合 Ω に属するから，それらに対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^1(t)$，$x^2(t)$ の終期状態 $x^1(T)$，$x^2(T)$ は共に到達可能点集合 $A(T)$ 属する．したがって，終期状態 P^0 が

$$x^{01}(T)=\int_0^T\{S[I^1(t),\ t]-\Pi[x^1(t),\ t)\}e^{-rt}dt$$
$$x^{02}(T)=\int_0^T\{S[I^2(t),\ t]-\Pi[x^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$

の正凸１次結合として表わされ，(2.7)，(2.8)の成立することを考えると，終期状態$\boldsymbol{P}$は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の内点であることがわかる．

以上により，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界，したがって $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界は $A(T)$ 上の厳密に凸なる超曲面である．

$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界が厳密に凸なる超曲面であるから，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界には $x^0(T)$ が最小になる点が唯一点だけあり，しかもこの点は到達可能であるから，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ をこの点に移す最適投資政策が存在する．

（証明終り）

かくして，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属するある1点で最小になり，最適投資政策が存在することが証明されたわけである．初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ をプロセス(2.6)，(2.2)にしたがって，計画期間の終りに，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点として表わされる終期状態に移す許容投資政策を極値投資政策と呼ぶことにすると，最適投資政策は極値投資政策でなければならない．ある許容投資政策が極値政策であるための必要かつ十分な条件は，1.3.1．のモデルについては，先の［主張6］で明らかにされている．拡張費用関数を $w(t)I(t)$ から $S[I(t),\ t]$ におきかえても，［主張6］と同じ内容のものが成立することは，同様にして証明することができるから，ここでは結果だけをかかげておく．

［主張2］ 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T)$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}$$
$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t)$$

を考える．対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}^0(t)\\ \bar{x}(t)\end{bmatrix}$$

をもつ投資政策 $\bar{I}(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が極値投資政策であるのは，微分方程式体系

$$d\eta^0(t)/dt=0, \qquad \eta^0(t)\leqq 0$$
$$\frac{d\eta(t)}{dt}=\eta^0(t)\frac{\partial\Pi[\bar{x}(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

を満し，最大値条件

$$\eta^0(t)S[\bar{I}(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}[\eta^0(t)S(I,\ t)e^{-rt}+\eta(t)I]$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満す，ゼロでない $(n+1)$ 次の行ベクトル $\boldsymbol{\eta}(t)=[\eta^0(t)\quad \eta(t)]$ が存在するとき，またそのときに限る．さて，目的汎関数は $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の1点において最小になるのである

が，その最適点に初期状態を移す最適投資政策は上の［主張2］に示されている諸条件を満していなければならない．

次に，この項で扱っているモデルの最大の特徴を表わす命題を証明しよう．

［主張3］ 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2.3}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{S[I(t),\ t] - \Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を，計画期間の終りに，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する同一の終期状態に移す任意の二つの極値投資政策は，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで一致し，さらに，唯一つの最適投資政策が存在する．

［証明］ 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する同一の点 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$

$$\bar{\boldsymbol{x}}(T) = \begin{bmatrix} \bar{x}^0(T) \\ \bar{x}(T) \end{bmatrix}$$

に移す二つの極値投資政策 $I^1(t),\ I^2(t) \subset \Omega\ (0 \leqq t \leqq T)$ を考える．

もし $(n+1)$ 次元ベクトル $[0\quad \eta(T)]$ が点 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ における $\boldsymbol{A}(T)$ の外向き法線ベクトルを定めるならば，第1章の［主張3］によって，資本ストックの初期状態 x_0 を制御プロセス (2.2) にしたがって，到達可能点集合 $A(T)$ の各境界点に移す極値投資政策はそれぞれ唯一つであるから，このような場合には，$[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで $I^1(t) = I^2(t)$ である．

次に，$\eta^0 < 0$ の場合について考える．このとき $\eta^0 = -1$ と想定しても一般性を失わないから，そのように想定する．

さて，極値投資政策 $I^1(t) \subset \Omega\ (0 \leqq t \leqq T)$ に対応するトラジェクトリを $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ とし，$\boldsymbol{\eta}^1(T)$ が点 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ における外向き法線であるような随伴トラジェクトリを $\boldsymbol{\eta}^1(t) = [-1\quad \eta^1(t)]$ とする．投資政策 $I^1(t)$ は極値投資政策であるから，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで

$$-S[I^1(t),\ t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^1(t)=\max_{I\in\Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt}+\eta^1(t)I]\equiv\omega(t)$$

が成立する．

また，投資政策 $I^2(t)$ に対応するトラジェクトリを $\boldsymbol{x}^2(t)$ とし，$I^2(t)$ は初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を $I^1(t)$ と同じ終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}(T)$ に移すものとする．もし投資政策 $I^2(t)$ が随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}^1(t)$ に対して，区間 $[0,\ T]$ の正の長さをもつある部分区間で最大値条件を満さないならば，

$$\int_0^T\{-S[I^1(t),\ t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^1(t)\}dt$$
$$>\int_0^T\{-S[I^2(t),\ t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^2(t)\}dt \qquad (2.9)$$

が成立する．

ここで，第1章の[主張6]の証明で用いたのと同じ方法を用いて $\boldsymbol{\eta}^1(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)-\boldsymbol{\eta}^1(T)\boldsymbol{x}^2(T)$ をつくると，operading profit Π が x の凹関数であることと，不等式 (2.9) により

$$\boldsymbol{\eta}^1(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)>\boldsymbol{\eta}^1(T)\boldsymbol{x}^2(T)=\boldsymbol{\eta}^1(T)\bar{\boldsymbol{x}}(T)$$

でなければならない．しかるにこれは矛盾である．

よって，$I^1(t)$ と $I^2(t)$ とが初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を同じ終期状態に移す極値投資政策である限り，それらは計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで同じ最大値条件を満さなければならない．

次に，$\frac{1}{2}[I^1(t)+I^2(t)]$ によって定義される投資政策を考えると，拡張費用関数 $S[I(t),\ t]$ が I について厳密に凸なることを仮定したから，$I^1(t)\neq I^2(t)$ なるときには

$$-S\left[\frac{1}{2}(I^1(t)+I^2(t)),\ t\right]e^{-rt}+\eta^1(t)\frac{1}{2}[I^1(t)+I^2(t)]$$
$$>\frac{1}{2}\omega(t)+\frac{1}{2}\omega(t)$$

となる．

以上により，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで $I^1(t)=I^2(t)$ である．

かくして，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点として表わされる各終期状

態に初期状態 x_0 を移す極値投資政策は，それぞれ唯一つであることが証明された．

ところで，この章の［主張1］により，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ が最小になる $A(T)$ の点は唯一つであるから，上に証明されたことを考慮すると，$J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適投資政策は唯一つであることが判明する．

（証明終り）

上に証明された最適投資政策の一義的存在は，先に述べたように，この項で扱っているモデルのきわだった特徴をなすものである．

今度は，ある許容投資政策が最適であるための一つの十分条件を明らかにする．

［主張4］ 初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2.3}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$ をもつ投資政策 $I^*(t)$ は，$x^*(t)$，$I^*(t)$，およびゼロでない $\eta(t)$ が微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta,\ \ \eta(T)=0 \tag{2.10}$$

を満し，かつ計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt}+\eta(t)I] \tag{2.11}$$

を満すならば，最適投資政策である．

［証明］ この証明は，第1章の［主張7］と同じように行なうことができる．

投資政策 $I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$，対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$，および随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ は最大値条件 (2.11) と $t=T$ における横断条件 $\eta(T)=0$ を満足する(2.10)の解であるとする．そして，$I^1(t)$ を $I^*(t)$ 以外の任意の許容投資政策とし，それに対応するトラジェクリを $x^1(t)$ とする．$-x^0(t)+\eta(t)x(t)$ を t について微分し，第1章以来しばし

ば出てきた方法を用いて，$\eta(T)=0$ の下で $-x^{0*}(T)+x^{01}(T)$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&-x^{0*}(T)+x^{01}(T)\\
&=\int_0^T\Big\{\frac{\partial\Pi[x^*(t),\,t]}{\partial x}[x^1(t)-x^*(t)]e^{-rt}+[\Pi(x^*(t),\ t)-\Pi(x^1(t),\ t)]e^{-rt}\\
&\quad+[-S(I^*(t),\,t)e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)]-[-S(I^1(t),\,t)e^{-rt}+\eta(t)I^1(t)]\Big\}dt
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

が得られる．

(2.12) 式の右辺の被積分関数のうちで，operating profit Π は x の凹関数であることが仮定されているから，

$$
\frac{\partial\Pi[x^*(t),\,t]}{\partial x}[x^1(t)-x^*(t)]\geqq\Pi[x^1(t),\ t]-\Pi[x^*(t),\ t] \tag{2.13}
$$

である．

また，投資政策 $I^*(t)$ は最大値条件 (2.11) を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満す．他方，$I^1(t)$ は $I^*(t)$ とは異なった投資政策であるから，$I^*(t)$ と共に最大値条件 (2.11) を満す $\eta(t)$ に対して

$$
-S[I^1(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^1(t)<\max_{I\in\Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt}+\eta(t)I]
$$

が成立する正の長さをもつ $[0,\ T]$ の部分区間が存在する．そうでなければ，$I^*(t)=I^1(t)$ が計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで成立することになるからである．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\{-S[I^*(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)\}dt\\
&\quad>\int_0^T\{-S[I^1(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^1(t)\}dt
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

が成立する．

かくして (2.13) と (2.14) により，(2.12) の右辺は正である．よって

$$
x^{0*}(T)<x^{01}(T)
$$

すなわち，投資政策 $I^*(t)$ は最適投資政策である．　　（証明終り）

さて，以上において，われわれのここでの問題には最適投資政策が唯一つ存

在すること，および投資政策の最適条件が明らかにされた．次に最適投資政策に対応して，資本ストックの最適トラジェクトリと随伴トラジェクトリが一義的に決定されることを証明しておく．

[主張5] 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2.3}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{S[I(t),\ t] - \Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．このとき，微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned} &dx(t)/dt = I^*(t,\ \eta) - \delta x(t) \\ &\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta,\ \ \eta(T) = 0 \end{aligned}\right\}$$

は一義的な解 $x^*(t)$，$\eta^*(t)$ をもつ．ここで，$I^*(t,\ \eta)$ は最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I \in \Omega}[-S(I,\ t) + \eta(t)I] \tag{2.11}$$

によって決定され，$I^*(t) = I^*(t,\ \eta)$ は対応する資本ストックの最適トラジェクトリ $x^*(t)$ をもつ一義的な最適投資政策である．

[証明] $I^*(t)$ が，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\boldsymbol{x}^*(T)$ に移し，対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ をもつ最適投資政策であるとすると，[4] 終期状態 $\boldsymbol{x}^*(T)$ は制御プロセス(2.6)，(2.2) の到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点であり，しかも可能な他の任意の $x^0(T)$ に対して $x^{0*}(T) < x^0(T)$ が成立して，点 $\boldsymbol{x}^*(T)$ において $x^0 = 0$ に平行な $\boldsymbol{A}(T)$ の支持超平面が存在する．したがって，ベクトル

$$\boldsymbol{\eta}^*(T) = [\eta^{0*}(T)\ \ \eta^*(T)] = [-1\ \ \ 0]$$

はこの点における $\boldsymbol{A}(T)$ の外向き法線ベクトルとして定めることができる．いま，$\eta^*(t)$ を $\eta^*(T) = 0$ の下での微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta$$

---

4) $\boldsymbol{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$ である（念のため）．

の解とすると，この章の［主張2］によって，投資政策 $I^*(t)$ は随伴トラジェクトリ $\eta^*(t)$ の下で最大値条件 (2.11) を $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満足する．すなわち，$I^*(t)=I^*(t,\ \eta)$ である．拡張費用関数 S は I の厳密な凸関数であり，[5] $x^0=0$ に平行な上の支持超平面は唯一点 $\boldsymbol{x}^*(T)$ で $\boldsymbol{A}(T)$ に接する．よって，$I^*(t)$，$x^*(t)$，および $\eta^*(t)$ は，それぞれ，一義的に決定される．（証明終り）

さて，以上のことを準備しておいて，最適投資政策を求めることを考えよう．上に証明されたいくつかの［主張］により，負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする投資政策 $I^*(t)$，資本ストックの最適トラジェクトリ $x^*(t)$，および随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ は，境界条件 $x(0)=x_0$，$\eta(T)=0$ をもつ微分方程式体系

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta \tag{2.10}$$

を満し，最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt}+\eta(t)I] \tag{2.11}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満す $I^*(t)$，$x^*(t)$，$\eta(t)$ として一義的に決定される．

ところで，最大値条件 (2.11) は，Hamiltonian 関数 H を下のように定義するとき，それを $I\in\Omega$ について最大にすることと同値である．

$$H=-\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}+\eta(t)[I(t)-\delta x(t)] \tag{2.15}$$

ここで，

$$\varphi(t)=\eta(t)e^{rt}$$

によって定義されるベクトル関数 $\varphi(t)$ を導入すると，$\varphi(t)$ は粗投資の帰属価格ベクトルと解釈され，微分方程式 (2.10) は下のように変形される．

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta) \tag{2.16}$$

---

5) $\boldsymbol{A}(T)$ は資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面である．

ただし，$t=T$ における境界条件は $\varphi(T)=0$ であり，E は n 次の単位行列である．また，最大値条件 (2.11) と Hamiltonian 関数 (2.15) も同様に，それぞれ，下のように変形される．

$$-S[I^*(t),\ t]+\varphi(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[-S(I,\ t)+\varphi(t)I] \tag{2.17}$$

$$H=-\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}+\varphi(t)[I(t)-\delta x(t)]e^{-rt} \tag{2.18}$$

かくして，最適投資政策は関数 H^A を

$$H^A=-S[I(t),\ t]+\varphi(t)I(t) \tag{2.19}$$

によって定義すると，H^A を $I\in\Omega$ について最大にすることによって，$\varphi(t)$ の関数として得られる．

さて，(2.19) で定義される関数 H^A を I について偏微分すると，

$$\frac{\partial H^A}{\partial I}=-\frac{\partial S}{\partial I}+\varphi(t) \tag{2.20}$$

が得られる．ここで $\partial S/\partial I$ は，$\partial S/\partial I=[\partial S/\partial I_1\ \ \partial S/\partial I_2\cdots\cdots\partial S/\partial I_n]$ なる n 次行ベクトルである．

もし $I(t)$ のとり得る値に制約がないならば，H^A が I について最大になるための第1次条件は (2.20) がゼロとなることである．

最大のための第2次条件は関数 S が I について厳密な凸関数であることによって保証されている．

したがって，投資政策に関する制約 $I\in\Omega$ を考慮することによって，関数 H^A ((2.18) で定義される関数 H) を最大にする (最大値条件(2.17)を満す) 最適投資政策は，計画期間 $[0,\ T]$ に属するそれぞれの t について決定することができる．

以下においては一つの特別な場合について考える．

そこで，(2.20) をゼロとおいて得られる方程式の解を $I^H(t)=I^H[t,\ \varphi(t)]$ によって表わし，$\partial S/\partial I_i$ を $S^i(t)=S^i[I(t),\ t]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ によって表わす．$S^i(t)$ は，時点 t において第 i 資本財への粗投資を1単位増加させたときの限界費用—marginal expansion cost と呼ぶ—である．

このとき，

[主張6] $0 \leqq I^H(t) \leqq I_{\max}$ が成立する計画期間 $[0,\ T]$ の部分区間においては，関数 H を最大にする(最大値条件(2.17)を満す)投資政策は，marginal expansion cost と粗投資の帰属価格を等しくならしめる水準で粗投資を行なうことである．すなわち，このような部分区間においては

$$I^*(t)=I^H(t)$$

である．

さて，以下においては，このような部分区間の性質について若干の考察を行なう．

まず，「帰属価格の資本ストック弾力性」を第1章の場合と同様に定義する．すなわち，

$$E(x_i,\ \varphi_i) \equiv \frac{x_i(t)}{\varphi_i(t)}\ \frac{d\varphi_i(t)}{dx_i(t)}$$

$$=\frac{x_i(t)\left\{-\dfrac{\partial \Pi(x,\ t)}{\partial x_i}\ \dfrac{1}{\varphi_i(t)}+(r+\delta_i)\right\}}{I_i(t)-\delta_i x_i(t)} \tag{2.21}$$

次に，資本ストックのいくつかの特定の値を定義する．投資政策 $I^*(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリを $x^*(t)$ とするとき，$dx_i^*/dt=0$ となる x_i の値を x_i^1 $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わす．また，$\varphi_i(t)=\partial S(I^*,\ t)/\partial I_i$ の下で $d\varphi_i/dt=0$ となる x_i の値を x_i^2 $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表わす．したがって，x_i^2 から成る n 次列ベクトルを x^2 で表わすと，

$$\frac{\partial \Pi(x^2,\ t)}{\partial x}=\varphi(t)\,(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)$$

である．

さて，$0 \leqq I^H(t) \leqq I_{\max}$ が成立する部分区間においては，投資政策 $I^*(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$ は

$$dx^*(t)/dt=I^H(t)-\delta x^*(t)$$

によって規定される．

いま，このような部分区間の一つをとって考え，その出発点を t_0，終点を t_1

とすると，$t=t_0$ における資本ストックの水準が x_{t0} で表わされるとき，資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$ は

$$x^*(t)=e^{-t\delta}x_{t0}+\int_{t0}^{t}e^{-(t-\tau)\delta}I^H(\tau)d\tau,\quad t\in[t_0,\ t]$$

によって与えられる．

$0\leqq I^H(t)\leqq I_{\max}$ が成立する部分区間についてわれわれは次のように主張することができる．

[主張7] $0\leqq I^H(t)\leqq I_{\max}$ が成立する計画期間 $[0,\ T]$ の部分区間においては次の諸命題が成立する．

投資政策 $I^*(t)=I^H(t)$ に対応する資本ストックのトラジェクトリを $x^*(t)$ とすれば，

(a) $x_i^*(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の値が $x_i(t)\gtreqqless x_i^1$ であるにしたがって，$dx_i^*/dt\gtreqqless 0$ である．[6)]

(b)(i) $x^*(t)=x^2$ ならば，marginal expansion cost と粗投資の帰属価格は時を通じて変化せず，すなわち，

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}\right]=0$$

であって，marginal expansion cost, marginal operating profit および粗投資の帰属価格の間には次の関係が成立する．

$$\varphi(t)(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)=\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

(ii) $x^*(t)\geq x^2$ ならば，$d\varphi/dt>0$ であって，$\varphi(t)$，$\partial S(I^*,\ t)/\partial I$，$\partial \Pi(x^*,\ t)/\partial x$ の間には次の関係が成立する．

$$\varphi(t)(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)>\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

(iii) $x^*(t)\leq x^2$ ならば，$d\varphi/dt<0$ であって，$\varphi(t)$，$\partial S(I^*,\ t)/\partial I$，$\partial \Pi(x^*,\ t)/\partial x$ の間には次の関係が成立する．

---

6) 複号同順

$$\varphi(t)(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,t)}{\partial I}(rE+\delta)<\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

(c)(i) $x^*(t)=x^2$ ならば，$x_i^*(t)\neq x_i^1$ なる i と $x_i^*(t)$ に対して，$E(x_i^*,\ \varphi_i)=0$ である．

(ii) $x^*(t)\geqq x^2$ ならば，$x_i^*(t)\geqq x_i^2>x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^2\geqq x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^1\geqq x_i^2$ なるiと $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ である．また，$x_i^1>x_i^*(t)\geqq x_i^2$ なる i と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

(iii) $x^*(t)\leqq x^2$ ならば，$x_i^*(t)<x_i^2\leqq x_i^1$，$x_i^*(t)<x_i^1\leqq x_i^2$，$x_i^*(t)\leqq x_i^2<x_i^1$ なる i と $x_i^*(t)$ に対していずれの場合も $E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ であり，$x_i^1<x_i^*(t)\leqq x_i^2$ なる i と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

［証明］ 命題(a)の成立は x_i^1 $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の定義から明らかである．次に命題(b)について考える．投資政策 $I^*(t)=I^H(t)$ は (2.20) をゼロとおいて得られる方程式の解であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}\right]\\&=-\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)\\&=-\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}+\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)\end{aligned}\tag{2.22}$$

が成立する．したがって，$x^*(t)=x^2$ ならば，x^2 の定義から明らかに $d\varphi/dt=0$ であり，(2.22) により

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}\right]=0\tag{2.23}$$

$$\varphi(t)(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)=\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

である．

$x^*(t)\geqq x^2$ ならば，関数Π が x について凹であることと，x^2 の定義から，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt}&=-\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)\\&>-\frac{\partial \Pi(x^2,\ t)}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)\\&=0\end{aligned}\tag{2.24}$$

が得られる．(2.22) を考慮すると，

$$\varphi(t)(rE+\delta)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}(rE+\delta)>\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

であることが判明する．

$x^*(t)\leq x^2$ ならば，上と同様に，Π が x の凹関数であることと，x^2 の定義により，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt}&=-\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)\\&<-\frac{\partial \Pi(x^2,t)}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)\\&=0\end{aligned}\tag{2.25}$$

であり，(2.22) により

$$\varphi(t)(rE+\partial)=\frac{\partial S(I^*,\ t)}{\partial I}<\frac{\partial \Pi(x^*,\ t)}{\partial x}$$

である．

最後に命題(c)について考える．$E(x_i,\ \varphi_i)$ の定義 (2.21) と (2.23)，(2.24)，(2.25) により，$x^*(t)=x^2$，$x^*(t)\geq x^2$，$x^*(t)\leq x^2$ のそれぞれの場合について

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)=0,$$

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)>0,$$

$$\frac{I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)}{x_i^*(t)}E(x_i^*,\ \varphi_i)<0,$$

が，ぞれぞれすべての i ($i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$) に対して成立する．したがって命題(a)を考慮すると，$E(x_i^*,\ \varphi_i)$ の符号について次のようにいうことができる．

$x^*(t)=x^2$ ならば，$x_i^*(t)\neq x_i^1$ なる i と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)=0$ である．

$x^*(t)\geq x^2$ ならば，$x_i^*(t)\geqq x_i^2>x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^2\geqq x_i^1$，$x_i^*(t)>x_i^1\geqq x_i^2$ なる i と $x_i^*(t)$ に対してはいずれの場合も $I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)<0$ であるから，$E(x_i^*,\varphi_i)<0$ である．また，$x_i^1>x_i^*(t)\geqq x_i^2$ なる i と $x_i^*(t)$ に対しては

$I_i^*(t)-\delta_i x_i^*(t)>0$ であるから，$E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

$x^*(t)\leqq x^2$ ならば，$x_i^*(t)<x_i^2\leqq x_i^1$，$x_i^*(t)<x_i^1\leqq x_i^2$，$x_i^*(t)\leqq x_i^2<x_i^1$ なる i と $x_i^*(t)$ に対していずれの場合も $I_i^*(t)-\delta_i x_i^*>0$ であるから，$E(x_i^*,\ \varphi_i)<0$ である．また $x_i^1<x_i^*(t)\leqq x_i^2$ なる i と $x_i^*(t)$ に対して $E(x_i^*,\ \varphi_i)>0$ である．

（証明終り）

2.2.2. 標的集合がコンパクトな凸集合の場合

この項では，企業が計画期間の終り $t=T$ における資本ストックの水準について，それが x 空間 R^n のあるコンパクトな凸集合に属していることを要求している場合について考える．$t=T$ における標的集合を除けば，モデルを構成する諸要因は前項のものと同一であると仮定する．[7)]

さて，資本ストックの終期状態に関する制約は

$$X_{\min}\leqq x(T)\leqq X_{\max} \tag{2.26}$$

によって表わされるものとする．ここで，n 次元ベクトル $X_{\min}$，$X_{\max}$ は

$$X_{\min}=\begin{pmatrix} X_{1\min} \\ X_{2\min} \\ \vdots \\ X_{n\min} \end{pmatrix},\qquad X_{\max}=\begin{pmatrix} X_{1\max} \\ X_{2\max} \\ \vdots \\ X_{n\max} \end{pmatrix}$$

によって定義され，$X_{i\min}$，$X_{i\max}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ はいずれも有限な正の実数である．制約(2.26)を満すすべての終期状態の集合を $X\subset R^n$ によって表わす．集合 X は $t=T$ における標的集合である．

したがって，ここでの問題は，資本ストックの初期状態 x_0 を制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

にしたがって，計画期間の終りに標的集合 X に属するある終期状態に移し，かつ目的汎関数

$$J(I)=x^0(T)=\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{2.1}$$

---

7) したがって，第1章における〔主張1〕から〔主張4〕まではここでも同様に成立する．

最小にする投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を選ぶことである.

初期状態 x_0 から始まり，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応して，プロセス (2.2) にしたがって制御される資本ストックのトラジェクトリ $x(t)$ の到達可能点集合を $A(T)\subset R^n$ によって表わす．このとき，われわれの問題が意味をもつためには，集合 $A(T)$ と集合 X との共通部分 $A(T)\cap X$ が空集合であってはならない．換言すれば，われわれの問題には，許容投資政策が少くとも一つは存在しなければならない．もしそうでなければ，初期状態 x_0 を標的集合 X に属する終期状態に移す投資政策が制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad(0\leqq t\leqq T)\tag{2.3}$$

を満すもののなかに存在しないことになるからである.

そこで，企業は集合 $A(T)\cap X$ が空集合でないように，すなはち

$$A(T)\cap X\neq\phi\tag{2.27}$$

であるように標的集合 X を定めているものと仮定する.

さて，この章の［主張1］で証明されているように，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まる制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}\tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t)\tag{2.2}$$

の投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は $A(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面である.

いま，$(x^0,\ x)$空間 R^{n+1} における集合 $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X}=R^1\times X$$

によって定義すると，仮定 (2,27) によって，集合 $\boldsymbol{X}$ と到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の共通部分が存在することになり，しかも集合 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界との共通部分は厳密に凸なる超曲面を形成することになる．われわれにとっての問題は目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする投資政策を求めることであるから，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界との共通部分だけが議論の対象となる．換言すれば，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ はその共通部分のある点で最小になる．$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は $A(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面であるから最適終期状態

がその共通部分に存在することは明らかである．

ところで，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ が最小になる最適点は集合 $\boldsymbol{X}$ の内側の点になっているか，あるいは $\boldsymbol{X}$ の境界点になっているかのいずれかであるが，このうち前者の場合は，結果的には前項で扱った場合と同じになるから，以下においては後者の場合について考察する．

このとき，目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ が最小になる最適点は集合 $\boldsymbol{X}$ の境界点であると共に集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界点になっているはずである．目的汎関数は，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の共通部分に属するある点で最小になるからである．

さて，われわれは，最適投資政策を次のように規定することができる．

[主張 8] 初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策と資本ストックの終期状態に関して制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2.3}$$

$$X_{\min} \leqq x(T) \leqq X_{\max} \tag{2.26}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{S[I(t),\ t] - \Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．

対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ をもつ投資政策 $I^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，もし $I^*(t)$，$\boldsymbol{x}^*(t)$，対応するゼロでない随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ が微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta \tag{2.28}$$

を満し，最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I \in \Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt} + \eta(t)I] \tag{2.29}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すと共に，随伴トラジェクトリの終期状態 $\eta(T)$ が標的集合 X の境界点 $x^*(T)$ における内向き法線ベクトルとなっているならば，最適投資政策である．ここで

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

である．

[証明]　$I^*(t)$，$x^*(t)$，$\eta(t)$ が微分方程式体系 (2.28) と最大値条件 (2.29) を満すものとする．$I^1(t)$ を，対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^1(t)$ をもつ任意の許容投資政策であるとする．[8] この章の [主張 4] の証明をはじめとしていくつかの個所で用いられているのと同じ方法を用いて

$$[-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)]-[-x^{01}(T)+\eta(T)x^1(T)]$$

を計算する．このとき，最大値条件 (2.29) と関数 Π が x について凹であることにより次の不等式が得られる．

$$-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)\geqq -x^{01}(T)+\eta(T)x^1(T) \tag{2.30}$$

ところで，$t=T$ における標的集合 X は x 空間 R^n におけるコンパクトな凸集合であるから，それは，境界点 $x^*(T)$ において，内向きの法線ベクトル $\eta(T)$ をもつ支持超平面をもっている．したがって

$$\eta(T)[x^1(T)-x^*(T)]\geqq 0$$

が成立する．よって，(2.30) により

$$x^{0*}(T)\leqq x^{01}(T)$$

である．すなわち，$I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は最適投資政策である．

（証明終り）

2.3.　資本ストックの終期状態の評価

われわれは今までの議論において，企業の目的は汎関数

$$J(I)=\int_0^T\{w(t)I(t)-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{1.35}$$

あるいは

$$J(I)=\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{rt}dt \tag{2.1}$$

---

8)　すなはち，投資政策 $I^1(t)$ は制約(2.3)を満すと共に，初期状態 x_0 を集合 $A(T)\cap X$ に属するある終期状態に移す投資政策である．

を最小にすることであると想定してきた．これらの汎関数には，計画期間の終りにおける資本ストックの状態は独立した要素としては含まれていない．換言すれば，企業の目的の中には，資本ストックの終期状態は独立した項目としては入っていないのである．しかし，われわれが今までやってきたように，計画期間が固定された有限の長さのものであると仮定するときには，企業は資本ストックの終期状態自体を目的関数の中に独立した項目として含めることがあると想定することは不可能ではないように思われる．

そこで，以下においては，目的汎関数をこのような方向に修正したモデルについて考察する．資本ストックの終期状態について，企業は，資本ストックの連続かつ微分可能な凹関数として定義される，ある実数関数の値が可能なかぎり大きくなることを望むものと仮定する．そこで，この関数を u で表わすと，最小にすべき目的汎関数は

$$J(I)=-u[x(T)]+\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \qquad (2.31)$$

によって与えられる．[9)]

モデルを構成する他の諸要素は前々項2.2.1におけるものと同一であると仮定する．

このとき，問題は，資本ストックを初期状態 x_0 を，制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \qquad (2.2)$$

にしたがって，x空間 R^n に属するある点に移し，しかも，(2.31) で定義される目的汎関数を最小にする投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を選ぶことである．

このように定式化された問題に対して，第1章における［主張1］から［主張4］までが成立することは明らかである．

そこで，最初に，この問題には汎関数 (2.31) を最小にする最適投資政策が

---

9) 関数 u の具体的な例としては次のようなものが考えられる．たとえば，第 i 資本財の終期状態 $x_i(T)$ の単位当り salvage value が u_i ならば，資本ストック全体の salvage value は $\sum_{i=1}^{n}u_ix_i(T)$ であり，この現在価値は

$$\int_0^T[\sum_{i=1}^{n}u_ix_i(T)]e^{-rt}dt=r(1-e^{-rT})\sum_{i=1}^{n}u_ix_i(T)$$

となる．これを $u[x(T)]$ にとればよい．

存在することを証明する．

以下の議論をやり易くするために，新しい状態変数 $x^0(t)$ を，前と同様に，次のように定義する．

$$x^0(t)=\int_0^t\{S[I(\tau),\ \tau]-\Pi[x(\tau),\ \tau]\}e^{-r\tau}d\tau \tag{2.4}$$

$$x^0(0)=0 \tag{2.5}$$

したがって，$x^0(t)$ に関する制御プロセスは

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{2.6}$$

である．また目的汎関数(2.31)は $J(I)=-u[x(T)]+x^0(T)$ と表わされる．初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から始まり，投資政策 $I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}(t)$ の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}(T)$ で表わす．ここで

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\ x_0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x^0(t)\\ x(t)\end{bmatrix}$$

である．また集合 $\boldsymbol{A}_v\subset R^{n+1}$ を，$\chi^0\leqq x^0$ なる点 $(\chi^0,\ x)\in\boldsymbol{A}(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,\ x)\in R^{n+1}$ の集合として定義する．

このとき，投資政策 $I(t)$ の値はコンパクトな制約集合 Ω にあるから，集合 $\boldsymbol{A}(T)$ は $(x^0,\ x)$ 空間 R^{n+1} において有界であり，われわれの問題は連続関数 $-u(x)+x^0$ を有界集合 $\boldsymbol{A}(\mathrm{T})$ の上で最小にすることである．そして，この章の[主張1]において明らかにされているように，$\boldsymbol{A}_v\subset R^{n+1}$ は閉じた凸集合であり，$\boldsymbol{A}_v$ の下方境界は $\boldsymbol{A}(T)$ に属し，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面である．また，初期状態ゼロから始まり，$I(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリ $x^0(t)$ の終期状態 $x^0(T)$ は集合 $\boldsymbol{A}_v$ の（したがって $\boldsymbol{A}(T)$ の）下方境界に属する唯一点で最小になる．

さて，このとき，われわれは次のように主張することができる．

[主張9]　資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関する制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

と目的汎関数

$$J(I)=-u[x(T)]+\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \qquad (2.31)$$

をもつ粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \qquad (2.2)$$

を考える．このとき，目的汎関数 $J(I)=-u[x(T)]+x^0(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する唯一点で最小になる．

[証明] はじめに，目的汎関数 (2.31) が最小になる点の存在することを証明する．問題は有界な到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の上で連続関数 $-u(x)+x^0$ を最小にすることである．関数 $-u(x)+x^0$ はそれぞれの固定された x に対して x^0 と共に単調に減少するから，$-u(x)+x^0$ の下限は $\boldsymbol{A}(T)$ 上の最小値に等しい．ところで，$\boldsymbol{A}(T)$ は有界で，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界は $\boldsymbol{A}_v$ の下方境界であり，$\boldsymbol{A}_v$ は閉集合であるから，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界はコンパクトである．関数 $-u(x)+x^0$ は集合 $\boldsymbol{A}(T)$ のコンパクトな下方境界上で，$(x^0,\ x)$ について連続であるから，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属するある点 $(x^0,\ x)$ で $-u(x)+x^0$ は最小になる．もしそうでなければ，$x^0>x^{01}$ なる点 $(x^{01},\ x)\in\boldsymbol{A}(T)$ が存在することになり，そのとき $-u(x)+x^0>-u(x)+x^{01}$ であるから，$(x^0,\ x)$ は最適点でないことになるからである．

次に最適点が唯一つであることを示す．そのために，$(x^0,\ x)$ 空間 R^{n+1} における超曲面族

$$U_\omega:\ -u(x)+x^0=\omega$$

を考え，それぞれの実数 ω に対して集合 $\Lambda_\omega\subset R^{n+1}$ を

$$\Lambda_\omega=\{(x^0,\ x)|-u(x)+x^0\leqq\omega\}$$

によって定義する．[10] 集合 Λ_ω と到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ との共通部分が空集合にならないすべての ω の下限を ω^* で表わす．このとき，$\omega>\omega^*$ なる ω に対しては超曲面 U_ω は $\boldsymbol{A}(T)$ の内部と共有点をもち，$\omega<\omega^*$ なる ω に対しては U_ω は $\boldsymbol{A}(T)$ と共有点をもたない．したがって，U_ω は $\omega=\omega^*$ のときにかぎって $\boldsymbol{A}(T)$ と接し，ω^* は目的汎関数の最小値である．いま，

10) 集合 Λ_ω は内点をもつコンパクトな凸集合である．

点 P が $\boldsymbol{A}(T)\cap U_\omega{}^*$ に属する点であるとし，s^* を点 P における $U_\omega{}^*$ の接超平面であるとすると，s^* は，それが $\boldsymbol{A}(T)$ の内部と共有点をもつ場合にかぎって，$\boldsymbol{A}(T)$ と $U_\omega{}^*$ を分離しない．しかし，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の内部の開集合 N が s^* の下方にあるならば，基 N と頂点 P をもつ錐体は $\boldsymbol{A}(T)$ の内部にあることになり，したがって s^* の下方にあることになる．しかるに，超曲面 $U_\omega{}^*$ は点 P において超平面 s^* に接するのであるから，このことは $U_\omega{}^*$ が $\boldsymbol{A}(T)$ の内部と共有点をもつことを意味する．しかし，ω^* は目的汎関数の最小値であるから，このことは不可能である．よって s^* は $U_\omega{}^*$ と $\boldsymbol{A}(T)$ とを分離する．

さて，かりに集合 $\boldsymbol{A}(T)\cap U_\omega{}^*$ に（したがって $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に）異なった2点 P^1 と P^2 があることを想定すると，P^1 と P^2 を結ぶ線分は $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属することになるが，この章の［主張1］で証明されたように，$\boldsymbol{A}(T)$ は $A(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面であるから，このことは不可能である．よって，超曲面 $U_\omega{}^*$ は唯一点において $A(T)$ の下方境界に接することになり，目的汎関数 (2.31) はその点でだけ最小になる．

（証明終り）

以上において，目的汎関数 (2.31) は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の唯一点で最小になることが証明されたから，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ をプロセス(2.6)，(2.2) にしたがって，$\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の各点に移す投資政策が，それぞれ唯一つであれば，最適投資政策は唯一つであることが主張できる．しかるに，$\boldsymbol{x}_0$ を $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の同一の点に移す任意の二つの許容投資政策は，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで一致することが証明されている（この章の［主張3］）から，最適投資政策は唯一つである．すなわち，

［主張10］ 資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関する制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

と目的汎関数

$$J(I)=-u[x(T)]+\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{2.31}$$

をもつ粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．このとき，初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する同一の終期状態に移す任意の二つの投資政策 $I^1(t)$，$I^2(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ について，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで

$$I^1(t)=I^2(t)$$

が成立する．そして，目的汎関数 (2.31) を最小にする最適投資政策は唯一つである．

このように，最適投資政策は資本ストックの初期状態 x_0 を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界に属する終期状態に移すのであるから，それはこの章の［主張2］に述べられている諸条件を満している．

さて，次に，ある投資政策が最適投資政策であるための十分条件を明らかにしよう．

［主張11］ 資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関する制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

と目的汎関数

$$J(I)=-u[x(T)]+\int_0^T\{S[I(t),\ t]-\Pi[x(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{2.31}$$

をもつ粗投資と資本ストックの間の制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．このとき，投資政策 $I^*(t)\subset\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が，対応する資本ストックのトラジェクトリ $x^*(t)$，ゼロでない随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ と共に微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta \tag{2.32}$$

を満足し，最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)=\max_{I\in\Omega}[S(I,\ t)e^{-rt}+\eta(t)I] \tag{2.33}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満し，かつ計画期間の終り $t=T$ における横断条件

$$\eta(T)=\mathrm{grad}u[x^*(T)] \tag{2.34}$$

を満すならば，最適投資政策である．

[証明]　$I^*(t)$，$x^*(t)$ および $\eta(t)$ は，最大値条件 (2.33) と横断条件 (2.34) を満す (2.32) の解であるとする．このとき，operating profit Π が x の凹関数であることと最大値条件とにより，対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}^1(t)$ をもつ任意の許容投資政策 $I^1(t)$ に対して不等式

$$-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)\geqq -x^{01}(T)+\eta(T)x^1(T) \tag{2.35}$$

が成立する．ここで，等号は $I^*(t)$ と $I^1(t)$ とが計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで一致する場合にだけ成立する．

ところで，不等式 (2.35) に対して横断条件 (2.34) を適用すると，

$$-x^{0*}(T)+\frac{\partial u[x^*(T)]}{\partial x}\cdot x^*(T)\geqq -x^{01}(T)+\frac{\partial u[x^*(T)]}{\partial x}\cdot x^1(T)$$

が得られる．ここで $\partial u/\partial x$ は $\partial u/\partial x_i$ から成る n 次の行ベクトルである．この不等式を変形すると，

$$\begin{aligned}&-x^{0*}(T)+u[x^*(T)]+x^{01}(T)-u[x^1(T)]\\&\geqq\frac{\partial u[x^*(T)]}{\partial x}[x^1(T)-x^*(T)]-[u(x^1(T))-u(x^*(T))]\end{aligned}$$

が得られる．ここで関数 u は x について凹であることを仮定したから，

$$\frac{\partial u[x^*(T)]}{\partial x}[x^1(T)-x^*(T)]\geqq u[x^1(T)]-u[x^*(T)]$$

が成立する．よって

$$-x^{0*}(T)+u[x^*(T)]+x^{01}(T)-u[x^1(T)]\geqq 0$$

$$-u[x^1(T)]+x^{01}(T)\geqq -u[x^*(T)]+x^{0*}(T)$$

であり，したがって $I^*(t)$ は最適投資政策である．

（証明終り）

最後に，その一義的存在が証明された最適投資政策とそれに対応する資本ストックの最適トラジェクトリ，および随伴トラジェクトリが一義的に決定されることを証明しておく．

[主張12]　資本ストックの初期状態 x_0 から始まり，投資政策に関する制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2.3}$$

と目的汎関数

$$J(I) = -u[x(T)] + \int_0^T \{S[I(t),\ t] - \Pi[x(t),\ t]\} e^{-rt} dt \tag{2.31}$$

をもつ，資本ストックと粗投資の間の制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{2.2}$$

を考える．このとき微分方程式体系

$$dx(t)/dt = I^*(t,\ \eta) - \delta x(t)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi[x(t),\ t]}{\partial x} e^{-rt} + \eta(t)\delta$$

は境界条件 $x(0) = x_0$, $\eta(T) = \mathrm{grad}\, u[x(T)]$ の下で一義的な解 $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ をもつ．ここで，$I^*(t,\ \eta)$ は最大値条件

$$-S[I^*(t),\ t]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I \in \Omega}[-S(I,\ t)e^{-rt} + \eta(t)I] \tag{2.33}$$

によって決定され，$I^*(t) = I^*(t,\ \eta)$ は，対応する資本ストックの最適トラジェクトリ $x^*(t)$ をもつ唯一つの最適投資政策である．

[証明]　この章の［主張9］の証明の中で定義されている，$(x^0,\ x)$ 空間 R^{n+1} における超曲面族 $U_\omega : -u(x) + x^0$ の中には，集合 $\boldsymbol{A}_v \subset R^{n+1}$ の下方境界に接する唯一つの $U_\omega{}^*$ が存在し，$\omega = \omega^*$ は目的汎関数 (2.31) の最小値である．超曲面 $U_\omega{}^*$ は，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の唯一点 $\boldsymbol{x}^*(T)$ において $\boldsymbol{A}_v$ の（したがって $\boldsymbol{A}(T)$ の）下方境界に接する．[11] そして，$U_\omega{}^*$ の接超平面 s^* は点 $\boldsymbol{x}^*(T)$ における $\boldsymbol{A}_v$ の支持超平面になっている．したがって，われわれは，$\boldsymbol{\eta}^*(T) = [-1 \quad \eta^*(T)]$ をこの超平面 s^* に対する法線ベクトルとして定めることができる．

$I^*(t) \subset \Omega\ (0 \leqq t \leqq T)$ を，トラジェクトリ $\boldsymbol{x}^*(t)$ によって初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ を終期状態 $\boldsymbol{x}^*(T)$ に移す唯一つの投資政策であるとし，$\boldsymbol{\eta}^*(t) = [-1 \quad \eta^*(t)]$ を，

---

11)　$\boldsymbol{x}^*(T)$ はトラジェクトリ

$$\boldsymbol{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

の終期状態である．

終期条件 $\eta^*(T)=\mathrm{grad}u[x^*(T)]$ の下での微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial H[x^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

の解と定義する．$I^*(t)$ は $\boldsymbol{x}_0$ を $\boldsymbol{A}(T)$ の下方境界の点に移す投資政策であるから，それは随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}^*(t)=[-1\quad \eta^*(t)]$ と共に最大値条件 (2.33) を満足する．すなわち

$$I^*(t)=I^*(t,\ \eta)$$

である．　　（証明終り）

以上この章においては，第1章の基本的モデルを二つの面で修正したモデルについて考察した．修正の第一は，expansion cost を粗投資の厳密な凸関数として定義し直すことであり，第二は，第一の修正の下で，目的汎関数に計画期間の終りにおける資本ストックの水準の関数として定義される項を導入したことである．

これらの修正によって最適投資政策は，もちろん，第1章におけるものとは異なった形で得られるのであるが，expansion cost を粗投資の厳密な凸関数と仮定することによって生じた最も重要な変化の一つは，最適投資政策が一義的に決定されるということである．また，第二の修正がもたらした変化のうちで重要なものの一つは，投資政策の最適条件の一つである横断条件が異なったものとなることである．

第3章　生産技術の研究・開発と宣伝・広告政策

今までの二つの章では，われわれは，もっぱら，資本財に対する最適投資政策について論じてきた．この章では，資本財投資と共に企業による生産技術の研究・開発と宣伝・広告の政策について考察する．まず，研究・開発政策の問題から議論をはじめよう．

3.1　モデルの構成

巨視的成長理論にとって技術的進歩が非常に重要な問題であることは広く認められていることであるが，技術進歩は，特に個別企業の生産過程を研究しようとするとき，まったく外生的な現象であるとしてしまうことはできない．それぞれの企業の外部における技術進歩によって当該企業が恩恵を受けることは一般に認められるところではあるけれども，企業自身による生産技術の研究，開発もまた非常に重要な問題であるといわなければならない．そこで，以下において，企業による生産技術の研究と開発はどのように行なわれるとき，企業の目的にとって最適であるかを，資本財に対する投資政策との関連において検討する．

企業は，第1章（および第2章）のモデルにおけるのと同じく，各時点において，n 種類 の資本財とm 種類の可変的生産要素を用いて1種類の生産物を生産しているものと想定し，その在庫水準は常にゼロであるとする．

産出量を $z(t)$，資本ストックの n 次元ベクトルを $x(t)$，可変的生産要素の投入量を $y(t)$ によって表わし，これらの間の関係が生産関数

$$z(t)=f[x(t),\ y(t),\ t] \tag{3.1}$$

に要約されるものと仮定する．

そこで，議論を簡単にするために，技術進歩が Hicks の意味で中立的であることを仮定すると，生産関数 (3.1) は，技術水準の尺度を適当に選ぶことに

より

$$z(t)=e^{\alpha(t)}g[x(t),\ y(t)] \tag{3.2}$$

の形に表わすことができる．ここで関数 g はすべての正の x，y に対して2次までの偏導関数をもち，その等産出量曲線はすべて原点に対して凸であり，かつ滑らかであることを仮定する．

ところで，生産関数（3.2）において技術水準を規定する $\alpha(t)$は，時点 t に至るまでの企業による生産技術の研究・開発政策によって規定されるものと考えることができる．そこで，時間 t における過去からの研究開発費の蓄積（貨幣価値表示）を $\sigma(t)$ で表わし，「研究・開発基金」と呼ぶことにする．そして，$\alpha(t)$ は $\sigma(t)$ の関数

$$\alpha(t)=\alpha[\sigma(t)] \tag{3.3}$$

であって，すべての $\sigma>0$ に対して

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}>0, \qquad \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}<0 \tag{3.4}$$

なる性質をもつものであることを仮定する．われわれは過去からの研究・開発費の蓄積 $\sigma(t)$ を一つの「ストック」と考えることができる．尚，一般的に言えば，研究・開発費の支出とその成果の間の関係は，確率的な，あるいは不確実性を伴う関係として捉えるのが妥当であろうと思われるが，ここでは，$\alpha(t)$ は $\sigma(t)$ の確定的な一価関数であるものと仮定する．[1)]

さて，研究・開発基金 $\sigma(t)$ は，各時点において，その一定部分が「摩滅」するものと考え，摩滅する割合を δ_σ で表わす．時間 t における研究・開発への「粗投資」（研究開発費）を $I_\sigma(t)$ によって表わし，$\sigma(t)$ の初期状態が σ_0 であるとすれば，$\sigma(t)$ の運動は

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \tag{3.5}$$

$$\sigma(0)=\sigma_0 \tag{3.6}$$

によって規定されるものと想定することができる．

---

1)　また，時点 t における技術水準は，$\sigma(t)$ よりもむしろそれ以前の σ によって影響を受けると考えた方がよい場合もあると思われるが，このような場合はここでは扱わない．

次に，企業の収入関数について考える．時点 t における企業の収入 $R(t)$ は生産物価格 $p(t)$ と販売量の積として表わされ，販売量，需要量および産出量 $z(t)$ が共に等しいことを第1章と同じように仮定すると，$R(t)$ は

$$R(t)=p(t)z(t) \tag{3.7}$$

と表わされる．生産物に対する需要関数は生産物価格 $p(t)$ の右下りの一価関数であって，企業にとって既知であることを仮定すると，総収入 $R(t)$ は生産物価格と産出量のいずれかを決定すれば定まることになる．

費用関数については次のように想定する．各時点における総費用は，可変的生産要素の購入に要する費用（operating cost），資本財の購入に要する費用（expansion cost），および研究開発費（研究開発投資）の三つから構成されるものと想定する．operating cost を $C^{-}[y(t),\ t]$，expansion cost を $S[I(t),\ t]$ で表わすと，時点 t における総費用 $C(t)$ は次のように表わすことができる．

$$C(t)=C^{-}[y(t),\ t]+S[I(t),\ t]+I_{\sigma}(t) \tag{3.8}$$

ここで $y(t)$ は $y_i(t)$ から成る m 次ベクトル，$I(t)$ は第 i 資本財への粗投資 $I_i(t)$ から成る n 次ベクトルである．

いま，operating cost が可変的生産要素の価格とそれらの使用量の積として表わされることを仮定すると，それらの要素の価格が $v_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ ならば，総費用関数 (3.8) は次のように表わされる．

$$C(t)=v(t)y(t)+S[I(t),\ t]+I_{\sigma}(t) \tag{3.9}$$

ここで，$v(t)$ は $v_i(t)$ から成る m 次の行ベクトルである．

したがって，時点 t における純収入 $W(t)$ は (3.7) と (3.9) により

$$\begin{aligned} W(t)&=R(t)-C(t)\\ &=p(t)z(t)-\{v(t)y(t)+S[I(t),\ t]+I_{\sigma}(t)\} \end{aligned}$$

によって与えられる．よって最大にすべき割引現在価値は，割引率が時を通じて一定の $r>0$ であるとき

$$L=\int_0^T\{p(t)z(t)-[v(t)y(t)+S(I(t),\ t)+I_{\sigma}(t)]\}e^{-rt}dt \tag{3.10}$$

によって与えられる．企業はこの割引現在価値を最大にするように行動するものと想定する．T は固定された計画期間の長さである．また，資本ストックは，前の二章におけるのと同じく，その運動が

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{3.11}$$

$$x(0)=x_0 \tag{3.12}$$

によって規定されるものと想定する．ここで，δ は，δ_i $(0<\delta_i<1,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を主対角線上の要素とする n 次の対角行列あでり，x_0 は資本ストックの初期状態である．

かくして，企業は，制約 (3.2)，(3.5)，(3.6)，(3.11)，(3.12) の下で，汎関数 (3.10) を最大にするように，$x(t)$，$y(t)$，$\sigma(t)$，$I_s(t)$，$p(t)$，$z(t)$，$I(t)$ を決定しなければならない．[2)]

ところで，これらの決定変数のうち，$p(t)$ と $z(t)$ とはどちらかが決定されると他方は生産物に対する需要関数を通じて決定され，$x(t)$ は $I(t)$ が決定されると (3.11)，(3.12) を通じて決定され，$\sigma(t)$ は $I_s(t)$ が決定されると (3.5) と (3.6) を通じて決定される．また，$\sigma(t)$ は (3.3) によって $\alpha(t)$ を規定する．そして，$y(t)$ は，$z(t)$，$x(t)$ および $\alpha(t)$ が決定されると，それらに応じて (2.2) から決定される．

したがって，企業が汎関数 (3.10) を最大にしようとするとき，各時点においてその値を決定しなければならない変数は，産出量 $z(t)$，資本財への粗投資 $I(t)$ および研究・開発投資 $I_s(t)$ である．

以下の各節において，目的汎関数 (3.10) を最大にするようにこれらを決定する問題について考察する．

3.2. 最適な生産物価格と産出量の決定

第1章において構成されてモデルと同じく，上のモデルにおいても，生産物に対する需要関数が企業にとって既知であって，その需要は常に満され，生産

---

2) 後につづく議論においては，われわれは投資政策と資本ストックの状態に関していくつかの制約を追加するが，それらについては必要な個所で述べることにする．

物在庫水準は常にゼロであることが仮定されているから，各時点における生産物価格（したがって産出量）の決定は他の時点におけるその決定から独立に行なうことができる．

したがって，われわれは，各時点において，与えられた水準の粗投資，資本ストック，研究・開発投資，研究・開発基金に対して最適であるように，まず生産物価格と産出量を決定し，それらに応じて上の諸変数を決定して行けばよい．

このような生産物価格と産出量の決定は， operating profit $\Pi(t)$ を下のように定義するとき，第1章におけるそれと同様に行なうことができる．

$$\Pi(t)=p(t)z(t)-v(t)y(t) \tag{3.13}$$

すなわち，時点 t における生産物価格と産出量とは，(3.13) で与えられる operating profit Π を生産関数

$$z(t)=e^{\alpha(t)}g[x(t),\ y(t)] \tag{3.2}$$

の制約の下で最大にするように決定すればよい．このとき，$\alpha(t)$ と $x(t)$ とは共に所与と見做す．

さて，与えられた産出量 $\bar{z}(t)$ に対して operating cost が最小になる最小費用結合は

$$\left.\begin{aligned} &v_i(t)+e^{\alpha(t)}\lambda\frac{\partial g}{\partial y_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \\ &e^{\alpha(t)}g[x(t),\ y(t)]-\bar{z}(t)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

を y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$ と λ について解くことによって得られる．ここで λ は Lagrange の乗数である．方程式体系 (3.14) を解いて得られる解は，一般に，$z(t)$，$x(t)$，$\alpha(t)$ および $v(t)$ の関数として得られるはずである．そこで，これらの解を

$$y(t)=y[z(t),\ x(t),\ \alpha(t),\ v(t)] \tag{3.15}$$

によって表わす．

次に，最小費用結合を与える可変的生産要素の投入量 (3.15) の下で operating profit を最大にする産出量を求める．最小費用結合の下における ope-

rating cost を

$$C^{-}(t)=C^{-}[z(t),\ x(t),\ \alpha(t),\ v(t)]$$

によって表わす．このとき，operating profit Π は，生産物価格 $p(t)$ が産出量 $z(t)$ の関数であることにより

$$\Pi(t)=p[z(t)]z(t)-C^{-}[z(t),\ x(t),\ \alpha(t),\ v(t)] \qquad (3.16)$$

と表わされる．したがって，operating profit が，与えられた資本ストック，技術水準，および可変的生産要素価格の下で最大になるための第1次条件は

$$z(t)\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+p[z(t)]-\frac{\partial C^{-}}{\partial z}=0 \qquad (3.17)$$

が成立することである．また，最大のための第2次条件は

$$z(t)\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+2\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial^2 C^{-}}{\partial z^2}<0 \qquad (3.18)$$

が成立することである．条件 (3.18) の成立を仮定すると，operating profit Π を最大にする各時点の産出量は (3.17) を $z(t)$ について解くことによって得られる．(3.17) の解は，一般に，$x(t)$，$\alpha(t)$ および $v(t)$ の関数として得られるはずである．そこで，この産出量を

$$z(t)=z[x(t),\ \alpha(t),\ v(t)] \qquad (3.19)$$

によって表わす．

産出量がこのように決定されると，生産物に対する需要関数を通じて生産物価格が決定される．この生産物価格を

$$p(t)=p[x(t),\ \alpha(t),\ v(t)] \qquad (3.20)$$

と表わす．

かくして，企業が，与えられた資本ストック水準，技術水準および可変的生産要素価格の下で，産出量を(3.19)に，生産物価格を(3.20)に決定するとき，それぞれの時点 t における operating profit は最大になる．そこで，このような operating profit を

$$\Pi(t)=\Pi[x(t),\ \alpha(t),\ v(t)] \qquad (3.21)$$

によって表わすことにする．

ところで，企業の技術水準を規定する $\alpha(t)$ は (3.3) のように，研究・開発

基金 $\sigma(t)$ の関数であることが仮定されているから，(3.21) で表わされる operating profit は

$$\Pi(t)=\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ v(t)] \tag{3.22}$$

と表わすことができる．ここで関数 Π はxと σ について凹であることを仮定する．

かくして，operating profit が (3.22) のように与えられるとき，最大にすべき目的汎関数（現在価値）(3.10) は下のように与えられる．

$$L=\int_0^T\{\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ v(t)]-S[I(t),\ t]-I_\sigma(t)\}e^{-rt}dt \tag{3.23}$$

残された問題は，汎関数 (3.23) を最大にするように，各時点の資本財投資と研究・開発投資の水準を決定することである．資本財投資政策 $I(t)$ と研究・開発政策 $I_\sigma(t)$ が決定されると，資本ストック $x(t)$ と研究・開発基金 $\sigma(t)$ とは，初期条件 (3.12)，(3.6) の下で，微分方程式体系 (3.11)，(3.5) によって決定される．以下の各節ではこの問題を考察する．

3.3. 最適な研究・開発政策と資本財投資政策の決定

生産物価格と産出量が前節におけるように決定されると，企業にとって残された問題は，汎関数 (3.23) を (3.11)，(3.12)，(3.5)，(3.6) の下で最大にする資本財投資政策 $I(t)$ と研究・開発政策 $I_\sigma(t)$ を決定することである．

ところで，可変的生産要素価格 $v(t)$ は競争的市場における価格であって，企業にとっては与件であり，以下の議論に影響を与えないから，(3.22)で表わされている operating profit を $\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]$ と表わすことにする．この関数 Π に陽表的に含まれている変数 t によって，可変的要素価格の変化の影響が要約されるものと考える．

また，前節までは，問題を現在価値最大化の問題として定式化してきたのであるが，以下においては，負の現在価値の最小化の問題として定式化する．

ここでは，expansion cost が資本財価格と粗投資水準の積として表わされ

ることを仮定する.[3] すなわち，第 i 資本財の価格を $w_i(t)$ とし，それらから成る n 次の行ベクトルを $w(t)$ で表わすとき， expansion costが $w(t)I(t)$ によって与えられるものと仮定する．かくして，企業にとっての問題は，目的汎関数

$$J(I,\ I_\sigma)=\int_0^T\{w(t)I(t)+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt}dt \quad (3.24)$$

を制約

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \quad (3.11)$$

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \quad (3.5)$$

$$x(0)=x_0 \quad (3.12)$$

$$\sigma(0)=\sigma_0 \quad (3.6)$$

の下で最小にする $I(t)$ と $I_\sigma(t)$ を求めることである．

ここでいくつかの仮定を追加する．

(1) 投資政策 $I(t)$ は計画期間 $[0,\ T]$ において Lesbegue 可測なベクトル関数であり，かつその値は制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\quad(0\leqq t\leqq T) \quad (3.25)$$

を満さなければならないものとする．ここでベクトル $I_{\max}$ の成分 $I_{i\max}$ ($i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$) は有限な正の実数である．

(2) 研究・開発政策 $I_\sigma(t)$ は $[0,\ T]$ において Lesbegue 可測な関数であり，かつその値は制約

$$0\leqq I_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max}\qquad(0\leqq t\leqq T) \quad (3.26)$$

を満さなければならないものとする．ここで $I_{\sigma\max}$ は有限な正の実数である．

制約条件 (3.25) と (3.26) を満す，$(I,\ I_\sigma)$ 空間 R^{n+1} のすべての点の集合を Ω_σ によって表わす．Ω_σ はコンパクトな凸集合である．

(3) operating profit Π は， x と σ に関して微分可能な凹関数であり，それぞれの $x>0$ と $\sigma>0$ に対して，$\Pi\geqq 0$, $\partial\Pi/\partial x>0$, $\partial\Pi/\partial v>0$ である．

---

3) expansion cost が粗投資の厳密な凸関数として定義される場合については，後に項を更めて考察する．

第1章の1.3.において述べられている，標的集合その他の概念はここでも同じように定義することができるが，それらについては必要な個所で順次明らかにする．

3.3.1. 標的集合が (x, σ) 空間全体の場合

はじめに，計画期間中の $(x(t), \sigma(t))$ の標的集合が (x, σ) 空間 R^{n+1} 全体である場合について考える．[4)]

したがって，問題は，資本ストックと研究・開発基金の初期状態 $x_{\sigma 0}$ を，制御プロセス (3.11)，(3.5) にしたがって (x, σ) 空間 R^{n+1} のある点に移し，しかも目的汎関数(3.24)を最小にする $(I(t), I_\sigma(t)) \subset \Omega_\sigma$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を求めることである．ここで

$$x_{\sigma 0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}$$

である．

ところで，制御プロセス (3.11)，(3.5) と投資政策，研究・開発政策に関する制約 (3.25)，(3.26) とは，第1章における 1.3.1 のものと形式的には同じものである．したがって，ここでのモデルに対しても，第1章の [主張1] から [主張4] までと同じ彦の [主張] が成立する．それらの証明はトリビアルであるからすべて省略し，結果だけをかかげておく．

[主張1] 初期状態 $x_{\sigma 0}$ から始まり，投資政策と研究・開発政策に関する制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \quad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.25}$$

$$0 \leqq I_\sigma(t) \leqq I_{\sigma \max} \quad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.26}$$

をもつ制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

---

4) variation-of-parameter formula を用いると，(3.25) と (3.26) を満す $I(t)$, $I_\sigma(t)$ に対しては，$x(t)$ と $\sigma(t)$ は負にならないことが確められるから，このような想定の下でも，ここでの問題は経済学的な意味を失わない．

の到達可能点集合を $A_\sigma(T)$ によって表わすと，$A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ はコンパクトな凸集合である．

[主張 2] 初期状態 $x_{\sigma 0}$ から始まり，制約(3.25)，(3.26)をもつ制御プロセス(3.11)，(3.5)を考える．対応するトラジェクトリ $\bar{x}_\sigma(t)$ をもつ政策 $(\bar{I}(t), \bar{I}_\sigma(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ は微分方程式体系

$$d\eta(t)/dt=\eta(t)\delta$$

$$d\eta_\sigma(t)/dt=\eta_\sigma(t)\delta_\sigma$$

を満し，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$\eta(t)\bar{I}(t)+\eta_\sigma(t)\bar{I}_\sigma(t)=\max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma}[\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma]$$

を満すゼロでない $(n+1)$ 次の行ベクトル $[\eta(t)\quad \eta_\sigma(t)]$が存在するとき，またそのときにかぎって極値政策である．ここで，極値政策とは初期状態 $x_{\sigma 0}$ を $A_\sigma(T)$ の境界点集合に移す投資政策と研究・開発政策の組であり，

$$\bar{x}_\sigma(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}(t)\\ \bar{\sigma}(t)\end{bmatrix}$$

である．

[主張 3] 初期状態 $x_{\sigma 0}$ から始まり，制約 (3.25)，(3.26) をもつ制御プロセス (3.11)，(3.5) の到達可能点集合の境界点集合を $\partial A_\sigma(T)$ で表わす．集合 $\partial A_\sigma(T)$ に属する各点に初期状態 $x_{\sigma 0}$ を移す極値政策はそれぞれ唯一つである．

[主張 4] 初期状態 $x_{\sigma 0}$ から始まり，制約 (3.25)，(3.26) をもつ制御プロセス (3.11)，(3.5) の到達可能点集合 $A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ は厳密な凸集合である．

さて，以上四つの [主張] には目的汎関数 (3.24) は登場しない．以下においてはこれを議論の中に導入する．そのために状態変数 $x^0(t)$ を次のように定義する．

$$x^0(t)=\int_0^t\{w(\tau)I(\tau)+I_\sigma(\tau)-\Pi[x(\tau),\ \sigma(\tau),\ \tau]\}e^{-r\tau}d\tau \qquad (3.27)$$

$$x^0(0)=0 \qquad (3.28)$$

このとき，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ であって，$J(I,\ I_\sigma)$ の最小化は $x^0(t)$ の終期状

態 $x^0(T)$ を最小化することと同値である．そして

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \qquad (3.29)$$

である．また，$(n+2)$ 次元の列ベクトル $\boldsymbol{x}_\sigma(t)$ と $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を，それぞれ

$$\boldsymbol{x}_\sigma(t)=\begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{\sigma 0}=\begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}$$

によって定義し，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まる制御プロセス(3.29)，(3.11)，(3.5)の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}_\sigma(T)\subset R^{n+2}$ によって表わす．

$(I(t),\ I_\sigma(t))$ の値は，計画期間期間 $[0,\ T]$ において，コンパクトな集合 $\Omega_\sigma\subset R^{n+1}$ に属するから，到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ は (x^0, x, σ) 空間 R^{n+2} において有界である．そして，$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の $(x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+1} への射影は厳密に凸なるコンパクト集合 $A_\sigma(T)$ である．いま，$(x^0,\ x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+2} における集合 $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ を第1章におけるのと同じように定義すると，われわれは次のように主張することができる．[5)]

[主張5]　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \qquad (3.25)$$

$$0\leqq I_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \qquad (3.26)$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \qquad (3.29)$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \qquad (3.11)$$

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \qquad (3.5)$$

を考える．このとき，集合 $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ は $(x^0,\ x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+2} における閉凸集合であって，$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ に属する．$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界は $A_\sigma(T)$ 上で定義された凸超曲面を形成する．そして目的汎関数 $J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ を最小にする最適政策が存在する．

[証明]　集合 $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ が R^{n+2} における閉集合であること，$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界が $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$

---

5)　すなわち，$\chi^0\leqq x^0$ なる点 $(\chi^0,\ x,\ \sigma)\in\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,\ x,\ \sigma)\in R^{n+2}$ の集合として $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ を定義する．

に属することは，第1章の[主張5]と同じようにして証明することができるのでここでは省略する．

そこで，$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界（したがって $\boldsymbol{A}_{\sigma 0}$ の下方境界）が凸なることを証明する．

二組の政策 $(I^1(t),\ I_\sigma^1(t))$，$(I^2(t),\ I_\sigma^2(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の2点を，それぞれ，$\boldsymbol{x}_\sigma^1(T)$，$\boldsymbol{x}_\sigma^2(T)$ とする．いま，点 $\boldsymbol{P}_\sigma$ を

$$\boldsymbol{P}_\sigma=\begin{bmatrix}P^0\\P\\P_\sigma\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_\sigma=\mu\boldsymbol{x}_\sigma^1(T)+(1-\mu)\boldsymbol{x}_\sigma^2(T),\ (0\leqq\mu\leqq 1)$$

によって定義すると，集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界が凸であることを証明するためには，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を終期状態 $\boldsymbol{P}_\sigma$ に移す投資政策と研究・開発政策が構成できて，$\boldsymbol{P}_\sigma\in\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ であることを示せばよい．

そこで，対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_\sigma^\mu(t)$ をもつ政策 $(I^\mu(t),\ I_\sigma^\mu(t))$ を

$$I^\mu(t)=\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)$$
$$I_\sigma^\mu(t)=\mu I_\sigma^1(t)+(1-\mu)I_\sigma^2(t)$$

によって定義する．ここで

$$\boldsymbol{x}_\sigma^\mu(t)=\begin{bmatrix}x^{0\mu}(t)\\x^\mu(t)\\\sigma^\mu(t)\end{bmatrix}$$

である．

資本ストックのトラジェクトリ $x^\mu(t)$ の終期状態 $x^\mu(T)$ は variation-of-parameter formula により

$$\begin{aligned}x^\mu(T)&=e^{-\delta T}x_0+e^{-\delta T}\int_0^T e^{\delta t}I^\mu(t)dt\\&=e^{-\delta T}x_0+e^{-\delta T}\int_0^T e^{\delta t}[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)]dt\\&=\mu[e^{-\delta T}x_0+e^{-\delta T}\int_0^T e^{\delta t}I^1(t)dt]+(1-\mu)[e^{-\delta T}x_0+e^{-\delta T}\int_0^T e^{\delta t}I^2(t)dt]\\&=\mu x^1(T)+(1-\mu)x^2(T)\\&=P\end{aligned}$$

となり，研究・開発基金のトラジェクトリ $\sigma^{\mu}(t)$ の終期状態 $\sigma^{\mu}(T)$ も同様に

$$\sigma^{\mu}(T)=\mu\sigma^{1}(T)+(1-\mu)\sigma^{2}(T)=P_{\sigma}$$

となる．

そこで問題は $x^{0\mu}(T)$ である．

$$\begin{aligned}x^{0\mu}(T)&=\int_0^T\{w(t)I^{\mu}(t)+I_{\sigma}{}^{\mu}(t)-\Pi[x^{\mu}(t),\ \sigma^{\mu}(t),\ t]\}e^{-rt}dt\\&=\int_0^T\{w(t)[\mu I^{1}(t)+(1-\mu)I^{2}(t)]+[\mu I_{\sigma}{}^{1}(t)+(1-\mu)I_{\sigma}{}^{2}(t)]\\&\qquad-\Pi[\mu x^{1}(t)+(1-\mu)x^{2}(t),\ \mu\sigma^{1}(t)+(1-\mu)\sigma^{2}(t),\ t]\}e^{-rt}dt\end{aligned}$$

であるが，関数 Π が凹であることにより，

$$\begin{aligned}&\Pi[\mu x^{1}(t)+(1-\mu)x^{2}(t),\ \mu\sigma^{1}(t)+(1-\mu)\sigma^{2}(t),\ t]\\&\qquad\geqq\mu\Pi[x^{1}(t),\ \sigma^{1}(t),\ t]+(1-\mu)\Pi[x^{2}(t),\ \sigma^{2}(t),\ t]\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}x^{0\mu}(T)&\leqq\mu\int_0^T\{w(t)I^{1}(t)+I_{\sigma}{}^{1}(t)-\Pi[x^{1}(t),\ \sigma^{1}(t),\ t]\}e^{-rt}dt\\&\qquad+(1-\mu)\int_0^T\{w(t)I^{2}(t)+I_{\sigma}{}^{2}(t)-\Pi[x^{2}(t),\ \sigma^{2}(t),\ t]\}e^{-rt}dt\\&=\mu x^{01}(T)+(1-\mu)x^{02}(T)\\&=P^{0}\end{aligned}$$

である．

ところで，二組の政策 $(I^{1}(t),\ I_{\sigma}{}^{1}(t))$，$(I^{2}(t),\ I_{\sigma}{}^{2}(t))$ は共に計画期間 $[0,\ T]$ において制約集合 Ω_{σ} に属するのであるから，それらに対応するトラジェクトリ $x_{\sigma}{}^{1}(t)$，$x_{\sigma}{}^{2}(t)$ の終期状態 $x_{\sigma}{}^{1}(T)$，$x_{\sigma}{}^{2}(T)$ は共に到達可能点集合 $A_{\sigma}(T)\subset R^{n+1}$ に属する．したがって，終期状態 P^{0} が $x^{01}(T)$ と $x^{02}(T)$ の非負凸1次結合として表わされることを考えると，終期状態 $\boldsymbol{P}_{\sigma}$ は到達可能であることがわかる．すなわち $\boldsymbol{P}_{\sigma}\in\boldsymbol{A}_{\sigma}(T)$ である．

以上により，$\boldsymbol{A}_{\sigma}(T)$ の下方境界は $A_{\sigma}(T)$ 上の凸超曲面であり，$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ は R^{n+2} における凸集合である．$\boldsymbol{A}_{\sigma}(T)$ の下方境界は凸超曲面であるから，そこには目的汎関数 $J(I,\ I_{\sigma})=x^{0}(T)$ の値が最小になる点があり，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$

をこの点に移す最適な投資政策と研究・開発政策が存在する[6]．（証明終り）

初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界に属する終期状態に移す投資政策と研究・開発政策の組を極値政策の組と呼ぶことにする．上の［主張5］により，最適政策の組は $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の点に移すのであるから，最適政策は極値政策でなければならない．そこで，次に，極値政策の性格づけを行なうことにする．下の命題はある許容政策が極値政策であるための必要十分条件を与えるものである．

［主張6］　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.25}$$

$$0 \leqq I_\sigma(t) \leqq I_{\sigma\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.26}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{w(t)I(t) + I_\sigma(t) - \Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{3.29}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

を考える．対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(t)$ をもつ，投資政策と研究・開発政策の組 $(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t)) \subset \Omega_\sigma$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned} &d\eta^0(t)/dt = 0,\ \ \eta^0(t) \leqq 0 \\ &\frac{d\eta(t)}{dt} = \eta^0 \frac{\partial \Pi[\bar{x}(t),\ \bar{\sigma}(t),\ t]}{\partial x} e^{-rt} + \eta(t)\delta \\ &\frac{d\eta_\sigma(t)}{dt} = \eta^0 \frac{\partial \Pi[\bar{x}(t),\ \bar{\sigma}(t),\ t]}{\partial \sigma} e^{-rt} + \eta_\sigma(t)\delta_\sigma \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

を満し，最大値条件

$$\begin{aligned} &\eta^0[w(t)\bar{I}(t) + \bar{I}_\sigma(t)]e^{-rt} + \eta(t)\bar{I}(t) + \eta_\sigma(t)\bar{I}_\sigma(t) \\ &= \max_{(I, I_\sigma) \in \Omega_\sigma} [\eta^0(w(t)I + I_\sigma)e^{-rt} + \eta(t)I + \eta_\sigma(t)I] \end{aligned} \tag{3.31}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満す，ゼロでない $(n+2)$ 次元の行ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}(t) = [\eta^0 \quad \eta(t) \quad \eta_\sigma(t)]$ が存在するとき，また，そのと

---

6)　［主張5］は，$x^0(T)$ が最小になる点が唯一つであるとか，最適政策の組が唯一つであるとかまでを主張するものではない．

きにかぎって極値政策の組である．ここで

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}^0(t)\\ \bar{x}(t)\\ \bar{\sigma}(t)\end{bmatrix}$$

である．

[証明]　まず，$(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t))$ と対応するトラジェクトリ $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(t)$ および随伴トラジェクリ $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}(t)$ が微分方程式体系 (3.29)，(3.11)，(3.5) および (3.30) を満し，かつ最大値条件 (3.31) を満すものと仮定して，このとき，$\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(T)$ が到達可能点集合の下方境界の点であることを証明する．

そのためには任意の許容政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t))$ に対応するトラジェクトリを $\boldsymbol{x}_\sigma(t)$ とするとき，不等式

$$\begin{aligned}&\eta^0\bar{x}^0(T)+\eta(T)\bar{x}(T)+\eta_\sigma(T)\bar{\sigma}(T)\\ &\quad\geqq\eta^0x^0(T)+\eta(T)x(T)+\eta_\sigma(T)\sigma(T)\end{aligned}\tag{3.32}$$

が成立することを証明すればよい．

この不等式の成立が証明されると，(1) $\eta^0<0$ ならば終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界に属することになり，(2) $\eta^0=0$ ならば $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(T)$ は集合 $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の "lateral boundary" に属することになる．しかし $\eta^0=0$ ならば，制御プロセス (3.11)，(3.5) のトラジェクトリ $\bar{x}_\sigma(t)$ はこの章の [主張 2] の意味における極値トラジェクトリであって，$\bar{x}_\sigma(T)\in\partial A_\sigma(T)$ である．さらに，到達可能点集合 $A_\sigma(T)$ の各境界点に初期状態 $x_{\sigma 0}$ を移す極値政策の組はそれぞれ唯一つである（この章の [主張 3]）から，$(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t))$ は点 $\bar{x}_\sigma(T)\in\partial A_\sigma(T)$ に初期 態 $x_{\sigma 0}$ を移す唯一組の政策である．よって，点 $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(T)$ は $\bar{x}_\sigma(T)$ の垂直方向にある $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の唯一つの点である．

以上により，終期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}_\sigma(T)$ はいずれの場合にも到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の点であることになり，したがって，$(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t))$ は極値政策の組である．

そこで，証明すべきことは不等式 (3.32) の成立することである．$\eta^0x^0(t)+\eta(t)x(t)+\eta_\sigma(t)\sigma(t)$ を t について微分した結果と微分方程式体系 (3.29)，

(3.11)，(3.5) および (3.30) を用いると，

$$\eta^0 x^0(T)+\eta(T)x(T)+\eta_\sigma(T)\sigma(T)-[\eta^0\bar{x}^0(T)+\eta(T)\bar{x}(T)+\eta_\sigma(T)\bar{\sigma}(T)]$$

$$=\int_0^T\Big\{\eta^0\Big[\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ \bar{\sigma},\ t)}{\partial x}(x(t)-\bar{x}(t))+\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ \bar{\sigma},\ t)}{\partial\sigma}(\sigma(t)-\bar{\sigma}(t))$$

$$-\Pi(x(t),\ \sigma(t),\ t)+\Pi(\bar{x}(t),\ \bar{\sigma}(t),\ t)\Big]e^{-rt}$$

$$+\eta^0[w(t)(I(t)-\bar{I}(t))+(I_\sigma(t)-\bar{I}_\sigma(t))]e^{-rt}$$

$$+\eta(t)[I(t)-\bar{I}(t)]+\eta_\sigma(t)[I_\sigma(t)-\bar{I}_\sigma(t)]\}dt \tag{3.33}$$

が得られる．

$(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t))$ は最大値条件 (3.31) を $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すことが仮定されているから，

$$\eta^0[w(t)(I(t)-\bar{I}(t))+I_\sigma(t)-\bar{I}_\sigma(t)]e^{-rt}$$

$$+\eta(t)[I(t)-\bar{I}(t)]+\eta_\sigma(t)[I_\sigma(t)-\bar{I}_\sigma(t)]$$

$$\leqq 0 \tag{3.34}$$

が $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで成立する．

また関数 Π は x と σ について凹であることが仮定さているから，

$$\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ \bar{\sigma},\ t)}{\partial x}[x(t)-\bar{x}(t)]+\frac{\partial\Pi(\bar{x},\ \bar{\sigma},\ t)}{\partial\sigma}(\sigma(t)-\bar{\sigma}(t)]$$

$$\geqq\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]-\Pi[\bar{x}(t),\ \bar{\sigma}(t),\ t] \tag{3.35}$$

である．

$\eta^0\leqq 0$ であることを考慮すると，(3.34) と (3.35) により，(3.33) の右辺の被積分関数は，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで非正である．したがって，不等式 (3.32) が成立する．

以上により，投資政策と研究・開発政策の組 $(\bar{I}(t),\ \bar{I}_\sigma(t))$ は極値政策の組である．

逆の証明は，この章のモデルでは企業の政策が $I(t)$ と $I_\sigma(t)$ であり，状態変数が $x(t)$ と $\sigma(t)$ であって，目的汎関数が (3.24) ように変っていることに注意すれば，第1章の［主張6］におけるのと同様に行なうことができるので，ここでは省略する．　（証明終り）

先に述べたように，最適政策の組は極値政策の組でなければならないから，それは上の[主張6]に述べられている諸条件を満していなければならない．したがって，それらの諸条件は，ある投資政策と研究・開発政策の組が最適であるための必要条件となっている．そこで，次に，ある政策の組が最適であるための一つの十分条件を明らかにしよう．

[主張7]　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.25}$$

$$0 \leqq I_\sigma(t) \leqq I_{\sigma\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.26}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{w(t)I(t) + I_\sigma(t) - \Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{3.29}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

を考える．対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_\sigma{}^*(t)$ をもつ，投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma{}^*(t)) \subset \Omega_\sigma$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，$\boldsymbol{x}_\sigma{}^*(t)$，$I^*(t)$，$I_\sigma{}^*$ およびトリビアルでない随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}(t) = [-1 \quad \eta(t) \quad \eta_\sigma(t)]$ が微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta(t)}{dt} &= -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta \\ \frac{d\eta_\sigma(t)}{dt} &= -\frac{\partial \Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial \sigma}e^{-rt} + \eta_\sigma(t)\delta_\sigma \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

を終期条件 $\eta(T)=0$，$\eta_\sigma(T)=0$ の下で満し，かつ最大値条件

$$\begin{aligned} &-[w(t)I^*(t) + I_\sigma{}^*(t)]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) + \eta_\sigma(t)I_\sigma{}^*(t) \\ &= \max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma} [-(w(t)I + I_\sigma)e^{-rt} + \eta(t)I + \eta_\sigma(t)I_\sigma] \end{aligned} \tag{3.37}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すならば最適である．ここで

$$\boldsymbol{x}_\sigma{}^*(t) = \begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \\ \sigma^*(t) \end{bmatrix}$$

である．

[証明] $I^*(t)$, $I_\sigma^*(t)$, $x_\sigma^*(t)$ および $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}(t)$ は，(3.36)，(3.37) を満足するものと仮定する．このとき，上の[主張6]の証明に用いたのと同じ計算を，$\eta^0=-1$, $\eta(T)=0$, $\eta_\sigma(T)=0$ の下で行なえば，任意の許容政策の組 $(I(t), I_\sigma(t))$ とそれに対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_\sigma(t)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&-x^0(T)+x^{0*}(T)\\
&=\int_0^T\Big\{-\Big[\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial x}(x(t)-x^*(t))+\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial\sigma}(\sigma(t)-\sigma^*(t))\\
&\qquad-\Pi(x(t),\ \sigma(t),\ t)+\Pi(x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t)\Big]e^{-rt}\\
&\qquad-[w(t)(I(t)-I^*(t))+I_\sigma(t)-I_\sigma^*(t)]e^{-rt}\\
&\qquad+\eta(t)[I(t)-I^*(t)]+\eta_\sigma(t)[I_\sigma(t)-I_\sigma^*(t)]\Big\}dt
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

が得られる．

$(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))$ は $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}(t)$ と共に最大値条件 (3.37) を $[0,\ T]$ のほとんどべてのところで満すのであるから，

$$
\begin{aligned}
&[w(t)(I(t)-I^*(t))+I_\sigma(t)-I_\sigma^*(t)]e^{-rt}\\
&\geqq\eta(t)[I(t)-I^*(t)]+\eta_\sigma(t)[I_\sigma(t)-I_\sigma^*(t)]
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

が $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで成立する．

また，operating profit Π は，x, σ について凹であることが仮定されているから

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial x}[x(t)-x^*(t)]+\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial\sigma}[\sigma(t)-\sigma^*(t)]\\
&\geqq\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]-\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

が成立する．

したがって，(3.39) と (3.40) により，(3.38) の右辺の被積分関数は，計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで非正である．

よって，$-x^0(T)+x^{0*}(T)\leqq 0$, すなはち

$$x^{0*}(T)\leqq x^0(T)$$

である．以上により，投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))$ は最適であることが証明された．　(証明終り)

今度は，最適な投資政策と研究・開発政策の組が決定されると，それに応じて，最適トラジェクトリと随伴トラジェクトリが決定されることを明らかにしておく．

[主張8]　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，制約

$$0 \leqq I(t) \leqq I_{\max} \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.25}$$

$$0 \leqq I_\sigma(t) \leqq I_{\sigma\max} \quad (0 \leqq t \leqq T) \tag{3.26}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt = \{w(t)I(t) + I_\sigma(t) - \Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \tag{3.29}$$

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

を考える．このとき，微分方程式体系

$$dx(t)/dt = I^*(t,\ \eta) - \delta x(t)$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma{}^*(t,\ \eta_\sigma) - \delta_\sigma \sigma(t)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi(x,\ \sigma,\ t)}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta$$

$$\frac{d\eta_\sigma(t)}{dt} = -\frac{\partial \Pi(x,\ \sigma,\ t)}{\partial \sigma}e^{-rt} + \eta_\sigma(t)\delta_\sigma$$

は境界条件 $x(0)=x_0$, $\sigma(0)=\sigma_0$, $\eta(T)=0$, $\eta_\sigma(T)=0$ の下で解 $x^*(t)$, $\sigma^*(t)$, $\eta^*(t)$, $\eta_\sigma{}^*(t)$ をもつ．ここで，$I^*(t,\ \eta)$, $I_\sigma{}^*(t,\ \eta_\sigma)$ は最大値条件

$$-[w(t)I^*(t) + I_\sigma{}^*(t)]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) + \eta_\sigma(t)I_\sigma{}^*(t)$$

$$= \max_{(I, I_\sigma) \in \Omega_c} [-(w(t)I + I_\sigma)e^{-rt} + \eta(t)I + \eta_\sigma(t)I_\sigma] \tag{3.37}$$

によって決定される．最適政策は，$I^*(t) = I^*(t,\ \eta^*(t))$, $I_\sigma{}^*(t) = I_\sigma{}^*(t,\ \eta_\sigma{}^*(t))$ であり，それらに対応する最適トラジェクトリは $x^*(t)$, $\sigma^*(t)$ である．

[証明]　投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma{}^*(t))$ が，対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_\sigma{}^*(t)$ によって，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を終期状態 $\boldsymbol{x}^*(T)$ に移す最適政策の組であるとすると，$\boldsymbol{x}_\sigma{}^*(T)$ は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の点であり，しかも，任意の終期状態 $\boldsymbol{x}_\sigma(T) \in \boldsymbol{A}_\sigma(T)$ に対して $x^{0*}(T) \leqq x^0(T)$

が成立し，下方境界点 $\boldsymbol{x}_\sigma^*(T)$ において $x^0=0$ に平行な $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の支持超平面が存在する．したがって，ベクトル

$$\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}^*(T)=[\eta^{0*}(T)\quad \eta^*(T)\quad \eta_\sigma^*(T)]=[-1\quad 0\quad 0]$$

はこの点 $\boldsymbol{x}_\sigma^*(T)$ における $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の外向き法線ベクトルとして定めることができる．

いま，$\eta^*(t)$，$\eta_\sigma^*(t)$ を，$\eta^*(T)=0$，$\eta_\sigma^*(T)=0$ の下での微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

$$\frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma$$

の解であるとすれば，$(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))$ は，先の［主張6］により，随伴トラジェクトリ $\boldsymbol{\eta}_{x\sigma}^*(t)$ の下で最大値条件 (3.37) を満足する．すなわち

$$I^*(t)=I^*(t,\ \eta^*),\quad I_\sigma(t)=I_\sigma^*(t,\ \eta_\sigma^*)$$

である．　　（証明終り）

さて，今まで展開してきた議論により，最適な投資政策と研究・開発政策 $(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))\subset\Omega_\sigma$ $(\leqq t\leqq T)$，それらに対応する資本ストックと研究・開発基金の最適トラジェクトリ $x^*(t)$，$\sigma^*(t)$，および随伴トラジェクトリ $\eta(t)$，$\eta_\sigma(t)$ は，境界条件 $x(0)=x_0$，$\sigma(0)=\sigma_0$，$\eta(T)=0$，$\eta_\sigma(T)=0$ をもつ微分方程式体系

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \tag{3.5}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta \tag{3.41}$$

$$\frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma \tag{3.42}$$

を満し，しかも最大値条件

$$\begin{aligned}&-[w(t)I^*(t)+I_\sigma^*)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)\\&=\max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma}[-(w(t)I+I_\sigma)e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma]\end{aligned} \tag{3.37}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満す $I^*(t)$，$I_\sigma^*(t)$，$x^*(t)$，

$\sigma^*(t)$, $\eta(t)$, $\eta_\sigma(t)$ として定められる.

いま,

$$\varphi(t)=\eta(t)e^{rt}, \quad \varphi_\sigma(t)=\eta_\sigma(t)e^{rt}$$

によって定義される粗投資と研究・開発投資の帰属価格 $\varphi(t)$, $\varphi_\sigma(t)$ を導入すると, 微分方程式体系 (3.41) と (3.42) はそれぞれ下のように変形され, $\varphi(t)$, $\varphi_\sigma(t)$ の $t=T$ における境界条件はそれぞれ $\varphi(T)=0$, $\varphi_\sigma(T)=0$ である.

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}+\varphi(t)(rE+\delta)$$

$$\frac{d\varphi_\sigma(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}+\varphi_\sigma(t)(r+\delta_\sigma)$$

ここで, E は n 次の単位行列である.

また, 最大値条件 (3.37) は関数 H^d を

$$H^d=-[w(t)I(t)+I_\sigma(t)]+\varphi(t)I(t)+\varphi_\sigma(t)I_\sigma(t)$$

によって定義するとき, H^d を $(I,\ I_\sigma)\in\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ について最大にすることと同値である.

かくして, われわれは次のように主張することができる.

[主張9] 関数 H^d を最大にする (最大値条件 (3.37) を満す) 投資政策と研究・開発政策は次の通りである. すなわち, 計画期間 $[0,\ T]$ に属するそれぞれの t において

(1) その市場価格が帰属価格より低い ($w_j(t)<\varphi_j(t)$) 資本財については, 可能な最大限の粗投資 ($I_j^*(t)=I_{j\max}$) を行なう.

(2) その市場価格が帰属価格に等しい ($w_k(t)=\varphi_k(t)$) 資本財については, 制約 (3.25) を満す任意の大きさの粗投資 ($0\leqq I_k^*(t)\leqq I_{k\max}$) を行う.

(3) その市場価格が帰属価格より高い ($w_l(t)>\varphi_l(t)$) 資本財については, 粗投資の水準はゼロ ($I_l^*(t)=0$) とする.

(4) 研究・開発投資の帰属価格が1よりも高い ($\varphi_\sigma(t)>1$) ならば, 可能な最大の研究・開発投資 ($I_\sigma^*(t)=I_{\sigma\max}$) を行ない. 帰属価格が1に等しい ($\varphi_\sigma(t)=1$) ならば, 制約 (3.26) を満す任意の大きさの研究・開発投資

$(0 \leqq I_\sigma^*(t) \leqq I_{\sigma\max})$ を行ない，また，帰属価格が1よりも低い $(\varphi_\sigma(t) < 1)$ ならば，研究・開発投資はゼロ $(I_\sigma^*(t)=0)$ とする．

3.3.2 標的集合がコンパクトな凸集合の場合

前項では，資本ストックと研究・開発基金の計画期間中における標的集合が $(x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+1} 全体であることを仮定したが，ここでは $t=T$ における標的集合があらかじめコンパクトな凸集合として与えられている場合について考える．資本ストックの終期状態 $x(T)$ と研究・開発基金の終期状態 $\sigma(T)$ は，それぞれ，制約

$$X_{\min} \leqq x(T) \leqq X_{\max} \tag{3.43}$$

$$\sigma_{\min} \leqq \sigma(T) \leqq \sigma_{\max} \tag{3.44}$$

を満さなければならないものと仮定する．ここで，n 次元ベクトル $X_{\min}$, $X_{\max}$ の成分 $X_{i\min}$, $X_{i\max}$ と $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$ はすべて有限な正の実数である．

そこで，制約 (3.43) を満す x 空間 R^n の集合を X, (3.44) を満す σ 空間 R^1 の集合を $\sum$ によって表わし，直積空間 R^{n+1} の集合 X_σ を

$$X_\sigma = X \times \sum$$

によって定義する．集合 $X_\sigma \subset R^{n+1}$ は $t=T$ における資本ストックと研究・開発基金の標的集合である．

ここでは，計画期間の終りにおける標的集合に関する上の仮定を除けば，モデルを構成する他の諸要因は前項におけるものと同一であると考える．そうすると問題は，資本ストックと研究・開発基金の初期状態 $x_{\sigma 0}$ を制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

にしたがって，計画期間の終りに標的集合 X_σ に属する終期状態に移し，しかも汎関数

$$J(I,\ I_\sigma) = \int_0^T \{w(t)I(t) + I_\sigma(t) - \Pi[x(t),\quad (t),\ t]\} e^{-rt} dt \tag{3.24}$$

を最小にする投資政策と研究・開発政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t)) \subset \Omega_\sigma$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を求めることである．

ところで，$x_{\sigma 0}$ から始まり，$(I(t),\ I_\sigma(t))\subset\Omega_\sigma$ に対応するトラジェクトリ $x_\sigma(t)$ の到達可能点集合を $A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ で表わせば，[7] 集合 $A_\sigma(T)\cap X_\sigma$ が空集合ならば，上の問題に許容政策の組は存存しないことになってしまうから，

$$A_\sigma(T)\cap X_\sigma\neq\phi \tag{3.45}$$

であること，すなはち，プロセス (3.11)，(3.5) は制御可能であることを仮定する．

したがって，上に定式化された問題は，$x_{\sigma 0}$ を集合 $A_\sigma(T)\cap X_\sigma$ に属する点に移す問題である．

さて，前項における［主張 1］から［主張 4］までのものが，ここでも同様に成立することは明らかである．それらについては再説しない．

初期状態ゼロから始まる状態変数 $x^0(t)$ を，前項の場合と同様に定義すると，

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]e^{-rt} \tag{3.29}$$

である．

そこで，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，$(I(t),\ I_\sigma(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_\sigma(t)$ の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}_\sigma(T)\subset R^{n+2}$ によって表わすと，[8] $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界は，前項の［主張 5］によって，$A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ の上で定義された凸超曲面となる．いま，$(x^0,\ x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+2} における集合 $\boldsymbol{X}_\sigma$ を

$$\boldsymbol{X}_\sigma=R^1\times X_\sigma$$

によって定義する，仮定 (3.45) によって

$$\boldsymbol{X}_\sigma\cap\boldsymbol{A}_\sigma(T)\neq\phi$$

---

7) ここで

$$x_\sigma(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}$$

である．

8) ここで

$$\boldsymbol{x}_{\sigma 0}=\begin{bmatrix}0\\ x_0\\ \sigma_0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_\sigma(t)=\begin{bmatrix}x^0(t)\\ x(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}$$

である．

であり，しかも $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}_\sigma$ の共通部分は R^{n+2} における凸超曲面である．

企業にとっての問題は，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ を最小にすることであるから，われわれは，$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}_\sigma$ との共通部分にだけ注目すればよい．そして，その共通部分が凸超曲面であることにより，その部分に $x^0(T)$ が最小になる点の存在することは容易に判明する．また，その点は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ に属する点であるから，$\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ をその点に移す許容政策の組が存在する．

ところで，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ は集合 $\boldsymbol{X}_\sigma$ の内側において最小になるか，あるいはその境界上で最小になるか，いずれかであるが，このうち前者の場合にはここでの問題は，結果的には，前項における問題と同じになってしまうので，以下においては後者の場合について考える．

$x^0(T)$ は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界と $\boldsymbol{X}_\sigma$ との共通部分において最小になるのであるから，$x^0(T)$ 最小の最適点が $\boldsymbol{X}_\sigma$ の境界点であるときには，その最適点は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界点であると共に $\boldsymbol{X}_\sigma$ の境界点となっている．

このとき，ある許容政策の組が最適であるための一つの充分条件を次のように主張することができる．

［主張 9］　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\quad(0\leqq t\leqq T) \tag{3.25}$$

$$0\leqq I_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max}\quad(0\leqq t\leqq T) \tag{3.26}$$

$$X_{\min}\leqq x(T)\leqq X_{\max} \tag{3.43}$$

$$\sigma_{\min}\leqq\sigma(T)\leqq\sigma_{\max} \tag{3.44}$$

をもつ制御プロセス

$$dx^0(t)/dt=\{w(t)I(t)+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t[\}e^{-rt} \tag{3.29}$$

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \tag{3.5}$$

を考える．このとき，投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I^*_\sigma(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ とそれに対応する資本ストックと研究・開発基金のトラジェクトリ $x_\sigma^*(t)$ は，$I^*(t)$，$I_\sigma^*(t)$，$x^*(t)$，$\sigma^*(t)$ およびトリビアルでない随伴ト

ラジェクトリ $[\eta(t) \quad \eta_\sigma(t)]$ が微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta\\ \frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3.36}$$

を満し，最大値条件

$$\begin{aligned}&-[w(t)I^*(t)+I_\sigma^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)\\ &=\max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma}[-(w(t)I+I_\sigma)e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma]\end{aligned}\tag{3.37}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すと共に，随伴トラジェクトリの終期状態 $[\eta(T) \quad \eta_\sigma(T)]$ が境界点 $x_\sigma^*(T)$ における標的集合 X_σ の内向き法線ベクトルとなっているならば，最適である．尚，ここで

$$x_\sigma^*(t)=\begin{bmatrix}x^*(t)\\ \sigma^*(t)\end{bmatrix}$$

である．

[証明]　$I^*(t)$，$I_\sigma^*(t)$，$\sigma^*(t)$ および $\eta(t)$，$\eta_\sigma(t)$ は最大値条件(3.37)と $t=T$ における上の横断条件を満すものとし，$\eta(t)$，$\eta_\sigma(t)$ は微分方程式体系（3.36）の解であるとする．

さて，$(I(t),\ I_\sigma(t))$ を任意の許容政策の組であるとし，それに対応するトラジェクトリを $x_\sigma(t)$ とすれば，不等式

$$\begin{aligned}&-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T)+\eta_\sigma(T)\sigma^*(T)\\ &\geqq-x^0(T)+\eta(T)x(T)+\eta_\sigma(T)\sigma(T)\end{aligned}$$

が成立することは，先の［主張6］の証明に用いた計算から明らかである．[9] 標的集合 X_σ は凸集合であるから，境界点 $x_\sigma^*(T)\in\partial X_\sigma$ において支持超平面 s_σ をもち，この点における X_σ の内向き法線ベクトルが $[\eta(T) \quad \eta_\sigma(T)]$ によって定まる．したがって

$$\begin{aligned}x^0(T)-x^{0*}(T)&\geqq\eta(T)[x(T)-x^*(T)]+\eta_\sigma(T)[\sigma(T)-\sigma^*(T)]\\ &=[\eta(T) \quad \eta_\sigma(T)][x(T)-x^*(T) \quad \sigma(T)-\sigma^*(T)]\end{aligned}$$

---

9)　ただし，ここでは $\eta^0=-1$ である．

$x_\sigma(T)$ は X_σ に属する点であるから，その点は支持超平面 s_σ の外側にはない．したがって上の不等式の右辺は非負である．よって，到達可能な任意の $x^0(T)$ に対して

$$x^{0*}(T) \leqq x^0(T)$$

が成立する．（証明終り）

ここでわれわれが定式化した問題に最適政策の組が存在することは先に述べたので，われわれは，この［主張9］に述べられた諸条件を満す投資政策と研究・開発政策の組を最適政策の組として，前項の場合と同様に，求めることができる．ただし，$t=T$ における横断条件が異なっていることに注意すべきである．

3.4 非線型拡張費用関数

ここでは，expansion cost が粗投資の厳密な凸関数として表わされる場合について考察する．そして，さしあたり，モデルを構成する他の諸要因は 3.3.1 におけるものと同一であると想定する．

このとき，問題は，資本ストックと研究・開発基金の初期状態 $x_{\sigma 0}$ を制御プロセス

$$dx(t)/dt = I(t) - \delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt = I_\sigma(t) - \delta_\sigma \sigma(t) \tag{3.5}$$

にしたがって，$(x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+1} のある点に移し，汎関数

$$J(I,\ I_\sigma) = \int_0^T \{S[I(t),\ t] + I_\sigma(t) - \Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\} e^{-rt} dt \tag{3.46}$$

を最小にする投資政策と研究・開発政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t)) \subset \Omega_\sigma\ (0 \leqq t \leqq T)$ を求めることである．ここで，関数 S は I について微分可能かつ厳密に凸なる関数であり，それぞれの $I \geqq 0$ に対して $S \geqq 0$，$\partial S/\partial I > 0$ であることを仮定する．

先の 3.3.1 の項の述べられている［主張1］から［主張4］までがここでも同様に成立することは明らかである．以下においては，最適な投資政策と研究・開

発政策の存在と，ある許容政策が最適であるための充分条件だけを明らかにしておく．

さて，初期状態ゼロから始まる状態変数$x^0(t)$を前と前様に定義すると，

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt} \qquad (3.47)$$

であって，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ である．

初期状態 $x_{\sigma 0}$ から始まり，$(I(t),\ I_\sigma(t)\subset\Omega_\sigma\ (0\leqq t\leqq T)$ に対応するプロセス (3.11)，(3.5) の到達可能点集合を $A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ によって表わし，拡大されたプロセス (3.47)，(3.11)，(3.5) の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}_\sigma(T)\subset R^{n+2}$ によって表わす．また，集合$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$を，$\chi^0\leqq x^0$ なる点 $(\chi^0,\ x,\ \sigma)\in\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,\ x,\ \sigma)\in R^{n+2}$ の集合として定義する．

初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，投資政策と研究・開発政策に関する制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \qquad (3.25)$$

$$0\leqq I_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max} \quad (0\leqq t\leqq T) \qquad (3.26)$$

をもつ制御プロセス (3.47)，(3.11)，(3.5) について考える．このとき

[主張10]　集合 $\boldsymbol{A}_{\sigma v}\subset R^{n+2}$ は閉凸集合であり，$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界は到達可能点集合 $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ に属し，それは $A_\sigma(T)$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面を形成する．目的汎関数 $J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の唯一点で最小になる．

[証明]　$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ が閉集合であること，$\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界が $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ に属することは，第1章の［主張5］におけるのと同様に証明できるので，その証明は省略する．

そこで，$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界（したがって $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界）が厳密に凸なる超曲面であることを証明する．

初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界の2点 $\boldsymbol{x}_\sigma^1(T)$，$\boldsymbol{x}_\sigma^2(T)$ に移す二組の政策を $(I^1(t),\ I_\sigma^1(t))$，$(I^2(t),\ I_\sigma^2(t))\subset\Omega_\sigma\ (0\leqq t\leqq T)$ とし，終期状態 $\boldsymbol{P}_\sigma$ を

$$\boldsymbol{P}_\sigma=\mu\boldsymbol{x}_\sigma^1(T)+(1-\mu)\boldsymbol{x}_\sigma^2(T), \qquad (0<\mu<1)$$

によって定義する．ここで

$$\boldsymbol{x}_{\sigma 0}=\begin{bmatrix}0\\ x_0\\ \sigma_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_\sigma{}^i(T)=\begin{bmatrix}x^{i0}(T)\\ x^i(T)\\ \sigma^i(T)\end{bmatrix}\ (i=1,\ 2),\quad \boldsymbol{P}_\sigma=\begin{bmatrix}P^0\\ P\\ P_\sigma\end{bmatrix}$$

である．

$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界が厳密に凸であることを証明するためには，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ を終期状態 $\boldsymbol{P}_\sigma$ に移す許容政策の組が構成できて，しかも点 $\boldsymbol{P}_\sigma$ が $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の内点であることを証明すればよい．そこで，投資政策 $I^\mu(t)$ と研究・開発政策 $I_\sigma{}^\mu(t)$ を，それぞれ

$$I^\mu(t)=\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)$$
$$I_\sigma{}^\mu(t)=\mu I_\sigma{}^1(t)+(1-\mu)I_\sigma{}^2(t)$$

によって定義し，それに対応するトラジェクトリを $\boldsymbol{x}_\sigma{}^\mu(t)$ によって表わすここで

$$\boldsymbol{x}_\sigma{}^\mu(t)=\begin{bmatrix}x^{0\mu}(t)\\ x^\mu(t)\\ \sigma^\mu(t)\end{bmatrix}$$

である．

variation-of-parameter formula を用いると，資本ストックの終期状態 $x^\mu(T)$ と研究・開発基金の終期状態 $\sigma^\mu(T)$ はそれぞれ次のように求められる．

$$\begin{aligned}x^\mu(T)&=\mu x^1(T)+(1-\mu)x^2(T)\\ &=P\\ \sigma^\mu(T)&=\mu\sigma^1(T)+(1-\mu)\sigma^2(T)\\ &=P_\sigma\end{aligned}$$

他方，$x^{0\mu}(T)$ は

$$\begin{aligned}x_0{}^\mu(T)&=\int_0^T\{S[I^\mu(t),\ t]+I_\sigma{}^\mu(t)-\Pi[x^\mu(t),\ \sigma^\mu(t),\ t]\}e^{-rt}dt\\ &=\int_0^T\{S[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t),\ t]+[\mu I_\sigma{}^1(t)+(1-\mu)I_\sigma{}^2(t)]\\ &\qquad-\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ \mu\sigma^1(t)+(1-\mu)\sigma^2(t),\ t]\}e^{-rt}dt\end{aligned}$$

によって与えられるが，関数 S は I について厳密に凸であることが仮定され

ているから，

$$S[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t),\ t]<\mu S[I^1(t),\ t]+(1-\mu)S[I^2(t),\ t]$$

であり，関数 Π は $(I,\ I_\sigma)$ に対して凹であることが仮定されているから，

$$\Pi[\mu x^1(t)+(1-\mu)x^2(t),\ \mu\sigma^1(t)+(1-\mu)\sigma^2(t),\ t]$$
$$\geqq \mu\Pi[x^1(t),\ \sigma^1(t),\ t]+(1-\mu)\Pi[x^2(t),\ \sigma^2(t),\ t]$$

である．

よって，

$$x^{0\mu}(T)<\mu\int_0^T\{S[I^1(t),\ t]+I_\sigma{}^1(t)-\Pi[x^1(t),\ \sigma^1(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$
$$+(1-\mu)\int_0^T\{S[I^2(t),\ t]+I_\sigma{}^2(t)-\Pi[x^2(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt}dt$$
$$=\mu x^{01}(T)+(1-\mu)x^{02}(T)$$
$$=P^0$$

が成立する．ところで，二組の政策 $(I^1(t),\ I_\sigma{}^1(t))$，$(I^2(t),\ I_\sigma{}^2(t))$ の値は共に計画期間 $[0,\ T]$ においてコンパクトな凸集合 Ω_σ に属するのであるから，それらに対応する資本ストックと研究・開発基金のトラジェクトリ $x_\sigma{}^1(t)$，$x_\sigma{}^2(t)$ の終期状態 $x_\sigma{}^1(T)$，$x_\sigma{}^2(T)$ は共に到達可能点集合 $A_\sigma(T)\subset R^{n+1}$ に属する．したがって，終期状態 $\boldsymbol{P}^0$ が $x^{01}(T)$ と $x^{02}(T)$ の正の凸1次結合として表わされることを考えると，終期状態 $\boldsymbol{P}_\sigma$ は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の内点であることがわかる．

以上により，$\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界（したがって $\boldsymbol{A}_{\sigma v}$ の下方境界）は $A_\sigma(T)$ 上の厳密な凸超曲面である．そして，このことから，$x^0(T)$ が最小になる点は $\boldsymbol{A}_\sigma(T)$ の下方境界に唯一つあり，しかもこの点は到達可能であるから，最適政策の組が存在する．（証明終り）

次に，最適であるための一の充分条件を明らかにする．

[主張11]　対応する資本ストックと研究・開発基金のトラジェクトリ $x_\sigma{}^*(t)$ をもつ，投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma{}^*(t))\subset\Omega_\sigma\ (0\leqq t\leqq T)$ は，$I^*(t)$，$I_\sigma{}^*(t)$，$x^*(t)$，$\sigma^*(t)$，およびトリビアルでない随伴トラジェクトリ $[\eta(t)\quad \eta_\sigma(t)]$ が，終期条件 $\eta(T)=0$，$\eta_\sigma(T)=0$ の下で，微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta\\ \frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma\end{aligned}\right\}\tag{3.48}$$

を満し，最大値条件

$$\begin{aligned}&-\{S[I^*(t),\ t]+I_\sigma^*(t)\}e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)\\ &=\max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma}\{-[S(I,\ t)+I_\sigma]e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma\}\end{aligned}\tag{3.49}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すならば，最適である．

[証明]　$I^*(t), I_\sigma^*(t), x^*(t), \sigma^*(t)$，および $\eta(t)$，$\eta_\sigma(t)$ は最大値条件 (3.49) と $t=T$ における横断条件 $\eta(T)=0$，$\eta_\sigma(T)=0$ を満す (3.48) の解であるとする．政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t))$ を任意の許容政策の組とし，それらに対応する資本ストックと研究・開発基金のトラジェクトリを $x_\sigma(t)$ とする．このとき，$(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))$ に対応する $x^{0*}(T)$ と，$(I(t),\ I_\sigma(t))$ に対応する $x^0(T)$ との間に次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned}&-x^{0*}(T)+x^0(T)\\ &=\int_0^T\{-[S(I^*(t),\ t)+I_\sigma^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)\\ &\quad+[S(I(t),\ t)+I_\sigma(t)]e^{-rt}-\eta(t)I(t)-\eta_\sigma(t)I_\sigma(t)\\ &\quad-\Big[\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial x}(x^*(t)-x(t))+\frac{\partial\Pi(x^*,\ \sigma^*,\ t)}{\partial\sigma}(\sigma^*(t)-\sigma(t))\\ &\qquad-\Pi(x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t)+\Pi(x(t),\ \sigma(t),\ t)\Big]e^{-rt}\}dt\end{aligned}\tag{3.50}$$

ところで，$(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))$ は計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (3.49) を満すのであるから

$$\begin{aligned}&-[S(I^*(t),\ t)+I_\sigma^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)\\ &\geqq-[S(I(t),\ t)+I_\sigma(t)]e^{-rt}+\eta(t)I(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma(t)\end{aligned}$$

が $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで成立する．

また，関数 Π は x，σ について凹であるから

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}[x(t)-x^*(t)]+\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}[\sigma(t)-\sigma^*(t)]\\ &\geqq\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]-\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]\end{aligned}$$

である．

以上二つの不等式により，(3.50) の右辺の被積分関数は $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで非負である．よって $-x^{0*}(T)+x^0(T)\geqq 0$ すなわち

$$x^{0*}(T)\leqq x^0(T) \qquad \text{（証明終り）}$$

以上は，計画期間 $[0,\ T]$ における，資本ストックと研究・開発基金の標的集合が $(x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+1} 全体である場合についての議論である．

ここで，最後に，計画期間の終り $t=T$ における資本ストックと研究・開発基金の標的集合が $(x,\ \sigma)$ 空間 R^{n+1} のコンパクトな凸集合 X_σ として与えられている場合について簡単にふれておきたい．

このとき，問題は，資本ストックと研究・開発基金の初期状態 $x_{\sigma 0}$ を制御プロセス

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{3.11}$$

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma\sigma(t) \tag{3.5}$$

にしたがって，計画期間の終りに，集合 $X_\sigma\subset R^{n+1}$ に属する終期状態に移し，しかも目的汎関数

$$J(I,\ I_\sigma)=\int_0^T\{S[I(t),\ t]+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t]\}e^{-rt}dt \tag{3.46}$$

を最小にする投資政策と研究・開発政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ を求めることである．[10)]

ここで，プロセス (3.11)，(3.5) が制御可能であることを仮定すると，この問題に最適な投資政策と研究・開発政策の組が存在することは，3.3.2 の項における議論と同様にして示すことができ，最適であるための一つの充分条件は次の命題によって示される．

[主張12]　初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ から始まり，投資政策と研究・開発政策に関する制約集合 Ω_σ および資本ストックと研究・開発基金に関する $t=T$ における標的

---

10)　$t=T$ における標的集合に関する仮定を除けば，問題を構成する他の諸要因はこの節の前半におけるものと同一であることを想定する．また X_σ は 3.3.2 に定義されている．

集合 X_σ をもつ，制御プロセス (3.47)，(3.11)，(3.5) を考える.[11]

このとき，投資政策と研究・開発政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma^*(t))\subset\Omega_\sigma$ $(0\leqq t\leqq T)$ と，それに対応する資本ストックと研究・開発基金のトラジェクトリ $x_\sigma^*(t)$ は，$I^*(t)$，$I_\sigma^*(t)$，$x^*(t)$，$\sigma^*(t)$ およびトリビアルでない随伴トラジェクトリ $[\eta(t)\quad \eta_\sigma(t)]$ が微分方程式体系

$$\frac{d\eta(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta$$

$$\frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma$$

を満し，最大値条件

$$-[S(I^*(t),\ t)+I_\sigma^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)$$
$$=\max_{(I,I_\sigma)\in\Omega_\sigma}[-(S(I,\ t)+I_\sigma)e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma]$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すと共に，随伴トラジェクトリの終期状態 $[\eta(T)\quad \eta_\sigma(T)]$ が境界点 $x_\sigma^*(T)$ における標的集合 X_σ の内向き法線ベクトルとなっているならば，最適である.[12]

証明は，今まで用いてきた方法を適当に組み合わせることによって行うことができるので省略する.

尚，この[主張12]は，$(x^0,\ x,\ \sigma)$空間 R^{n+2} における集合 $\boldsymbol{X}_\sigma$ を

$$\boldsymbol{X}_\sigma=R^1\times X_\sigma$$

によって定義するとき，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ が最小となる最適点が $\boldsymbol{X}_\sigma$ の境界点である場合に関するものである．最適点が $\boldsymbol{X}_\sigma$ の内側にある場合には，問題は

---

11) 制御プロセス (3.47) は

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),\ t]+I_\sigma(t)-\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ t\}e^{-rt}$$

であり，$J(I,\ I_\sigma)=x^0(T)$ であって，$\boldsymbol{x}_{\sigma 0}$ は次のように定義される.

$$\boldsymbol{x}_{\sigma 0}=\begin{bmatrix}0\\ x_0\\ \sigma_0\end{bmatrix}$$

12) $x_\sigma^*(t)$ は次のように定義される.

$$x_\sigma^*(t)=\begin{bmatrix}x^*(t)\\ \sigma^*(t)\end{bmatrix}$$

この節の前半における問題に帰着される.

3.5 最適な宣伝・広告政策，研究・開発政策および資本財投資政策の決定

最後に，資本財投資，生産技術の研究・開発と共に，宣伝・広告政策を含むモデルについて考察する．宣伝・広告費は，よく言われるように，資本財への投資支出に似た面を多くもっている．それは，企業の製品に新しい顧客をひきつけたり，消費者の嗜好とか選好順位を変化せしめることによって，企業の生産物に対する需要関数をシフトさせたり，あるいはその形を変化せしめるものと考えることができる.

過去および現在の宣伝・広告費が生産物に対する需要関数に与える影響を表わすために，われわれは，ある一つの「ストック」を貨幣価値表示で定表することができる．Nerlove and Arrow[20]にしたがって，このストックを「好意」(goodwill) と呼ぶことにしよう． 時点 t における好意を $\zeta(t)$ によって表わす.

このとき，時点 t における，生産物に対する需要関数は

$$q(t)=D[p(t),\ \zeta(t)] \tag{3.51}$$

によって表わすことができる．ここで，q は需要量，p は生産物価格である．また関数 D は $\partial D/\partial p<0$, $\partial D/\partial\zeta>0$ なる性質をもつものと考える.

ところで，宣伝・広告費の効果は，それが支出された時点から時が経過するにしたがって，減少して行くものと考えることができるから，われわれは好意のストックもまた，資本ストックと同様に，時と共に「摩滅」して行くものと想定することができる．そこで，好意 $\zeta(t)$ は，各時点において，その一定部分が摩滅するものと考え，その割合を δ_ζ で表わす．いま，時点 t における宣伝・広告への「粗投資」（宣伝・広告費）を $I_\zeta(t)$ によって表わし，$\zeta(t)$ の初期状態がζ_0であるとす．$\zeta(t)$ の運動は

$$d\zeta(t)/dt=I_\zeta(t)-\delta_\zeta\zeta(t) \tag{3.52}$$

$$\zeta(0)=\zeta_0 \tag{3.53}$$

によって規定されるものと想定することができる．

さて，生産物の在庫水準は常にゼロであり，そして生産物に対する需要は常に満され，需要の backlog はないものと仮定すると，生産物の需要量，販売量および産出量は常に等しいことになる．したがって，生産物に対する需要関数 (3.51) は

$$z(t)=D[p(t),\ \zeta(t] \tag{3.54}$$

と表わすことができる．ここで $z(t)$ は時点 t における産出量である．また，時点 t における総収入は

$$R(t)=p(t)z(t) \tag{3.55}$$

によって与えられる．

宣伝・広告費を除く諸費用について，3.1 におけるのと同じ想定を行えば，総費用関数として

$$C(t)=v(t)y(t)+S[I(t),\ t]+I_\sigma(t)+I_\zeta(t) \tag{3.56}$$

が得られる．ここで，v は可変的生産要素価格のベクトル，y はそれらの投入量ベクトルであり，内積 $v(t)y(t)$ は時点 t における operating cost である．$I(t)$ は資本財への粗投資のベクトルであって，$S[I(t),\ t]$ は expansion cost である．また $I_\sigma(t)$ は生産技術の研究，開発費である．

企業の生産関数と生産技術の研究・開発政策については，3.1 におけるのと同じことをここでも想定する．すなはち，生産関数は

$$z(t)=e^{\alpha(t)}g[x(t),\ y(t)] \tag{3.2}$$

と表わされるものとし，$\alpha(t)$ は研究・開発基金 $\sigma(t)$ の関数であって

$$\alpha(t)=\alpha[\sigma(t)] \tag{3.3}$$

によって規定されるものと想定する．ここで $x(t)$ は資本ストックのベクトルである．関数 g の性質については前と同じことを仮定する．また，$\sigma(t)$ の運動は

$$d\sigma(t)/dt=I_\sigma(t)-\delta_\sigma(t) \tag{3.5}$$

$$\sigma(0)=\sigma_0 \tag{3.6}$$

によって規定されるものとする．

最後に，資本ストック $x(t)$ の運動は

$$dx(t)/dt=I(t)-\delta x(t) \tag{3.11}$$

$$x(0)=x_0 \tag{3.12}$$

によって規定されるものとする．

以以により，時点 t における純収入は，(3.55) と (3.56) から

$$\begin{aligned} W(t)&=R(t)-C(t) \\ &=p(t)z(t)-[v(t)y(t)+S(I(t),\ t)+I_\sigma(t)+I_\zeta(t)] \end{aligned}$$

によって与えられ，最小化すべき目的汎関数は

$$J(I,\ I_\sigma,\ I_\zeta)=\int_0^T\{v(t)y(t)+S[I(t),\ t]+I_\sigma(t)+I_\zeta(t)-p(t)z(t)\}e^{-rt}dt \tag{3.57}$$

によって与えられる．

企業にとっての問題は，制約 (3.52)，(3.53)，(3.5)，(3.6)，(3.11)，(3.12) および (3.2) の下で汎関数 (3.57) を最小にすることである．

そのために企業が，計画期間中の各時点において，その値を決定しなければならない変数は，$z(t)$，$p(t)$，$\zeta(t)$，$I_\zeta(t)$，$y(t)$，$I(t)$，$I_\sigma(t)$，$\alpha(t)$，$x(t)$，および $\sigma(t)$ である．ところで，$I_\sigma(t)$ が決定されると，$\sigma(t)$ は (3.5)，(3.6) によって決定され，$\alpha(t)$ はまた $\sigma(t)$ に応じて (3.3) から決定される．$\zeta(t)$ は $I_\zeta(t)$ が決定されると (3.52)，(3.53) によって決定され，$x(t)$ は $I(t)$ が決定されると (3.11) と (3.12) によって決定される．また，$z(t)$（または $p(t)$）は $\zeta(t)$ と $p(t)(z(t))$ が決定されると(3.54)によって決定される．$y(t)$ は $\alpha(t)$，$x(t)$ および $z(t)$ が決定されると (3.2) によって決定される．したがって，企業は，各時点において，$I(t)$，$I_\sigma(t)$，$I_\zeta(t)$ および $z(t)$（あるいは $p(t)$）を決定すればよい．

ところが，産出量，販売量，需要量の関係についての先の想定の下では，各時点における生産物価格(と産出量)は他の時点における価格とは独立に決定することができるから，それらは，それぞれの時点における operating profit

$$\Pi(t)=p(t)z(t)-v(t)y(t)$$

を，生産関数 (3.2) の制約の下で最大にするように決定すればよい．

operating profit を最大にする産出量と生産物価格は，一般に，$\alpha(t)$, $x(t)$, $\zeta(t)$ および $v(t)$ の関数として得られるはずである．そして，このような産出量と生産物価格の下での operating profit もまた，$\alpha(t)$, $x(t)$, $\zeta(t)$ および $v(t)$ の関数として得られる．そこで，$\alpha(t)$ が $\sigma(t)$ によって決定されることを考慮すると，上のような意味で最適な operating profit は

$$\Pi(t)=\Pi[x(t),\ \sigma(t),\ \zeta(t),\ t]$$

によって表わすことができる．ここで関数 Π に含まれている最後の変数 t は $v(t)$ が与える影響を要約するものである．

かくして，問題は

$$J(I,\ I_\sigma,\ I_\zeta)=\int_0^T\{S[I(t),t]+I_\sigma(t)+I_\zeta(t)-\Pi[x(t),\sigma(t),\zeta(t),t]\}e^{-rt}dt \tag{3.58}$$

を制約 (3.11), (3.12), (3.5), (3.6), (3.52), (3.53) の下で最小にする投資政策 $I(t)$, 研究・開発政策 $I_\sigma(t)$ および宣伝・広告政策 $I_\zeta(t)$ を求める問題となる．

この問題を解くためにいくつかの仮定を追加する．

まず，資本財への投資政策 $I(t)$ と研究・開発政策 $I_\sigma(t)$ については 3.3 に述べられている仮定 (1) と (2) をそのまま仮定する．

宣伝・広告政策 $I_\zeta(t)$ については次のように仮定する．すなわち，$I_\zeta(t)$ は計画期間 $[0,\ T]$ において Lesbegue 可測な関数であり，その値は制約

$$0\leqq I_\zeta(t)\leqq I_{\zeta\max}\quad(0\leqq t\leqq T) \tag{3.59}$$

を満していなければならないものとする．ここで，$I_{\zeta\max}$ は有限な正の実数である．

また，制約

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max}\qquad(0\leqq t\leqq T) \tag{3.25}$$

$$0\leqq I_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max}\quad(0\leqq t\leqq T) \tag{3.26}$$

および(3.59)を満す，x 空間 R^n, σ空間 R^1 および ζ 空間 R^1 の直積空間 R^{n+2}

における すべての点の集合を $\Omega_{\sigma\zeta}$ によって表わす．$\Omega_{\sigma\zeta}$ はコンパクトな凸集合である．

次に，関数 Π は x，σ，ζ に関して微分可能な凹関数であり，それぞれの $x>0$，$\sigma>0$，および $\zeta>0$ に対して $\Pi\geqq 0$，$\partial\Pi/\partial x>0$，$\partial\Pi/\partial\sigma>0$，$\partial\Pi/\partial\zeta>0$ であると仮定する．

かくして，問題は，資本ストック，研究・開発基金および好意の初期状態 $x_{\sigma\zeta 0}$ を制御プロセス (3.11)，(3.5)，(3.52) にしたがって，(x，σ，ζ) 空間 R^{n+2} のある定められた標的集合に移し，しかも目的汎関数 (3.58) を最小にする投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策の組 ($I(t)$，$I_\sigma(t)$，$I_\zeta(t)$) $\subset\Omega_{\sigma\zeta}$ ($0\leqq t\leqq T$) を求めることである．尚，ここで $x_{\sigma\zeta 0}$ は

$$x_{\sigma\zeta 0}=\begin{bmatrix} x_0 \\ \sigma_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}$$

によっ定義される．

このように定式化された問題が，われわれの今まで扱ってきた問題と形式的には全く同一の問題であることは一見して明らかである．したがって，今までに証明された命題と同じ形の命題がここでも成立するはずである．以下においてはそれらのうち主要なものだけをかかげるにとどめる．尚，それらの命題は今まで用いてきた方法と本質的には同じ方法で証明できるので，ここではすべての証明を省略する．

さて，計画期間中の標的集合が (x，σ，ζ) 空間 R^{n+2} 全体である場合にも，また計画期間の終りにおける標的集合が R^{n+2} のコンパクトな凸部分集合として与えられている場合にも，そして expansion cost が I について線型であっても，また厳密に凸であっても，次の二つの命題は成立する．

[主張13] 初期状態 $x_{\sigma\zeta 0}$ から始まり，投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策の組 ($I(t)$，$I_\sigma(t)$，$I_\zeta(t)$) $\subset\Omega_{\sigma\zeta}$ ($0\leqq t\leqq T$) に対応する資本ストック，研究・開発基金および好意のトランジェクトリ $x_{\sigma\zeta}(t)$ の到達可能点集合を $A_{\sigma\zeta}(T)\subset R^{n+2}$ によって表わすとき，$A_{\sigma\zeta}(T)$ はコンパクトで厳密に

凸なる集合である．そして，$A_{\sigma\zeta}(T)$ の各境界点に $x_{\sigma\zeta 0}$ を移す政策の組はそれぞれ唯一つである．ここで，$x_{\sigma\zeta}(t)$ は

$$x_{\sigma\zeta}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \sigma(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}$$

によって定義される．

[主張14]　ゼロから始まる状態変数 $x^0(t)$ を

$$dx^0(t)/dt=\{S[I(t),t]+I_\sigma(t)+I_\zeta(t)-\Pi[x(t),\sigma(t),\zeta(t),t]\}e^{-rt} \quad (3.60)$$

によって定義し，初期状態 $\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta 0}$ から始まり，政策の組 $(I(t),\ I_\sigma(t),\ I_\zeta(t))\subset\Omega_{\sigma\zeta}$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリ $\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta}(t)$ の到達可能点集合を $\boldsymbol{A}_{\sigma\zeta}(T)\subset R^{n+3}$ で表わす．このとき，$\boldsymbol{A}_{\sigma\zeta}(T)$ の下方境界に $x^0(T)=J(I,I_\sigma,I_\zeta)$ が最小になる点が存在し，$\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta 0}$ をこの点に移す最適政策の組が存在する．尚，ここで，$\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta 0}$ と $\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta}(t)$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_{\sigma\zeta 0}=\begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ \sigma_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{\sigma\zeta}(t)=\begin{pmatrix} x^0(t) \\ x(t) \\ \sigma(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

によって定義される．

ある許容政策の組が最適であるための充分条件は次の通りである．

まず，計画期間中の標的集合が $(x,\ \sigma,\ \zeta)$ 空間 R^{n+2} 全体であって，expansion costが $S[I(t),\ t]=w(t)I(t)$ と表わされる場合については次の命題が成立する．ここで，$w(t)$ は時点 t における資本財価格の n 次行ベクトルである．

[主張15]　投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策の組 $(I^*(t),\ I_\sigma^*(t),\ I_\zeta^*(t))\subset\Omega_{\sigma\zeta}$ $(0\leqq t\leqq T)$ とそれに対応する資本ストック，研究・開発基金および好意のトラジェクトリ $x^*_{\sigma\zeta}(t)$は，$I^*(t)$，$I_\sigma^*(t)$，$I_\zeta^*(t)$，$x^*(t)$，$\sigma^*(t)$，$\zeta^*(t)$ およびトリビアルでない随伴トラジェクトリ $[\eta(t)\ \eta_\sigma(t)\ \eta_\zeta(t)]$ が，$t=T$における境界条件（横断条件）$\eta(T)=0$，$\eta_\sigma(T)=0$，$\eta_\zeta(T)=0$ の下で，微分方程式体系

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ \zeta^*(t),\ t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta\\ \frac{d\eta_\sigma(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ \zeta^*(t),\ t]}{\partial\sigma}e^{-rt}+\eta_\sigma(t)\delta_\sigma\\ \frac{d\eta_\zeta(t)}{dt}&=-\frac{\partial\Pi[x^*(t),\ \sigma^*(t),\ \zeta^*(t),\ t]}{\partial\zeta}e^{-rt}+\eta_\zeta(t)\delta_\zeta\end{aligned}\right\}\qquad(3.61)$$

を満し，最大値条件

$$\begin{aligned}&-[w(t)I^*(t)+I_\sigma{}^*(t)+I_\zeta{}^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)+\eta_\sigma(t)I_\sigma{}^*(t)+\eta_\zeta(t)I_\zeta{}^*(t)\\ &=\max_{(I,I_\sigma,I_\zeta)\in\Omega_{\sigma\zeta}}[-(w(t)I+I_\sigma+I_\zeta)e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma+\eta_\zeta(t)I_\zeta]\qquad(3.62)\end{aligned}$$

を計画期間 $[0,\ T]$ のほとんどすべてのところで満すならば，最適である．

この場合

$$\varphi(t)=\eta(t)e^{rt},\qquad \varphi_\sigma(t)=\eta_\sigma(t)e^{rt},\qquad \varphi_\zeta(t)=\eta_\zeta(t)e^{rt}$$

によって定義される，粗投資，研究・開発費，宣伝・広告費の帰属価格 $\varphi(t)$，$\varphi_\sigma(t)$，$\varphi_\sigma(t)$ を導入すると，最大値条件 (3.62) を満す投資政策，研究・開発政策，および宣伝・広告政策は次のようになる．すなはち，計画期間 $[0,\ T]$ に属するそれぞれの t において

(1) その市場価格が帰属価格より低い ($w_j(t)<\varphi_j(t)$) 資本財については，可能な最大限の粗投資 ($I_j{}^*(t)=I_{j\max}$) を行なう．

(2) その市場価格が帰属価格に等しい ($w_k(t)=\varphi_k(t)$) 資本財については，制約 (3.25) を満す任意の大きさの粗投資 ($0\leqq I_k{}^*(t)\leqq I_{k\max}$) を行なう．

(3) その市場価格が帰属価格より高い ($w_l(t)>\varphi_l(t)$) 資本財については，可能な最小限の粗投資 ($I_l{}^*(t)=0$) を行なう．

(4) 研究・開発投資の帰属価格が1よりも高い ($\varphi_\sigma(t)>1$) ならば，可能な最大の研究・開発投資 ($I_\sigma{}^*(t)=I_{\sigma\max}$) を行ない，帰属価格が1に等しい ($\varphi_\sigma(t)=1$) ならば制約 (3.26) を満す任意の大きさの研究・開発投資 ($0\leqq I^*{}_\sigma(t)\leqq I_{\sigma\max}$) を行なう．また，帰属価格が1よりも低い ($I_\sigma(t)<1$) ならば可能な最小限の研究・開発投資 ($I_\sigma{}^*(t)=0$) を行なう．

(5) 宣伝・広告投資の帰属価格が1よりも高い ($\varphi_\zeta(t)>1$) ならば可能な最大限の宣伝・広告投資 ($I_\zeta{}^*(t)=I_{\zeta\max}$) を行ない，帰属価格が1に等しい

($\varphi_\zeta(t)=1$) ならば制約 (3.59) を満す任意の大きさの宣伝・広告投資 ($0\leqq I_\zeta^*(t)\leqq I_{\zeta\max}$) を行なう．また，帰属価格が1よりも低い ($\varphi_\zeta(t)<1$) ならば可能な最小限の宣伝・広告投資を行なう ($I_\zeta^*(t)=0$).

上の [主張15] とそれに続く議論は，計画期間中の標的集合が R^{n+2} 全体であって， expansion cost が $S[I(t),\ t]=w(t)I(t)$ と表わされる場合に関するものである．次に，計画期間の終りにおける標的集合がコンパクトな凸集合 $X_{\sigma\zeta}\subset R^{n+2}$ として与えられている場合について考える．x^0 空間 R^1 と (x, σ, ζ) 空間 R^{n+2} の直積空間 R^{n+3} を考え，そこにおける集合 $\boldsymbol{X}_{\sigma\zeta}$ を

$$\boldsymbol{X}_{\sigma\zeta}=R^1\times X_{\sigma\zeta}$$

によって定義する．ここで $X_{\sigma\zeta}$ は

$$X_{\min}\leqq x(T)\leqq X_{\max}$$

$$\sigma_{\min}\leqq\sigma(T)\leqq\sigma_{\max}$$

$$\zeta_{\min}\leqq\zeta(T)\leqq\zeta_{\max}$$

を満す，(x, σ, ζ) 空間 R^{n+2} のすべての点の集合である．[13] 尚，expansion cost は，[主張15] の場合と同じである．

[主張16] $x^0(T)=J(I,\ I_\sigma,\ I_\zeta)$ 最小の最適点が集合 $\boldsymbol{X}_{\sigma\zeta}$ の境界点になっているとする．政策の組 ($I^*(t)$, $I_\sigma^*(t)$, $I_\zeta^*(t)$)$\subset\Omega_{\sigma\zeta}$ ($0\leqq t\leqq T$) とそれに対応するトラジェクトリ $x^*_{\sigma\zeta}(t)$は，$I^*(t)$, $I_\sigma^*(t)$, $I_\zeta^*(t)$, $x^*(t)$, $\sigma^*(t)$, $\zeta^*(t)$ およびトリビアルではない随伴トラジェクトリ [$\eta(t)$ $\eta_\sigma(t)$ $\eta_\zeta(t)$] が微分方程式体系 (3.61) を満し，最大値条件 (3.62) を計画期間 [0, T] のほとんどすべてのところで満すと共に，随伴トラジェクトリの終期状態 [$\eta(T)$ $\eta_\sigma(T)$ $\eta_\zeta(T)$] が境界点 $x_{\sigma\zeta}^*(T)$ における標的集合 $X_{\sigma\zeta}$ の内向き法線ベクトルとなっているならば，最適である．[14]

[主張15] と [主張16] の相違は，一見して明らかなように，$t=T$ における横断条件の相違にある．

---

13) $X_{i\min}$, $X_{i\max}$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$), $\sigma_{\min}$, $\sigma_{\max}$, $\zeta_{\min}$, $\zeta_{\max}$ はすべて有限な正の実数である．

14) 最適点が集合 $\boldsymbol{X}_{\sigma\zeta}$ の内側の点である場合には，問題は〔主張15〕で扱われている問題に帰着される．

最後に，expansion cost $S[I(t),\ t]$ が I について厳密に凸なる関数の場合についてふれておく．この場合には，計画期間中の標的集合が R^{n+2} 全体である場合と集合 $X_{\sigma\zeta}$ として与えられている場合のそれぞれについて，[主張15] と [主張16] における最大値条件（3.62）を次のように書きかえればよい．

$$
\begin{aligned}
&-[S(I^*(t),\ t)+I_\sigma^*(t)+I_\zeta^*(t)]e^{-rt}+\eta(t)I^*(t)\\
&\quad+\eta_\sigma(t)I_\sigma^*(t)+\eta_\zeta^*(t)I_\zeta^*(t)\\
&=\max_{(I,I_\sigma,I_\zeta)\in\Omega_{\sigma\zeta}}[-(S(I,\ t)+I_\sigma+I_\zeta)e^{-rt}+\eta(t)I+\eta_\sigma(t)I_\sigma+\eta_\zeta(t)I_\zeta(t)]
\end{aligned}
$$

むすびに代えて：残された問題

この小論をとじるにあたって，以上において考察してきたモデルの欠点を指適し，残された問題のいくつかを明らかにすると共に，今後の展開のための若干の展望を試みておきたい．

われわれは企業の目的をその現在価値の最大化としてとらえたのであるが，冒頭で述べたように，それが企業の目的として唯一無二のものであると主張しつづけることはできないかも知れない．したがって，最大化もしくは完全な合理性にもとずく行動原理に対する批判はさておくにしても，企業の目的は，いくつかの変数によって規定される効用の最大化であると考えた方がより一般的であるように思われる．その場合，効用関数としては，単なる序数的な効用関数ではなく，むしろ，Neumann-Morgenstern 流の効用関数を定義した方がよいであろう．企業をとりまく不確実性の処理が可能になるからである．

指摘しておきたい第2の点は，われわれのモデルでは，与えられたそれぞれの時点における産出量，生産物価格，および可変的投入量の決定が，他の時点におけるそれらの決定から独立になされるという点である．生産物の在庫とか需要の backlog を含むようなモデルを構成するときには，ある時点におけるそれらの決定は他の時点における決定から独立ではあり得ず，したがって，産出量の決定なども投資政策などの決定と同じような形でなされねばならないであろう．

われわれは資本財への投資政策，生産技術の研究・開発政策，宣伝・広告政策に関する制約を全く外生的な形で導入したのであるが，たとえば粗投資の上限は投資資金の availability とか将来に対する予測などによって規定されるものと考える方が妥当であると思われる．

また，われわれは，資本ストックをはじめとする状態変数の値について，計画期間の終りにおける標的集合を明示した場合を除けば何の制約も課していない．しかし，計画期間中のそれらの値について企業が何らかの形で制約をもうけている場合は考えられるのであるから，問題を，いわゆる移動標的集合 (moving target set) を含む問題として定式化することには意義があると思われる．

われわれのモデルは確実性の世界におけるモデルであって，企業をとりまく外的な環境であるとか，企業による特定の行動の成果などにまつわる不確実性の問題は考慮されていない．研究・開発投資や宣伝・広告投資から得られる成果は一般に不確実であるし，また生産物や生産諸要素の価格に関する予想の問題も考慮されてしかるべきである．これらの不確実性を処理する方法としては，主観的確率の概念と Bayes の定理が有効であろうと思われる．

尚，技術進歩についてはいわゆる embodied progress の考え方を導入した方がより現実的であるように思われる．

最後に，われわれはいわゆる optimal synthesis の問題についてほとんどふれることがなかった．これも残された大きな問題の一つである．

参　照　文　献

〔1〕 Arrow, K. J., "Optimal Capital Adjustment," in *Studies in Applied Probability and Management Science*, K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf (eds), Stanford: Stanford Univ. Press, 1962.

〔2〕 Arrow, K. J., "Optimal Capital Policy, The Cost of Capital, and Myopic Decision Rules," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 16, pp. 21—30, 1964.

[3] Arrow, K. J.. "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment," in *Value, Capital, and Growth,* J. N. Wolfe (ed), Edinburgh : University Press, 1968.

[4] Arrow, K. J., M. J. Beckmann and S. Karlin, "The Optimal Expansion of the Capacity of a Firm," in *Studies in Mathematical Theory of Inventory and Production,* K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf (eds), Stanford: Stanford Univ. Press, 1958.

[5] Coddington, E. A. and N. L. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations,* New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1955.

[6] Cyert, R. M. and J. G. March, *A Behavioral Theory of the Firm,* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1963.

[7] Dhrymes, P. J., "On Optimal Advertising, Capital and Research Expenditures under Dynamic Conditions, *Economica,* Vol. 29, N. S., Aug. 1962.

[8] Eisner, R. and R. H. Strotz, "Determinants of Business Investment," in *Impacts of Monetary Policy,* D. B. Suits et al., Englewood Cliffs : Prentice-Hall. Inc., 1963.

[9] Haavelmo, T., *A Study in the Theory of Investment,* Chicago : Univ. of Chicago Press, 1960.

[10] Hicks, J. R., *Value and Capital,* 2nd edition, Oxford : Clarendon Press, 1946.

[11] Jorgenson, D. W., "The Theory of Investment Behavior," in *Determinants of Investmeut Behavior,* R. Ferber (ed), Now York : National Bureau of Economic Research, 1967.

[12] La Salle, J. P., "The Time Optimal Control Problem," in *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations Vol. V.,* Cesari et al. (eds), Princeton: Princeton Univ. Press, 1959.

[13] Lee, E. B. and L. Markus, "Optimal Control for Nonlinear Processes," *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol. 8, pp.36—58, 1961.

〔14〕 Lee, E. B. and L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory,* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.

〔15〕 Lutz, F. A., "The Essentials of Capital Theory," in 〔16〕.

〔16〕 Lutz, F. A. and D. C. Hague (eds), *The Theory of Capital,* London: Macmillan & Co. Ltd., 1961.

〔17〕 Malinvaud, E, "Capital Accumulation and Efficieut Allocation of Resources," *Econometvica,* Vol. 21, April 1953.

〔18〕 Manne, A. S., "Capacity Expansion and Probabilistic Growth," *Econometrica,* Vol. 29, Oct. 1961.

〔19〕 Massé, P. B. D., *Optimal Investment Decisions,* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1962.

〔20〕 Nerlove, H. and K. J. Arrow, "Optimal Advertising Policy under Dynamic Conditions," *Economica,* Vol. 29. N. S., May 1962.

〔21〕 Pontryagin, L. S. et al., *The Mathematical Theony of Optimal Processes,* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

〔22〕 Schmaedeke, W. W., "Existence Theory of Optimal Controls," in *Advances in Control Systems: Thaory and Applications,* Vol. 3, C. T. Leondes (ed), New York: Academic Press Inc., 1965.

〔23〕 Simon, H. A., *Models of Man,* New Yovk: John Wiley & Sons, Inc., 1957.

〔24〕 Simon, H. A., "Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science," *Amevican Economic Review,* Vol. 49, June 1959.

〔25〕 Simon, H. A., "New Developments in the Theory of the Firm," *American Economic Review,* Vol. 52, May 1962.

〔26〕 Smith, V. L., *Investment and Production.* Cambridge: Harvard Univ. Press, 1961.

〔27〕 Zabel, E., "Efficient Accumulation of Capital for the Firm," *Econometrica.* Vol. 31. January-April 1963.

大阪府立大学経済研究叢書

第1冊	西村孝夫著	イギリス東インド会社史論	<昭 35>
第2冊	福原行三著	J.S.ミルの経済政策論研究	<昭 35>
第3冊	和田貞夫著	点集合と経済分析	<昭 35>
第4冊	内田勝敏著	ブリティシュ・トロピカル・アフリカの研究	<昭 36>
第5冊	永島　清著 大野吉輝	国際経済と経済変動	<昭 36>
第6冊	山谷恵俊著 岡本武之	成長理論の研究	<昭 36>
第7冊	竹安繁治著	近世土地政策の研究	<昭 37>
第8冊	谷山新良著	保険の性格と構造	<昭 37>
第9冊	佐藤浩一著	現代賃金論序説	<昭 37>
第10冊	藤井定義著	幕末の経済思想	<昭 38>
第11冊	渡瀬　浩著	経営の社会理論	<昭 38>
第12冊	今川　正著	線型計画と地域開発	<昭 38>
第13冊	馬渕　透著	国際金融と国民所得	<昭 39>
第14冊	鍬田邦夫著	金融理論と金融政策	<昭 39>
第15冊	村上義弘著	行政法および行政行為の本質	<昭 39>
第16冊	鈴木和蔵著	減価償却政策と維持計慮	<昭 39>
第17冊	岡本武之著	ケインズ主義経済理論序説	<昭 40>
第18冊	片山　明著	イギリス「社会改良」時代の研究	<昭 41>
第19冊	風間鶴寿著	相続法の総論的課題 —相続開始・代襲相続・放棄—	<昭 41>
第20冊	前田英昭著	企業行動の理論	<昭 41>
第21冊	盛　秀雄著	日本国憲法の主原則	<昭 42>
第22冊	石田喜久夫著	自然債務の研究	<昭 42>
第23冊	稲葉四郎著	経済学の根柢	<昭 42>
第24冊	武部善人著	産業構造分析	<昭 43>
第25冊	山谷恵俊著	技術進歩と均衡成長	<昭 43>
第26冊	立半雄彦著	L・ワルラスの社会経済学	<昭 43>
第27冊	市橋英世著	マーケティング・システムの行動理論	<昭 44>
第28冊	横山益治著	不確実性と決定理論 —ベイジャン接近—	<昭 44>
第29冊	大野吉輝著	財政政策と所得分配	<昭 44>
第30冊	馬渕　透著	国際収支理論のグラフ的分析	<昭 45>
第31冊	石川常夫著	通貨変動理論の研究	<昭 45>
第32冊	今川　宏著	議決権代理行使の勧誘	<昭 45>
第33冊	右近健男著	離婚扶養の研究 —財産分与論　その1—	<昭 46>
第34冊	森田　勁著	労働市場分析による労働経済の研究	<昭 46>

著者略歴

昭和10年	兵庫県に生まる
昭和34年	東京大学経済学部卒業
昭和39年	東京大学大学院経済学研究科博士課程退学 大阪府立大学講師
昭和41年	大阪府立大学助教授
昭和46年	経済学博士（東京大学）

昭和46年10月25日　印刷
昭和46年10月31日　発行

著者　前田英昭

発行所　大阪府立大学経済学部
堺市百舌鳥梅町4丁804

印刷所　株式会社　天理時報社
奈良県天理市川原城町300