観測不可能な変数を含む経済モデルの推定

ISSN 0473—4661

大阪府立大学経済研究叢書　第50冊

観測不可能な変数を含む経済モデルの推定

洲 浜 源 一 著

大阪府立大学経済学部

大阪府立大学経済研究叢書　第50冊

観測不可能な変数を含む経済モデルの推定

洲　浜　源　一　著

大阪府立大学経済学部

はしがき

本書は観測不可能な変数を含む計量経済モデルの推定について検討している。経済学をはじめ広く社会科学において，それぞれの社会現象を計量モデルでとらえ，そこからその法則性を導き出す計量分析は各種の困難な問題に遭遇する。なかんずくモデルに含まれる変数とそれに対応する観測値の有無はその基本的問題の一つである。しかし計量経済学におけるこの種の一般的問題に対する実際的対応は，社会学あるいは心理学の分野におけるそれに比較して新しい。ここ10年ほど前に Zellner, Goldberger によって提起された補助方程式法はすでに他の分野において開発された因子分析法の計量経済学への一つの適用とみることができる。そこで本書は，このZellner, Goldberger の方法とその一般化によって得られた各種の結果を現段階でまとめ，同時に今後の研究のための基礎固めを行なったものであり，それ自体この問題に対して新しい貢献を加えようとするものではない。

本書で扱うテーマは著者がここ二年以来特に関心を持って取組んだものである。いま読み返してみるとき，著者の能力不足のため数々の節において不消化のあとが多々存在する。また当初予定していた基本モデルのモンテ・カルロ実験を本書に掲載することができなかったのは，まさしく著者の怠慢以外のなにものでもない。これらの諸点は今後の研究課題としたい。

しかしともかく現段階までの研究結果を一冊の書としてここに著わすことができたのは，著者が大学院以来このかた御指導を賜わっている恩師家本秀太郎先生および本学就任以来常に御鞭撻を頂いている今川正先生の御助力の御蔭である。この紙面をかりて心より御礼申し上げたい。

最後に本書を研究叢書の一冊として刊行することを許して下さった大阪府立大学経済学部に対して謝意を表わしたい。

昭和54年2月

著　　者

目　　次

第1章　序　　　　説

1.1　観測不可能な変数と問題の所在

本書は，観測不可能な変数を含んだ経済モデルの推定について検討する。観測不可能な変数（unobservable variables）という言葉は，これまでの計量経済学の教科書においては，あまり耳慣れない言葉である。しかし，変数誤差（errors in variables）とか，あるいは測定誤差を伴なった変数（variables with measurement errors）という言葉は，通常の教科書において知ることができる。測定誤差の存在のために，その真の値が測定できない変数は，確かにここで，われわれが扱う観測不可能な変数の一つである。しかし，本書でとりあげる観測不可能な変数は，この測定誤差が原因で，その本来の値が観測できない変数をも含めて，さらに広い意味で使いたい。

ところで，およそ推定の対象となる未知の経済量とか，あるいはその偶然的要素のため，確率変数として扱われる変数も，われわれがその真の値を直接知ることができないという意味で，観測不可能な変数とすれば，およそ計量経済学モデルにおいて，われわれが接する観測不可能な変数は実に多い。この観点にたって，Griliches [17] は，計量経済学における三つの型の観測不可能な変数を指摘している。その一つは固定パラメーターである。われわれが標本から推定するすべてのパラメーターは，これにあたる。その二つは，狭義の観測不可能な変数である。これには上述のごとく，測定誤差のためその真の値が測定できない変数（以下，誤差変数とする）と観測できるいかなる変数とも直接対応しない，本来の観測不可能な変数との二つのものがこれに属する。例えば，最適資本ストック，恒常所得（permanent income），銀行の企業に対する信用割当（credit rationing）あるいは予想価格をはじめとする一切の予想経済

（1）　心理学，社会学における「人の能力，才能」あるいは「人の欲望，価値体系」等は，明らかにわれわれの観測不可能な変数に属するものである。

量等は，この本来の観測不可能な変数に属するものといえる。(1) 指摘された第三の型は，計量モデルにおける確率項あるいは誤差項である。通常の方程式の誤差および測定誤差もこの第三の型に属する観測不可能な変数である。いうまでもなく，われわれが本書において対象とする観測不可能な変数は，この Griliches の指摘する第二の型の変数である。つまり，測定誤差を伴なった誤差変数および経済理論においてしばしば利用されかつその存在が予想されるが，現実には直接対応する資料の存在しない本来の観測不可能な変数である。

もちろん，これらの変数のなかには，事後的には，近似的にせよ測定可能な変数もあり，又まったく計測できない変数もあろう。したがって，一つの変数が観測不可能な変数であるかどうかは，常に確定したものではない。その変数が持つ本来の概念と当該モデルのなかにおいて，いかなる型で適用されているか，この二つの規準によって決定すべき問題である。さらに，本書では，これらの観測不可能変数が，モデルの独立変数として含まれる場合に限定したい。

しかし，ひとたび，これらの観測不可能な変数がモデルのなかに組込まれるならば，過去の経験によるにせよ，あるいは経済理論の裏付けによるにせよ，なんらかの観測可能な変数に結び付けられる。例えば，予想価格は，過去の各時点の実現価格の加重平均で，最適資本ストックは，企業の生産理論によって利子率，価格，産出量の関数として，またある変数は dummy 変数で表わされる場合もあろう。このように，観測不可能な変数を他の観測可能な変数と結び付ける関係式を，本書では，補助方程式 (auxiliary equation) と呼ぶことにする。Zellner [51]，Goldberger [13] による変数誤差モデルの推定も，かかる補助方程式による接近にほかならない。そこで，本書において，われわれが扱う計量モデルを

$$y=f(x^*,\ w,\ u) \tag{1.1}$$

$$x^*=g(z,\ \varepsilon) \tag{1.2}$$

と集約し，これを一般モデルと呼ぶことにする。上式における変数はすべて特定の次数のベクトルである。そのうち，y は従属変数，w，x^*，z は独立変数，u および ε は確率項である。そして独立変数のうちの x^* がこのモデルにおけ

る観測不可能変数とする。上式の(1.1)がこのモデルの構造方程式であり，(1.2)が，観測不可能な変数 x^* を他の観測可能な独立変数 z に結び付ける補助方程式である。このモデルでは，たとえ(1.1)，(1.2)の両式がパラメーターに関して線型であっても，x^* を消去した構造方程式は，一般には非線型となる。このため，通常の識別理論および推定方法を直接適用することはできない。本書の意図は，まさしく，このような観測不可能な変数を含んだモデルの推定に関する諸問題を検討することである。以下，観測不可能な変数を含む経済モデルの諸例をあげ，われわれの研究の重要性を強張したい。

1.2 観測不可能な変数を含む経済モデル

本節では，観測不可能な変数を含んだ消費モデル，投資モデルおよび賃銀・利子・価格決定モデルの実例について検討する。

1. 恒常所得モデル。周知の消費関数論争を経て，Friedman [8] は，いわゆる恒常所得(permanent income)モデルを提案した。このモデルの最も簡単な型は次のように表わされる。つまり，われわれが現実に観察する t 時点の消費 $y(t)$ は各消費単位が長期にわたって受けとると予想される恒常所得 $x^*(t)$ からの一定割合と変動消費 $u(t)$ との和として定義される。他方，現実に観察される所得 $x(t)$ はこの恒常所得と一時点に受けとる変動所得 $\delta(t)$ との和として定義される。つまりそのモデルは

$$y(t)=\beta^*x^*(t)+u(t) \tag{1.3}$$

$$x(t)=x^*(t)+\delta(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T) \tag{1.4}$$

と表わされる。上式の β^* は平均消費性向にあたり，各種の要因によって決定されるが，ここではこれにたち入らない。また u，δ（以下随時 t を省略する）は共にモデルの確率項として扱われそれぞれ $E(u(t))=E(\delta(t))=0$，$E(u^2(t))=\sigma_u^2$，$E(\delta^2(t))=\sigma_\delta^2$，$E(u(t)u(s))=E(\delta(t)\delta(s))=0\ (t\neq s)$，$E(u(t)\delta(r))=E(u(t)x^*(r))=E(\delta(t)x^*(r))=0\ (s,\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$ とする。このとき次の関係式が成立する。

$$\beta=\left(1-\frac{1}{\sigma_x^2}\sigma_\delta^2\right)\beta^* \qquad (1.5)$$
$$\sigma_v^2=\sigma_u^2+\beta^{*2}\sigma_\delta^2 \qquad (v=u-\beta^*\delta)$$

ただし β，σ_x^2，σ_v^2 はそれぞれ $\sum_{t=1}^{T}y(t)x(t)/\sum_{t=1}^{T}x^2(t)$，$(1/T)\sum_{t=1}^{T}x^2(t)$，$(1/T)\sum_{t=1}^{T}v^2(t)$ の確率極限とする。ところでこれらの値をその標本からの値に置きかえると，モデルは三個の未知数（β^*，σ_u^2，σ_δ^2）と二個の方程式から構成されている。この結果，Friedman の恒常所得モデルは本来識別不能な体系である。これを解決するために，例えば時系列資料に対してはその恒常所得を現在および過去の実現所得の分布ラッグ関数

$$x^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i x(t-i) \qquad (1.6)$$

として表わすことができる(2)。さて，この修正された Friedman モデル (1.3)，(1.4)，(1.6) は明らかにわれわれの一般モデル (1.1)，(1.2) に対応する。事実，恒常所得 x^* は観測不可能な予想変数でありまたその (1.6) 式はわれわれの補助方程式 (1.2) にあたる。そして残りの (1.3)，(1.4) 式が構造方程式 (1.1) に相等する。

2. 投資関数と最適資本ストック。周知の通り，投資関数モデルには各種の定式化が可能であるが，そのいずれにおいても各種の予想あるいは期待変数が導入される(3)。ここでは次の調整型の設備投資関数に限定し，置換投資を省略する。

$$I=\alpha(K^*-K_{-1})+u \qquad (1.7)$$
$$K^*=g(X) \qquad (1.8)$$

つまり，今期の投資 I は，今期の望ましい資本ストック K^* と前期末の資本ストック K_{-1} との差に調整係数 α を乗じたものと仮定される。他方，前者の K^* は (1.8) 式によって，独立変数 X の関数として表わされる。この K^* の決定

(2) Friedman [8] (142–45) は各変数が時間に関して連続な場合を想定しているが，ここでは離散型の場合に変更している。

(3) 洲浜 [44] (179–82)。

には各種の方式が考えられる。その最も簡単な方法は，望ましい資本ストックの水準を，一定の産出量 X を生産するために，経済的に最も有利な資本ストックとする方法である。すなわち

$$K^*=\beta X \tag{1.9}$$

と定式化することができる。したがって，上式における係数 β は，投資企業にとって最も有利な条件のもとにおける資本一産出比率である。この背後にある企業行動をさらに一歩進めたのが Jorgenson [29] である。ここでは，最適資本蓄積に関する新古典派理論にもとづいて，望ましい資本ストック水準が決定される。いま生産関数として，Cobb-Douglas 型のものを用いると，利潤最大化のための必要条件より

$$K^*=\gamma(p/c)X \tag{1.10}$$

を得る。ここで，X は産出量，p は同価格，c は資本用役の価格である。以上の各方式は，投資活動における実物面を強張しているが，これと平行して，その貨幣面を強張することができる。もし，企業の内部畜積資金 L がその企業の望ましい資本ストックの水準を決定するものであれば，$K^*=\delta L$ とすることもできる。さて，以上のいずれの方式に従っても，望ましい資本ストックの水準は観測不可能な変数であり，しかも，それを観測可能な独立変数に結び付ける補助方程式が，ここではモデルの中心となっている。これは，Friedman の恒常所得モデルにおける補助方程式 (1.6) が，そのモデルにおいて，文字通り補助的役割をしているのに比べて対照的である。

3.　予想価格。前述の通り，予想価格も観測不可能な変数の一つである。ここでは，予想価格の変化率を含んだ Kolluri [31] (chap. 7) の計測モデルを紹介する。このモデルは，失業率とインフレーションとの長期 trade off の関係および利子率に関する Fisher の仮説（名目利子率＝実物利子率＋予想価格の変化率）の検証のために用いられたモデルであり，1954年から70年にわたる米国経済の半期別資料に適用されている。モデルは，次の五方程式より構成される線型連立方程式である。(4)

(4)　Kolluri [31] (123) の計測モデルを，ここでの説明のために変形している。

$$\begin{aligned}
&\dot{W}=f_1(N\dot{F}D,\ \dot{P}e,\ \dot{Q},\ U^{-1})+u_1\\
&N\dot{F}D=f_2(\dot{W},\ N\dot{F}D_{-1},\ \dot{R})+u_2\\
&i=f_3(V^{-1},\ \dot{P}e,\ \dot{R})+u_3 \qquad (1.11)\\
&\dot{P}o=\dot{P}e+u_4\\
&\dot{P}e=f_5(N\dot{F}D,\ \dot{M}_{-1})+u_5
\end{aligned}$$

このモデルの記号は次の通りである。

$\dot{W}$＝民間非農業部門労働者の平均時間給変化率（%），$N\dot{F}D$＝非農業部門GNPデフレーター変化率（%），$\dot{P}e$＝消費者物価予想変化率（%），$\dot{Q}$＝労働生産性変化率（%），U＝平均失業率（%），$\dot{R}$＝産出量単位当りの労働費用変化率（%），V＝貨幣の流通速度，$\dot{P}o$＝測定誤差を含んだ$\dot{P}e$の推定値，$\dot{M}$＝貨幣の供給量変化率（%），i＝名目利子率。

この第一式は，Phillips-Lipsey 曲線を修正した賃銀方程式である。第二式は価格方程式，第三式は修正された Fisher の利子方程式である。また，第四式は測定誤差を含んだ$\dot{P}e$の推定値を表わしている。最後の第五式は，Turnovsky［47］の予想価格形成式を変型したものである。いうまでもなく，このモデルの観測不可能変数は消費者物価の予想変化率$\dot{P}e$である。また，その補助方程式は第五式である。以上の改良モデルに平行して，これまでの伝統的なモデルも計測されている。この後者のモデルは，上の改良モデルの予想価格変化率$\dot{P}e$を直接その推定値$\dot{P}o$で置きかえ，さらに第四，五式を削除したものである。この結果，伝統的モデルにおいては，補助方程式が，まったく考慮されない。Kolluri は両モデルの推定結果を比較することによって，上の改良モデル（1.11）の妥当性を主張している。

以上，われわれは観測不可能な変数を含み，かつそれを補助方程式によって推定する経済モデルの例を説明した。これらのモデルは，結局，われわれの一般モデルに集約される(5)。

(5) このほか，銀行の信用割当を観測不可能変数として，企業の実物・金融資産需要の実現を計測するモデルがある（伴［3］）。このモデルも，われわれの一般モデルに属する。

1.3 変数誤差モデル

本節では，変数誤差を含むモデルの推定に関する Zellner-Goldberger の補助方程式法について説明する。すでに述べた Friedman の恒常所得モデルは，ここでの変数誤差モデルと密接な関係がある。そこで，そのモデル(1.3), (1.4)をここでも利用する。ところで，周知のように，従属変数に含まれる測定誤差は，方程式の誤差と同じように処理されるので，ここでは独立変数のみに測定誤差が含まれる場合に限定したい。そのとき独立変数の観測値 x はその観測不可能な真の値 x^* とその測定誤差 δ との和として (1.4) 式で表わされる。他方 (1.3) 式は従属変数 y と真の値 x^* との回帰関係を表わしている。いまモデルの確率項 u, δ に対して，前述と同じ仮定を設定すると，この変数誤差モデルは Friedman の恒常所得モデルとまったく同じものとなる。したがって，ここでの変数誤差モデルも識別不能である。構造係数 β^* のみの推定に限定しても，その最小二乗推定量は一致推定量とはなりえない。そこで通常とられる方法は操作変数法と最尤推定法との二つである。これらの推定法によって β^* の一致推定量を求めることができる。しかし誤差分散 σ_u^2, σ_δ^2 のうちのいずれか一つを推定することができない。これに対して Zellner [51], Goldberger [13] の手法による推定法は，観測不可能変数 x^* を他の観測可能な独立変数 z に結びつける方法である。この結果，変数誤差モデルは

$$
\begin{aligned}
&y(t)=\beta^* x^*(t)+u(t) \\
&x(t)=x^*(t)+\delta(t) \\
&x^*(t)=\alpha z(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

と改められる。ただし独立変数 z は u, δ と無相関としておく。これより x^* を消去した誘導型に基づいて次の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\pi_1=\alpha\beta^* \\
&\pi_2=\alpha \\
&\sigma_{v_1}^2=\sigma_u^2 \qquad (v_1=u) \\
&\sigma_{v_2}^2=\sigma_\delta^2 \qquad (v_2=\delta)
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

ただし上式における π_1，π_2，$\sigma^2_{v_i}$（$i=1,\ 2$）はそれぞれ標本からの統計量 $\sum_{t=1}^{T} y(t)z(t)/\sum_{t=1}^{T} z^2(t)$，$\sum_{t=1}^{T} x(t)z(t)/\sum_{t=1}^{T} z^2(t)$，$(1/T)\sum_{t=1}^{T} v_i^2(t)\,(i=1,\ 2)$ の確率極限である。ここでは四個の未知数（β^*，α，σ^2_u，σ^2_δ）が同数の方程式によって表わされている。したがって，この変数誤差モデル（1.12）は識別可能であり，π_i（$i=1,\ 2$）の最小二乗推定量は β^*，α の一致推定量を与える。以上より変数誤差モデルの補助方程式による修正はモデルの識別不能性を軽減する。この傾向は変数誤差の存在する連立方程式モデルにおいても，ほぼあてはまる。いずれにせよこの修正モデル（1.12）もわれわれの一般モデルに集約することができる。

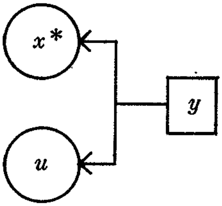
1.4　因子分析との関連

一般モデルにおいて，観測不可能な変数を消去すれば従属変数と独立変数とからなる回帰モデルが確定する。しかしこのモデルは因子分析モデルとしての性質をかねそなえている。そこで本節では，一般モデルを因子分析の立場から検討したい。

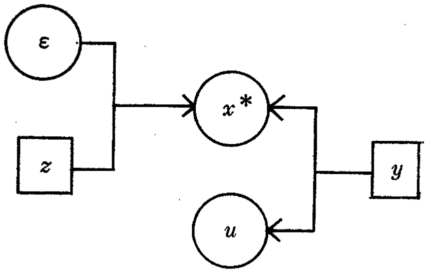
多数の観測値から，そこに潜在する観測不可能な共通した因子の種類とその量について探索，実証する因子分析は，心理学の分野において早くから利用されている。その因子分析には，大きく分けて二つの分析方法がある。その一つは探索的（exploratory）分析方法であり，いま一つは確証的あるいは検証的（confirmatory）分析方法である。前者の探索的方法では，その実験モデルに対して一切の先験的制約を用いないのに対して，後者の確証的方法では，その実験対象の構造に関するある程度の事前的知識に基づいて，そのモデルに含まれる共通因子あるいは因子負荷量の一部に先験的制約を加える(6)。これはいわゆる前者の「回転の不安定性」を除くうえで重要である。このような観点からわれわれのモデルを検討すると，まず一般モデルの（1.1）式を $y=Bx^*+u$ と特定化し，その（1.2）式をさしあたって除外すると，これは上述の探索的

（6）　Jöreskog [25] (183–86), Goldberger [12] (990–93).

因子分析法の対象となる。そのとき観測不可能な変数 x^* が共通因子であり，係数行列 B がその因子負荷量および確率項 u が特殊因子にそれぞれ相当する。これに対して補助方程式 (1.2) で示される回帰関係を加え，一般モデル全体を一つの因子モデルとすると，明らかにこの補助方程式が共通因子 x^* に対する制約式となってる。したがって，われわれの一般モデルは上述の確証的因子分析の対象となる。特にこの補助方程式を，ある確定した次数の係数行列 A に対して $x^*=Az+\varepsilon$ と特定化すれば，共通因子の個数はその行列の次数に固定され，そして各共通因子はその観測可能な確証部分 (Az) とその不可能な確率部分 (ε) とに二分される。そのとき後者の確率部分 (ε) は，後述のごとく，モデルの副次的共通因子としての性質を持つことになる。そこで以上の二つの因子分析法を，われわれの一般モデルに関連して図示すると次のように表わされる。図における記号 ← は因子の探索方向をまた → は回帰方向を示している。これよりわかるように，特定化された (1.1) 式のみからなる因子モデルは事前にいかなる制約をも利用せず，自由に因子を探索する。これに対して特定化された (1.1) および (1.2) の一般モデルより構成される因子モデルは，独立変数 z の張る空間においてあらかじめ定められた数の因子を求める。



(1.1)



(1.1) and (1.2)

1.5 本書の構成

観測不可能な変数を含んだ経済モデルの，補助方程式法による推定理論の歴史は新しい。Zellner [51] によって，最初とりあげられた方法は一般化最小

二乗法（正確には，Zellner [49] のZellner's two stage generalized least square methods である。以下，簡単にGLS とする）の応用である。この方法は Goldberger [13] を初めとする一連の研究によって受け継がれ,(7) 同時に最尤法（以下，ML とする）の適用および因子分析法との関連が検討された。Zellner-Goldberger のモデルは，一つの観測不可能な変数を含む単純なモデルであったが，これは Robinson [40] さらに Kolluri [31] によって一般化され，多数の観測不可能な変数を含むモデルが検討されている。

そこで，本書の構成は次のようになっている。第2章では，一つの観測不可能な変数を含む基本モデルを構成し，その識別と Minimum Distance（以下，MD と略す）法による推定およびその推定量の漸近的性質について検討する。この MD 法による推定の手続は，GLS 法のそれとほとんど同じであるが，その一つの特殊な場合として，GLS 法を含んでいる。つづいて，第3章においては，基本モデルの拡張を行なう。その拡張は 1) 外生変数の導入，2) 多数の観測不可能な変数の導入，3) 補助方程式の確率化，4) 連立方程式化の四点において行なう。以上のモデルの一つの応用として，第4章では変数誤差の問題をとりあげる。

なお，第2章における MD 推定量の漸近的特性の証明は，Malinvaud [35] (chap. 9) の手法に従っている。また，第3章の「多数の観測不可能な変数」が存在するモデルの推定については Kolluri [31] (II. 2) および「補助方程式の確率化」については Kolluri [31] (II. 4)，Jöreskog and Goldberger [28] に基づいている。

(7) Goldberger [11], Hauser and Goldberger [18], Goldberger [12], Goldberger [14], Jöreskog and Goldberger [28].

第2章　基本モデル

本章では，一個の観測不可能な変数を含んだモデルについて考察する。とりあげる論点は，モデルの識別，Minimum Distance (MD) 法による推定およびその推定量の漸近的性質である。本章で考察するモデルは，あらゆる点において制約的であるが，観測不可能な変数を含む計量モデルの基本的特徴を持っている。

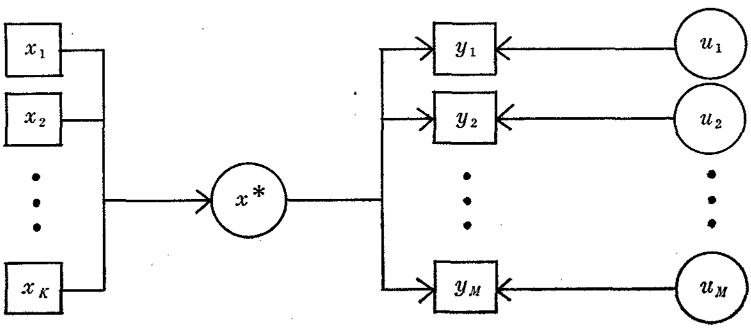
2.1　基本モデルの構成と仮定

本章において扱うモデルを次のように特定化し，これを基本モデルと呼ぶことにする。

$$
[\mathrm{I}]\quad
\begin{aligned}
y_1(t) &= \beta_1 x^*(t) + u_1(t)\\
y_2(t) &= \beta_2 x^*(t) + u_2(t)\\
\vdots\quad & \qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\
y_M(t) &= \beta_M x^*(t) + u_M(t)\\
x^*(t) &= \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots\cdots + \alpha_K x_K(t)
\end{aligned}
$$

$$(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

この基本モデルの構造は，下の回帰図に表わされる。すなわち時点 t において，M 種の観測可能な従属変数 y_1, y_2, ……, y_M は，それぞれ観測不可能な変数



x^* と確率項 u_1, u_2, ……, u_M によって表わされる。他方，この x^* は，補助方程式によって，観測可能な独立変数 x_1, x_2, ……, x_K の一次結合として表わされている。明らかに，この基本モデルは，前述の一般モデル (1.1), (1.2) の特殊な場合である。

このモデルは，更に次のように表わすことができる。

$$y(t)=\beta x^*(t)+u(t) \tag{2.1}$$

$$x^*(t)=\alpha' x(t) \tag{2.2}$$

ただし

$$y(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\ \cdots\cdots,\ y_M(t))' \qquad (M\times 1)$$

$$x(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots\cdots,\ x_K(t))' \qquad (K\times 1)$$

$$u(t)=(u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots\cdots,\ u_M(t))' \qquad (M\times 1)$$

$$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_K)' \qquad (K\times 1)$$

$$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\cdots,\ \beta_M)' \qquad (M\times 1)$$

とする。次に，モデルの確率項 u および独立変数 x は次の仮定に従うものとする。

仮定 1. (1) $E(u(t))=\mathbf{0} \qquad (M\times 1) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$

(2) $E(u(t)u'(t))=[\sigma_{ij}]=\Sigma \quad (M\times M) \quad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$

(3) $E(u(t)u'(s))=\mathbf{0} \qquad (M\times M)$

$(t\neq s,\ t, s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$

ただし，上記の分散共分散行列 Σ は正値定符号行列とする。

仮定 2. 独立変数 x は非確率的な確定量であって，階数条件 rank $(X)=K$ に従う。ただし行列 X は

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots\cdots,\ x(T))' \qquad (T\times K)$$

とする。

この仮定1より，確率項 u は平均 $\mathbf{0}$ で，同時点 (contemporaneously) には互いに相関を持つが，系列的 (serially) には無相関である。また，仮定2より，独立変数 x は非確率変数であるが，これを確率変数と改めても，x が系列的に独立であり，さらに x が与えられた時の u の条件付分布が x から独立で

あれば，以下の展開には変りがない。

最後に，以上の基本モデル〔I〕が極めて制約的であることは，いうまでもない。特に，モデルの従属変数は，x^* 以外の独立変数の影響を直接には受けない。また，モデルに含まれる観測不可能な変数の個数は，わずか一つである。モデルの補助方程式は，独立変数の exact function として表わされている。さらに，従属変数間の相互依存的関係は無視されている。これらの各点は，次章において修正され，モデルは一般化される。

2.2　基本モデルの識別

前節における (2.1) 式を (2.2) 式に代入して，次の誘導型を得る。

$$\begin{aligned} y(t) &= \beta\alpha' x(t) + v(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T) \\ &= \Pi' x(t) + v(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ただし

$$\Pi = \alpha\beta' = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots\cdots & \alpha_1\beta_M \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots\cdots & \alpha_2\beta_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_K\beta_1 & \alpha_K\beta_2 & \cdots\cdots & \alpha_K\beta_M \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

とする。また，$u(t)=v(t)$ であるから，$v(t)$ の分散共分散行列を

$$E(v(t)v'(t)) = [\omega_{ij}] = \Omega \tag{2.4$'$}$$

と定義しておくと，この基本モデルでは $\Sigma=\Omega$ が成立する。以上の準備のもとに，構造パラメーター α，β，Σ の識別について検討する。

まず，上述の通り，$\Sigma=\Omega$ すなわち $\sigma_{ij}=\omega_{ij}$ であるから，分散共分散行列 Σ は識別可能である。しかし，構造係数 α，β については (2.4) 式が α，β に関して非線型であるため，連立方程式に関する通常の識別理論を適用することはできない。しかし，これまでの手法にならって，α，β の識別を検討することが可能である。まず，(2.4) 式において，誘導係数行列 Π の KM 個の要素が構造係数ベクトル α，β の $K+M$ 個の要素によって表わされている。しかしながら，β の各要素を k（スカラー）倍し，逆に α の各要素を同じ k にて除

しても，左辺のΠの値は変らない。そこで，この不決定性を除くために，正規化則として，$\beta_M=1$ を採用することにする。[1] この結果，推定すべき構造係数は $K+M-1$ となる。ゆえに，全体として

$$r=KM-(K+M-1)=(K-1)(M-1) \tag{2.5}$$

個の過剰決定が存在する。$K=1$ あるいは $M=1$ という特殊な場合を除けば，ここでの基本モデルは，大抵の場合，過剰識別である。したがって，α，βを一意に決定するためには，誘導係数Πに $(K-1)(M-1)$ 個の制約を課する必要がある。そこで，次の定理が成立する。

定理 2.1

「一つの正規化則のもとで，基本モデルの構造係数 α，β が，一意に決定されるための必要かつ充分条件は，誘導係数行列Πに関して

$$\mathrm{rank}\ (\Pi)=1 \tag{2.6}$$

が成立することである。」

この定理の成立は，上の (2.4) 式より，自明であるが，ここでは (2.6) 式の持つ意味を明確にするため，次のような証明方法をとる。そこで，まず，次の補助定理の成立を確かめる。

補助定理

「行列Πの二つの行 i，j と二つの列 k，l より作られる小行列式を $\Pi\begin{pmatrix} i, & j \\ k, & l \end{pmatrix}$ とすると，上記の定理 (2.6) 式は

$$\Pi\begin{pmatrix} 1, & j' \\ 1, & l' \end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix} j'=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ K \\ i'=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ M \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

で示される $(K-1)(M-1)$ 個の制約と同等である。」

補助定理の証明。一般にある行列に関して，s次の小行列式がすべて0であるならば，それより高次の小行列式はすべて0である。ゆえに，制約 (2.6) 式

(1) 正規化則として，このほか $\alpha'X'X\alpha=1$ あるいは $\beta'S\beta=1$（ただしSは任意の正値定符号行列）を利用することができる。

れは係数行列 Π の2次小行列式がすべて0となることと同等である。すなわち，

$$\Pi\begin{pmatrix} i, & j \\ k, & l \end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix} i<j, & i,j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K \\ k<l, & k,l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M \end{pmatrix}$$

と同等である。しかし，この $(1/4)KM(K-1)(M-1)$ 個の制約のうち，独立な式の個数は $(K-1)(M-1)$ である。なぜなら，$i=i_0$，$j=j_0$ と固定した $1/2M(M-1)$ 個の小行列式 $\Pi\begin{pmatrix} i_0, & j_0 \\ k, & l \end{pmatrix}=0$ は，そのうちの，例えば

$$\Pi\begin{pmatrix} i_0, & j_0 \\ 1, & l' \end{pmatrix}=0 \qquad (l'=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ M)$$

にて表わされる $(M-1)$ 個の制約を，適当に組合わせることによって，容易に導くことができる[(2)]。このことは，行についても同じであるから，結局，独立な制約は (2.7) 式で表わされ，その個数は $(K-1)(M-1)$ である（補助定理証明終)。以上より，制約 (2.6) は $(K-1)(M-1)$ 個からなる (2.7) の制約と同等であり，その個数は，過剰決定の個数を表わす (2.5) 式の r に等しい。つまり，誘導型の係数行列 Π に制約 $\mathrm{rank}\ (\Pi)=1$ を課することによって，基本モデルの過剰識別性は修正され，構造パラメーター α，β は一意に決定される。事実，一つの正規化則と制約 (2.7) を利用して，関係式 $\Pi=\alpha\beta'$ より，構造係数 α，β を次のように導くことができる。いま，行列 Π の i，j 要素を π_{ij} とすれば，(2.4) 式より

$$\pi_{ij}=\alpha_i\beta_j \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K) \quad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$$

ここで，正規化則 $\beta_M=1$ を利用して $\alpha_i=\pi_{iM}$ と決定する。一方，他の β については，(2.7) 式を用いて，次のように決定する。

---

(2)　行列 Π の要素を π_{ij} とすると

$$\Pi\begin{pmatrix} i_0, & j_0 \\ k', & l' \end{pmatrix}=\pi_{i_0k'}\pi_{j_0l'}-\pi_{j_0k'}\pi_{i_0l'}=0$$

は $\Pi\begin{pmatrix} i_0, & j_0 \\ 1, & l' \end{pmatrix}=0$ および $\Pi\begin{pmatrix} i_0, & j_0 \\ 1, & k' \end{pmatrix}=0$ より導かれる。ただし，$k'<l'$，k'，$l'=2$，3，……，M とする。

$$\beta_h = \frac{\pi_{1h}}{\pi_{1M}} = \frac{\pi_{2h}}{\pi_{2M}} = \cdots\cdots = \frac{\pi_{Kh}}{\pi_{KM}} \qquad (h=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$

以上より，定理2.1の成立は明らかである。

ところで，得られた識別条件は，通常の連立方程式体系を構成する特定式の識別条件に対応している。事実，後者の次数条件に相当するものは，ここでは，(2.5) 式の $r=(K-1)(M-1)\geqq 0$ であり，またその階数条件にあたるものは (2.6) 式の rank $(\Pi)=1$ である。そして，実際の推定にあたっては一つの正規化則と係数制約 $\Pi=\alpha\beta'$ のもとで，誘導型 (2.3) 式を利用することができる。その際，最尤推定法に従うならば，これは通常の制限情報最尤法の手法に対応する。しかし，ここでは，制約 $\Pi=\alpha\beta'$ が非線型であり，さらに推定の対象となるパラメーターは，モデルのすべてのパラメーターである。

2.3 基本モデルのMD推定量

本節では，基本モデル〔I〕の推定について検討する。前述の誘導型 (2.3) 式より明らかなごとく，このモデルはパラメーターに関して非線型な M 個の方程式に還元され，その確率項は互いに相関し合っている。この基本モデルの推定は，すでに Zellner [51] および Goldberger [13] において検討されている。その推定法は，一般化最小二乗法 (GLS) と最尤推定法 (ML) である。前者は，正確には，Zellner [49] において提案された Zellner's two stage GLS である（本書では，この推定法を GLS と呼ぶ(3)）。ところで，この基本モデルに関する GLS 推定量と ML 推定量の両推定量は，モデルの確率項に相関が存在するとき ($\sigma_{ij}\neq 0$, $i\neq j$)，同一となることが明らかにされている(4)。

そこで，本節ではこの基本モデルに対して Minimum Distance (MD) 推定法を適用する。この推定法は，その一つの特殊な場合として，上述の

(3) この推定法は，また Theil [46] (310) において joint GLS と呼ばれている。

(4) Goldberger [13] (7)。この帰結は，Goldberger and Oklin [10] の定理の拡張であることが指摘されている。また，Robinson [40] は，より一般的なモデルのもとで，両推定量の等しいことを証明している。

GLS推定量を含み，またある一定の条件のもとで，その漸近分布はML推定量のそれに等しくなる（本章2.5節参照)。

まず，Malinvaud [35] (chap. 9) に従って，基本モデルに関するMD推定法を，次のように定義する。すなわち，MD推定法は誘導型 (2.3) における確率項の適当な二次形式を最小にする推定法である。すなわち，

$$F(S_T)=\sum_{t=1}^{T} v'(t)S_T v(t) \tag{2.8}$$

を最小にする α，β を選択することである。ここで，行列 S_T は $M\times M$ の正値定符号行列であって，既知とする。この添字 T は大きさ T の観測値に対して用いられていることを示す。本節を通して，T は一定であるので，この添字を省略する。上式は，さらに次のように表わすことができる。

$$F(S)=T\,tr(SW) \tag{2.8'}$$

ここで，$tr(SW)$ は行列 SW の trace を表わす。また W は，誘導型における確率項の分散共分散行列で

$$\begin{aligned} W&=(1/T)\sum_{t=1}^{T}(v(t)v(t)') \\ &=(1/T)(X-X\Pi)'(Y-X\Pi) \end{aligned}$$

と定義される。ただし上式の Y，X は

$$Y=(y(1),\ y(2),\ \cdots\cdots,\ y(T))' \qquad (T\times M)$$
$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots\cdots,\ x(T))' \qquad (T\times K)$$

であって，それぞれ観測値から構成される行列である。ところで，行列 W は

$$W=V+\frac{1}{T}(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)$$

と変形することができる。ただし，上式における V，P は

$$V=(1/T)(Y-XP)'(Y-XP) \tag{2.9}$$
$$P=(X'X)^{-1}X'Y$$

と定義される。すなわち，P は Y の X に対する回帰モデルの最小二乗回帰係数であり，V はその残差の分散共分散行列である。上記の W の変形式を (2.8') 式に代入して

$$F(S)=T\,tr(SV)+tr[S(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)]$$
$$=T\,tr(SV)+tr(SP'X'XP)+tr(S\Pi'X'X\Pi)$$
$$-2tr(\Pi'X'YS)$$

を得る。この右辺の第1，2項は α，β に関する最小化と無関係であるから結局，(2.8) 式を α，β に関して最小にするということは，係数制約 $\Pi=\alpha\beta'$ を考慮して

$$F^*=tr(S\Pi'X'X\Pi)-2tr(\Pi'X'YS) \tag{2.10}$$
$$=(\alpha'X'X\alpha)\beta'S\beta-2\alpha'X'YS\beta$$

を α，β に関して最小にすることにほかならない。そこでこの F を α，β に関して偏微分し，その結果を $\mathbf{0}$ とおいて

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F^*}{\partial\alpha}=(\beta'S\beta)X'X\alpha-X'YS\beta=\mathbf{0}$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F^*}{\partial\beta}=(\alpha'X'X\alpha)S\beta-SY'X\alpha=\mathbf{0}$$

を得る。これより，α，β は

$$\alpha=(\beta'S\beta)^{-1}PS\beta \tag{2.11}$$
$$\beta=(\alpha'X'X\alpha)^{-1}Y'X\alpha \tag{2.11'}$$

となる。この両式より，さらに

$$(QS-\lambda I)\beta=0 \tag{2.12}$$

を得る。ただし，上式における Q，λ はそれぞれ

$$Q=Y'XP=P'X'XP,\quad \lambda=(\alpha'X'X\alpha)\beta'S\beta$$

と定義される。この (2.12) 式より，λ は行列 QS の固有根であり，β はそれに対応する固有ベクトルである。ところで，以上の結果を利用して，

$$F^*=\lambda-2\lambda=-\lambda$$

を得る。他方，固有根 λ は上記の定義より非負である。したがって，F^* を最小にする β は，結局，行列 QS の最大個有値に対応する固有ベクトルである。(5)

(5)　ここで，行列 QS の最大個有根を，単根と仮定する。これが重根のとき，前節の定理 2.1 が満たされたとしても，α，β の一意性は得られない。例えば，正規化則 $\beta'S\beta=1$ のもとで，$Q=S=I$ となる場合，$\beta_1=\sin\theta$，$\beta_2=\cos\theta$ となる（ただし，

ところで，前節の定理 2.1 より，一つの正規化則を加えなければ，構造係数 α，β の一意性は得られない。正規化則としては，前述の $\beta_M=1$ のほかに $\alpha'X'X\alpha=1$ あるいは $\beta'S\beta=1$ を用いることができる。(6) 後者の二つの正規化則を適用した時の α，β の MD 推定量は次の通りである。

1) $\alpha'X'X\alpha=1$。この時，$\lambda=\beta'S\beta$ が成立する。したがって，求める α，β の MD 推定量をそれぞれ $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とすると，上記の (2.11)，(2.12) の両式より

$$\begin{aligned}&\hat{\alpha}=(\hat{\lambda})^{-1}PS\hat{\beta}\\&(QS-\hat{\lambda}I)\hat{\beta}=0,\quad \hat{\lambda}=\hat{\beta}'S\hat{\beta}\end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。ただし $\hat{\lambda}$ は行列 QS の最大固有根とする。

2) $\beta'S\beta=1$。この時，$\lambda=\alpha'X'X\alpha$ が成立する。求める MD 推定量は上記と同じ方法で

$$\begin{aligned}&\hat{\alpha}=PS\hat{\beta}\\&(QS-\hat{\lambda}I)\hat{\beta}=0,\quad \beta'S\beta=1\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。ただし $\hat{\lambda}$ は，上と同じように，行列 QS の最大固有根とする。

なお，以上の結果は，正規化則のもとで，F^* を直接に最小とした結果に等しい。すなわち

$$F^*+\mu_\alpha(\alpha'X'X\alpha-1)$$
$$F^*+\mu_\beta(\beta'S\beta-1)$$

を最小にする α，β は，上述の (2.13)，(2.14) の結果に等しい。ただし μ_α，μ_β はそれぞれラグランジュ乗数である。

以上が基本モデル〔I〕に関する MD 推定量である。言うまでもなく，この推定量を利用する場合には，一種のウエート (weights) である正値定符号行

$M=2$ とする)。

(6) Zellner [51] においては $\beta_M=1$，また Goldberger [14]，Kolluri [31] では $\alpha'X'X\alpha=1$ が，また Robinson [40] では $\beta'V^{-1}\beta=1$ が用いられている。変数誤差モデル (1.12) においては，あらかじめ $\beta_M=1$ が仮定されている。他のモデルにおいて，いずれの正規化則を適用するか，そのための規準は存在しない。いずれにせよ，後者の二つの正規化則を用いる時は，あらたに α あるいは β の一つの要素に対して，その符号を設定しなければ α，β の厳密な一意性は得られない。

列Sをあらかじめ決定しておく必要がある。もしモデルの確率項uの分散共分散行列 $\Sigma(=\Omega)$ が既知であるならば$S=\Omega^{-1}$とすることができる。このとき

$$F(\Omega^{-1})=T\ tr(\Omega^{-1}W)$$

を最小にするα，βは後述のML推定量に等しい。Σが未知のときは (2.9) において定義されるVを用いることができる。すなわち

$$F(V^{-1})=T\ tr(V^{-1}W)$$

を得る。上式を最小にするα，βは，Zellner [51]，Goldberger [13] において検討されたGLS推定量である。次に，$S=I$（単位行列 $M\times M$）とした

$$F(I)=T\ tr(W)$$

を最小にする方法は，Brown [2] における連立最小二乗法にほかならない。

2.4 MD推定量の漸近的性質

本節では，前節において導出したMD推定量α，βの漸近的性質（一致性，漸近分布，漸近的有効性）について検討する。そのために，(2.8) 式を次のように書き改める。すなわち，誘導型 (2.3) より

$$F(\Pi,\ S_T)=\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-\Pi'x(t)\}'S_T\{y(t)-\Pi'x(t)\} \tag{2.15}$$

を得る。さらに構造係数ベクトルα，βを一括して，ベクトルθに置きかえることにする。そこで，本節でも正規化則を $\beta_M=1$ とする。このため自由に決定される係数の個数は $K+M-1$ である。したがって，新しい係数ベクトルθ の要素は

$$\theta_i=\alpha_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K)$$
$$\theta_{K+j}=\beta_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$
$$\theta_{K+M}=1$$

となる。明らかに，ベクトルθの次数は $L(=K+M-1)$ である。この結果，誘導係数行列Πの第i，j要素をπ_{ij}とすると

$$\pi_{ij}=\theta_i\theta_{K+j} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$
$$\pi_{iM}=\theta_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K)$$

と表わされる。そこで，上記の $F(\Pi,\ S_T)$ を最小にする θ を $\hat{\theta}(S_T)$ とすると，本節の問題はこの MD 推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ の漸近的性質について，検討することである。その際，われわれの基本モデルにおける π_{ij} は上記のごとく，θ_i，θ_{K+j} から構成されるが，以下の展開では，より一般的な場合

$$\pi_{ij}=\pi_{ij}(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\cdots,\ \theta_L) \tag{2.16}$$

あるいは

$$\Pi=\Pi(\theta)$$

を想定することにする。

ところで，前述のように，$S_T=I$（単位行列，$M\times M$）とした推定量 $\hat{\theta}(I)$ は Brown [2] の連立最小二乗（simultaneous L S）推定量に相当する。この推定量の一致性に関する証明は，すでに Nakamura [37] において行なわれている。また，$S_T=V^{-1}$（誘導型における残差の分散共分散行列（2.9）の逆数）とし，さらに $\pi_{ij}=\theta_i$ (7) と線型化したモデルの推定量は，Zellner [49] の two stage generalized least square 推定量に一致する。この推定量の漸近的性質は，$S_T=\Omega^{-1}$（誘導型における確率項の分散共分散行列（2.4′）の逆数）とした推定量に一致し，BAN 推定量となる。(8) 他方，Malinvaud [35]（chap. 9）および同 [36]（968）は，行列 S_T の収束性と係数に関して（2.16）式を想定したより一般的な場合について，MD 推定量の漸近的性質を分析している。本節も，この Malinvaud の方法に従って，われわれの基本モデルの漸近的性質について検討する。

2.4.1　MD 推定量の一致性

KM 次限の Π の空間において，定理 2.1 の制約 rank $(\Pi)=1$ を満足する部分集合を Π_φ とする。また，Π の推定量 $\hat{\Pi}(S_T)$ を

$$\operatorname*{Min}_{\Pi\in\Pi_\varphi} F(\Pi,\ S_T)=F(\hat{\Pi}(S_T),\ S_T) \tag{2.17}$$

（7）ただし，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K_j$ とする。K_j は第 j 方程式に含まれる独立変数の個数とする。

（8）Zellner [49]（351, 353）より，いわゆる best asymptotic normal (BAN) 推定量となる。

と定義し，これに対応する θ の推定量を $\hat{\theta}(\hat{\Pi}(S_T))$ とし，以下 $\hat{\theta}(S_T)$ と略記する。また，真の Π および θ をそれぞれ Π°，θ° とし，$\Pi^\circ=f(\theta^\circ)$ および $\Pi^\circ\in\Pi_\varphi$ を満たすものとする。そこで，以下の一致性の証明の手順は，まず，T を無限大にしたとき，$\hat{\Pi}(S_T)$ が Π° に確率収束し，しかるのち，$\hat{\theta}(S_T)$ が θ° に確率収束することを示す。そのために，次の諸仮定を設定する。

仮定 3. (1) 独立変数 $x(t)$ の系列（$t=1, 2, \cdots\cdots$）は有界である。

(2) 独立変数 $x(t)$ から構成される積率行列 M_{xx} は，正値定符号行列 $\bar{M}$ に確率収束する。すなわち

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} M_{xx}=\bar{M}$$

とする。ただし，M_{xx} は次の通りである。

$$M_{xx}=(1/T)\sum_{t=1}^{T}x(t)x'(t)=(1/T)X'X$$

仮定 4. 行列 S_T は正値定符号行列 S に確率収束する。すなわち

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} S_T=S$$

とする。

仮定 5. 関数 $\Pi(\theta)$ の逆関数 Π^{-1} は真の値 Π° の近傍 $U(\Pi^\circ)$ において一対一に対応し，かつ連続とする。ただし $U(\Pi^\circ)\subset\Pi_\varphi$ である。

この仮定5は，係数 θ が Π° の近傍で，適度識別であることを要求する。ところで，前述の定理2.1より，一つの正規化則のもとで，制約 $\mathrm{rank}(\Pi)=1$ が成立すれば，われわれの基本モデルの θ は Π_φ の全域にわたって Π と一対一に対応している。したがって，この仮定5はわれわれの基本モデルにおいて常に成立する。以上の諸仮定のもとで，次の定理が成立する。

定理 2.2（一致性）

「仮定1，2，3，4が成立するとき，(2.17)式を満足する $\hat{\Pi}(S_T)$ は Π° の一致推定量である。さらに，これらの仮定に加えて仮定5が成立すれば，MD 推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ は θ° の一致推定量である。」

証明。まず，定理の前段の $\hat{\Pi}(S_T)$ の一致性について証明する。[9] (2.3) および

(2.15) の両式より次の不等式を導くことができる。

$$F(\Pi^\circ,\ S_T)=\sum_t \{y(t)-\Pi^\circ x(t)\}'S_T\{y(t)-\Pi^{\circ\prime}x(t)\}$$
$$\geqq F(\Pi^\circ,\ S_T)+Q_T(\hat{\Pi})-2\sum_t\{(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)'x(t)\}'S_T v(t)$$
$$\geqq F(\Pi^\circ,\ S_T)+Q_T(\hat{\Pi})(1-2U_T(\hat{\Pi}))$$

ただし

$$Q_T(\hat{\Pi})=\sum_t\{(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)'x(t)\}'S_T\{(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)'x(t)\}$$
$$=T\,tr[M_{xx}(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)S_T(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)']$$
$$U_T(\hat{\Pi})=\sum_t\{1/Q_T(\hat{\Pi})\}\{(\hat{\Pi}-\Pi^\circ)'x(t)\}'S_T v(t)$$

とする。ただし，$Q_T(\hat{\Pi})=0$ のときは $U_T(\hat{\Pi})=0$ と定義しておく。上記の不等式の両辺を比較することによって，最後の不等式の右辺第二項は

$$Q_T(\hat{\Pi})(2U_T(\hat{\Pi})-1)\geqq 0$$

でなければならない。すなわち

$$Q_T(\hat{\Pi})=0 \text{ かまたは } U_T(\hat{\Pi})\geqq 1/2$$

が成立する必要がある。いま，Π° を含まない任意の閉集合を ω とする（ただし $\omega\subset\Pi_\varphi$ である）。このとき，$\hat{\Pi}\in\omega$ であるということは，

$$\inf_{\Pi\in\omega} Q_T(\Pi)=0 \text{ かまたは } \sup_{\Pi\in\omega} U_T(\Pi)\geqq 1/2$$

を意味している。したがって，次の不等式が成立する。(10)

$$\mathrm{prob}\{\hat{\Pi}\in\omega\}\leqq\mathrm{prob}\{\inf_{\Pi\in\omega}\ Q_T(\Pi)=0\}+\mathrm{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega}U_T(\Pi)\geqq 1/2\} \tag{2.18}$$

上式の右辺第1，2項については，本章の補節における補助定理Aの命題より

（9） 以下の証明は，Malinvaud [35] (350～52) を参考にしている。

(10) 確率に関する周知の命題を用いる。事象 X, Y の和集合 (union) を Z, その共通集合 (intersection) を W とし，それぞれの確率を prob$\{X\}$, prob$\{Y\}$, prob$\{Z\}$, prob$\{W\}$ とするとき，次式が成立する。

$$\mathrm{prob}\{Z\}=\mathrm{prob}\{X\}+\mathrm{prob}\{Y\}-\mathrm{prob}\{W\}$$
$$\leqq\mathrm{prob}\{X\}+\mathrm{prob}\{Y\}$$

(1) $\lim_{T\to\infty} \text{prob}\{\inf_{\Pi\in\omega} Q_T(\Pi)=0\}=0$

(2) $\lim_{T\to\infty} \text{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega} U_T(\Pi)\geqq 1/2\}=0$

を得る。これを適用すると，(2.18) 式の左辺は

$$\lim_{T\to\infty} \text{prob}\{\hat{\Pi}\in\omega\}=0$$

となる。これは $\hat{\Pi}(S_T)$ が Π° に確率収束することを意味する。ゆえに，$\hat{\Pi}(S_T)$ は一致推定量である。

次に，定理 2.2 の後段にあたる推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ の一致性は，上述の $\hat{\Pi}(S_T)$ の一致性より容易に決定する。実際，われわれの基本モデルにおいては，前述のように，仮定 5 は満たされている。ゆえに，確率収束に関する命題[11]を適用することによって，MD 推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ は一致推定量である（証明終）。

2.4.2 MD 推定量の漸近分布

本節では，MD 推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ の漸近分布について検討する。前節と同じように，KM 次限空間において制約 rank$(\Pi)=1$ を満足する Π の部分集合を，Π_φ とする。そこで，あらたに次の仮定を設定する。

仮定 6. 真の値 θ° の近傍において

(1) $\Pi_{ij}(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\cdots,\ \theta_L)$ の三階までの導関数は有界である。

(2) 真の値 $\theta^\circ=(\theta_1{}^\circ,\ \theta_2{}^\circ,\ \cdots\cdots,\ \theta^\circ{}_L)$ は $\Pi(\theta)$ の特異点ではない。すなわち関数行列 $\left[\dfrac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}$ の階数は L である。ただし π はその要素が π_{ij} からなる $K\times M$ 次ベクトルとする（後の脚注13参照）。

ところで，われわれの基本モデルにおいては，$\pi_{ij}=\theta_i\theta_{K+j}$ であるから

$$\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial\theta_k}=\delta_{ki}\theta_h+\delta_{kh}\theta_i \qquad (h=K+j)$$

$$\frac{\partial^2\pi_{ij}}{\partial\theta_k\partial\theta_l}=\delta_{ki}\delta_{lh}+\delta_{kh}\delta_{li} \qquad (h=K+j)$$

$$\frac{\partial^3\pi_{ij}}{\partial\theta_k\partial\theta_l\partial\theta_m}=0$$

---

(11) 本章の補節における脚注(25)を参照。

ただし，上式の δ_{ij} は $\delta_{ij}=1$ $(i=j)$，$=0$ $(i\neq j)$ とする。したがって，基本モデルにおいて仮定6の(1)は成立する。さらに，定理2.1より，一つの正規化則のもとで，集合 Π_φ において θ は Π より一意に決定する。このことは $\left[\dfrac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}$ の階数が L であることを意味している。したがって，仮定6の(2)も成立する。以上より，われわれの基本モデルにおいては，上記の仮定6が満たされている。そこで次の定理が成立する。

定理2.3（漸近的正規性）

「仮定1，2，3，4，5および6が成立するとき，$\sqrt{T}\ (\hat{\theta}(S_T)-\theta^\circ)$ はTが無限大のとき，正規分布に従って分布する。」

証明[12]。まず次の記号を定義しておく。

$$D(i)_\theta=\left[\frac{\partial\Pi'}{\partial\theta_i}\right]_\theta,\quad D(i,\ j)_\theta=\left[\frac{\partial^2\Pi'}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]_\theta$$

$$D(i,\ j,\ k)_\theta=\left[\frac{\partial^3\Pi'}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right]_\theta\qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

ところで，ここでのMD推定法は（2.15）式で示される $F(\Pi,\ S_T)$ を最小にする構造係数 θ を求めることである。ゆえに，その必要条件は次式によって示される。

$$\begin{aligned}H_k(\theta)&=\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\theta}F(\Pi,\ S_T)=0\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v'(t)S_T[D(k)_\theta x(t)]=0\end{aligned}\tag{2.19}$$

ここで，真の値 θ° の近傍において上の $H_k(\theta)$ を展開すると

$$\begin{aligned}H_k(\theta)&=H_k(\theta^\circ)+H_k^1(\theta^\circ)(\theta-\theta^\circ)\\&\quad+\frac{1}{2}(\theta-\theta^\circ)'H_k^2(\theta^*)(\theta-\theta^\circ)\end{aligned}\tag{2.20}$$

を得る。ただし，$\theta^\circ<\theta^*<\theta$ とする。ここで，上式の $H_k^1(\theta^\circ)$ はその j 番目の要素が，次の $H_{kj}^1(\theta^\circ)$ によって示されるベクトルである。

（12） 本節の証明は，Malinvaud [35]（333～35）を参照している。

$$H_{kj}^1(\theta^\circ)=\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}H_k(\theta)\right]_{\theta^\circ}$$
$$=\frac{1}{T}\sum_t\{-[D(j)_{\theta^\circ}x(t)]'S_T[D)k]_{\theta^\circ}x(t)]$$
$$+v'(t)S_T[D(k,\ j)_{\theta^\circ}x(t)]\} \tag{2.21}$$

また，$H_k^2(\theta^*)$ はその $(j,\ p)$ 要素が次の $H_{kjp}^2(\theta^*)$ によって表わされる行列である。

$$H_{kjp}^2(\theta^*)=\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_j\partial\theta_p}H_k(\theta)\right]_{\theta*}$$
$$=\frac{1}{T}\sum_t\{-[D(j,\ p)_{\theta*}x(t)]'S_T[D(k)_{\theta*}x(t)]$$
$$-[D(j)_{\theta*}x(t)]'S_T[D(k,\ p)_{\theta*}x(t)]$$
$$-[D(p)_{\theta*}x(t)]'S_T[D(k,\ j)_{\theta*}x(t)]$$
$$+v'(t)S_T[D(k,\ j,\ p)_{\theta*}x(t)]\} \tag{2.22}$$

前述のように，われわれの基本モデルにおいては，三階の導関数はすべて0である。したがって，上式の右辺の最後の項は0となる。そこで，展開式(2.20)の右辺の各項の係数に関して，補節の補助定理Bの命題より次の結果を得る。つまり，T が無限大のとき，

(a) $\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)$ の漸近分布は $N(0,\ M(S\Omega S)_{kk})$ である。ただし $M(S\Omega S)_{kk}$ は，以下に述べる行列 $M(S\Omega S)$ の第 k, k 要素とする。

(b) $H_{kj}^1(\theta^\circ)$ は $[-M(S)]_{kj}$ に確率収束する。

(c) $H_{kjp}^2(\theta^*)$ は有限値 $\bar{K}_{kjp}$ に確率収束する。

ただし，上記における行列 $M(\cdot)$ は次のごとく定義される。すなわち，いま任意の $M\times M$ 行列を P とすると

$$M(P)=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}'[P\otimes\bar{M}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ} \tag{2.23}$$

となる。ただし

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta}=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_1},\ \frac{\partial\pi}{\partial\theta_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial\pi}{\partial\theta_L}\right] \qquad (KM\times L)$$

と定義しておく。(13)

ここで，行列 $M(\cdot)$ に関する二，三の注意を加える。

(1) 行列 $M_T(S_T)$ の第 k, l 要素を $(1/T)\sum_{t=1}^{T}[D(k)_{\theta^\circ}x(t)]'S_T[D(l)_{\theta^\circ}x(t)]$ とすると，

$$M_T(S_T)=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]'_{\theta^\circ}[M_{xx}\otimes S_T]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}$$

となる。ところで，仮定3，仮定4より上式の M_{xx}, S_T はそれぞれ $\bar{M}$, S に確率収束する。さらに，仮定6の(1)より $(\partial\pi/\partial\theta)_{\theta^\circ}$ は有界である。したがって

$$\begin{aligned}\operatorname*{plim}_{T\to\infty} M_T(S_T)&=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]'_{\theta^\circ}[S\otimes\bar{M}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}\\&=M(S)\end{aligned}$$

が成立する。

(2) 行列 $M_T(S_T\Omega S_T)$ に関しても，上と同じように次式が成立する。

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} M_T(S_T\Omega S_T)=M(S\Omega S)$$

(3) 行列 $M_T(S_T)$, $M(S)$, $M_T(S_T\Omega S_T)$ および $M(S\Omega S)$ は共に正値定符号行列である。(14)

---

(13) $\dfrac{\partial\pi}{\partial\theta_k}=\left[\dfrac{\partial\pi_{11}}{\partial\theta_k},\ \dfrac{\partial\pi_{21}}{\partial\theta_k},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{\partial\pi_{KM}}{\partial\theta_k}\right]'$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$ である。したがって，$\dfrac{\partial\pi}{\partial\theta}$ は基本モデルにおいて次のようになる。なお，$K=3$, $M=2$, $L=4$ とする。

$$\frac{\partial\pi}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}\theta_4 & 0 & 0 & \theta_1\\ 0 & \theta_4 & 0 & \theta_2\\ 0 & 0 & \theta_4 & \theta_3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(14) 行列 $M(S)$ が正値定符号であることを示す。他の行列もこれと同じである。

$$M(S)=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]'_{\theta^\circ}[S\otimes\bar{M}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}\qquad (L\times L)$$

上式における $[\partial\pi/\partial\theta]_{\theta^\circ}$ は仮定6の(2)より階数 L である。また仮定3および4より行列 $\bar{M}$, S は共に正値定符号行列であるから，$M\otimes S=C'C$ となる非特異行列 C が

以上の準備のもとで，定理2.3の証明を続ける。まず，(2.19) 式を満足する θ を $\hat{\theta}$ とすれば，(2.20) 式より

$$H_k(\theta^\circ)+H_k^1(\theta^\circ)(\hat{\theta}-\theta^\circ)+\frac{1}{2}(\hat{\theta}-\theta^\circ)'H_k^2(\theta^*)(\hat{\theta}-\theta^\circ)=0$$

が成立する。これを

$$H_k(\theta^\circ)+W_{kT}(\hat{\theta}-\theta^\circ)=0$$

と表わす。ただし

$$W_{kT}=H_k^1(\theta^\circ)+\frac{1}{2}(\hat{\theta}-\theta^\circ)'H_k^2(\theta^*)$$

である。ところで，T が無限大のとき，前述の命題(b)より $H_k^1(\theta^\circ)$ は行列 $-M(S)$ の第 k 行に，また $H_k^2(\theta^*)$ は有限値 $\bar{K}_{kjp}$ を第 j, p 要素とする行列にそれぞれ確率収束する。また前定理2.2より推定量 $\hat{\theta}$ は一致推定量であるから，θ° に確率収束する。したがって，上の W_{kT} は，T が無限大のとき，行列 $-M(S)$ の第 k 行に確率収束する。

そこで，以上の結果を $\theta_k(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$ のすべてについて実行すると次式を得る。

$$H(\theta^\circ)+W_T(\hat{\theta}-\theta^\circ)=0$$

ただし，$H(\theta^\circ)$ はその第 k 要素を $H_k(\theta^\circ)$ とするベクトル，また W_T はその第 k 行を W_{kT} とする行列である。したがって，T が無限大のとき，W_T は $-M(S)$ に確率収束する。いま上式の両辺に $\sqrt{T}$ を乗じて

$$-W_T\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta^\circ)=\sqrt{T}H(\theta^\circ)$$

を得る。この結果，左辺 $-W_T\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta^\circ)$ の漸近分布は右辺 $\sqrt{T}H(\theta^\circ)$ のそれに等しい。ところで，T が無限大のとき，前述の命題(a)より $\sqrt{T}H(\theta^\circ)$ は $N(0,\ M(S\Omega S))$ に従って分布する。ゆえに，上の(3)より $M(S)$ が正値定符

存在して，上式は

$$M(S)=\left[C\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]'_{\theta^\circ}\left[C\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]_{\theta^\circ}$$

と変形される。つまり，$M(S)$ は階数 L の同一行列の積であるため，明らかに正値定符号行列である。

号行列であることを考慮して，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta^{\circ})$ の漸近分布は

$$N(\mathbf{0},\ M(S)^{-1}M(S\Omega S)M(S)^{-1}) \tag{2.24}$$

である。 (証明終)

2.4.3 MD推定量の漸近的有効性

本節では，(2.15) 式を最小にするMD推定量のなかで，漸近的有効な (asymptotic efficient) 推定量について説明する。ここで，漸近的に有効であるとは $\sqrt{T}(\hat{\theta}(S_T)-\theta^{\circ})$ の極限分布のなかで，その分散共分散行列が最小であることを指す[(15)]。そこで次の定理が成立する。

定理2.4 (漸近的有効性)

「仮定1，2，3，4，5および6のもとで，行列 S_T が Ω^{-1} に確率収束するMD推定量 $\hat{\theta}(S_T)$ は，そのMD推定量のクラスのなかで，漸近的に有効な推定量である。その漸近的分散共分散行列は $[M(\Omega^{-1})]^{-1}$ である。」

証明。ところで，MD推定量の漸近分布の分散共分散行列を $\bar{V}$ とすると，(2.24) 式より

$$\bar{V}(S)=M(S)^{-1}M(S\Omega S)M(S)^{-1} \tag{2.25}$$

となる。他方，正規分布をその極限分布とする一致推定量の漸近的分散共分散行列の下限は，いわゆる Cramér-Rao の不等式の下限に対応している[(16)]。ところで前述の定理2.2および同2.3より，ここでのMD推定量は一致推定量であり，さらにその極限分布は正規分布である。ゆえに，証明としては，上の (2.25) 式において $S=\Omega^{-1}$ とした

$$V(\Omega^{-1})=[M(\Omega^{-1})]^{-1} \tag{2.26}$$

が Cramér-Rao の不等式の下限に対応することを示せばよい。

---

(15) ここで最小というのは，その分散共分散行列と他の分散共分散行列との差が非負値で，したがってその分散共分散行列から作られる一般化分散(generalized variance)が最小であることをいう (Dhrymes [5] 126～28)。

(16) ただし，Dhrymes [5] (128–29) にしたがって，正規分布への収束が一様であるような，コンパクトなパラメーター空間のみに限定しておく。

そこで，モデルの尤度関数を導出する。まず最初の仮定にかえって，確率項 $u(t)(t=1, 2, \cdots\cdots, T)$ が互いに独立に正規分布 $N(0, \Sigma)$ に従って分布するものとする。このとき，誘導型 (2.3) の $v(t)(t=1, 2, \cdots\cdots, T)$ は互いに独立に正規分布 $N(0, \Omega)$ に従って分布する。この結果，T 個の標本についての尤度関数は

$$L=(2\pi)^{-\frac{MT}{2}}|\Omega|^{-\frac{T}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}v'(t)\Omega^{-1}v(t)\right\} \tag{2.27}$$

となる。この両辺の対数をとり，(2.3) 式を代入して

$$\begin{aligned}\log L&=-\frac{MT}{2}\log 2\pi-\frac{T}{2}\log|\Omega|-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\{[y(t)-\Pi'x(t)]'\Omega^{-1}\\&\qquad\times[y(t)-\Pi'x(t)]\}\\&=C-\frac{T}{2}L^*\end{aligned}$$

を得る。ただし

$$C=-\frac{MT}{2}\log 2\pi$$

$$L^*=\log|\Omega|+tr(\Omega^{-1}W)$$

$$W=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{[y(t)-\Pi'x(t)][y(t)-\Pi'x(t)]'\}$$

とする。ゆえに，尤度関数 L を θ, Ω に関して最大にすることは，上式の L^* をそれらに関して最小にすることにほかならない。ところで，この L^* の全微分を dL^* とすると[17]

$$dL^*=tr[\Omega^{-1}d\Omega(I-\Omega^{-1}W)]+tr(\Omega^{-1}dW) \tag{2.28}$$

を得る。これを再度微分して，

$$\begin{aligned}d^2L^*&=tr[(\Omega^{-1}d\Omega)^2(2\Omega^{-1}W-I)]+tr[(\Omega^{-1}d^2\Omega)(I-\Omega^{-1}W)]\\&\quad-2tr(\Omega^{-1}d\Omega\Omega^{-1}dW)+tr(\Omega^{-1}d^2W)\end{aligned}$$

となる。上式における W, dW, d^2W はそれぞれ次のごとく表わされる。

$$W=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v(t)v'(t)$$

(17) 以下の方法は Malinvaud [35] (340～41) にもとづいている。

$$dW=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{v(t)dv'(t)+dv(t)v'(t)\}$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{L}\{v(t)[D(k)_{\theta}x(t)]'+[D(k)_{\theta}x(t)]v'(t)\}d\theta_k$$
$$d^2W=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{2dv(t)dv'(t)+v(t)d^2v'(t)+d^2v(t)v'(t)\}$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j,k=1}^{L}\{2[D(j)_{\theta}x(t)][D(k)_{\theta}x(t)]'+v(t)[D(j,k)_{\theta}x(t)]'$$
$$+[D(j,k)_{\theta}x(t)]v'(t)\}d\theta_j d\theta_k$$

ところで，前述の仮定1，2より，W，dW，d^2W の期待値はそれぞれ

$$E(W)=\Omega$$
$$E(dW)=\mathbf{0}$$
$$E(d^2W)=\frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j,k=1}^{L}\{[D(j)_{\theta}x(t)][D(k)_{\theta}x(t)]'d\theta_j d\theta_k$$

となる。この結果 $E(d^2L^*)$ は

$$E(d^2L^*)=tr(\Omega^{-1}d\Omega)^2+tr[\Omega^{-1}E(d^2W)]$$
$$=tr(\Omega^{-1}d\Omega)^2+2d\theta' M_{xx}(\Omega^{-1})d\theta$$

となる。ここで $E(d^2\log L)=-\frac{T}{2}E(d^2L^*)$ を利用して，

$$E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]=-TM_T(\Omega^{-1})_{ij}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

を得る。(18) ところで，Cramér-Rao の不等式の下限 の う ち，θ に関する部分を $R(\theta)$ とすると，その $R(\theta)^{-1}$ は

$$R(\theta)^{-1}=-E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta\partial\theta'}\right]$$

と定義されるから，結局その下限の T 倍は

$$TR(\theta)=[M_T(\Omega^{-1})]^{-1}$$

(18) 他の要素については次の通をである。

$$E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\omega_{kl}}\right]=\mathbf{0}\quad (L\times M^2),\qquad E\left[\frac{\partial^2\log L}{\partial\omega_{kl}\partial\omega_{mn}}\right]=-\frac{T}{2}[\Omega^{-1}]_{lm}[\Omega^{-1}]_{nk}\quad (M^2\times M^2)$$

となる。他方，$S=\Omega^{-1}$ としたMD推定量の極限分布の分散（2.26）式はTを無限大にしたときの上式右辺に等しい。ゆえに，行列 S_T が Ω^{-1} に確率収束する（すなわち $S=\Omega^{-1}$ となる）MD推定量は，漸近的有効推定量である。

（証明終）

以下，定理2.4にかかげる漸近的有効推定量の二，三の例をあげることにする。

(1) $S_T=I$ とした推定量 $\tilde{\theta}(I)$ は，定理2.2より一致推定量である。そこで，この推定量を用いて分散共分散行列 Ω の推定量 $\tilde{M}_{vv}$ を求めることができる。

$$\tilde{M}_{vv}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-\tilde{\Pi}'x(t)\}\{y(t)-\tilde{\Pi}'x(t)\}' \tag{2.29}$$

ただし，$\tilde{\Pi}=\Pi(\tilde{\theta})$ とする。上式の $\tilde{M}_{vv}$ が，T を無限大にしたときに，Ω に確率収束することは，次式から容易に確かめることができる。すなわち

$$\tilde{M}_{vv}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v(t)v'(t)+W_T(\Pi^\circ-\tilde{\Pi})$$

ただし

$$W_T=\frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}v(t)x'(t)+\frac{1}{T}(\Pi^\circ-\tilde{\Pi})M_{xx}$$

とする。ここで T が無限大になるとき，上式 W_T の第一項は中心極限定理より[(19)] $\mathbf{0}(M\times M)$ に確率収束する。同第二項については，M_{xx} が仮定3より $\bar{M}$ にまた一致推定量 $\Pi(\tilde{\theta})$ が Π° にそれぞれ確率収束することより，結局 $\mathbf{0}$ に確率収束することになる。他方，$\tilde{M}_{vv}$ の第一項 $(1/T)\sum_{t=1}^{T}v(t)v'(t)$ は Ω に確率収束することより，全体として，T が無限大のとき，$\tilde{M}_{vv}$ は Ω に収束することになる。以上より $S_T=\tilde{M}_{vv}^{-1}$ として，あらたなMD推定量 $\tilde{\theta}(\tilde{M}_{vv}^{-1})$ を求めると，これは定理2.4より，漸近的有効推定量である。

(2) 行列 S_T に残差の分散共分散行列（2.9）式

$$V=\frac{1}{T}(Y-XP)'(Y-XP)$$

（19） 脚注(26)参照。

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-P'x(t)\}\{y(t)-P'x(t)\}'$$

の逆数を用いることができる（つまり $S_T=V^{-1}$）。ところで，最小二乗推定量 P は仮定1，2より Π° に確率収束し，また上述と同じ論法で，V は Ω に確率収束する。以上より，$S_T=V^{-1}$ としたMD推定量 $\hat{\theta}(V^{-1})$ も定理2.4より，漸近的有効推定量である。この推定量は Zellner [51]，Goldberger [13] におけるGLS推定量にほかならない。

(3) 以上の(1)，(2)のいずれの推定量に関しても，その反復推定法が可能である。例えば，(1)において求められた $\tilde{\theta}(\tilde{M}_{vv}^{-1})$ を利用して，再び Ω の推定量 $\tilde{M}_{vv}^{(2)}$ を求め，この逆数をあらたに行列 S_T としてMD推定量 $\theta^{(3)}=\theta\{(\tilde{M}_{vv}^{(2)})^{-1}\}$ を求めることができる。つまり第 s 番目の反復は

$$\tilde{\theta}^{(s)}=\tilde{\theta}(S_T^{(s-1)}) \tag{2.30}$$

$$\tilde{M}_{vv}^{(s)}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-\Pi'(\tilde{\theta}^{(s)})x(t)\}\{y(t)-\Pi'(\tilde{\theta}^{(s)})x(t)\}'$$

$$S_T^{(s)}=[\tilde{M}_{vv}^{(s)}]^{-1}(S_T^{(0)}=I) \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \tag{2.30$'$}$$

となる。

以上の三方法のほかにも，T が無限大のとき，行列 S_T が分散共分散行列 Ω^{-1} に収束するMD推定量は，すべて漸近的有効推定量である。

最後に，$M=2$，$K=2$，$L=M+K-1=3$ とした基本モデルをとりあげ，そのMD推定量の漸近的分散共分散行列（2.26）式を例示しておく。この場合の基本モデルは次のごとく表わされる。

$$y_1(t)=\beta_1x^*(t)+u_1(t)$$

$$y_2(t)=\beta_2x^*(t)+u_2(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

$$x^*(t)=\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)$$

簡単化のため，上式における確率項 u_1，u_2 は無相関（$\sigma_{12}=\sigma_{21}=0$）とする。次に，モデルの誘導型における各パラメーターは

$$\Omega=\begin{bmatrix}\omega_{11} & 0\\ 0 & \omega_{22}\end{bmatrix} \qquad \Pi=\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2\\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2\end{bmatrix}$$

となる。いま，正規化則として，$\beta_2=1$ をとると次式を得る。

$$\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right]=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \alpha_1\\ 0 & \beta_1 & \alpha_2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

また，

$$[\Omega^{-1}\otimes\bar{M}]=\begin{bmatrix}\omega^{11}\bar{M} & 0\\ 0 & \omega^{22}\bar{M}\end{bmatrix}\qquad(4\times4)$$

となる。ただし，上式における ω^{ij} は逆行列 Ω^{-1} の第 i，j 要素とする。以上より，求める分散行列 (2.26) は，(2.23) 式を考慮して次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{V}(\Omega^{-1})&=[\bar{M}(\Omega^{-1})]^{-1}\\&=\left[\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)'[\Omega^{-1}\times\bar{M}]\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)\right]^{-1}\\&=\begin{bmatrix}f(\omega)m_{11} & f(\omega)m_{12} & \xi_1\beta_1\omega^{11}\\ f(\omega)m_{21} & f(\omega)m_{22} & \xi_2\beta_1\omega^{11}\\ \xi_1\beta_1\omega^{11} & \xi_2\beta_1\omega^{11} & \xi_3\omega^{11}\end{bmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

ただし，上式の m_{ii} は行列 $\bar{M}$ の第 i，j 要素で $m_{ij}=m_{ji}$ である。また，

$$f(\omega)=\beta_1^2\omega^{11}+\omega^{22}$$

$$\xi_1=\alpha_1m_{11}+\alpha_2m_{12}$$

$$\xi_2=\alpha_1m_{12}+\alpha_2m_{22}$$

$$\xi_3=\alpha_1^2m_{11}+2\alpha_1\alpha_2m_{12}+\alpha_2^2m_{22}$$

である。いま $V(\Omega^{-1})$ の第 i，j 要素を V_{ij} と表わすと，次の結果が得られる。

$$V_{11}=\frac{1}{\Delta}\omega^{11}(f(\omega)m_{22}\xi_3-\omega^{11}\xi_2^2\beta_1^2)$$

$$V_{22}=\frac{1}{\Delta}\omega^{11}(f(\omega)m_{11}\xi_3-\omega^{11}\xi_1^2\beta_1^2)$$

$$V_{33}=\frac{1}{\Delta}f^2(\omega)(m_{11}m_{22}-m_{12}^2)$$

$$V_{12}=-\frac{1}{\Delta}\omega^{11}(f(\omega)\xi_3 m_{21}-\omega^{11}\xi_1\xi_2\beta_1^2)$$

$$V_{13}=\frac{1}{\Delta}f(\omega)\omega^{11}(\xi_2 m_{12}-\xi_1 m_{22})\beta_1$$

$$V_{23}=-\frac{1}{\Delta}f(\omega)\omega^{11}(\xi_2 m_{11}-\xi_1 m_{12})\beta_1$$

ただし，上式における Δ は

$$\Delta=f^2(\omega)\omega^{11}(m_{11}m_{22}-m_{12}^2)\xi_3+f(\omega)\omega^{11}\omega^{11}(2\xi_1\xi_2 m_{12}-\xi_1^2 m_{22}-\xi_2^2 m_{11})\beta_1^2$$

である。なお，上の V_{11}，V_{22}，V_{33} はそれぞれ $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_1-\alpha_1)$，$\sqrt{T}(\hat{\alpha}_2-\alpha_2)$，$\sqrt{T}(\hat{\beta}_1-\beta_1)$ の漸近的分散にあたる。ただし，$\hat{\alpha}_1$，$\hat{\alpha}_2$，$\hat{\beta}_1$ はそれぞれ MD 推定量とする。

2.5 基本モデルの最尤推定

本節においては，基本モデルのパラメーターの最尤推定量（ML 推定量）について検討し，MD 推定量との比較を行なう。しかし前述のごとく，そのウエート行列 S_T を (2.9) 式の V の逆数（$S_T=V^{-1}$）で置きかえたMD 推定量が ML 推定量に等しくなることは，すでに Goldberger [13]，Robinson [40] において指摘されている。そこで，ここでは一般の MD 推定量と ML 推定量との関係を検討する。

まず，前節と同じように，確率項 $v(t)(t=1, 2, \cdots\cdots, T)$ が正規分布 $N(\mathbf{0}, \Omega)$ に従って独立に分布するものとする。このとき T 個の標本に関する尤度関数は

$$L=(2\pi)^{\frac{MT}{2}}|\Omega|^{-\frac{T}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}v'(t)\Omega^{-1}v(t)\right\} \qquad (2.27)$$

となる。前回と同じように，パラメーター θ，Ω に関して上式を最大にすることは，結局

$$L^*=\log|\Omega|+tr(\Omega^{-1}W) \qquad (2.31)$$

を最小にすることにほかならない。そこで，両推定量の比較を次の二つの場合に分けて検討する。

(1) 分散共分散行列 Ω が既知の場合。上の L^* を θ に関して最小にすることは，結局 $tr(\Omega^{-1})$ を最小にすることである。したがって，θの ML 推定量は

$$\frac{\partial L^*}{\partial \theta_i}=tr\left(\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial \theta_i}\right)=0 \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots,\ L)$$

を満足する。ところで，最小にすべき $tr(\Omega^{-1}W)$ は (2.8′) 式において $S_T=\Omega^{-1}$ とした $(1/T)F(\Omega^{-1})$ に一致する。したがって，分散共分散行列 Ω が既知であれば，ML 推定量は MD 推定量の一つとなる。

(2) Ω が未知の場合。ここでは (2.31) 式を Ω および θ の両パラメーターに関して最小にする。まず

$$\frac{\partial L^*}{\partial \delta_i}=tr\left[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}\frac{\partial \Omega}{\partial \delta_i}\right]+tr\left[\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial \delta_i}\right] \tag{2.32}$$

を得る。ただし上式における δ_i は Ω, θ の一つの要素とする。これより，(2.31) 式の L を最小にする Ω, θ は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L^*}{\partial \Omega}=\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}=0\\&\frac{\partial L^*}{\partial \theta_i}=tr\left(\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial \theta_i}\right)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)\end{aligned} \tag{2.33}$$

の両式を満足しなければならない。この第一式より $\Omega=W$ を得る。他方，第二式は，Ω^{-1} を所与とすれば，上述の(1)の場合に等しい。しかし，ここでの Ω は θ と互いに相互的関係 (reciprocity) にある。すなわち (2.33) を満たすその解を Ω^*, θ^* とすると

$$\begin{aligned}\Omega^*&=W(\theta^*)\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-\Pi'(\theta^*)x(t)\}\{y(t)-\Pi'(\theta^*)x(t)\}'\\\theta^*&=\theta[(\Omega^*)^{-1}]\end{aligned}$$

という関係が存在する。その解法の一つは反復法 (iterative procedures) である。しかし，得られる解は前節の反復法による MD 推定量の解と同一であることがわかる。事実，適当な初期値より出発して，第 s 反復過程における Ω および θ の推定量をそれぞれ $\tilde{M}_{vv}^{(s)}$ および $\tilde{\theta}^{(s)}$ とすれば，(2.30)，(2.30′) 式

にもとづく静止解が，それぞれ Ω および θ の最尤推定量である。[20] なお，第 s 反復過程における $\tilde{\theta}^{(s)}$ すなわち $\tilde{\alpha}^{(s)}$ および $\tilde{\beta}^{(s)}$ の計算は $S=[\tilde{M}_{vv}^{(s-1)}]^{-1}$ とした (2.13) 式あるいわ (2.14) 式を適用することができる。したがって，(2.13) 式を用いた場合の第 s 反復過程の完全な体系は次の通りである。

$$\tilde{\alpha}^{(s)}=(\tilde{\lambda}^{(s)})^{-1}P[\tilde{M}_{vv}^{(s-1)}]^{-1}\tilde{\beta}^{(s)}$$

$$(\tilde{A}^{(s-1)}-\tilde{\lambda}^{(s)}I)\tilde{\beta}^{(s)}=0,\quad (\tilde{A}^{(s-1)}=Q[\tilde{M}_{vv}^{(s-1)}]^{-1})$$

$$\tilde{\lambda}^{(s)}=(\tilde{\beta}^{(s)})'[M_{vv}^{(s-1)}]^{-1}(\tilde{\beta}^{(s)})$$

$$\Pi^{(s)}=\tilde{\alpha}^{(s)}(\tilde{\beta}^{(s)})'$$

$$\tilde{M}_{vv}^{(s)}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{y(t)-\Pi^{(s)\prime}x(t)\}\{y(t)-\Pi^{(s)\prime}x(t)\}'$$

ただし，$\tilde{\lambda}^{(s)}$ は行列 $\tilde{A}^{(s-1)}$ の最大固有根とする。

(3) 次に，T が無限大の時の ML 推定量と MD 推定量との関係について検討する。まず，θ の ML 推定量を $\hat{\theta}$ とすると $T(\hat{\theta}-\theta)$ は漸近的に $N(\mathbf{0}, [M(\Omega^{-1})]^{-1})$ に従って分布する。[21] ただし，$[M(\Omega^{-1})]^{-1}$ は Cramér-Rao の不等式の下限に対応するものである。他方，前述の定理 2.3 および定理 2.4 より，行列 S_T が Ω^{-1} に確率収束する MD 推定量は，ML 推定量と同じように漸近的に $N(\mathbf{0}, [M(\Omega^{-1})]^{-1})$ に従って分布する。

以上の考察より，ML 推定量と MD 推定量との関係について次のごとく結論することができる。

(1) 分散共分散行列 Ω が既知の場合，両推定量は等しい。

(2) 同行列が未知の場合，両推定量は一致しない。しかし，MD 推定法の反復によって得られる推定量は ML 推定量に等しい。

(3) MD 推定法において，行列 S_T が分散共分散行列 Ω^{-1} に確率収束するとき両推定量は漸近的に同一分布に従って分布する。

---

(20) ただし，(2.33) 式を満たす解 (Ω^*, θ^*) が一組のみ存在するものとする。

(21) Dhrymes [5] (130)

2.6 補　　　節

2.6.1 補助定理A

第2.4.1節の不等式 (2.18) に関して，次の二つの命題が成立する。

(1) $\lim_{T\to\infty} \mathrm{prob}\{\inf_{\Pi\in\omega} Q_T(\Pi)=0\}=0$

(2) $\lim_{T\to\infty} \mathrm{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega} U_T(\Pi)\geqq 1/2\}=0$

命題(1)の証明。18ページにおける $Q_T(\hat{\Pi})$ の定義と同じように，$S_T(\Pi)$ は次のごとく表わされる。

$$Q_T(\Pi)=\sum_{t=1}^{T}\{(\Pi-\Pi^\circ)'x(t)\}'S_T\{(\Pi-\Pi^\circ)'x(t)\}$$

$$\frac{1}{T}Q_T(\Pi)=(\pi-\pi^\circ)'[S_T\otimes M_{xx}](\pi-\pi^\circ)$$

ただし，上式における $[S_T\otimes M_{xx}]$ は二つの行列 M_{xx}，S_T に関する Kronecker product を，また π，π° はそれぞれ行列 Π，Π° の要素から構成される $K\times M$ 次限ベクトルを表わすものとする。[22] ここで，二つの二次形式比の最小値より次の関係を得る。

$$Q_T(\Pi)\geqq d^2(\pi)\lambda_T \tag{2.34}$$

ただし，$d^2(\pi)$ はベクトル $(\pi-\pi^\circ)$ の長さの二乗を表わす。すなわち，

$$d^2(\pi)=(\pi-\pi^\circ)'(\pi-\pi^\circ)$$

である。また λ_T は行列 $[S_T\otimes M_{xx}]$ の最小固有根とする。[23] 仮定2およびMD推定法の定義より，行列 M_{xx} および S_T はそれぞれ正値定符号行列であるから，この最小値は正である。他方，Π° を含まない任意の閉集合 ω においては $d^2(\pi)$ は正かつ有界である。したがって，この閉集合において (2.34) 式の左辺の下限

(22) 例えば π については次のごとく表わされる。

$$\pi=(\pi_{11},\ \pi_{21},\ \cdots\cdots,\ \pi_{K1},\ \pi_{12},\ \pi_{22},\ \cdots\cdots,\ \pi_{KM})'$$

(23) ここでの二次形式の比は $\frac{1}{T}Q_T(\Pi)/d^2(\pi)$ である。その最小値を λ_T とすると次の関係を得る。

$$Q_T(\Pi)\geqq Td^2(\pi)\lambda_T\geqq d^2(\pi)\lambda_T$$

$\inf_{\Pi\in\omega} Q_T(\Pi)$ が0に等しくなる確率は，最小固有根が0になること，すなわち行列 S_T が特異行列になる確率にたかだか等しい。しかしながら，後者の確率は T が無限大のときに0に収束する。何故なら，仮定4より S_T は正値定符号行列 S に確率収束するからである。この結果

$$\lim_{T\to\infty} \text{prob}\{\inf_{\Pi\in\omega} Q_T(\Pi)=0\}=0$$

となり，命題(1)は成立する。

命題(2)の証明。18ページにおける $U_T(\hat{\Pi})$ の定義と同じように，$U_T(\Pi)$ は次のごとく表わされる。

$$U_T(\Pi)=\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{Q_T(\Pi)}\{(\Pi-\Pi^\circ)'x(t)\}'S_T v(t)$$

これより

$$\begin{aligned}|U_T(\Pi)| &= \left|\frac{1}{Q_T(\Pi)}\sum_{t=1}^{T}\{x'(t)(\Pi-\Pi^\circ)S_T v(t)\}\right| \\ &= \left|tr\left[\frac{(\Pi-\Pi^\circ)'}{Q_T(\Pi)}S_T\sum_{t=1}^{T}v(t)x'(t)\right]\right| \\ &\leqq \sum_{(i,j,k)}\left[\frac{T|\pi_{ij}-\pi_{ij}{}^\circ|}{Q_T(\Pi)}|s_{jkT}|\left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v_k(t)x_i(t)\right|\right] \\ &\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K),\ (j,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)\end{aligned}$$

を得る。ただし π_{ij}, $\pi_{ij}{}^\circ$ はそれぞれ行列 Π, Π° の第 i, j 要素，また s_{jkT} は行列 S_T の第 j, k 要素とする。このとき

$$|\pi_{ij}-\pi_{ij}{}^\circ|\leqq d(\pi)$$

$$\frac{1}{T}Q_T(\Pi)\geqq d^2(\pi)\lambda_T$$

であるから，上の不等式は次のごとく表わされる。

$$|U_T(\Pi)|\leqq\sum_{(i,j,k)}\left[\frac{1}{d(\pi)\lambda_T}|s_{jkT}|\left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v_k(t)x_i(t)\right|\right] \tag{2.35}$$

ここで，上式の右辺の最後の項 $(1/T)\Sigma v_k(t)x_i(t)$ は仮定1および3より0に確率収束する[24]。また，s_{jkT} は仮定4より行列 S の j, k 要素に確率収束する。

(24) 大数の法則あるいは中心極限定理を利用する（Malinvaud [36] 250, 372 あるいは Nakamura [37] 195)。なお脚注(26)参照。

次に行列〔$S_T \otimes M_{xx}$〕が正値定符号行列〔$S \otimes \bar{M}$〕に確率収束することから，その最小固有根 λ_T も行列〔$S \otimes \bar{M}$〕の正の最小根に確率収束する。他方，Π° を含まない任意の閉集合 ω においてベクトル（$\pi - \pi^\circ$）の長さ $d(\pi)$ は正で有界である。以上の考察より，上式（2.35）の右辺を R_T とすれば，任意の正数 ε に対して

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega} R_T < \varepsilon\} = 1$$

が成立する。[25] このことは（2.35）式の左辺についても，少なくとも

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega} |U_T(\Pi)| < \varepsilon\} = 1$$

の成立を意味している。これは

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{prob}\{\sup_{\Pi\in\omega} |U_T(\Pi)| \geqq \varepsilon\} = 0$$

と表わすこともできる。したがって $\varepsilon = 1/2$ とすれば，命題(2)は成立する。

2.6.2　補助定理B

第2.4.2節の（2.20）式に関連して，次の三つの命題が成立する。

（a）　$\sqrt{T} H_k(\theta^\circ)$ の漸近分布は $N(0,\ M(S\Omega S)_{kk})$ である。ただし，$M(S\Omega S)_{kk}$ は行列 $M(S\Omega S)$ の第 k，k 要素とする。

（b）　$H^1_{kj}(\theta^\circ)$ は〔$-M(S)$〕$_{kj}$ に確率収束する。

（c）　$H^2_{kJp}(\theta^*)$ は有限値 $\bar{K}_{kjp}$ に確率収束する。

なお，上記における行列 $M(\cdot)$ については（2.23）式を参照されたい。

命題(a)の証明。まず（2.19）式より

$$H_k(\theta^\circ) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Lambda'_{tkT} v(t)$$

を得る。ただし上式における Λ_{tkT} は次式で与えられる。

$$\Lambda_{tkT} = S_T [D(k)_{\theta^\circ} x(t)]$$

---

(25)　ここでは，確率収束に関する次の命題を適用している。すなわち，確率変数 X_T，Y_T がそれぞれ X°，Y° に確率収束するとき，実関数 $f(X,\ Y)$ が（X°，Y°）において連続ならば，任意の正数 ε に対して次式が成立する（Malinvaud [36] 369)。

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{prob}\{|f(X_T,\ Y_T) - f(X^\circ,\ Y^\circ)| < \varepsilon\} = 1$$

次に $\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)$ の分散を σ_{kT}^2 とすると，仮定1を適用して

$$\begin{aligned}\sigma_{kT}^2&=E[\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)][\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)]'\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Lambda'_{tkT}\Omega\Lambda_{tkT}\\&=\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]'_{\theta^\circ}[S_T\Omega S_T\otimes M_{xx}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]_{\theta^\circ}\\&=M_T(S_T\Omega S_T)_{kk}\end{aligned}$$

を得る。ここで $\sqrt{T}H_k(\theta)$ の極限分布の正規性を証明するために，中心極限定理を利用する。(26) まず，27ページの注意(2)に従って，$\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)$ の分散 σ_{kT}^2 は $M(S\Omega S)_{kk}$ に確率収束する。さらに，関数 $\phi(T)$ を

$$\phi(T)=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{T}}\underset{t\leqq T\,;\,j}{\mathrm{Max}}\ x_j(t)}$$

と定義すると，(27) 仮定3の(1)より系列 $x(t)\,(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は有界であるから関数 $\phi(T)$ は T が無限大のとき発散する。また，この関数と $\dfrac{1}{\sqrt{T}}\Lambda_{tkT}$ の積 $\phi(T)\left[\dfrac{1}{\sqrt{T}}\Lambda_{tkT}\right]$ は，仮定3，4，6より T が無限大のとき有界である。以上の考察より，中心極限定理を適用して，$\sqrt{T}H_k(\theta^\circ)$ は T が無限大のとき正規分布 $N(0,\ M(S\Omega S)_{kk})$ に従って分布する。

命題(b)の証明。まず (2.21) 式で示される $H^1_{kj}(\theta^\circ)$ の第一項は

---

(26) 確率変数ベクトル $\varepsilon(t)$ $(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$ が，平均0および有限の分散共分散行列を持って独立に分布するものとする。いまベクトル a_{tT} を非確率変数とするとき $u(t)=\sum_{t=1}^{T}a_{tT}'\varepsilon(t)$ の極限分布を考える。T が無限大のときの $u(t)$ の分散を σ^2 とすると

(1) 分散 σ^2 が正の有限値である

(2) 適当な関数 $\phi(T)$ が T と共に発散し，かつ $\phi(T)a_{tT}$ が有界である

ならば，$u(t)$ の極限分布は正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ である。また σ^2 が0のとき $u(t)$ は0に確率収束する。(Malinvaud [36] 250, 251)

(27) Malinvaud [36] 226.

$$-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\{[D(j)_{\theta^\circ}x(t)]'S_T[D(k)_{\theta^\circ}x(t)]\}$$

$$=-\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_j}\right]_{\theta^\circ}[S_T\otimes M_{xx}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]_{\theta^\circ}$$

$$=-M_T(S_T)_{kj}$$

と表わされる。ところで $M_T(S_T)$ は22ページの注意(1)より，T が無限大のとき $M(S)$ に確率収束する。したがって，上式の $M_T(S_T)_{kj}$ は $M(S)_{kj}$ に確率収束する。

次に $H^1_{kj}(\theta^\circ)$ の第二項は

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}v'(t)S_T[D(k,\ j)_{\theta^\circ}x(t)]=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varDelta'_{tkjT}v(t)$$

となる。ただし，上式における $\varDelta_{tkjT}$ は

$$\varDelta_{tkjT}=S_T[D(k,\ j)_{\theta^\circ}x(t)]$$

である。ところで，上記の第二項の分散を σ^2_{kjT} とすると，仮定1を適用して

$$\sigma^2_{kjT}=\frac{1}{T}\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\right]_{\theta^\circ}[S_T\Omega S_T\otimes M_{xx}]\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\right]_{\theta^\circ}$$

を得る。上式右辺の $\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_k\partial\theta_j}\right]_{\theta^\circ}$ は仮定6より有界であり，また行列 $(S_T\Omega S_T\otimes M_{xx})$ は仮定3および仮定4より行列 $(S\Omega S\otimes M)$ に確率収束する。この結果分散 σ^2_{kjT} は T が無限大のとき0に収束することになる。ゆえに，$H^1_{kj}(\theta^\circ)$ の第二項は，脚注(26)の中心極限定理の後段を適用することによって，0に確率収束する。この結果，上記の第一項に関する帰結と合せて

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}H^1_{kj}(\theta^\circ)=-M(S)_{kj}+0$$

$$=-M(S)_{kj}$$

となり，命題(b)は証明された。

命題(c)の証明。まず (2.22) 式で示される $H^2_{kjp}(\theta^*)$ の第四項は，われわれの基本モデルにおける三階の導関数が0のため，存在しない[(28)]。残りの各項もこ

(28) しかし，この第四項が存在しても，仮定1，3，4，6のもとで0に収束する。その証明は上述の $H^1_{kj}(\theta^\circ)$ の第二項のそれに準ずる。

れまでの証明と同じ手法によって，T が無限大のとき，一定値に確率収束することが確かめられる。ここではその第一項のみについて証明する。第二，三項についても同じように証明することができる。そこで $H^2_{kjp}(\theta^*)$ の第一項を $K_{(jp)kT}$ とすると

$$K_{(jp)kT}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{-[D(j,\ p)_{\theta^*}x(t)]'S_T[D(k)_{\theta^*}x(t)]\}$$

$$=-\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_j\partial\theta_p}\right]'_{\theta^*}[S_T\otimes M_{xx}]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]_{\theta^*}$$

となる。ところで，定理2.3にかかげた仮定のもとで，(2.19) 式を満足する $\hat{\theta}$ は一致推定量であり，T が無限大のとき，その真の値 θ° に収束する。したがって $\theta^\circ<\theta^*<\hat{\theta}$ より，T を充分大きくとれば，θ^* は真の値 θ° の近傍 $U(\theta^\circ)$ に含まれる。この前提のもとで，上式の右辺の $\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_j\partial\theta_k}\right]_{\theta^*}$ および $\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]_{\theta^*}$ は仮定6によって有界であり，また仮定3，4より $[S_T\otimes M_{xx}]$ は T が無限大のとき $[S\otimes M]$ に確率収束する。以上より

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}K_{(jp)kT}=-\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial\theta_j\partial\theta_p}\right]'_{\theta^\circ}[S\otimes M]\left[\frac{\partial\pi}{\partial\theta_k}\right]_{\theta^\circ}$$

$$=-\bar{K}_{(jp)k}$$

を得る。他の第二，三項についても上記と同じ手法によってそれぞれ $-K_{j(kp)}$，$-K_{p(kj)}$ に確率収束する。したがって

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}H^2_{kjp}(\theta^*)=-\bar{K}_{(jp)k}-\bar{K}_{j(kp)}-K_{p(kj)}$$

$$=K_{kjp}$$

となり，命題(c)は成立する。

第3章　基本モデルの拡張

前章において検討した基本モデル〔I〕は，通常の計量経済モデルに比較して極度に制約的である。すでに指摘したごとく

(1)　本来，経済モデルに含まれる各種の内生変数は，多数の外生変数の影響を直接あるいは間接に受けている。しかし，われわれの基本モデルに含まれる各内生変数 $y_i(i=1, 2, \cdots\cdots, M)$ は，外生変数 $x_j(j=1, 2, \cdots\cdots, K)$ の影響を観測不可能な変数 x^* を通じて間接に受けるのみであって，それぞれ直接にその影響を受ける外生変数を持っていない。したがって，基本モデルに含まれる各方程式に外生変数を加え，モデルを拡張する必要がある。

(2)　基本モデルに含まれる観測不可能な変数の個数はわずか一つである。そこで，複数個の観測不可能な変数が存在するモデルにこれを拡張する必要がある。

(3)　通常の計量経済モデルを構成する各方程式は，その恒等式を除いて，それぞれその確率項を含んでいる。しかし，われわれの基本モデルにおける補助方程式は確率項を含まず，外生変数のみの exact function として表わされている。観測不可能な変数 x^* がこのような exact function によって決定されるという積極的理由は存在しない。したがって，この決定式すなわちその補助方程式を確率化する必要がある。

(4)　多くの経済変数は相互依存の関係にある。したがって，計量経済モデルは本来連立方程式体系によって表わされるべきである。しかし，われわれの基本モデルにおける内生変数には，このような相互依存の関係が仮定されていない。そこで，基本モデルを連立方程式モデルに拡張する必要がある。

以上のごとき立場から，本章は前章における基本モデルを拡張する。とりあげる論点はモデルの構成とその識別および推定である。

3.1 外生変数の導入

3.1.1 モデルの構成

基本モデルにあらたな外生変数を導入する場合，既存の外生変数（すでに補助方程式に含まれている外生変数）との関連において，各種のモデルが考えられる。例えば両変数がまったく相異する場合，一部または全部の変数が重複する場合あるいはいずれか一方の変数が他方の変数に含まれる場合等がある。そこで，以上のことを考慮して，前章における基本モデルを次のモデル〔2〕に拡張することにする。

$$
[\mathrm{II}]\quad
\begin{aligned}
y_1(t) &= \beta_1 x^*(t) + \gamma_{1\ J+1} x_{J+1}(t) + \cdots\cdots + \gamma_{1\ L} x_L(t) + u_1(t) \\
y_2(t) &= \beta_2 x^*(t) + \gamma_{2\ J+1} x_{J+1}(t) + \cdots\cdots + \gamma_{2\ L} x_L(t) + u_2(t) \\
&\ \vdots \\
y_M(t) &= \beta_M x^*(t) + \gamma_{M\ J+1} x_{J+1}(t) + \cdots\cdots + \gamma_{M\ L} x_L(t) + u_M(t) \\
x^*(t) &= \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots\cdots + \alpha_K x_K(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)
\end{aligned}
$$

基本モデルに新しく導入された外生変数は $x_{J+1} \sim x_L$ の総数 $(L-J)$ 個である。これらの変数のうち若干のものは，既存の外生変数 $x_1 \sim x_K$ と重複している。このことを考慮して $J \leqq K \leqq L$，$J \neq L$ と仮定して置く。したがって，$J=K$ の場合，x^* の決定に関係する外生変数と他のすべての式に含まれる外生変数とは別種のものである。また $J<K$ のとき，両者は互いに重複していることになる。(1) 次にこのモデル〔II〕を行列，ベクトル表示しておく。

$$y(t) = \beta x^*(t) + \Gamma_2' \bar{x}_2(t) + \Gamma_3' \bar{x}_3(t) + u(t)$$

$$x^*(t) = \bar{\alpha}_1' \bar{x}_1(t) + \bar{\alpha}_2' \bar{x}_2(t)$$

ただし，上式における各記号は次のごとく定義される。

$$y(t) = (y_1(t),\ y_2(t),\ \cdots\cdots,\ y_M(t))' \qquad (M \times 1)$$

$$\bar{x}_1(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots\cdots,\ x_J(t))' \qquad (J \times 1)$$

（1） $J<K$ のとき，$K=L$ であれば x^* の決定に関係する変数は他のすべての方程式に存在する外生変数を含み，特に $J=0$ のとき両変数は同一である。また同じく $J<K$ のとき，$K<L$ かつ $J=0$ であれば，逆に前者の外生変数が後者のそれに含まれることになる。

$$\bar{x}_2(t)=(x_{J+1}(t),\ x_{J+2}(t),\ \cdots\cdots,\ x_K(t))' \qquad ((K-J)\times 1)$$

$$x_3(t)=(x_{K+1}(t),\ x_{K+2}(t),\ \cdots\cdots,\ x_L(t))' \qquad ((L-K)\times 1)$$

$$u(t)=(u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots\cdots,\ u_M(t))' \qquad (M\times 1)$$

$$\bar{\alpha}_1=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_J)' \qquad (J\times 1)$$

$$\bar{\alpha}_2=(\alpha_{J+1},\ \alpha_{J+2},\ \cdots\cdots,\ \alpha_K)' \qquad ((K-J)\times 1)$$

$$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\cdots,\ \beta_M)' \qquad (M\times 1)$$

$$\Gamma_2'=\begin{pmatrix} \gamma_{1\ J+1} & \gamma_{1\ J+2} & \cdots\cdots & \gamma_{1\ K} \\ \gamma_{2\ J+1} & \gamma_{2\ J+2} & \cdots\cdots & \gamma_{2\ K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{M\ J+1} & \gamma_{M\ J+2} & \cdots\cdots & \gamma_{M\ K} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3'=\begin{pmatrix} \gamma_{1\ K+1} & \gamma_{1\ K+2} & \cdots\cdots & \gamma_{1\ L} \\ \gamma_{2\ K+1} & \gamma_{2\ K+2} & \cdots\cdots & \gamma_{2\ L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{M\ K+1} & \gamma_{M\ K+2} & \cdots\cdots & \gamma_{M\ L} \end{pmatrix}$$

次にこの拡張モデルの誘導型は，

$$y(t)=\Pi_1'\bar{x}_1(t)+\Pi_2'\bar{x}_2(t)+\Pi_3'\bar{x}_3(t)+v(t)$$

ただし

$$\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta', \qquad \Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2, \qquad \Pi_3=\Gamma_3$$

$$v(t)=u(t)$$

とする。最後に $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$ を考慮して

$$Y=X_1\Pi_1+X_2\Pi_2+X_3\Pi_3+V \tag{3.1}$$

あるいは

$$Y=X\Pi+V$$

となる。ただし

$$Y=(y(1),\ y(2),\ \cdots\cdots,\ y(T))' \qquad (T\times M)$$

$$X=(X_1,\ X_2,\ X_3) \qquad (T\times L)$$

$$X_1=(\bar{x}_1(1),\ \bar{x}_1(2),\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_1(T))' \qquad (T\times J)$$

$$X_2=(\bar{x}_2(1),\ \bar{x}_2(2),\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_2(T))' \qquad (T\times(K-J))$$

$$X_3=(\bar{x}_3(1),\ \bar{x}_3(2),\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_3(T))' \qquad (T\times(L-K))$$

$$V=(v(1),\ v(2),\ \cdots\cdots,\ v(T))' \qquad (T\times M)$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_1\\ \Pi_2\\ \Pi_3\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}(J\times M)\\ ((K-J)\times M)\\ ((L-K)\times M)\end{matrix}$$

とする。この拡張モデルに対して，基本モデルと同じ仮定を適用する。しかし，仮定2を次のように拡大しておく。

仮定2′　変数 $x_1 \sim x_L$ はすべて非確率的な確定量であって，次の階数条件に従うものとする。すなわち

$$\mathrm{rank}(X_1)=J,\qquad \mathrm{rank}(X_2)=K-J,\qquad \mathrm{rank}(X_3)=L-K$$
$$\mathrm{rank}(X)=L$$

以下，この拡張モデル〔Ⅱ〕を三段階に分け，その識別と推定について検討することにする。

3.1.2　単純モデルの推定

ここは観測不可能な変数 x^* の決定に関係する外生変数が，他のすべての式に含まれる外生変数とまったく相異する（$J=K$），単純なモデルの推定について考察する。この単純モデルの推定はすでに Hauser [19]（184–87）によって，前章の基本モデルの推定方法に帰着することが示されている。そこで本節では，この Hauser の手法にそって単純モデルの推定を考察する。ところで，この単純モデルは前述の拡張モデル〔Ⅱ〕において $\bar{x}_2(t)=\mathbf{0}$ とした場合に相当する。したがって (3.1) は

$$\begin{aligned}X&=X_1\Pi_1+X_3\Pi_3+V\\ &=X\Pi+V\end{aligned}$$

となる。ただし

$$X=(X_1,\ X_3),\qquad \Pi=\begin{bmatrix}\Pi_1\\ \Pi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1\beta'\\ \Gamma_3\end{bmatrix}$$

とする。上記単純モデルの MD 推定量は，基本モデルの場合と同じように正値定符号行列 S（本章を通じて標本数 T は一定であるため S_T を単に S と表わす）を用いて，(2.8′) 式

$$F(S)=T\,tr(SW)$$

を最小にする $\bar{\alpha}_1$, β, Γ_3 である。[2] ところで上式における W は基本モデルの場合と同じく

$$W=V+\frac{1}{T}(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)$$

と変形される。ただし V, P は (2.9) 式に準じて定義されるものとする。ここで行列 $X\Pi$ を Gram-Schmidt の直交化によって，次の二つの部分に分割する。[3]

$$X\Pi=X_1\Pi_1+X_3\Pi_3$$
$$=X_{1\cdot3}\Pi_1+X_3\Pi_3{}^*$$

ただし

$$X_{1\cdot3}=(I-Q_3)X_1,\qquad Q_3=X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3'$$
$$\Pi_3{}^*=(X_3'X_3)^{-1}X_3'X_1\Pi_1+\Pi_3$$

と定義される。次にこれと同じ分割を XP に対して行ない

$$XP=X_1P_1+X_3P_3\qquad (P=[P_1',\ P_3']')$$
$$=X_{1\cdot3}P_1+X_3P_3{}^*$$
$$P_3{}^*=(X_3'X_3)^{-1}X_3'X_1P_1+P_3$$

を得る。ここで $X_3'X_{1\cdot3}=0$ を利用すれば，上記の W は次のごとく変形される

$$W=V+\frac{1}{T}(\Pi_1-P_1)'X'_{1\cdot3}X_{1\cdot3}(\Pi_1-P_1)$$
$$+\frac{1}{T}(\Pi_3{}^*-P_3{}^*)'X_3'X_3(\Pi_3{}^*-P_3{}^*)$$

この W を上の $F(S)$ に代入すると

$$F(S)=T\,tr(SV)+tr[S(\Pi_1-P_1)'X'_{1\cdot3}X_{1\cdot3}(\Pi_1-P_1)]$$
$$+tr[S(\Pi_3{}^*-P_3{}^*)'X_3'X_3(\Pi_3{}^*-P_3{}^*)]\qquad(3.3)$$

(2) Hauser [19] の推定法は $S=V^{-1}$ としたGLS推定であるが，ここではMD推定としてより一般的に扱う。

(3) Dhrymes [5] 575.

となる。ところで行列Sは正値定符号行列である。したがって上式の右辺第三項は

$$tr[S(\Pi_3^*-P_3^*)'X_3'X_3(\Pi_3^*-P_3^*)]\geqq 0$$

となり，この値は $\Pi_3^*=P_3^*$ のときその最小値0をとる。この結果，$F(S)$ を最小にするMD推定法は，まず係数制約 $\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta'$ のもとで，(3.3) 式の右辺第1，2項を最小にする推定量 $\hat{\bar{\alpha}}_1$, $\hat{\beta}$ を求め，続いて $\Pi_3^*=P_3^*$ を満たす推定量 $\hat{\Gamma}_3$ を求めることである。ところで，制約 $\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta'$ のもとでこの1，2項を最小にすることは，基本モデルの $F(S)$ (2.8′) 式を同じ制約のもとで最小にすることと，形式上同じであることが判る。事実，ここでの推定量 $\hat{\bar{\alpha}}_1$, $\hat{\beta}$ は，適当な正規化則のもとで，外生変数行列 X を $X_{1\cdot 3}$ で置きかえた (2.13) あるいは (2.14) 式で与えられる。

他方推定量 $\hat{\Gamma}_3$ は次のように求められる。まず最小二乗回帰係数 $P=(X'X)^{-1}X'Y$ より P_3 は

$$P_3=(X_3'X_3)^{-1}X_3'Y-(X_3'X_3)^{-1}(X_3'X_1)P_1$$

となる。これを上記の P_3^* の定義式に代入して $P_3^*=(X_3'X_3)^{-1}X_3'Y$ を得る。他方上述の通り $\Pi_3^*=P_3^*$ が成立しなければならないので，Π_3 は

$$\Pi_3=(X_3'X_3)^{-1}X_3'(Y-X_1\Pi_1)$$

となる。ここでの単純モデルでは $\Pi_3=\Gamma_3$ であるから，Γ_3 は適度に識別され

$$\hat{\Gamma}_3=(X_3'X_3)^{-1}X_3'(Y-X_1\hat{\Pi}_1)$$

と決定する。これは，外生変数 X_1 の影響を除いた $(Y-X_1\hat{\Pi}_1)$ の X_3 に対する最小二乗回帰係数である。ただし上式における $\hat{\Pi}_1$ は $\hat{\Pi}_1=\hat{\bar{\alpha}}_1\hat{\beta}'$ とする。

3.1.3 重複モデルの推定（1）

前節では観測不可能な変数の決定に関係する外生変数が，他のすべての構造方程式に含まれる外生変数とまったく相異する場合をとりあげた。そこで，本節および次節においては，両外生変数が互いに重複する一般的拡張モデル $(J<K)$ の推定について検討する。

ところで，この拡張モデル〔II〕の誘導型 (3.1) は三種類の係数制約 $\Pi_1=\alpha_1\beta'$, $\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2$, $\Pi_3=\Gamma_3$ を持っている。これらのうち，最後のものは事実上な

んらの制約ともならない。他方，最初の制約 $\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta'$ は基本モデルの場合の制約と同一である。したがって，定理2.1より，一つの正規化則のもとで $\mathrm{rank}(\Pi_1)=1$ が成立すれば，パラメーター $\bar{\alpha}_1$，β は適度に識別される。しかし残りの第二の制約 $\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2$ よりパラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 を識別することは困難である（ただし β は上述のごとく第一の制約より決定されるものとする）。事実，この $\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2$ より $M(K-J)$ 個の誘導パラメーターが，$(M+1)(K-J)$ 個の構造パラメーター（すなわち，$(K-J)$ 個の $\bar{\alpha}_2$ の要素と $M(K-J)$ 個の Γ_2 の要素）によって表わされている。したがって，両者の差は $r_2=-(K-J)$ であるから，外生変数間の重複を含むここでの一般モデル（$J<K$）は，一切の先験的制約が存在しない限り，そのパラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 に関して識別不能である。つまり，重複する外生変数の個数だけのパラメーターが未決定のまま残されることになる。

しかし実際には，通常の連立方程式の場合と同じように，Γ_2 のいくつかの要素について「先験的制約」が存在するであろう。そこで，その制約を「0制約」のみに限定すれば，パラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 の場合についても容易に識別可能な状態が達成される。いま制約 $\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2$ の第 i 列より次の関係が得られる。

$$\begin{pmatrix}\pi_{i\,J+1}\\ \pi_{i\,J+2}\\ \vdots\\ \pi_{i\,K}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta_i & 0 & \cdots\cdots 0\\ 0 & \beta_i & \cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots \beta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{J+1}\\ \alpha_{J+2}\\ \vdots\\ \alpha_K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{i\,J+1}\\ \gamma_{i\,J+2}\\ \vdots\\ \gamma_{i\,K}\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$$

ここで，Π_2 の要素 $\pi_{ij}(j=J+1,\ J+2,\ \cdots\cdots,\ K)$ と β_i とは所与であり，かつすべて0でないとしておく。したがって，上式で求める未知数は $\alpha_{J+1}\sim\alpha_K$ および $\gamma_{i\,J+1}\sim\gamma_{i\,K}$ である。ところで，この線型方程式の特殊性より，第 i 番目の方程式の第 j 外生変数の係数 γ_{ij} が0であれば，補助方程式における第 j 外生変数の係数 α_j と他の方程式における同外変数の係数 $\gamma_{kj}(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots\cdots,\ M)$ とのすべてが識別可能となる。したがって，次の定理が成立する。

定理 3.1

「構造パラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 の第 j 外生変数に対応する係数 α_j，γ_{ij}（$i=1$，2，……，M）が識別可能であるためには，この第 j 外生変数を含まない方程式（ただし補助方程式を除く）が，全モデルのなかに少なくとも一つ存在することである。もし，その外生変数を含まない方程式が唯一つ存在するならば，これに関連する全パラメーター α_j，γ_{ij} はすべて適度識別である。以上のことは各 j について成立する（$j=J+1$，$J+2$，……，K）。」

あるいは同じことを係数行列 Γ_2 について述べると次のごとく表わされる。すなわち「Γ_2 の第 j 行に少なくとも一つの 0 要素があれば識別可能であり，それが唯一の場合，適度識別である。」

そこで，以下本節ではパラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2，が適度識別な場合について，一般モデルの推定問題を検討する。そこで，定理 2.1 と適度識別な場合の定理 3.1 との成立を仮定する。なお，次節においては後者が単に識別可能な場合を想定した一般モデルの推定を検討する。

さて，パラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 が適度識別である時の推定法は，前節における Hauser の手法の拡張である。まず (3.1) を前提として行列 $X\Pi$ を，直交化によって次のように分割する。

$$
\begin{aligned}
X\Pi &= X_1\Pi_1 + X_2\Pi_2 + X_3\Pi_3 \\
&= X_{1\cdot23}\Pi_1 + X_{2\cdot3}\Pi_2{}^* + X_3\Pi_3{}^*
\end{aligned}
$$

同じように XP を次のごとく分割する。

$$
\begin{aligned}
XP &= X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 \qquad (P=[P_1',\ P_2',\ P_3']') \\
&= X_{1\cdot23}P_1 + X_{2\cdot3}P_2{}^* + X_3P_3{}^*
\end{aligned}
$$

ただし

$$X_{1\cdot23} = [I - Q_3 - X_{2\cdot3}(X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3})^{-1}X'_{2\cdot3}]X_1$$

$$X_{2\cdot3} = (I - Q_3)X_2 \qquad (Q_3 = X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3')$$

$$\Pi_2{}^* = (X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3})^{-1}X_2'(I - Q_3)X_1\Pi_1 + \Pi_2$$

$$\Pi_3{}^* = (X_3'X_3)^{-1}X_3'(X_1\Pi_1 + X_2\Pi_2) + \Pi_3$$

$$P_2{}^* = (X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3})^{-1}X_2{}'(I-Q_3)X_1P_1 + P_2$$
$$P_3{}^* = (X_3{}'X_3)^{-1}X_3{}'(X_1P_1 + X_2P_2) + P_3$$

とする。これより

$$(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)$$
$$= (P_1-\Pi_1)'X'_{1\cdot23}X_{1\cdot23}(P_1-\Pi_1)$$
$$+ (P_2{}^*-\Pi_2{}^*)'X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3}(P_2{}^*-\Pi_2{}^*) + (P_3{}^*-\Pi_3{}^*)'X_3{}'X_3(P_3{}^*-\Pi_3{}^*)$$

を得る。したがって，一般モデルの MD 推定法は，前節と同じように

$$F(S) = T\,tr(SW)$$
$$= T\,tr(SV) + tr[S(P_1-\Pi_1)'X'_{1\cdot23}X_{1\cdot23}(P_1-\Pi_1)]$$
$$+ tr[S(P_2{}^*-\Pi_2{}^*)'X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3}(P_2{}^*-\Pi_2{}^*)]$$
$$+ tr[S(P_3{}^*-\Pi_3{}^*)'X'_3X_3(P_3{}^*-\Pi_3{}^*)]$$

を最小にする。ところで，行列 S は正値定符号行列であるから，上式の第三，四項は非負であり，かつ $P_2{}^*=\Pi_2{}^*$，$P_3{}^*=\Pi_3{}^*$ のときそれぞれの最小値 0 をとる。したがって，この場合の MD 推定量も係数制約 $\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta'$ のもとで上式の第一，二項を最小にすることによって求められる。しかし，このことは基本モデルの $F(S)$ (2.8′) 式を同一制約のもとで最小にすることと同じである。事実ここでの推定量 $\hat{\bar{\alpha}}_1$，$\hat{\beta}$ は，適当な正規化則のもとで，外生変数行列 X を $X_{1\cdot23}$ で置きかえた (2.13) あるいは (2.14) によって決定する。

次に残されたパラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2，Γ_3 は，$P_2{}^*=\Pi_2{}^*$ および $P_3{}^*=\Pi_3{}^*$ より次のごとく決定される。まず，P_2 および P_3 の両係数は $P=(X'X)^{-1}X'Y$ を利用して(4)

$$P_2 = [X_2{}'(I-Q_3)X_2]^{-1}[X_2{}'(I-Q_3)Y - X_2{}'(I-Q_3)X_2P_2]$$
$$P_3 = (X_3{}'X_3)^{-1}X_3{}'(Y - X_1P_1 - X_2P_2)$$

となる。これを $P_2{}^*$ および $P_3{}^*$ の定義式に代入し，関係式 $(X'_{2\cdot3}X_{2\cdot3})^{-1} = [X_2{}'(I-Q_3)X_2]^{-1}$ を考慮すれば

(4) 正規方程式 $(X'X)P=X'Y$ を分割し次式を得る。この第2，3行を利用する。

$$\begin{bmatrix} X_1{}'X_1 & X_1{}'X_2 & X_1{}'X_3 \\ X_2{}'X_1 & X_2{}'X_2 & X_2{}'X_3 \\ X_3{}'X_1 & X_3{}'X_2 & X_3{}'X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1{}'Y \\ X_2{}'Y \\ X_3{}'Y \end{bmatrix}$$

$$P_2{}^* = [X_2{}'(I-Q_3)X_2]^{-1}X_2{}'[I-Q_3]Y$$
$$P_3{}^* = (X_3{}'X_3)^{-1}X_3{}'Y$$

を得る。この結果，Π_2 および Π_3 は $\Pi_2{}^* = P_2{}^*$ および $\Pi_3{}^* = P_3{}^*$ を利用して

$$\Pi_2 = [X_2{}'(I-Q_3)X_2]^{-1}[(I-Q_3)X_2]'(Y-X_1\Pi_1)$$
$$\Pi_3 = (X_3{}'X_3)^{-1}X_3{}'(Y-X_1\Pi_1-X_2\Pi_2)$$

と決定される。上式から明らかなごとく，Π_2 は $(Y-X_1\Pi_1)$ の $(I-Q_3)X_2$ に対する最小二乗回帰係数であり，また Π_3 は $(Y-X_1\Pi_1-X_2\Pi_2)$ の X_3 に対する最小二乗回帰係数である。いま，求めるパラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2，Γ_3 の推定量をそれぞれ $\hat{\bar{\alpha}}_2$，$\hat{\Gamma}_2$，$\hat{\Gamma}_3$ と定義すると

$$\hat{\bar{\alpha}}_2\hat{\beta}+\hat{\Gamma}_2 = [X_2{}'(I-Q_3)X_2]^{-1}[(I-Q_3)X_2]'(Y-X_1\hat{\Pi}_1)$$
$$\hat{\Gamma}_3 = (X_3{}'X_3)^{-1}X_3{}'(Y-X_1\hat{\Pi}_1-X_2\hat{\Pi}_2)$$

となる。ただし

$$\hat{\Pi}_1 = \hat{\bar{\alpha}}_1\hat{\beta}', \qquad \hat{\Pi}_2 = \hat{\bar{\alpha}}_2\hat{\beta}'+\Gamma_2$$

とする。上式における $\hat{\bar{\alpha}}_1$，$\hat{\beta}$ はすでに前段において求めた $\bar{\alpha}_1$，β の MD 推定量とする。Γ_3 は直ちに適度識別である。他方，$\bar{\alpha}_2$ および Γ_2 に関しては，あらかじめ仮定された適当な「0 制約」によって適度識別となる。

3.1.4 重複モデルの推定（2）

前節では，パラメーター $\bar{\alpha}_2, \Gamma_2$ が適度に識別される重複モデルを想定し，その推定について検討した。本節ではその仮定をいくぶん緩めて，パラメーター $\bar{\alpha}_2$，Γ_2 が単に識別可能な場合の推定について検討する。したがって，仮定 3.1 より係数行列 Γ_2 の第 j 行に少なくとも一つの 0 要素が存在するものとする。なお，α_1，β に関してはこれまでと同じように，仮定 2.1 を想定し一意に決定されるものとする。ところで一般モデルの三種の係数制約のうち $\Pi_3 = \Gamma_3$ は，誘導型に対していかなる制約をも与えない。そこで以下の展開を簡単にするために $X_3 = \mathbf{0}$ を仮定する。なお，$X_3 \neq \mathbf{0}$ の場合には，本章 1.2 節の Hauser の手法を利用することができる。したがって，本節でとりあげるモデルは

$$Y = X_1\Pi_1+X_2\Pi_2+V$$
$$= X\Pi+V$$

となる。ただし

$$X=(X_1,\ X_2),\qquad \Pi=\begin{bmatrix}\Pi_1\\ \Pi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1\beta'\\ \bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2\end{bmatrix}$$

とする。前章の基本モデルの場合と同じように，ここでのMD推定法は任意の正値定符号行列 S に対して $Ttr(SW)$ を最小にする $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, β, Γ_2 を求めることである。そこで基本モデルの場合と平行して次の F^* を導くことができる。

$$F^*=tr(S\Pi'X'X\Pi)-2tr(\Pi'X'YS) \tag{2.10}$$

上式に，係数制約 $\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta'$, $\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2$ を代入し，$\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, β, Γ_2 に関して偏微分し，0と置けば次の各式を得る。

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\bar{\alpha}_1}=(\beta'S\beta)[(X_1'X_1)\bar{\alpha}_1+(X_1'X_2)\bar{\alpha}_2]+[(X_1'X_2)\Gamma_2-X_1'Y]S\beta=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\bar{\alpha}_2}=(\beta'S\beta)[(X_2'X_1)\bar{\alpha}_1+(X_2'X_2)\bar{\alpha}_2]+[(X_2'X_2)\Gamma_2-X_2'Y]S\beta=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\beta}=S[(\bar{\alpha}'X'X\bar{\alpha})\beta'+\Gamma_2'X'_2X\bar{\alpha}-Y'X\bar{\alpha}]=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma_{ij}}=[X_2'(X_1\bar{\alpha}_1\beta'+X_2\bar{\alpha}_2\beta'-Y)S+(X_2'X_2)\Gamma_2S]_{ij}=0$$

ただし $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_1',\ \bar{\alpha}_2')'$ である。また最後の式は Γ_2 の0でない要素に関する偏微分とする。以上の諸式よりそれぞれ

$$\bar{\alpha}_1=(\beta'S\beta)^{-1}P_1S\beta$$

$$\bar{\alpha}_2=(\beta'S\beta)^{-1}(P-\Gamma_2)S\beta$$

$$\beta=(\bar{\alpha}'X'X\bar{\alpha})^{-1}(Y'-\Gamma_2'X_2')X\bar{\alpha}$$

$$\gamma_{ij}=[(X_2'X_2)^{-1}X_2'(Y-X_1\bar{\alpha}_1\beta'-X_2\bar{\alpha}_2\beta')]_{ij}$$

となる。ただし $P=(P_1',\ P_2')'$ とする。(5) さて，上式の $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ をその β に代入すれば

（5）　P_1, P_2 は次の正規方程式を満たすものとする。

$$\begin{bmatrix}X_1'X_1 & X_1'X_2\\ X_2'X_1 & X_2'X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1'Y\\ X_2'Y\end{bmatrix}$$

$$(Q^*S-\lambda I)\beta=0$$

を得る。ただし

$$Q^*=\varDelta'X(X'X)^{-1}X'\varDelta \qquad (\varDelta=Y-X_2\varGamma_2)$$

$$\lambda=(\beta'S\beta)(\bar{\alpha}'X'X\bar{\alpha})$$

である。ゆえにパラメーター β は行列 Q^*S の固有根 λ に対応する固有ベクトルである。しかも

$$F^*=tr[S\varGamma_2'(X_2'X_2)\varGamma_2]-2tr(S\varGamma_2'X_2'Y)-\lambda$$

より F^* は λ の減少関数であるから，上記の β はその最大固有根に対応する固有ベクトルである。そこで，正規化則として $\bar{\alpha}'X'X\bar{\alpha}=1$ を採用するとき，各推定量は次の通りである。

$$\hat{\bar{\alpha}}_1=(\hat{\beta}'S\hat{\beta})^{-1}P_1S\hat{\beta} \qquad (3.5.\mathrm{a})$$

$$\hat{\bar{\alpha}}_2=(\hat{\beta}'S\hat{\beta})^{-1}(P_2-\hat{\varGamma}_2)S\hat{\beta} \qquad (3.5.\mathrm{b})$$

$$\hat{\gamma}_{ij}=[(X_2'X_2)^{-1}X_2'(Y-X_1\hat{\bar{\alpha}}_1\hat{\beta}'-X_2\hat{\bar{\alpha}}_2\hat{\beta}')]_{ij} \qquad (3.5.\mathrm{c})$$

ただし，$\hat{\beta}$ は行列 $\hat{Q}^*S$ の最大固有根 $\hat{\lambda}$ に対応する固有ベクトルであって，次の関係を満たすものとする。

$$(\hat{Q}^*S-\hat{\lambda}I)\hat{\beta}=0 \qquad (3.5.\mathrm{d})$$

$$\hat{Q}^*=\hat{\varDelta}'X(X'X)^{-1}X'\hat{\varDelta} \qquad (\hat{\varDelta}=Y-X_2\hat{\varGamma}_2)$$

$$\hat{\lambda}=\hat{\beta}'S\hat{\beta}$$

ところで，上式を満足する MD 推定量を求めるためには反復法を用いなければならない。例えば，その第 s 反復過程において，あらかじめ推定量 $\hat{\varGamma}_2^{(s-1)}$ が与えられているとすれば，上の式における $\hat{\varGamma}_2$ をこの推定量で置きかえることによって（3.5.a)，(3.5.b）および（3.5.d）の各式より推定量 $\hat{\bar{\alpha}}_1^{(s)}$，$\hat{\bar{\alpha}}_2^{(s)}$，$\hat{\beta}^{(s)}$ を求めることができる。そして最後に（3.5.c）より，これらの推定量を用いて

$$\hat{\gamma}_{ij}^{(s)}=[(X_2'X_2)^{-1}X_2'(Y-X_1\hat{\bar{\alpha}}_1^{(s)}\hat{\beta}^{(s)\prime}-X_2\hat{\bar{\alpha}}_2^{(s)}\hat{\beta}^{(s)\prime})]_{ij}$$

を得る。そして上記の推定量を $\hat{\varGamma}_2^{(s)}$ の 0 でない要素とすればよい。

以上，本節では外生変数を導入することによって基本モデルを拡張し，その拡張モデルに関する識別とその推定について検討した。その結果，(1) 補助方

程式に含まれる外生変数が他のすべての方程式に含まれる外生変数と重複しない場合およびそれらの変数が重複しても，その重複した変数に関するすべてのパラメーターが適度識別であれば，ここでの拡張モデルは直交化によって，前章の基本モデル〔I〕に還元することができる。したがって，その MD 推定量の計算は簡単である。しかし (2) 上述の重複外生変数に関するパラメーターが，過剰識別であれば，その MD 推定量は explicit solutions とならない。

3.1.5 変数誤差モデルの推定

本節では一つの特殊なモデルの推定について，二，三の注意を加える。すなわち，拡張モデル〔II〕を $\beta_M=1$, $\gamma_{M\ J+1}=\gamma_{M\ J+2}=\cdots\cdots=\gamma_{M\ L}=0$ と特定化する。したがって，そのモデルは

〔II′〕

$$y_i(t)=\beta_i x^*(t)+\bar{\gamma}'_{i2}\bar{x}_2(t)+\bar{\gamma}'_{i3}\bar{x}_3(t)+u_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$

$$y_M(t)=x^*(t)+u_M(t)$$

$$x^*(t)=\bar{\alpha}_1'\bar{x}_1(t)+\bar{\alpha}_2'\bar{x}_2(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

となる。ただし

$$\bar{\gamma}_{i2}=(\gamma_{i\ J+1},\ \gamma_{i\ J+2},\ \cdots\cdots,\ \gamma_{i\ K})'$$

$$\bar{\gamma}_{i3}=(\gamma_{i\ K+1},\ \gamma_{i\ K+2},\ \cdots\cdots,\ \gamma_{i\ L})'$$

と定義しておく。このモデル〔II′〕は序説における変数誤差モデル (1.12) を拡張したものである。つまり第 M 番目の内生変数 y_M が観測不可能な真の変数 x^* の，誤差 u_M を含んだ観察値となっている。その誘導型は

$$y_i(t)=\beta_i\bar{\alpha}_1\bar{x}_1(t)+(\beta_i\bar{\alpha}_2+\bar{\gamma}'_{i2})\bar{x}_2(t)+\bar{\gamma}'_{i3}\bar{x}'_3(t)+u_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$

$$y_M(t)=\bar{\alpha}_1\bar{x}_1(t)+\bar{\alpha}_2\bar{x}_2(t)+u_M(t)$$

であるから，このモデルの全パラメーターは適度識別である。したがって，その MD 推定量は 3.1.3 節の特殊な場合として求めることができる。しかしこの補助方程式を含んだ変数誤差モデル〔II′〕は次の連方方程式体系に変形することもできる。

$$y_i(t)-\beta_i y_M(t)=\bar{\gamma}'_{i2}\bar{x}_2(t)+\bar{\gamma}'_{i3}\bar{x}_3(t)+u_i(t)-\beta_i u_M(t)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M-1)$$

$$y_M(t)=\bar{\alpha}_1\bar{x}_1(t)+\bar{\alpha}_2\bar{x}_2(t)+u_M(t) \tag{3.6}$$

したがって，通常の連立方程式における識別およびその推定法を適用することが可能である。特に $J\geqq 1$ のとき，モデルに含まれる全方程式は識別可能であるから完全情報最尤法あるいは三段階最小二乗法等の推定法を適用することができる。このモデルについては第4章において再びとりあげる。

3.2 多数の観測不可能変数

本章の序文において指摘したごとく，基本モデルにおける観測不可能な変数は一種類のみである。そこで本節では，この基本モデルを複数の観測不可能な変数が存在するモデルに拡張する。その際，各観測不可能な変数の決定式すなわちモデルの補助方程式に含まれる外生変数の種類によって，二，三の異ったモデルを想定することができる。(1)各補助方程式に含まれる外生変数が互いに相異する場合，(2)それらの外生変数が一部重複する場合および(3)まったく同一の外生変数が各補助方程式に含まれる場合である。このうち最初のモデルは，基本モデルの直接の拡張であって，定理2.1を修正することによってモデルの全構造パラメーターは識別可能である。これに対して，最後のモデルにおける識別は困難であり，多数の先験的制約を加えなければモデルは識別不能となる。また第二のモデルは上の二つのモデルの中間に位置するといえる。Kolluri [31] はこの(1)，(2)のモデルを，また Robinson [40] は(3)のモデルをそれぞれ検討している。本節では Kolluri [31] の(1)のモデルに添って説明する。

3.2.1 モデルの構成と識別

まず導入する観測不可能な変数を x_1^*，x_2^*，……，x_H^* の H 個とし，前章の基本モデル〔I〕を次のように拡張する。

$$\begin{aligned}
y_1(t)&=\beta_{11}x_1^*(t)+\beta_{12}x_2^*(t)+\cdots\cdots+\beta_{1H}x_H^*(t)+u_1(t)\\
y_2(t)&=\beta_{21}x_1^*(t)+\beta_{22}x_2^*(t)+\cdots\cdots+\beta_{2K}x_H^*(t)+u_2(t)\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& y_M(t)=\beta_{M1}x_1^*(t)+\beta_{M2}x_2^*(t)+\cdots\cdots+\beta_{MH}x_H^*(t)+u_M(t)\\
[\mathrm{III}]\quad & x_1^*(t)=\alpha_{11}x_{11}(t)+\alpha_{12}x_{12}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{1K_1}x_{1K_1}(t)\\
& x_2^*(t)=\alpha_{21}x_{21}(t)+\alpha_{22}x_{22}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{2K_2}x_{2K_2}(t)\\
& \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
& x_H^*(t)=\alpha_{H1}x_{H1}(t)+\alpha_{H1}x_{H2}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{HK_H}x_{HK_H}(t)\\
& \hspace{20em}(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)
\end{aligned}
$$

さて，第 i 補助方程式に含まれる外生変数 $x_{ij}(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K_i)$ は，上述の仮定に従って，各補助方程式ごとに相異するものとする[6]。そこで，このモデルを次のように表わしてをく。

$$
\begin{aligned}
& y(t)=\boldsymbol{\beta}_1x_1^*(t)+\boldsymbol{\beta}_2x_2^*(t)+\cdots\cdots+\boldsymbol{\beta}_Hx_H^*(t)+\boldsymbol{u}(t)\\
& x_i^*(t)=\boldsymbol{\alpha}_i'\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

ここで第2章の基本モデルに関する仮定を，このモデル〔III〕にも適用する。また記号の大部分は本章前節のものを利用するが，この段階であらたに加えるものは

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{x}_i(t)=(x_{i1}(t),\ x_{i2}(t),\ \cdots\cdots,\ x_{iK_i}(t))'\\
& \boldsymbol{\beta}_i=(\beta_{1i},\ \beta_{2i},\ \cdots\cdots,\ \beta_{Mi})' \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)\\
& \boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots\cdots,\ \alpha_{iK_i})'
\end{aligned}
$$

である。次にこのモデルの誘導型は

$$
\begin{aligned}
y(t)&=\boldsymbol{\Pi}_1'\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{\Pi}_2'\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots\cdots+\boldsymbol{\Pi}_H'\boldsymbol{x}_H(t)+\boldsymbol{v}(t)\\
&=\Pi'x(t)+v(t)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

ただし

$$
\boldsymbol{\Pi}_i=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i' \qquad (K_i\times M), \qquad v(t)=u(t)
$$

$$
\Pi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Pi}_H\end{pmatrix} \qquad (K\times M), \qquad x(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_H(t)\end{pmatrix}
$$

(6)　このモデル〔III〕の y_t の右辺に前節に従って観測可能な外生変数を導入することができる。このあらたなモデルの推定は，ここでのモデル〔III〕を基本モデルとみなして前節と同じ展開が可能である。

とする。また $K=K_1+K_2+\cdots\cdots+K_H$ である。さらに上式は

$$Y=X_1\boldsymbol{\Pi}_1+X_2\boldsymbol{\Pi}_2+\cdots\cdots+X_H\boldsymbol{\Pi}_H+V \tag{3.9}$$
$$=X\Pi+V$$

と表わされる。ただし

$$X_i=(\boldsymbol{x}_i(1),\ \boldsymbol{x}_i(2),\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{x}_i(T))' \qquad (T\times K_i)$$
$$X=(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_H) \qquad (T\times K)$$

とする。

以上の準備のもとに，このモデル〔III〕の識別について検討する。まず誘導パラメーター行列 Π の $K\times M$ 個の要素が $(M\times H+K)$ 個の構造パラメーターすなわち $M\times H$ 個の β_{ij} および K 個の α_{ij} によって表わされている。ところで，基本モデルの場合と同じように $\boldsymbol{\beta}_i$ の各要素を k（スカラー）倍し，逆に $\boldsymbol{\alpha}_i$ の要素を同じ k にて除しても，$\boldsymbol{\Pi}_i$ および $\boldsymbol{\Pi}_j$ $(i\neq j)$ の値は変らない。そこで，この不決定性を除くために正規化則を各 i について一個，合計 H 個導入することにする。この結果，決定すべき構造パラメーターの個数は $(M\times H+K-H)$ となる。ゆえに両パラメーターの差を r とすると

$$r=K\times M-(M\times H+K-H)$$
$$=(K-H)(M-1)$$

となる。多くのモデルにおいて $M\geqq 2$ および $K_i\geqq 1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$ すなわち $K=K_1+K_2+\cdots\cdots+K_H\geqq H$ であり，さらに少なくとも一つの i について $K_i>1$ であれば $K>H$ である。ゆえにこのモデルもほぼ過剰識別といえる。[(7)] そこで基本モデルの場合と同じように，構造パラメーターの一意性を得るために，行列 $\boldsymbol{\Pi}_i$ にその階数制約を加える。ところで，行列 $\boldsymbol{\Pi}_i=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i'$ と $\boldsymbol{\Pi}_j=\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\beta}_j'$ $(i\neq j)$ は互いに無関係であり，それぞれその階数は1である。そこで，基本モデルに関する定理2.1を拡張した次の定理が成立する。

（7）　上式の r が基本モデルの $r=(K-1)(M-1)$ (2.5) 式の拡張であることは明らかである。特にここで $K=H$ のとき，$K_i\geqq 1$ より $K_i=1$ が成立する。これは基本モデルにおける $K=1$（適度識別）が，ここでの各方程式に成立することを意味している。

定理 3.2

「H 個の正規化則のもとで，モデル〔Ⅲ〕のパラメーターが一意に決定されるための必要かつ充分条件は，誘導パラメーター行列 $\boldsymbol{\Pi}_i$ に関して階数制約

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\Pi}_i)=1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$$

が成立することである。」

定理 2.1 に関する補助定理を適用すれば，上述の定理の階数制約は $\boldsymbol{\Pi}_i$ の小行列式 (2×2) のうち $(K_i-1)(M-1)$ 個が 0 に等しいことを意味している。したがって，全体としての個数は $\sum_i^H(K_i-1)(M-1)=(K-H)(M-1)$ となる。この個数は識別のための次数条件に相当する前述の r の値に等しい。

ところで，このモデル〔Ⅲ〕の MD 推定量は，これまでと同じように，ある正値定符号行列 S に対して

$$F(S)=T\,tr(SW) \tag{2.8}$$

を最小にする $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$ を求めることである。そしてそれらの推定量の漸近的性質は基本モデルの場合とまったく同じであるので，ここではそれを省略し，ただちに推定の問題に移る。

3.2.2 MD 推定量

本節ではモデル〔Ⅲ〕に関する MD 推定量を求める。[8] まず，基本モデルと同じように $W=V+(1/T)(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)$ を利用すれば，上記の $F(S)$ は

$$F(S)=T\,tr(SV)+tr[S(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)]$$

と表わされる。ただし上式における V，P は前章の (2.9) 式で定義されている。ところで，上式の第一項は最小化と無関係であるからその第二項のみを F^* として

$$F^*=tr[S(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)] \tag{3.10}$$

とする。いま正規方程式 $(X'X)P=X'Y$ に $\Pi=(\boldsymbol{\Pi}_1',\ \boldsymbol{\Pi}_2',\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{\Pi}_H')'$ と同じ分割を行ない

---

(8) Kolluri [31] では $S=V^{-1}$ とした GLS 推定量が求められている。

$$\begin{pmatrix} X_1X_1 & X_1X_2 & \cdots\cdots & X_1X_H \\ X_2X_1 & X_2X_2 & \cdots\cdots & X_2X_H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_HX_1 & X_HX_2 & \cdots\cdots & X_HX_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \\ \vdots \\ X_H'Y \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

を得る。上式の左辺の $X'X$ と P の分割および前述の Π の分割より

$$(\Pi-P)'X'X(\Pi-P)=\sum_{i,j}^{H}(\boldsymbol{\Pi}_i-P_i)'X_i'X_j(\boldsymbol{\Pi}_j-P_j)$$

が成立する。次に上式右辺の第 i, j 項は

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\Pi}_i-P_i)'X_i'X_j(\boldsymbol{\Pi}_j-P_j)\\&=\boldsymbol{\Pi}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\Pi}_j-\boldsymbol{\Pi}_i'X_i'X_jP_j-P_i'X_i'X_j\boldsymbol{\Pi}_j+P_i'X_i'X_jP_j\\&=\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\beta}_j'-\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_jP_j-P_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\beta}_j'+P_i'X_i'X_jP_j\end{aligned}$$

となる。そこで，上式を F^* に代入して

$$\begin{aligned}F^*=\sum_{i,j}^{H}\{(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\beta}_j'S\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta}_i'SP_j'X_j'X_i\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\beta}_j'SP_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j\\+tr(SP_i'X_i'X_jP_j)\}\end{aligned}$$

を得る。ところで，上式の最後の項は F^* の最小化に無関係であるから，これを除いた残りをあらためて F^{**} とする。

$$F^{**}=\sum_{i,j}^{H}\{(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\beta}_j'S\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta}_i'SP_j'X_j'X_i\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\beta}_j'SP_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j\}$$

次に上述の正規方程式 (3.11) を転置し，その両辺の第 i 要素に左から $\boldsymbol{\beta}_i'S$ を右から $\boldsymbol{\alpha}_i$ を乗じて，それぞれ合計すると

$$\sum_{i,j}^{H}\boldsymbol{\beta}_i'SP_j'X_j'X_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i}^{H}\boldsymbol{\beta}_i'Y'X_i\boldsymbol{\alpha}_i$$

を得る。この関係式を用いて F^{**} は次のごとく表わされる。

$$F^{**}=\sum_{i,j}^{H}(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\beta}_j'S\boldsymbol{\beta}_i)-2\sum_{i}^{H}\boldsymbol{\beta}_i'SY'X_i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{3.12}$$

ここで，F^{**} の最小化を $X_i'X_j=\boldsymbol{0}$ の場合と $X_i'X_j\neq\boldsymbol{0}$ の場合との二つに分けて検討する。(9)

（9） Kolluri [31] (44, 46)。各補助方程式に含まれる外生変数が互いに相異していて

(1)　$X_i'X_j=\mathbf{0}$ $(i\neq j)$。このとき，(3.12) 式は

$$F^{**}=\sum_i^H\{(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_i\boldsymbol{\alpha}_i)(\boldsymbol{\beta}_i'S\boldsymbol{\beta}_i)-2\alpha_i'X_i'YS\beta_i\} \tag{3.13}$$

となる。上式の右辺は $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ に関して完全に分離され，かつ括弧のなかは基本モデルに関する (2.10) 式に等しい。したがって，基本モデルの MD 推定量 (2.13) のあるいは (2.14) 式をそのまま適用することができる。いま H 個の正規化則を $\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_i\boldsymbol{\alpha}_i=1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$ とすると，ここでの $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ の MD 推定量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ は (2.13) 式より次のごとく決定する。

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=\hat{\lambda}_iP_iS\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\\&(Q_iS-\hat{\lambda}_iI)\hat{\boldsymbol{\beta}}_i=\mathbf{0}\qquad(Q_i=YX_iP_i)\\&\hat{\lambda}_i=\hat{\boldsymbol{\beta}}_i'S\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)\end{aligned} \tag{3.14}$$

ただし $\hat{\lambda}_i$ は行列 Q_iS の最大固有根とする。

(2)　$X_i'X_j\neq\mathbf{0}$。この場合の MD 推定量は，同じ H 個の正規化則を適用して

$$F^{**}+\sum_i^H\mu_i(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_i\boldsymbol{\alpha}_i-1) \tag{3.15}$$

を最小にする $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ である。ただし μ_i はラグランジュ乗数とする。上式は $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ に関して分離されない。しかし基本モデルの場合と同じように $\boldsymbol{\alpha}_i$ および $\boldsymbol{\beta}_i$ に関する偏微分により $\mu_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$ を得る。これを利用して次の関係式が成立する。

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_i}=\sum_j^HX_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j(\boldsymbol{\beta}_j'S\boldsymbol{\beta}_i)-X_i'YS\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i}=S\boldsymbol{\beta}_i+\sum_{j\neq i}^H(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)S\boldsymbol{\beta}_j-SY'X_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0} \tag{3.17}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ の MD 推定量を $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ とすると

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i'S\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)^{-1}(X_i'X_i)^{-1}\{X_i'YS\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\sum_{j\neq i}^HX_i'X_j\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j'S\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)\} \tag{3.18}$$

も，その観測値にはいくらかの相関が存在すると考えられるから，$X_iX_j\neq\mathbf{0}$ の成立が普通である。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i=Y'X_i\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i-\sum_{j\neq i}^{H}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i'X_i'X_j\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j)\hat{\boldsymbol{\beta}}_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H) \quad (3.19)$$

と決定する。いま上式において $X_i'X_j=\mathbf{0}$ とすると

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=(\hat{\boldsymbol{\beta}}_iS\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)^{-1}P_iS\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i=Y'X_i\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$$

が得られる。これより（3.14）が導かれることは容易に確かめられる。

次に上式の（3.18），（3.19）の両式によって示される MD 推定量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ の存在とその解法について検討する。そこで，以下 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ を単に $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ と表わすことにする。ところで，この両式は α_{ij}，β_{ki}（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K_i,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M$）に関する非線型の連立方程式体系となっている。したがって，その解の存在の証明とその解法は簡単ではない。特に，この両式のうち（3.18）式は $\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0}$において不連続であるため，その解の存在は限定される。このことは Brouwer の不動点定理の適用によって示される。

そこで H 個の正規化則を考慮して，$(M\times H+K-H)$ 個の未知数 α_{ij}，β_{ki} をベクトル θ の要素としておく。このとき，（3.18）および（3.19）の両式は次のように一般的に表わされる。

$$\theta_i=f_i(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\cdots,\ \theta_{i-1},\ \theta_{i+1},\ \cdots\cdots,\ \theta_N)\ (i=1,2,\cdots,H)$$

あるいは一括して

$$\theta=f(\theta)$$

となる。ここで θ_i はベクトル θ の第 i 要素であり，$N=M\times H+K-H$ とする。いま未知数であるパラメーター θ の可能な集合 Φ を N 次限ユークリッド空間の凸部分集合と設定しておく。このとき，上述の関数 f は Φ の点を同じ Φ の点に対応させる関数である。したがって，この関数 f が集合 Φ の全域にわたって連続であれば，ここでのモデル〔Ⅲ〕の MD 推定量は，Brouwer の不動点定理[(10)]より，その不動点

$$\theta^*=f(\theta^*)$$

として存在することになる。しかしながら，行列 S は正値定符号行列であるか

(10)　二階堂［39］(300) あるいは鈴木［45］(215)。

ら $\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0}$ のときに限って $\boldsymbol{\beta}_i'S\boldsymbol{\beta}_i=0$ となり，このとき (3.18) は明らかに不連続となる。この結果，可能なパラメーター空間の全域にわたってMD推定量の存在を保証することはできない。少なくとも，$\beta\neq\mathbf{0}$ のパラメーター領域に限られることになる。

次に，α，β の実際の解法について検討することにする。非線型計量モデルにおける推定量の解法については，Goldfeld and Quandt [16] (chap. 1), Malinvaud [35] (341～48), Lawley and Maxwell [33] (138～46) 等において説明されている。ここでは，そのうちの Newton-Raphson 法を適用して，モデル〔III〕の MD 推定量について検討する。そこで (3.15) 式の F^{**} にかえって，その $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\beta}_i$ を要素とする (K_i+M_i) 次限ベクトルをあらためて δ と定義しておく。いま第 s 反復過程において与えられる δ を $\delta^{(s)}$ とすると，その第 $s+1$ 反復過程において用いられるパラメーター $\delta^{(s+1)}$ は反復公式

$$\delta^{(s+1)}=\delta^{(s)}-\left[\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\delta\partial\delta'}\right]^{-1}_{\delta^{(s)}}\left[\frac{\partial F^{**}}{\partial\delta}\right]_{\delta^{(s)}}$$

によって与えられる。上式における $[\partial F^{**}/\partial\delta]_{\delta^{(s)}}$ は前述の (3.16), (3.17) において定義された一階の偏導関数で $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i^{(s)}$，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}_i^{(s)}$ とした値である。また $[\partial^2F^{**}/\partial\delta\partial\delta']_{\delta^{(s)}}$ はその二階の偏導関数の値であり，以下に示される。

$$\left[\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\delta\partial\delta'}\right]_{\delta^{(s)}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_i\partial\boldsymbol{\alpha}_i'} & \dfrac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_i\partial\boldsymbol{\beta}_i'}\\[2ex] \dfrac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i\partial\boldsymbol{\alpha}_i'} & \dfrac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i\partial\boldsymbol{\beta}_i'}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{\alpha}_i^{(s)},\ \boldsymbol{\beta}_i^{(s)}}$$

ただし上式における各要素は次の通りである。

$$\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_i\partial\boldsymbol{\alpha}_i'}=(\boldsymbol{\beta}_i'S\boldsymbol{\beta}_i)X_i'X_i$$

$$\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_i\partial\boldsymbol{\beta}'_i}=2(X_i'X_i)\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i'S+\sum_{j\neq i}^{H}(X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\beta}_j'S-X_i'YS$$

$$\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i\partial\boldsymbol{\beta}'_i}=S$$

$$\frac{\partial^2F^{**}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i\partial\boldsymbol{\alpha}'_i}=\sum_{j\neq i}^{H}S\boldsymbol{\beta}_j(\boldsymbol{\alpha}_j'X_j'X_i)-SYX_i$$

3.3　補助方程式の確率化

本章の初めにおいて述べたごとく，基本モデル〔Ⅰ〕を構成する補助方程式は確率項を含まず，外生変数のみの exact function として表わされている。実際の経済モデルにあたる時，この仮定は一つの制約となる。そこで，本節では基本モデル〔Ⅰ〕における補助方程式すなわち観測不可能な変数の決定式に確率項を導入し，この拡張されたモデルの推定について検討する。基本モデルに関するかかる拡張とその推定は，Goldberger [13]，[14] あるいは Jöreskog and Goldberger [28]，さらに多数の観測不可能な変数が存在するモデルの確率化は Kolluri [31] において検討されている。これらのモデルおよび推定における共通した特徴は，(1)因子分析との関連においてモデルの構成がなされている。(2)このため，確率項の分散共分散行列 Σ の非対角要素は0と仮定され，極めて単純な確率構造が設定されている。このことはモデルの実際への適用において，再び大きな制約となる。そこで，まず一つの観測不可能変数が存在する基本モデルの確率化について説明し，続いて多数の観測不可能な変数が存在する拡張モデル〔Ⅲ〕の確率化について検討する。

3.3.1　確率化（1）

まず，Goldberger [13]，[14] および Jöreskog and Goldberger [28] にそって，観測不可能変数が一個の場合の補助方程式の確率化について検討する。そこで，基本モデル〔Ⅰ〕を次のように拡張する。

$$
\text{〔Ⅳ〕}\quad
\begin{array}{l}
y_1(t)=\beta_1 x(t)+u_1(t)\\
y_2(t)=\beta_2 x(t)+u_2(t)\\
\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
y_M(t)=\beta_M x(t)+u_M(t)\\
x(t)=\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)+\cdots\cdots+\alpha_K x_K(t)+\varepsilon(t)
\end{array}
\qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)
$$

このモデルの基本モデル〔Ⅰ〕からの相異は，明らかに確率項 ε が存在することである。そこで，モデルの全確率項に関する仮定を次のように表わす。

仮定　1′　$E(u(t))=0$　　$(M\times 1)$

$$E(u(t)u(t)')=\Sigma \qquad (\text{対角行列 } M\times M)$$
$$E(u(t)u(s)')=\mathbf{0} \qquad (t\neq s)\ (M\times M)$$
$$E(\varepsilon(t))=0$$
$$E(\varepsilon^2(t))=\sigma^2$$
$$E(\varepsilon(t)\varepsilon(s))=0 \qquad (t\neq s)$$
$$E(\varepsilon(t)u(p)')=\mathbf{0} \qquad (1\times M) \qquad (p,\ s,\ t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

すなわち，基本モデルとの相異は確率項 u の分散分散行列が対角行列 Σ に限定され，さらにあらたに導入された確率項 ε がその確率項 u と無相関であるということである。この結果，モデル〔Ⅳ〕の確率構造は特に単純である。すなわち，モデルに含まれるすべての確率項は，同時点においてもまた系列的にも無相関である。そこで，このモデルの誘導型は

$$y(t)=\Pi' x(t)+v(t) \tag{3.20}$$

となる。ただし

$$\Pi=\alpha\beta', \qquad v(t)=\beta\varepsilon(t)+u(t)$$

とする。したがって v の分散共分散行列を Ω とすると

$$\Omega=\Sigma+\sigma^2\beta\beta' \tag{3.21}$$

が成立する。なお，記号については基本モデルの場合と同じである。

さて，以上の考察からわかる通り，このモデルは誘導型に対して二種類の制約を持っている。

(1) $\Pi=\alpha\beta'$（係数制約）。つまり，誘導パラメーター行列 Π の $K\times M$ 個の要素が構造パラメーターの $K+M$ 個によって表わされている。この係数制約はすでに述べた基本モデルのそれと同じである。またそれは，通常の計量経済学の連立方程式体系において，その構造パラメーターと誘導型パラメーターとの対応関係を示す式に匹適する。

(2) $\Omega=\Sigma+\sigma^2\beta\beta'$（分散制約）。誘導型における確率項の分散共分散行列 Ω が，構造型における確率項の分散共分散行列 Σ（階数 M）といま一つの行列 $\sigma^2\beta\beta'$（階数1）との和として表わされている。そして前者 Ω の独立な要素の個数は $1/2M(M+1)$ であり，後者の $\Sigma+\sigma^2\beta\beta$ のそれは $(1+M)$ である。

ただし β はすでに(1)の係数制約のなかに含めている。この分散制約は，いわゆる因子分析（factor analysis）において想定される分散構造と同じである。[(11)]そこで，上記の二種類の制約のもとで，ここで拡張モデルに関するに識別ついて検討する。まず，両制約において β を k（スカラー）倍し，α，σ を同じ k で除しても左辺の Π，Ω は不変である。そこで，この不決定性（indeterminancy）を除くために $\sigma^2=1$ をその正規化則として採用する。この結果，係数制約に関する誘導パラメーターと求める構造パラメーターとの差は $r_1=K\times M-(K+M)$ となる。他方，分散制約に関する両者の差は，Ω の独立な要素の個数と Σ の対角要素との差 $r_2=1/2M(M+1)-M$ である。この結果，モデル全体として誘導型に対する制約の個数は

$$
\begin{aligned}
r&=r_1+r_2\\
&=[(K-1)(M-1)-1]+\left[\frac{1}{2}M(M-1)\right]\\
&=(K-1)(M-1)+\frac{1}{2}(M+1)(M-2)
\end{aligned}
$$

となる。通常の場合 $M\geqq 2$ であるから，ここでの拡張モデル〔Ⅳ〕はほぼ過剰識別の状態にあるといえる。係数制約によって誘導型に課せられる制約の数は，第2章の定理2.1より $(K-1)(M-1)$ であるから，分散制約によってあらたに加わる制約の個数は $1/2(M+1)(M-2)$ である。

ところで，以上のモデル〔Ⅳ〕の確率構造は前述のごとく極めて制約的である。基本モデルにおいては，確率項 u の各要素は自由な相関を持ったが，ここでは互いに無相関として扱われている。このような特殊な確率構造は通常の経済モデルにおいては，あまりその例をみない。[(12)]そこで，いまモデル〔Ⅳ〕にお

(11)　つまり，ここでの $v=\beta\varepsilon+u$（ただし添字 t を略す）において，v は因子分析の変量（variate），ε は唯一の共通因子（common factor），β は因子負荷量（factor loading），u は特殊因子または確率変量（random variate）にそれぞれ相当する。因子分析においては，これらの変数間にその分散構造 $\Omega=\Sigma+\beta\beta'$ を仮定する。ただし，共通因子は互いに直交化されるため $\sigma^2=1$ である（Lawley and Maxwell [33] chap. 2)。なお因子モデルとの比較は次節において再論する。

(12)　Fisher [6]（chap. 3, 4）は確率項の分散共分散に関する制約を用いて構造係

いて，その確率項uが，基本モデルと同じように，自由な相関を持てばすなわちその分散共分散行列が対角行列でないと仮定すれば，次のことが明らかになる。

(1) 正規化則として $\sigma^2=1$ のみを仮定するとき。この場合，行列Σの非対角要素のうち独立な $1/2M(M-1)$ 個の要素が求める構造パラメーターとして加わることになる。したがって，モデル全体として誘導型に対する制約の個数rは

$$r=[(K-1)(M-1)-1]+0$$

となる。この結果，分散制約は誘導型に対する制約とはならない。他方，上述の通り係数制約によってもたらされる制約の個数は定理2.1より $(K-1)(M-1)$ であるから，一つの構造パラメーターが未決定のまま残されることになる。

(2) 正規化則 $\sigma^2=1$ および他に一つの先験的制約が仮定されるとき。いま後者の先験的制約が構造係数 α，β に関するものであれば，[13] $r_1=K\times M-(K+M)-1$ となり，モデル全体として誘導型に対する制約の個数は

$$r=[(K-1)(M-1)]+0$$

となる。上述の通り，係数制約によって誘導型に課せられる制約の個数は $(K-1)(M-1)$ だから，すべての構造パラメーターは一意に決定されることになる。以上の二つの考察から明らかなごとく，観測不可能な変数に関する補助方程式を確率化したモデルにおいて，基本モデルと同じように確率項uに自由な相関を許したとき，更に一つの先験的制約を加えなければ，構造パラメーターは一意に決定されない。

次に，もとのモデル〔Ⅳ〕とその仮定$1'$にかえって，構造係数 α，β の推定

数の識別を検討しているが，実際にこのような特殊な分散構造を先験的に知ることは，経済モデルに関して困難である。しかし因子分析におけるように，この確率項のなかに特殊因子を含める場合には，このような特殊な分散構造の設定も困難ではない。

(13) 例えば，すでに用いた $\alpha'X'X\alpha=1$，$\beta'V^{-1}\beta=1$ をその先験的制約として適用できる。あるいはσ^2に関する正規化則と合せて $\alpha'(X'X/T)\alpha+\sigma^2=1$，$0\leqq\sigma^2<1$ とすることもできる (Goldberger [13] 10)。

について検討する。Jöreskog and Goldberger [28] はこの推定に関して次の三つの方法を考察している。(1)最尤法。この方法では前述の係数および分散の両制約が同時に考慮される。(2)因子分析による方法。ここでは係数制約が無視され，分散制約 $\Omega=\Sigma+\beta\beta'$（ただし $\sigma^2=1$ とする）のみが利用される。すなわち，Ω の標本推定量として誘導型における回帰残差の分散共分散行列 V をあてる。そしてこの行列に関する一因子分析によってその因子負荷量にあたる β および特殊因子分散にあたる Σ の対角要素をそれぞれ推定する。他方，α の推定量はその因子評点（factor scores）の推定量を通して決定する。(14) (3) GLS 推定法による方法。この方法では，まず係数制約のみによって α，β の GLS 推定量を求める。これはすでに述べた (2.13) あるいは (2.14) において $S=V^{-1}$ とした推定量である。他方 Σ および σ^2 の推定量は分散制約 $\Omega=\Sigma+\sigma^2\beta\beta'$ にもとずく一因子分析が用いられる。その際，β の推定量として上述の GLS 推定量をまた Ω の推定量としては誘導型の GLS による推定残差の分散共分散行列を用いる。ところで，以上の方法のうち(2)および(3)はかなり技巧的であり，さらにその漸近的性質も(1)の最尤法に劣ることが指摘されている。(15) そこで，以下(1)の最尤法による推定について紹介しておく。

まず誘導型 (3.20) 式の確率項 v が平均 0，分散 Ω の正規分布にしたがって独立に分布するものとする。そのとき，標本からの尤度関数は，その最大化に無関係な部分を除いて

$$L^*=\log|\Omega|+tr(\Omega^{-1}W) \qquad (3.22)$$

となる。これは基本モデルの場合の (2.31) と同じである。しかし，ここでは二つの制約 $\Pi=\alpha\beta'$，$\Omega=\Sigma+\beta\beta'$（ただし $\sigma^2=1$ とする）に従って上式 (3.22) を最小にする α，β および Σ の対角要素（σ_{ii}，$i=1, 2, \cdots\cdots, M$）を求めることである。以下の記号の大半はこれまでと同じであるが，特に必要なも

(14) 因子評点を推定する段階の因子モデルは脚注(11)のものでなくて $y=\beta x^*+u$ である。この共通因子 x^* の推定量が因子評点となり，これを用いて補助方程式 $x^*=\alpha' x$ より α の推定量を求める（Jöreskog and Goldberger [28] 636）。

(15) Jöreskog and Goldberger [28] 636～37

のの再定義をも含めて，次のように定めておく。

$$W=\frac{1}{T}(Y-X\Pi)'(Y-X\Pi)$$

$$=\frac{1}{T}(Y'Y-\beta\alpha'XY'-Y'X\alpha\beta'+\beta\rho\beta') \tag{3.23}$$

$$V=\frac{1}{T}(Y-XP)'(Y-XP)=\frac{1}{T}(Y'Y-Q)$$

$$Q=Y'XP,\qquad P=(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\lambda=\beta'\Sigma^{-1}\beta,\qquad \rho=\alpha'X'X\alpha$$

さらに Ω に関する次の関係式が成立する。[16]

$$\Omega^{-1}=(\Sigma+\beta\beta')^{-1}=\Sigma^{-1}-(1+\lambda)^{-1}\Sigma^{-1}\beta\beta'\Sigma^{-1} \tag{3.24}$$

$$|\Omega|=|\Sigma|(1+\lambda) \tag{3.25}$$

$$\Omega^{-1}\beta=[1/(1+\lambda)]\Sigma^{-1}\beta \tag{3.26}$$

$$\beta'\Omega^{-1}\beta=\lambda/(1+\lambda) \tag{3.27}$$

いま α，β，Σ の任意の要素を δ_i とすると

$$\frac{\partial L^*}{\partial\delta_i}=tr\left[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\delta_i}\right]+tr\left[\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial\delta_i}\right] \tag{3.28}$$

を得る。これより α_i に関する偏微分は $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}=0$ であることを考量して

$$\frac{\partial L^*}{\partial\alpha_i}=tr\left[\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}[tr(\Omega^{-1}W)]$$

上式は $S=\Omega^{-1}$ とした（2.8′）式を α_i に関して偏微分することと同じであるから，そのMD推定量（2.11）式より

$$\alpha=\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)P\Omega^{-1}\beta=\frac{1}{\lambda}P\Sigma^{-1}\beta \tag{3.29}$$

となる。次に β_i に関する偏微分は（3.23）および分散制約 $\Omega=\Sigma+\beta\beta'$ を考慮して

$$tr\left[\Omega^{-1}\frac{\partial W}{\partial\beta_i}\right]=2(-\Omega^{-1}Y'X\alpha+\rho\Omega^{-1}\beta)_i$$

---

(16)　Lawley and Maxwell [33] 27.

$$tr\left[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i}\right]=2[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}\beta]_i$$

を得る。ただし，上式右辺の $[\cdot]_i$ は括弧内のベクトルの第 i 要素を示す。以上の両式を（3.28）式に代入して一括すれば

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L^*}{\partial\beta_i}=\Omega^{-1}[(\Omega-W)\Omega^{-1}\beta-Y'X\alpha+\rho\beta]=\mathbf{0}$$

となる。これより

$$W\Omega^{-1}\beta+Y'X\alpha=(1+\rho)\beta \qquad (3.30)$$

あるいは（3.29）および関係式 $W\Omega^{-1}\beta=V\Omega^{-1}\beta$(17) を上式に代入して

$$\left(V+\frac{1+\lambda}{\lambda}Q\right)\Omega^{-1}\beta=(1+\rho)\beta \qquad (3.31)$$

を得る。上式は（3.26），（3,29）式を用いて次のごとく表わすこともできる。

$$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}V+Q\right)\Sigma^{-1}\beta=\kappa\beta \qquad (3.32)$$

ただし $\kappa=(\lambda+h/\lambda)$ $(h=\beta'(\Sigma^{-1}Q\Sigma^{-1})\beta)$ とする。上式から明らかなごとく，求める β は左辺の行列 $\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}V+Q\right)\Sigma^{-1}$ の固有根 κ に対する固有ベクトルである。さらに

$$L^*=\log|\Sigma|+tr(\Sigma^{-1}Y'Y)+\log(1+\lambda)-\kappa$$

が成立するので(18)，L^* を最小にする β は上述の行列の最大固有根に対応する固

(17) 行列 W の定義式（3.23）で，その α に（3.29）の中央の項を代入し，その値を $W(\Omega^{-1})$ とすると

$$W(\Omega^{-1})\Omega^{-1}\beta=\frac{1}{T}(Y'Y\Omega^{-1}\beta-Q\Omega^{-1}\beta)=\frac{1}{T}(Y'Y-Q)\Omega^{-1}\beta$$
$$=V\Omega^{-1}\beta$$

(18) Goldberger [14] (207) にもとづいて導出する。前注と同じく W に（3.29）の第三項の値を代入したものを $W(\Sigma^{-1})$ とする。これを（3.22）の W に代入し，（3.24）を利用すると

$$L^*=\log|\Sigma|+tr(\Sigma^{-1}Y'Y)+\log(1+\lambda)-(1+\lambda)^{-1}g-\lambda^{-1}h$$

となる。ただし $g=\beta'(\Sigma^{-1}V\Sigma^{-1})\beta$，$h=\beta'(\Sigma^{-1}Q\Sigma^{-1})\beta$ とする。次に（3.32）の左から $\beta'\Sigma^{-1}$ をかけると $[\lambda/(1+\lambda)]g+h=\kappa\lambda$ を得る。したがって $g=\lambda(1+\lambda)$ となる。これらの値を上式の L^* に代入して本文の式を得る。

有ベクトルである。

最後に分散共分散行列 Σ の対角要素 σ_{ii} の推定について検討する。まず $(\partial W/\partial\sigma_{ii})=0$ および分散制約より $(\partial\Omega/\partial\sigma_{ii})=d_i d_i'$ が成立する．ただし d_i は第 i 要素が1で他の要素がすべて0の列ベクトルとする．これより

$$\frac{\partial L^*}{\partial\sigma_{ii}}=tr[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}d_i d']$$
$$=[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}]_{ii}$$

となる。ところで，上式右辺の行列 $\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}$ は (3.29) および (3.32) 式用いて

$$\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}=\Sigma^{-1}[\Sigma-Y'Y+(1+\rho)\beta\beta']\Sigma^{-1} \tag{3.33}$$

と表わされる。ゆえに，$(\partial L^*/\partial\sigma_{ii})=0$ より σ_{ii} は

$$\sigma_{ii}=[Y'Y]_{ii}-(1+\rho)\beta_i^2 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M) \tag{3.34}$$

と決定する。ただし上式の右辺の $[\cdot]_{ii}$ はその括弧の中の行列の第 i，i 要素とする。

以上より，各推定量に caret 記号を付けて表わすと，モデル〔Ⅳ〕のパラメーターの最尤推定量は (3.29)，(3.32)，(3.34) の各式より

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{\hat{\lambda}}P\Sigma^{-1}\hat{\beta} \tag{3.35}$$

$$\hat{\sigma}_{ii}=[Y'Y]_{ii}-(1+\hat{\rho})\hat{\beta}_i^2 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M) \tag{3.36}$$

$$\left(\frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}V+Q\right)\hat{\Sigma}^{-1}\beta=\hat{\kappa}\hat{\beta} \tag{3.37}$$

ただし $\hat{\kappa}$ は行列 $\left(\frac{\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}V+Q\right)\hat{\Sigma}^{-1}$ の最大固有根とする．また，

$$\hat{\rho}=\hat{\alpha}X'X\hat{\alpha}, \qquad \hat{\lambda}=\hat{\beta}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\beta}, \qquad [\hat{\Sigma}]_{ii}=\hat{\sigma}_{ii}$$

である。

これらの推定式の一部は因子分析における，その未知パラメーターの最尤推定量に対応している．事実，(3.36) 式は特殊因子分散の推定式および (3.37) 式は因子負荷量の推定式にそれぞれ対応している[(19)]。しかし (3.35) 式は通常の

因子分析には存在しない．これはわれわれのモデルが補助方程式を含んだ確証的（confirmatory）因子モデルに相当するからである。しかし，このような因子分析との類似性のため，実際の計算過程においても，因子分析のそれと同じ反復法を適用することができる．その最も単純な方法の一つは，上式の(3.35)～(3.37)を直接用いる方法である[20]。他方，Jöreskog and Goldberger [28] は Jöreskog [26] の計算法を適用している．この方法は，(3.22)の L^* の反復最小化にいわゆる Fletcher and Powell の手法[21]を用いるものである。

3.3.2 確率化（2）

前節でとり上げた拡張モデル〔Ⅳ〕は一個の確率化された観測不可能変数を含むものであった。本節では，多数の確率化された観測不可能変数を持つモデルについて，その識別と推定を考察する。そのモデルは本章3.2節のモデル〔Ⅲ〕を，その H 個の観測不可能な変数について，確率化したものである。すなわち，そのモデルは次のごとく表わされる。

$$y_i(t)=\beta_{i1}x_1^*(t)+\beta_{i2}x_2^*(t)+\cdots\cdots+\beta_{iH}x_H^*(t)+u_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$$

〔Ⅴ〕

$$\begin{aligned}
x_1^*(t)&=\alpha_{11}x_{11}(t)+\alpha_{12}x_{12}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{1K_1}x_{1K_1}(t)+\varepsilon_1(t)\\
x_2^*(t)&=\alpha_{21}x_{21}(t)+\alpha_{22}x_{22}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{2K_2}x_{2K_2}(t)+\varepsilon_2(t)\\
&\ \ \vdots\\
x_H^*(t)&=\alpha_{H1}x_{H1}(t)+\alpha_{H2}x_{H2}(t)+\cdots\cdots+\alpha_{HK_H}x_{HK_H}(t)+\varepsilon_H(t)
\end{aligned} \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

上式右辺の ε_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$ があらたに加わった確率項である。また上記モデルに関する仮定および記号はこれまでのモデルと同じであるが，ε_i に関する部分は次の通りである[22]。

$$E(\varepsilon_i(t))=0, \qquad E(\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(t))=0 \qquad (i\neq j)$$

---

(19) Lawley and Maxwell [33] (chap. 4) の (4.9) および (4.19) 式が対応する。
(20) 同上 (first edition, reprinted 1967), 邦訳18～20。
(21) Fletcher and Powell [7].
(22) 記号についてモデル〔Ⅲ〕また仮定については基本モデル〔Ⅰ〕をそれぞれ参照されたい。

$$E(\varepsilon_i^2(t))=\sigma_i^2,\qquad E(\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(s))=0\qquad (t\neq s)$$
$$E(u_i(t)\varepsilon_j(s))=0$$

つまりモデルの全確率項は互いに無相関である。次に誘導型は

$$\begin{aligned}y(t)&=\boldsymbol{\Pi}_1'\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{\Pi}_2'\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots\cdots+\boldsymbol{\Pi}_H'\boldsymbol{x}_H(t)+\boldsymbol{v}(t)\\&=\Pi' x(t)+v(t)\end{aligned}$$

である。ただし

$$\boldsymbol{\Pi}_i=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i',\qquad \Pi=(\boldsymbol{\Pi}_1',\ \boldsymbol{\Pi}_2',\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{\Pi}_H')'$$
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\beta}_1\varepsilon_1(t)+\boldsymbol{\beta}_2\varepsilon_2(t)+\cdots\cdots+\boldsymbol{\beta}_H\varepsilon_H(t)\tag{3.38}$$

とする。これより $\boldsymbol{v}(t)$ の分散共分散行列 Ω は，確率項に関する諸仮定を用いて次のように表わされる。

$$\Omega=\Sigma+\sigma_1^2\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_1'+\sigma_2^2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_2'+\cdots\cdots+\sigma_H^2\boldsymbol{\beta}_H\boldsymbol{\beta}_H'$$

さらに係数行列 A, $\boldsymbol{B}$ および分散行列 $\boldsymbol{E}$ を次のごとく定義する。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \boldsymbol{\alpha}_H\end{pmatrix}_{(K\times H)},\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{\beta}_H)\quad (M\times H)$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \sigma_H^2\end{pmatrix}_{(H\times H)}$$

このとき，このモデル〔V〕の係数制約と分散制約はそれぞれ次のように表わされる。

$$\Pi=\boldsymbol{AB}'\tag{3.39}$$
$$\Omega=\Sigma+\boldsymbol{BEB}'\tag{3.40}$$

ここで，われわれのモデル〔V〕と因子分析と関連を明らかにしておきたい。

(1) 確率化された補助方程式が存在する場合（$\varepsilon_i\neq 0$, $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$）。上記の（3.38）式で表わされる関係が，$H$ 個の副次的共通因子 ε_i を持つ因子モデルにあたる。その β_{ij} および $\boldsymbol{u}_i$ がそれぞれ第 i 変量 v_i における第 j 番目の因子の負荷量およびその特殊因子（あるいは確率変量）となる。そしてこれらの諸量間に存在

する分散構造が上の (3.40) 式である。しかしわれわれのモデルが通常の因子モデルと相異する点は，われわれのモデルが (3.39) 式で示される係数制約を含んでいることである。この式は因子負荷量 β_{ij} に対する制約を表わしている。このことからわれわれのモデルが確証的 (confirmatory) 因子モデルに関連することは明らかである。(2) 補助方程式が存在しない場合 ($\varepsilon_i=0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$)。このとき，モデル〔V〕そのものがH個の共通因子 x_i^* を持った因子モデルとなる。そして β_{ij}, u_i が，上述と同じように，それぞれモデルの因子負荷量および特殊因子となる。ここでは因子負荷量に対する制約は存在しない。ゆえにこの場合のモデルはいわゆる探索的 (exploratory) 因子モデルと呼ぶことができる。

次にモデル〔V〕の最尤推定について検討したい。ところでこのモデルには二種類の不決定性 (indeterminancy) が存在する。その一つは分散行列 $\boldsymbol{E}$ に関するものである。いま任意の対角行列を $\boldsymbol{D}$ とする。そのとき，(3.39) および (3.40) 式の行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ をそれぞれ $\boldsymbol{AD}^{-1}$, $\boldsymbol{BD}$, $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{ED}^{-1}$ としても，左辺の Π, Ω の値は変らない。そこで，この不決定性を除くために $\boldsymbol{E}$ の各対角要素を固定する。すなわち

$$\sigma_i^2=1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H) \tag{3.41}$$

と仮定して，行列 E を単位行列 ($H\times H$) としておく。このとき，第二の不決定性が係数行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に関しておこる。いま任意の直交行列 $\boldsymbol{T}$ に対して，(3.39) および (3.40) 式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ $\boldsymbol{AT}$, $\boldsymbol{BT}$ としても，左辺の値は不変である。そこで，この不決定性を除くために

$$\boldsymbol{B}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda} \quad (\text{対角行列 } H\times H) \tag{3.42}$$

とする。以上の二種類の制約は，最尤法によって因子モデルを推定するとき，その共通因子および因子負荷量に対して仮定される制約と同じである。

次に，これらの制約のもとで，モデル〔V〕の識別について検討する。まず (3.39) および (3.40) の両式の左辺における独立な要素の個数は総数で $K\times M+1/2M(M+1)$ となる。一方，両式右辺における独立な要素の数は総数で $M+H+K+M\times H$ である。しかしながら，制約 (3.41) および (3.42) に

よって後者の $H+1/2H(H-1)$ 個の要素の決定は不要である。この結果，誘導型に対する総制約の個数は

$$r=(K-H)(M-1)+\frac{1}{2}[(M+1)(M-2)+(H-1)(H-2)]$$

である。通常のモデルにおいては $K\geqq H$, $M\geqq 2$ と考えられるから，ここでのモデル〔V〕はほとんどの場合識別可能である。(23)

そこでモデル〔V〕のパラメーターの最尤推定を Kolluri [31] (366～76) に従って説明する。いま，誘導型の確率項 $\boldsymbol{v}$ が平均 $\mathbf{0}$，分散 Ω の M 次限正規分布に従って独立に分布するものとする。その時，標本からの尤度関数は，最大化に無関係な部分を除いて

$$L^*=\log|\Omega|+tr(\Omega^{-1}W) \tag{3.43}$$

となる。したがって，ここでの最尤法は (3.39)～(3.42) の制約のもとで，この L^* を最小にする $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, Σ を求めることである。そこで，以下あらたに使用する記号および関係式を列記する。それ以外のものは前節と同じである。

$$W=\frac{1}{T}(Y-X\Pi)'(Y-X\Pi)$$

$$=\frac{1}{T}(Y'Y-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'X'Y-Y'X\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}') \tag{3.44}$$

$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{B}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{B}$ (対角行列)，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}'X'X\boldsymbol{A}$

$$\Omega^{-1}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'+\Sigma)^{-1}$$

$$=\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\boldsymbol{B}(I+\Lambda)^{-1}\boldsymbol{B}'\Sigma^{-1} \tag{3.45}$$

$$\Omega^{-1}\boldsymbol{B}=\Sigma^{-1}\boldsymbol{B}(I+\boldsymbol{\Lambda})^{-1} \tag{3.46}$$

---

(23) H 個の共通因子を含む因子モデルの最尤推定において，誘導型に課せられ制約の総数 r' は

$$r'=1/2[(M-H)^2-(M+H)]$$

である (Lawley and Maxwell [33] 10)。したがって，本文 r との関係は

$$r=r'+K(M-1)$$

となる。ゆえに誘導型への制約の個数は $M>1$ である限りわれわれのモデルの方が多い。特に補助方程式が存在しないとき $K=0$ であるから両者の誘導型に対する制約の数は等しい。しかしこのとき両モデル自体が等しくなっている。

$$\boldsymbol{B}'\Omega^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}(I+\boldsymbol{\Lambda})^{-1} \tag{3.47}$$

さらに行列$\boldsymbol{\Lambda}$は対角行列であるから，上の（3.46)，(3.47）の両式は次のごとく表わされる。

$$\Omega^{-1}\boldsymbol{B}=\left(\frac{1}{1+\lambda_1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}_1,\ \frac{1}{1+\lambda_2}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{1+\lambda_H}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}_H\right)$$

$$\boldsymbol{B}\Omega^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \lambda_1(1+\lambda_1)^{-1} & & & 0 \\ & \lambda_2(1+\lambda_2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_H(1+\lambda_H)^{-1} \end{pmatrix}$$

ただしλ_{ii}は対角行列Λの第i要素とする。これよりそれぞれ

$$\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i=\frac{1}{1+\lambda_i}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H) \tag{3.48}$$

$$\boldsymbol{\beta}_i\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_j=\begin{cases}\lambda_i(1+\lambda_i)^{-1} & (i=j) \\ 0 \quad (i\neq j) & (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots H)\end{cases} \tag{3.49}$$

が成立する。

以上の準備に基づいて，(3.43）式のL^*の最小化に移る。まずこの式を行列Aの要素$\boldsymbol{\alpha}_i$に関して最小にすることは，結局その第二項$tr(\Omega^{-1}W)$を$\boldsymbol{\alpha}_i$に関して最小にすることである。ところでこの第二項は，その最小化に無関係な部分を除けば，本章3.2.2節の（3.12）式のF^{**}においてそのSをΩ^{-1}に置き代えたものに等しい。それをあらためて$F^{**}(\Omega^{-1})$とすれば

$$F^{**}(\Omega^{-1})=\sum_{i,j}^{H}(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_j\boldsymbol{\alpha}_j)(\boldsymbol{\beta}_j'\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i)-2\sum_{i}^{H}\boldsymbol{\beta}_i'\Omega^{-1}Y'X_i\boldsymbol{\alpha}_i$$

が成立する。そして上式に（3.49）式を代入し

$$F^{**}(\Omega^{-1})=\sum_{i}^{H}\{(\boldsymbol{\alpha}_i'X_i'X_i\boldsymbol{\alpha}_i)(\boldsymbol{\beta}_i'\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i)-2\boldsymbol{\beta}_i'\Omega^{-1}Y'X_i\boldsymbol{\alpha}_i\}$$

となる。上式は$X_i'X_j=\boldsymbol{0}$を仮定した（3.13）式に対応している。したがって$F^{**}(\Omega^{-1})$を最小にする$\boldsymbol{\alpha}_i$は基本モデルに関する（2.11）式を参考にして

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_i&=(\boldsymbol{\beta}_i'\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i)^{-1}P_i\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i \\ &=[(1+\lambda_i)/\lambda_i]P_i\Omega^{-1}\boldsymbol{\beta}_i=(1/\lambda_i)P_i\Sigma^{-1}\boldsymbol{\beta}_i\end{aligned} \tag{3.50}$$

となる。ただし $P_i=(X_i'X_i)^{-1}X_i'Y$ とする。上式は観測不可能な変数が一つの場合の (3.29) 式に対応している。次に行列 $\boldsymbol{B}$ の要素 β_{ij} に関する (3.43) 式の L^* の最小化について検討する。まず，分散制約 $\Omega=\Sigma+\boldsymbol{BB}'$ および (3.44) より次の結果が得られる。

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_{ij}}=E_{ij}\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}E_{ji}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\beta_{ij}}=-E_{ij}\boldsymbol{A}'X'Y-Y'X\boldsymbol{A}E_{ji}+E_{ij}\boldsymbol{CB}'+\boldsymbol{BC}E_{ji}$$

ただし上式における E_{ij} は第 i, j 要素が1で他のすべての要素が0の行列とする。これより前節における (3.28) 式を利用して

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L^*}{\partial\beta_{ij}}=[\Omega^{-1}(\Omega-W)\Omega^{-1}\boldsymbol{B}-\Omega^{-1}Y'X\boldsymbol{A}+\Omega^{-1}\boldsymbol{BC}]_{ij}$$

を得る。そして $(\partial L^*/\partial\boldsymbol{B})=0$ より

$$W\Omega^{-1}\boldsymbol{B}+Y'X\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(I+\boldsymbol{C}) \tag{3.51}$$

となる。これは前節における (3.30) 式に対応するものである[(24)]。最後に分散共分散行列 Σ の推定量は，前節と同じ手順を利用して

$$\sigma_{ii}=[Y'Y]_{ii}-[\boldsymbol{B}(I+\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}']_{ii} \tag{3.52}$$

となる。以上より，モデル〔V〕の最尤推定は上述の (3.50)〜(3.52) 式より

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=(1/\hat{\lambda}_i)P_i\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$$

$$\hat{\sigma}_{ii}=[Y'Y]_{ii}-[\hat{\boldsymbol{B}}(I+\hat{\boldsymbol{C}})\hat{\boldsymbol{B}}']_{ii}$$

$$\hat{W}\hat{\Omega}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}+YX\hat{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{B}}(I+\hat{\boldsymbol{C}}) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ H)$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, $\hat{\sigma}_{ii}$ である。ただし上式における caret 符号が付いた諸記号は，それぞれの定義式において，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, $\hat{\sigma}_{ii}$ を代入したものである。

この節を終るにあたって一つの点を指摘しておきたい。本節では第2章の基本モデルの拡張として，補助方程式の確率化について検討した。その拡張した

(24) Kolluri [31] (72) は関係式 $W\Omega^{-1}\boldsymbol{B}=S\Omega^{-1}\boldsymbol{B}$ を利用して，(3.51) 式をさらに変型している。しかしこの関係式を導出するために使われた Kolluri の (4.25) 式 (op. cit. 70〜1) には疑問がある。したがって，本文ではこれ以上の変形を行なわない。

モデルは基本モデルが含む係数制約（$\Pi=\alpha\beta'$ あるいは $\Pi=\boldsymbol{AB}'$）のほかに分散制約（$\Omega=\Sigma+\sigma^2\beta\beta'$ あるいは $\Omega=\Sigma+\boldsymbol{BEB}'$）を含んでいる。ところで，後者の制約はモデルの推定法に影響する。前者の係数制約のみを含むモデルに対に対しては，基本モデルあるいは3.1，3.2節のモデル〔II〕，〔III〕におけるように，MD推定法が適用されている。これに対して，分散制約を同時に含むモデルには，本節の〔IV〕，〔V〕にみられるように，もっぱらML推定法が利用されている。これは，いうまでもなく，MD推定法が観察値の標本分布を考慮しないからである。したがって，MD推定法にそってなをかつ分散制約を組み入れた推定法が必要であると考えられる。

3.4 連立方程式モデル

観測不可能な変数を含んだこれまでのモデルは，それに含まれる内生変数間の相互依存関係を無視した単なる多数方程式モデル（multiple equations model）にすぎなかった。この分析を完成させるためには，モデルに含まれる内生変数間の自由な依存関係を許した連立体系に，われわれの基本モデルを拡張しなければならない。しかし観測不可能な変数とその補助方程式を含んだ一般連立方程式モデルについてはその一部に計算例があるのみで[25]，その識別と推定に関する一般的分析はみられない。これまでの分析は，もっぱら変数誤差を含んだ連立方程式モデルの補助方程式による推定問題に向けられている[26]。その対象とされるモデルはわれわれのモデル〔II′〕（3.1.5節）を連立体系に拡張したものである。この拡張モデルを利用するとき，変数誤差を含んだ連立方程式モデルに通常の識別定理と推定法を適用することができる。

そこで本節では，まずモデル〔II〕（3.1.1節）を直接拡張した一般的な連立方程式モデルを構成し，その識別とMD推定について検討する。他方，モデル〔II′〕を拡張した特殊な連立方程式モデルすなわち「変数誤差を含んだ連立方程式モデル」に関する諸問題は，章をあらためて検討したい。

(25) 伴［3］
(26) Kolluri［31］(chap 3), Hausman［22］.

3.4.1　モデルの構成と識別

まず本章3.1.1節におけるモデル〔II〕を次の連立方程式モデルに拡張することにする。

$$〔\mathrm{VI}〕\quad \begin{aligned} &B'y(t)=\beta x^*(t)+\Gamma_2'\bar{x}_2(t)+\Gamma_3'\bar{x}_3(t)+u(t) \\ &x^*(t)=\bar{\alpha}_1'x_1(t)+\bar{\alpha}_2'x_2(t) \end{aligned} \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

上式における行列 B は内生変変数 y に関する非特異な係数行列 $(M\times M)$ である。通常の連立方程式モデルにおける正規化則によって行列 B の各対角要素を1とする。また後述の「0制約」によってその非対角要素に0を含むことができるものとする。その他の仮定および記号についてはモデル〔II〕の場合と同じである。その誘導型は

$$y(t)=\Pi_1^{*\prime}\bar{x}_1(t)+\Pi_2^{*\prime}\bar{x}_2(t)+\Pi_3^{*\prime}\bar{x}_3(t)+v(t)$$

あるいは

$$Y=X\Pi^*+V^* \tag{3.53}$$

となる。ただし

$$\Pi^*=\begin{pmatrix}\Pi_1^*\\ \Pi_2^*\\ \Pi_3^*\end{pmatrix}=\Pi B^{-1}=\begin{pmatrix}\Pi_1B^{-1}\\ \Pi_2B^{-1}\\ \Pi_3B^{-1}\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}(\Pi_1=\bar{\alpha}_1\beta')\\ (\Pi_2=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2)\\ (\Pi_3=\Gamma_3)\end{matrix}$$

$$V^*=VB^{-1} \tag{3.54}$$

である。モデル〔IV〕において，観測不可能な変数 x^* を消去すればわかる通りこのモデルはパラメーターに関して非線型な連立方程式体系であり，その誘導型に対する係数制約は

$$\Pi_1^*B=\bar{\alpha}_1\beta',\quad \Pi_2^*B=\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2,\quad \Pi_3^*B=\Gamma_3 \tag{3.55}$$

の三種類である。ところで，Hausman [21] はパラメーターに関して非線型な連立方程式モデルについて，その全情報最尤法と三段階最小二乗法とによる推定量が漸近的に等しく，また後者の三段階最小二乗法はMD推定法の特殊な場合であることを指摘している。(27) そこで以下われわれは一つの識別可能な場

(27)　Hausman [21] (736)

合を設定し，モデル〔IV〕のMD推定法について検討する。

ところで，上記（3.55）式の最後の制約 $\Pi_3 B = \Gamma_3$ は，通常の連立方程式モデルにおけるその全構造パラメーターと誘導パラメーターとの関係を表わしている。特にその第 i 列は

$$\Pi_3{}^* \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{i\,i-1} \\ 1 \\ b_{i\,i+1} \\ \vdots \\ b_{i\,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{i\,K+1}^{(3)} \\ \gamma_{i\,K+2}^{(3)} \\ \vdots \\ \gamma_{i\,L}^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (\Pi_3{}^* : (L-K) \times M) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$$

である。ただし上式における b_{ij}，$\gamma_{ij}^{(3)}$ はそれぞれ係数行列 B，Γ_3 の第 i，j 要素とする。このとき上式は第 i 構造方程式における内生変数パラメーター b_{ij} $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$ と同外生変数パラメーター $\gamma_{il}^{(3)}$ $(l=K+1,\ K+2,\ \cdots\cdots,\ L)$ の対応を，誘導係数行列 $\Pi_3{}^*$ を介して表わしている。これらのパラメーターに関しては，その適当な「0制約」を仮定することによって，通常の識別に関する諸定理が適用できる。他方，（3.55）式の前二者の関係式に基づく識別は，もし行列 B のすべての要素 b_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$ が既知であれば，すでに第2章の定理2.1および本章の定理3.1において検討されている。そこでモデル〔IV〕の識別に関連して次の仮定を設定する。

(1) モデルの第 i 構造方程式に含まれるパラメーター b_{ij} $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M)$ および $\gamma_{il}^{(3)}$ $(l=K+1,\ K+2,\ \cdots\cdots,\ L)$ に関して，適当な「0制約」のもとでその識別のための階数条件が成立する。このことはまた

$$G_i + K_i^{(3)} - 1 \leqq L - K \qquad (3.56)$$

の成立を意味している。ただし G_i は b_{ij} のうち0でない要素の個数また $K_i^{(3)}$ は $\gamma_{il}^{(3)}$ のうちの0でない要素の個数をそれぞれ表わすものとする。

(2) モデルを構成する M 個の構造方程式のうち，第 j 外生変数 $(j=J+1,\ J+2,\ \cdots\cdots,\ K)$ を含まない式が少なくとも一つ存在するものとする（定理3.1）。

(3)　パラメーター $\bar{\alpha}_1$, β に関する一つの正規化則のもとで，rank$(\Pi_1{}^*B)$ $=1$ が成立する（定理2.1)。ところで，すでに述べた仮定より行列 B は非特異であるから，上の階数条件は rank$(\Pi_1{}^*)=1$ と言い換えることができる。そしてこれらの階数条件はまた次式の成立を意味している。

$$(J-1)(M-1)\geqq 0 \tag{3.57}$$

以上のすべての仮定が成立すれば（特に，(1)については全構造方程式にまた(2)についてはすべての重複外生変数に関して成立すれば)，モデルの全パラメーターは識別可能である。

しかしこれらの仮定のうち，特に(1)の成立は観測不可能な変数が存在しない通常のモデルに比較して困難であり，また仮定(1)と(2)は互いに関連していることを指摘しておきたい。事実，第 i 構造方程式が含む重複外生変数の個数がモデルに含まれる全重複外生変数の個数 $(K-J)$ に比べて相対に小さい場合は，通常のモデルに比較して次数条件 (3.56) の成立は困難である。[28] さらに，この第 i 構造方程式が含む重複外生変数の種類が，仮定(2)を通して第 j 外生変数のパラメーターの識別に影響する。[29] このことは，仮定(1), (2)がそれぞれ独立に成立する余地が極めて限られた範囲のものであることを意味している。[30]

---

(28)　変数 x^* が観測可能であれば補助方程式は存在しない。このときモデルの総外生変数は x^*, x_2, x_3 の合計 $(L-J+1)$ である。他方，$K-J$ 個の重複外生変数 x_2 のうち，第 i 構造方程式に含まれる個数を $H_i(\leqq K-J)$ とすると，通常のモデルにおける次数条件は，x^* が観測可能な変数として含まれることを考慮して

$$G_i+K_i^{(3)}+H_i\leqq L-J+1 \tag{3.56$'$}$$

となる。ここで x^* が観測不可能とすれば，上式の左辺より H_i+1 (H_i 個の x_2 と x^*) がまた右辺より $K-J+1$ ($K-J$ 個の x_2 と x^*) がそれぞれ除かれる。この結果，H_i が $K-J$ より相対に小さい時，本文 (3.56) の成立は疑わしい。

(29)　前注との関連において，例えば全構造方程式がすべての重複外生変数を含むとき $(H_i=K-J)$，仮定(1)の (3.56) 式と前注の (3.56′) 式とは同時に成立する。しかし，このとき仮定(2)は成立しない。

(30)　これに対して (3.55) 式の係数制約すべてを同時に考慮して，モデルの全パラメーターの識別をとりあげる方法がある (Wiley [48])。そこで導かれる識別条件は局所識別 (local identification) に関するものである (Rothenberg [41])。

次に上記の仮定(1), (2), (3)を満たすモデルの例をあげておく。

$$y_1+b_{12}y_2=\beta_1x^*+\gamma_{13}x_3+\gamma_{14}x_4+u_1$$

$$b_{21}y_1+y_2=\beta_2x^*+\gamma_{25}x_5+u_2$$

$$x^*=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$$

このモデルは伴[3]の計算例に記号変更を加えたものである。仮定(1)で対象となるパラメーターは外生変数 x_4, x_5 および内生変数 y_1, y_2 のパラメーターである。両式とも，仮定(1)の (3.56) 式を等号で満たしている。次に仮定(2)でとりあげる重複外生変数は x_3 のみである。このモデルの第二式は明らかにこの変数 x_3 を含んでいない唯一の式である。したがってこの変数に関するモデルの全パラメーター α_3, γ_{13} は適度に識別される。次に仮定(3)の (3.57) 式の成立については自明であである。しかしパラメーター α_1, α_2, β_1, β_2 に対して一つの正規化則を設定しなければならない。

3.4.2 MD 推定量

本節ではモデル〔IV〕のパラメーターの MD 推定量について検討する。まず行列 Γ_2, Γ_3, B の要素に関する適当な「0 制約」とベクトル α_1, β に対する一つの正規化則のもとで，モデルの全パラメーターは識別可能であるとしておく。そのとき，本章 3.1.4 節の場合と同じように，ある正値定符号行列 S に対して $F(S)$ を最小にすることは

$$F^*=tr(S\Pi^{*\prime}X'X\Pi^*)-2tr(\Pi^{*\prime}X'YS)$$

を最小にすることと同じである。上式の Π^* に (3.54) 式を代入して，$\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, β に関して偏微分して $\mathbf{0}$ と置き，その結果を整理すると

$$\bar{\alpha}=(\beta'S^*\beta)^{-1}\{P-[X'(1,\ 2)X(1,\ 2)]^{-1}[X'(1,\ 2)X(2,\ 3)]\Gamma B^{-1}\}\times S(B')^{-1}\beta \tag{3.58}$$

$$[B'Q^{**}S(B')^{-1}-\lambda I]\beta=\mathbf{0} \tag{3.59}$$

となる。ただし

$$\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_1',\ \bar{\alpha}_2')',\quad \Gamma=(\Gamma_2',\ \Gamma_3')',\quad S^*=B^{-1}S(B')^{-1}$$

$$X(1,\ 2)=(X_1,\ X_2),\quad X(2,\ 3)=(X_2,\ X_3)$$

$$P=[X'(1,\ 2)X(1,\ 2)]^{-1}X'(1,\ 2)Y$$

$$Q^{**}=\Delta^{*\prime}X(1,\ 2)[X'(1,\ 2)X(1,\ 2)]^{-1}X'(1,\ 2)\Delta^{*}$$
$$\Delta^{*}=(YB-X_2\Gamma_2-X_3\Gamma_3)B^{-1}$$
$$\lambda=(\beta'S^{*}\beta)^{-1}$$

とする。なおここでは，正規化則として $\bar{\alpha}'X'(1,\ 2)X(1,\ 2)\bar{\alpha}=1$ を適用している。上式の (3.59) 式より β は行列 $B'Q^{**}S(B')^{-1}$ の固有根 λ に対応する固有ベクトルである。ここでも

$$F^{*}=tr[S^{*}\Gamma'X'(2,\ 3)X(2,\ 3)\Gamma]-2tr[S(B')^{-1}\Gamma X'(2,\ 3)Y]-\lambda$$

であるから，F^{*} は λ の減少関数である。したがって，β はその最大固有根に対応する固有ベクトルである。

次に行列 Γ_2，Γ_3，B の 0 あるいは 1 でない要素 $\gamma_{ij}^{(2)}$，$\gamma_{ij}^{(3)}$，b_{ij} について F^{*} を偏微分して 0 と置くと

$$\gamma_{ij}^{(2)}=[(X_2'X_2)^{-1}X_2'(YB-X_1\bar{\alpha}_1\beta'-X_2\bar{\alpha}_2\beta'-X_3\Gamma_3)]_{ij} \tag{3.60}$$
$$\gamma_{ij}^{(3)}=\{(X_3'X_3)^{-1}X_3'[YB-X_1\bar{\alpha}_1\beta'-X_2(\bar{\alpha}_2\beta'+\Gamma_2)]\}_{ij} \tag{3.61}$$
$$[B^{-1}]_{ij}=[B(\Pi'X'X\Pi)^{-1}\Pi'X'Y]_{ij} \tag{3.62}$$

となる。以上より，連立方程式モデル〔IV〕のパラメーターに関する MD 推定量は (3.58)～(3.62) 式の解として与えられる。その解法には，本章 3.1.4 節と同じように，反復法を利用しなければならない。なお，これらの式において $X(2,\ 3)=X_2$，$B=I$ (単位行列，$M\times M$) $\Gamma=\Gamma_2$ および $X_3=\mathbf{0}$ とそれぞれ置き替えると，3.1.4 節の MD 推定量が得られる。

第4章　変数誤差モデル

4.1　序

独立変数の測定値に測定誤差が含まれる単一方程式モデルに，最小二乗推定法を適用しても，そのパラメーターの推定量には偏りがあるばかりでなく，一致性も存在しないということは広く知られている。そしてこの最小二乗法に代って，これまで各種の推定法が検討されている。(1) 単一方程式モデルに限っていえば，従来の推定法は大きく二つに分けられる。その一つは操作変数法であり(Sargan [43])，いま一つは最尤推定法である (Kendall and Stuart [30] 379-88)。いうまでもなく，前者の最大の欠点は操作変数の選択に関して任意性が存在することであり，後者のそれはパラメーターの識別を得るために，例えば確率項の分散に対して先験的制約を設定しなければならないということである。ところで以下とりあげる **Zellner-Goldberger** による補助方程式法もその変数選択に関しては，操作変数法と同じように任意性が存在する。しかし補助方程式の導入によってその識別問題は特定の場合を除いて解決され，(2) その推定にはすでに述べたMD推定法かあるいは適当な変形によって各種の連立モデル推定法を利用することができる。そこで本章では，変数誤差を含むモデルの推定および識別を，補助方程式法を中心として検討したい。次節においては変数誤差を含んだ単一方程式モデルを，つづいて第3節においてはその連立方程式モデルをそれぞれとりあげることにする。なお，以下一つの誤差変数を含むモデルを中心に説明し，必要に応じてこれを拡張する。

（1） 例えば Sargan [43], Kendall and Stuart [30] 379-88, Malinvaud [35] chap. 10, Madansky [34] 132-50, Johnston [24] 281-91, Koutsoyiannis [32] 250-70.

（2） 補助方程式が確率化されるとき確率項ないし誤差項の分散に関して再び識別不能となる。

4.2 単一方程式モデルと変数誤差

変数誤差を含んだモデルの構成には二つある．その一つは通常の教科書にみられるように，独立変数の誤差のみを対象とする方法である。このとき従属変数の誤差は方程式の誤差に含まれ，それに対する特別な配慮は払われない。これに対して，いま一つの方法はモデルに含まれる変数の因果関係を取り除き，全変数に測定誤差の存在を認め，さらに方程式の誤差をも含めるより一般的な方法である(3)。しかし因果関係の明らかな計量経済モデルにおいては，前者のモデルが普通である。そこで本章においても独立変数の誤差のみを対象とする前者の方法に従ってモデルの構成を行なう。そこで変数誤差を含んだ次の単一方程式モデルをとりあげる。

$$
\text{〔VII〕}\quad
\begin{aligned}
&y(t)=\beta^*x^*(t)+u(t)\\
&x(t)=x^*(t)+\delta(t)
\end{aligned}
\qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)
$$

このモデルはすでに第1章の (1.3)，(1.4) 式として説明しているが，ここで再度検討する。まずこの第一式は従属変数 y と独立変数の真の値 x^* との単純な回帰関係を表わし，最後の u は方程式の誤差にあたる確率変数である。しかしわれわれが実際に観測できる独立変数は第二式の x であり，それは測定誤差 δ を伴なっている。ここで u，δ の両確率変数に次の仮定を設定する。

$$
\begin{aligned}
&E(u(t))=0,\quad E(u^2(t))=\sigma_u^2,\quad E(u(t)u(s))=0\\
&E(\delta(t))=0,\quad E(\delta^2(t))=\sigma_\delta^2,\quad E(\delta(t)\delta(s))=0
\end{aligned}
$$

$$(t\neq s:t,\ s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

さらに方程式の誤差 u と測定誤差 δ とは無相関であり，また共に真の値 x^* と無相関であると仮定する。すなわち

$$E(u(t)\delta(r))=0,\ E(u(t)x^*(r))=0,\ E(\delta(t)x^*(r))=0$$

$$(t,\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

---

(3) Sargan [43] (394) は $\Sigma_{i=1}^{n}a_ix_{it}'=\varepsilon_{it}$，$x_{it}=x_{it}'+x_{it}''$ で表わされる変数誤差モデルを扱っている。x_{it}，x_{it}'，x_{it}'' はそれぞれ測定値，その真の値，測定誤差を表わす。また ε_t は方程式の誤差にあたる。

とする。最後にこのモデル〔VII〕から x^* を消去して

$$y(t)=\beta^* x(t)+v(t) \qquad (v(t)=u(t)-\beta\delta(t))$$

を得る。これに基づいて第1章（1.5）式で表わされる関係式が導かれる。ここではそれを再掲しておく。

$$\begin{aligned} &\beta=\left(1-\frac{1}{\sigma_x^2}\sigma_\delta^2\right)\beta^* \\ &\sigma_v^2=\sigma_u^2+\beta^{*2}\sigma_\delta^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし上式における β および σ_x^2 は次のように定義される。σ_v^2 についても同じである。

$$\beta=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T} y(t)x(t)}{\sum_{t=1}^{T} x^2(t)}, \qquad \sigma_x^2=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x^2(t)$$

ところで，すでに第1章において指摘したごとく，上の β，σ_x^2，σ_v^2 をそれぞれ標本からの推定量に置き代えても（4.1）式よりパラメーター β^*，σ_u^2，σ_δ^2 を求めることができない。そこで最尤法では，例えば分散比 $\sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ を先験的に与えまた操作変数法では誤差項 u と無相関で，さらに独立変数 x と高い相関を持った操作変数を選択しそれぞれ一致推定量を得る。

以上の方法に対して，Zellner-Goldberger の補助方程式法では次のモデルを設定する。

$$\text{〔VIII〕}\quad \begin{aligned} &y(t)=\beta^* x^*(t)+u(t) \\ &x(t)=x^*(t)+\delta(t) \\ &x^*(t)=\alpha_1 z_1(t)+\alpha_2 z_2(t)+\cdots\cdots+\alpha_K z_K(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T) \end{aligned}$$

ただし誤差項 u，δ は共にあらたに導入された独立変数 $z_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ K)$ と無相関とする。すなわち

$$E(u(t)z_i(r))=0, \qquad E(\delta(t)z_i(r))=0 \tag{4.2}$$

$$(t,\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

となる。次にこのモデルの誘導型は

$$y(t)=\beta^*\alpha' z(t)+v_1(t) \qquad (v_1(t)=u(t))$$

$$x(t)=\alpha' z(t)+v_2(t) \qquad (v_2(t)=\delta(t)) \tag{4.3}$$

である。ただし $z(t)=(z_1(t),\ z_2(t),\ \cdots\cdots,\ z_K(t))'$ とする。これ以外の諸記号については第2章のモデル〔I〕の場合と同じである。ところで上式に基づいて次の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} &\pi_1=\alpha\beta^* \quad (K\times 1), \qquad \pi_2=\alpha \quad (K\times 1) \\ &\sigma_{v_1}^2=\sigma_u^2, \qquad \sigma_{v_2}^2=\sigma_\delta^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

上式における $\sigma_{v_1}^2$, $\sigma_{v_2}^2$ の定義は前述の (4.1) 式における σ_x^2 のそれに準ずるものとする。また π_1, π_2 については次の通りである。

$$\pi_1=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}(Z'Z)^{-1}Z'y, \qquad \pi_2=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}(Z'Z)^{-1}Z'x$$

ただし

$$\begin{aligned} y&=(y(1),\ y(2),\ \cdots\cdots,\ y(T))' \quad (T\times 1) \\ x&=(x(1),\ x(2),\ \cdots\cdots,\ x(T))' \quad (T\times 1) \\ Z&=(z(1),\ z(2),\ \cdots\cdots,\ z(T))' \quad (T\times K) \end{aligned}$$

とする。(4.4) 式より右辺のパラメーター α, β^*, σ_u^2, σ_δ^2 は識別可能であり。特に $K=1$ のとき適度識別が達成される。これは第一章 (1.12) 式で表わされるモデルの場合にあたる。次に上のモデル〔VIII〕の実際の推定については，基本モデルに〔I〕関する MD 推定法[(4)]かあるいは3.1.5節のモデル〔II′〕と同じように連立体系に変形し，各種の連立モデル推定法を適用することも可能である。特に後者の場合の連立体系はモデル〔VIII〕から，その誤差変数 x を内生化し

$$\text{〔VIII′〕}\quad \begin{aligned} &y(t)-\beta^* x(t)=v_1(t) \qquad (v_1(t)=u(t)-\beta^*\delta(t)) \\ &x(t)=\alpha' z(t)+v_2(t) \qquad (v_2(t)=\delta(t)) \end{aligned}$$

となる。通常のモデルにおいて $K\geqq 1$ であるから，このモデルは常に識別可能である。さらに誤差項の分散共分散行列は

$$\Omega=E(vv')=\begin{bmatrix} \sigma_u^2+\beta^{*2}\sigma_\delta^2 & -\beta^*\sigma_\delta^2 \\ -\beta^*\sigma_\delta^2 & \sigma_\delta^2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

---

(4) この場合，正値定符号行列 S は対角行列である。

となる。ただし $v=(v_1(t), v_2(t))'$ である。Rothenberg and Leenders [42] によって，この分散共分散行列はなんらの制約を含まないため[5]，このモデルの構造係数 α，β の最尤推定量と三段階最小二乗推定量は共に漸近的有効推定量となる。なおこのモデルの推定に関しては次節においてより一般的な型で再論する。

以上が，変数誤差を含む単一方程式モデルに対する補助方程式推定法である。この方法によっててモデル〔VII〕の持つ識別不能を回避することができる。しかし，一方においてその誤差変数の個数だけの補助方程式を設定しなければならない。特にこの方程式の右辺を構成する補助変数の選択は，(1)前述の（4.2）式よりモデルの誤差項と無相関でかつ(2)同（4.3）式より独立変数 x と高い相関を持つことをその規準としなければならない。このことは操作変数の選択基準と同じである。さらにかかる基準の下においても，操作変数の場合と同じように，その変数の選択にはかなりの任意性が存在することになる。

最後に，以上の補助方程式は独立変数 z の exact function として表わされた。いまこれに確率項 ε を導入して

$$x^*(t)=\alpha_1 z_1(t)+\alpha_2 z_2(t)+\alpha_2 z_2(t)+\cdots\cdots+\alpha_K z_K(t)+\varepsilon(t)$$

と確率化すると前述の（4.4）式の後段は

$$\sigma_{v_1}^2=\sigma_u^2+\beta^{*2}\sigma_\varepsilon^2 \qquad (E(\varepsilon^2(t))=\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\sigma_{v_2}^2=\sigma_\delta^2+\sigma_\varepsilon^2$$

となる。ただし確率項 ε はモデルの誤差項 u，δ および独立変数 z と無相関とする。上式より明らかなごとく，分散 σ_u^2，σ_δ^2，σ_ε^2 のうち一つは未決定となる。したがってモデルは再び分散に関して識別不能である。前章3.3.1節と同じように $\sigma_\varepsilon^2=1$ と仮定することもこれを解決する一つの方法である。

4.3 連立方程式モデルと変数誤差

本節では変数誤差を含んだ連立方程式モデルの補助方程式推定について説明

(5) ここで制約が存在するということは，分散共分散行列の要素を先験的に一定値（例えば0）とすることである。

する。前節の単一方程式モデルの場合と同じように，変数誤差が存在する場合の識別問題を概説し，続いて補助方程式推定法を中心とする二，三の推定法について検討する。

4.3.1 モデルの構成と識別の概説

まず，K 個の外生変数と G 個の内生変数とから構成される次の連立方程式モデルを設定する。

$$B'y(t)=\Gamma'x(t)+u(t) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$$

ところで本章 4.1 節の最後に仮定したごとく，本章を通して誤差変数の個数は一個に限定している。そこで K 個の外生変数のうち最初の変数 x_1 がその測定誤差を伴なっているものとする。したがって上の連立体系は次のように改められる。

$$(\mathrm{IX}) \quad \begin{aligned} B'y(t)&=\beta^*x_1^*(t)+\Gamma_2'\tilde{x}_2(t)+u(t) \\ x_1(t)&=x_1^*(t)+\delta(t) \end{aligned}$$

上記モデルの記号のうちこれまでのものと相異するものは次の通りである。

$$B=[b_{ij}] \quad (G\times G), \qquad \Gamma_2=[\gamma_{ij}] \quad ((K-1)\times G)$$

$$y(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\ \cdots\cdots,\ y_G(t))'$$

$$\tilde{x}_2(t)=(x_2(t),\ x_3(t),\ \cdots\cdots,\ x_K(t))'$$

$$u(t)=(u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots\cdots,\ u_G(t))'$$

$$\begin{aligned} x(t)&=(x_1(t),\ \tilde{x}_2'(t))' \\ &=(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots\cdots,\ x_K(t))' \end{aligned}$$

$$\Gamma'=(\beta^*,\ \Gamma_2') \quad (G\times K)$$

なお，誤差項 u に関する仮定はモデル〔I〕のそれと同じであり，また δ に関する仮定は前節のモデル〔VII〕のものを適用する。さらにここでも u，δ は互いに無相関とする。

さて変数誤差を含む連立方程式体系の識別は，前節の単一方程式モデルに関する (4.1) 式から容易に類推されるように，本来の構造係数に関する識別に測定誤差の分散に関する識別が絡み合ったものとなる。事実，上のモデル〔IX〕に関して (4.1) 式に相当する関係式は

$$\Pi=\left[I-[\bar{M}]^{-1}\left(\begin{array}{c|c}\sigma_\delta^2 & \underset{(1\times K')}{0} \\ \hline \underset{(K'\times 1)}{0} & \underset{(K'\times K')}{0}\end{array}\right)\right]\Pi^* \tag{4.6}$$

$$(K'=K-1)$$

$$\Phi=(B')^{-1}[\Sigma+\sigma_\delta^2\beta^*\beta^{*\prime}]B^{-1} \tag{4.7}$$

で示される。ただし

$$\Pi^*=\Gamma B^{-1}\quad (K\times G),\qquad \Pi=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}(X'X)^{-1}X'Y\quad (K\times G)$$

$$\bar{M}=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}(X'X)\quad (K\times K),\ \Sigma=E(u(t)u'(t))\quad (G\times G)$$

$$\Phi=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\phi(t)\phi'(t)\quad (\phi=(B')^{-1}(u-\beta^*\delta))$$

とする。また行列 $X(T\times K)$ および $Y(T\times G)$ の定義は第2章2.3節のそれに準ずるものとする。なおモデルに変数誤差が存在しないとき $\sigma_\delta^2=0$ であるから，上の両式は $\Pi=\Gamma B^{-1}$ および $\Phi=(B')^{-1}\Sigma B^{-1}$ となり通常の対応関係に帰着する。ところで (4.6) 式に基づく特定方程式の識別とそれに含まれる誤差分散の識別は Hsiao [23] の特別な場合に相当する。しかしここでは (4.6) 式より直接以下の結果を導くことにする。まず，この式の第 i 列より

$$\left(\begin{array}{c|c} & m^{11} \\ \Pi & m^{21} \\ & \vdots \\ & m^{K1}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \\ b_i \\ \hline \sigma_\delta^2\beta_i^*\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\beta_i^* \\ \hline \\ \gamma'\end{array}\right) \tag{4.8}$$

$$[K\times(G+1)]$$

を得る。ただし上式の m^{ij} は逆行列 $[\bar{M}]^{-1}$ の第 $i,\ j$ 要素とする。また b_i および γ_i はそれぞれ第 i 構造方程式における内生変数および外生変数の各係数であり，前者の第 i 要素は正規化則によって1また両係数とも先験的制約によって0要素を含むものとする。そこでその0要素の個数をそれぞれ $G_i^{\Delta\Delta}$，K_i^{**} また0でない要素をそれぞれ G_i^{Δ}，K_i^* とすると

$$G_i^{\Delta}+G_i^{\Delta\Delta}=G,\qquad K_i^*+K_i^{**}=K$$

が成立する。以上の準備の下に第 i 構造方程式の識別について次の結果が得ら

れる。

(a)　第 i 構造方程式が測定誤差を伴なった外生変数を含むとき（$\sigma_\delta^2 \neq 0$），その方程式のすべての構造係数とそれに含まれる誤差分散（σ_δ^2）が識別されるための次数条件は

$$(G_i^{\Delta}-1)+K_i^{*} \leqq K-1 \tag{4.9}$$

であり，またその階数条件は

$$\mathrm{rank}(\Pi_i^{**})=(G_i^{\Delta}-1)+1=G_i^{\Delta} \tag{4.10}$$

である。ただし上式における行列 Π_i^{**} は（4.8）式における左辺の行列〔$K \times (G+1)$〕から，ベクトル γ_i の 0 でない要素と同じ番号の行を除き，さらに第 i 列とベクトル b_i の 0 である要素番号と同じ番号の列を除いてできる小行列（$K_i^{**} \times G_i^{\Delta}$）である。

(b)　第 i 構造方程式が含むすべての外生変数が測定誤差を含まないとき（$\sigma_\delta^2 = 0$），たとえ他の方程式に誤差変数が存在しても，第 i 方程式に関する識別条件は通常の場合のそれと同じである。したがって，例えばその次数条件は

$$(G_i^{\Delta}-1)+K_i^{*} \leqq K \tag{4.11}$$

である。

ここで以上の結果について二，三の点を指摘しておきたい。(1)上の（4.9）式および（4.11）式の両式の比較から判る通り，誤差変数を含まない通常の場合（つまり（4.11）式）において適度識別である構造方程式は，誤差変数を含んだ状態（つまり（4.9）式）において識別不能となる。したがって，少なくとも通常の場合において過剰識別でなければ誤差変数を伴なった状態において識別可能とはなりえない。このことは通常の場合における過剰識別性が誤差分散による過少識別性によって相殺され，結果として適度識別性の出現する可能性を意味している。[6] (2)以上の結果から推論されるように，もし前提を変更して第 i 構造方程式が m 個の誤差変数を含みかつそれらの誤差が互に無相関であるならば，上の（4.9）式に相当する次数条件は

$$(G_i^{\Delta}-1)+K_i^{*} \leqq K-m \tag{4.12}$$

（6）　Goldberger［14］（208〜10）における計算例はその一つである。

となる。上式はまた第 i 構造方程式が含むことができる誤差変数の個数の上限が $K_i^{**}-(G_i^{\vartriangle}-1)$ すなわち通常の時の過剰識別の際に，誘導型に課せられる制約 (overidentifing restrictions) の数に等しいことを表わしている。(7) (3) しかしながら，上の次数条件 (4.9) 式を満足しない構造方程式でもモデルに含まれる他の方程式からの情報を利用することによって識別可能となるかもしれない。事実，識別可能な他の方程式によって決定された誤差分散 σ_δ^2 を既知として，当該方程式の識別に利用できるからである。このことは個別方程式のみの情報に基づく識別条件は極めて限られた範囲の識別を対象としていることを意味している。これを解決するためには全体系の識別問題を考察する必要がある。(8)

4.3.2 モデルの推定

本節ではモデル〔IX〕の推定について考察する。ところでこのモデルの全体系の同時推定については，すでに Jöreskog [27] が多数の変数誤差が存在するより一般的な場合について，その最尤推定を検討している。またモデルに含まれる特定構造方程式の推定については，それが適度識別である限り，前述の (4.8) 式よりこの方程式に含まれる全構造係数と誤差分散とを同時に推定することができる。それは通常の間接最小二乗法の適用にほかならない。他方，一般に識別可能な構造方程式の推定については制限情報最尤法 (Hsiao [23] 330–35) あるいは伝統的な操作変数法および誤差変数の内生化による方法 (Chernoff and Rubin [4]) 等がある。以下，後者の二つの推定法およびこれと関連する補助方程式推定法について検討する

そこで，上のモデル〔IX〕を次のように表現しておく。

$$
\begin{aligned}
YB &= x_1^*\beta^{*\prime}+\tilde{X}_2\Gamma_2+U \\
x_1 &= x_1^*+\delta
\end{aligned}
\qquad (4.13)
$$

ただし

---

(7) これは Hsiao [23] (322) の結果に等しい。

(8) これに基づいて導出される判定条件は局所識別に関するものである (Hsiao [23] 323, Geraci [9] 269)。この条件は以下の展開にとって直接必要でないので省略する。

$$x_1{}^*=(x^*(1),\ x^*(2),\ \cdots\cdots,\ x^*(T))' \qquad (T\times 1)$$
$$x_1=(x(1),\ x(2),\ \cdots\cdots,\ x(T))' \qquad (T\times 1)$$
$$\delta=(\delta(1),\ \delta(2),\ \cdots\cdots,\ \delta(T))' \qquad (T\times 1)$$
$$\tilde{X}_2=(\tilde{x}_2(1),\ \tilde{x}_2(2),\ \cdots\cdots,\ \tilde{x}_2(T))' \qquad (T\times(K-1))$$
$$Y=(y(1),\ y(2),\ \cdots\cdots,\ y(T))' \qquad (T\times G)$$
$$U=(u(1),\ u(2),\ \cdots\cdots,\ u(T))' \qquad (T\times G)$$

とする。上式より $x_1{}^*$ を消去すると

$$YB=x_1\beta^{*\prime}+\tilde{X}_2\Gamma_2+V \qquad (V=U-\delta\beta^{*\prime}) \tag{4.14}$$

を得る。前述の単一方程式の場合と同じように，誤差変数 x_1 を外生変数として扱えば構造係数の一致推定量は得られない。そこで伝統的な操作変数法では次の方法がとられる。いま，第 i 構造方程式の係数（b_i, $\beta_i{}^*$, γ_i）のうち正規化則と先験的「0 制約」を受けない $G_i^{\Delta}+K_i{}^*-1$ 個の係数のベクトルを θ_i とし，その推定に用いる操作変数行列を $W_i(T\times(G_i^{\Delta}+K_i{}^*-1))$ とすると，θ_i の操作変数推定量は

$$\tilde{\theta}_i=(W_i{}'\tilde{\tilde{X}}_i)^{-1}W_i{}'y_i \tag{4.15}$$

となる。ただし $\tilde{\tilde{X}}_i$ は変数行列（$-Y$, x_1, $\tilde{X}_2$）の係数 θ_i に対応する列のみからなるその部分行列（$T\times(G_i^{\Delta}+K_i{}^*-1)$），また y_i は行列 Y の第 i 列である。さて単一方程式の場合と異なって，ここでの連立方程式モデルにおける操作変数の選択はかなり限定される。つまり操作変数としての本来の条件

$$\text{plim}\,\frac{1}{T}W_i{}'V_i=\mathbf{0}, \qquad \text{plim}\,\frac{1}{T}W_i{}'\tilde{\tilde{X}}_i=Q_i$$

を考慮すると（ただし V_i は V の第 i 列，Q_i は階数 $G_i^{\Delta}+K_i{}^*-1$ の有限行列（finite matrix）とする），その選択対象はモデルに含まれる全外生変数から誤差変数を除いた残りのすべての外生変数とすることができる。したがって，ここでのモデルにおいては $\tilde{X}_2$ を構成する $K-1$ 個の外生変数がその対象となる。このことは第 i 方程式に関して前述の次数条件 (4.9) 式の成立を要求している。また外生変数 $\tilde{X}_2$ から構成される操作変数のうち，推定量 $\tilde{\theta}_i$ の漸近的一般化分散を最小にする操作変数は

$$W_i=\tilde{X}_2(\tilde{X}_2'\tilde{X}_2)^{-1}\tilde{X}_2\tilde{\tilde{X}}_i$$

であることが明らかにされている。(9)

以上の操作変数法に対するいま一つの推定法は Chernoff and Rubin [4] による内生化法である。この方法は一致推定量を得るための障害となった誤差変数を内生変数として処理する推定法である。この方法は最近になって Hausman [22], Kolluri [31] (chap. 10) によってとりあげられ，全体系の推定問題が検討されている。以下この全体系の推定問題について説明したい。その推定法の特長は，あらたに補助方程式を導入することである。このとき上記のモデル〔IX〕は次のようになる。

$$\text{〔X〕}\quad \begin{aligned} &B'y(t)=\beta^*x_1^*(t)+\Gamma_2'\tilde{x}_2(t)+u(t)\\ &x_1(t)=x_1^*(t)+\delta(t)\\ &x_1^*(t)=\alpha'z(t)+\varepsilon(t)\end{aligned}$$

なお，上式においてあらたに導入された変数ないし係数の記号および仮定はすでに述べた 4.2 節のものを適用ないし拡張して用いるものとする。そこでこのモデルからその $x_1^*(t)$ を消去して，誤差変数 $x_1(t)$ を内生化すれば

$$\text{〔X'〕}\quad \begin{aligned} &B'y(t)-\beta^*x_1(t)=\Gamma_2'\tilde{x}_2(t)+v_1(t)\\ &x_1(t)=\alpha'z(t)+v_2(t)\end{aligned}$$

となる。ただし

$$v(t)=\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(t)-\beta^*\delta(t)\\ \delta(t)+\varepsilon(t)\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}(G\times 1)\\ (1\times 1)\end{matrix}$$

とする。(10) したがってその分散共分散行列 $\Omega=E(v(t)v'(t))$ は

$$\Omega=\begin{bmatrix}\Sigma+\beta^*\beta^{*\prime}\sigma_\delta^2 & -\sigma_\delta^2\beta^*\\ -\sigma_\delta^2\beta^{*\prime} & \sigma_\delta^2+\sigma_\varepsilon^2\end{bmatrix}\tag{4.16}$$

(9) Dhrymes [5] 296〜303, Hausman [22] 393.

(10) このモデルの構成は Kolluri [31] (101) に従っている。Hausman [22] (395) のモデルはこれと相異する。Hausman のそれをわれわれのモデルで表わすと

$$B'y(t)=\beta^*\alpha'z(t)+\Gamma_2\tilde{x}_2(t)+u(t)+\beta^*\varepsilon(t)$$
$$x_1(t)=\alpha'z(t)+\delta(t)+\varepsilon(t)$$

となる。これを $G+1$ 個の内生変数を持つ連立体系とする。

である。ところで，上のモデル〔X′〕はこの（4.16）式で表わされる分散構造を別にすれば，通常の連立方程式体系である。したがってその構造係数の推定にあたっては通常の識別定理と推定方法を適用することができる。例えばその確率項 $v(t)$ に $G+1$ 次限の正規分布を仮定することによって全情報最尤法あるいはより手続の簡単な三段階最小二乗法等を適用することができる。[11] 特に後者の三段階最小二乗法による推定量は，前節の単一方程式の場合と同じように，（4.16）式で表わされる分散共分散行列にいかなる制約も存在しないため，前者の最尤推定量と同じように漸近的有効推定量である。

最後に，ここでのモデル〔X′〕のごとく，測定誤差を伴なった誤差変数 x_1 を内生化し，さらにその真の値 x_1^* を補助方程式によって近似させる推定方法の一般的特長について二，三の点を指摘しておきたい。

(1)　モデル〔X′〕から明らかなごとく，連立方程式モデルにおいてその測定誤差を伴なった一部の外生変数を内生化し，さらにそれに関連して補助方程式を導入することは，結局モデルを通常の連立方程式体系に還元することにほかならない。つまりこれによって残されたすべての外生変数はモデルの確率項と無相関となり，さらにモデルの全変数は観測可能となる。したがって通常の連立方程式モデルに関する各種の推定法の適用が可能である。

(2)　しかしこのことは個々の構造方程式の識別に影響する。事実，各方程式において推定すべき構造係数の個数は一部の外生変数の内生化によっても不変であるが，モデル全体として有効な外生変数の個数はこの内生化によって減少する。いまその内生化される誤差変数の個数をモデル全体で n 個とすると，モデル〔X′〕における第 i 構造方程式の次数条件は

$$(G_i^{\Delta}-1)+K_i^*\leqq K-n \tag{4.17}$$

で表わされる。[12] 上式より誤差変数の内生化によって識別不能となる構造方程式

（11）　このほか全情報操作変数法（full information instrumental variables estimation method）を適用することができる。この推定量はその反履計算によって全情報最尤推定量に収束することが明らかにされている（Hausman［20］，［21］）。

（12）　この条件式は前述の（4.12）式と類似している。しかし両者が導出された前提は

の存在が充分考えられる。事実 $n\geqq 1$ のとき，測定誤差の存在しない通常の場合において適度識別である構造方程式は誤差の存在する状態において常に識別不能となる。

(3) 他方，補助方程式によって真の値 x_1^* を適当な外生変数 z によって近似させることは，一面においてこの識別問題に関連する。事実外生変数 z としてモデル外の変数を適用すると，上述の識別不能性は軽減される。

(4) ところで，補助方程式におけるこの外生変数 z の選択については，前節においてすでに指摘した通り，操作変数の場合と同ようにかなりの任意性が存在する。**Hausman** [22] (394) は誤差変数を除いたモデルの全外生変数をこの z にあてている。したがってわれわれのモデル〔X′〕については $z=\tilde{x}_2$ となる。他方 **kolluri** はその具体的内容について明らかにしていない。前者の **Hausman** の方法はその選択について任意性の存在する余地がほとんどないが，上述の識別問題との関連において必ずしも最適な方法とはいえない。この補助方程式における外生変数の選択について確定した結論を導き出すことはほとんど不可能であるが，ただ誤差を伴わないモデルの全外生変数および真の値 x_1^* と関係するモデル外の経済変数の両者のなかから，識別問題との関連において選択すべきである。

(5) しかし補助方程式はモデルのなかで常に適度識別である。したがってモデル全体を三段階最小乗法によって推定する限り，この補助方程式の z にいかなる変数が選ばれようとも，他の構造方程式の係数の推定量とその漸近的分散共分散行列には変りがない。(13)

(6) 最後に誤差分散 Σ，σ_δ^2 および補助方程式の確率項の分散 σ_ε^2 は (4.16) 式より明らかなごとく，$G=1$（すなわち単一方程式モデル）の場合のみ一意に決定され，これ以外では過剰識別となる。ただし構造係数 β^* はこれまでの義

相異する。(4.12) 式では第 i 構造方程式が m 個の誤差変数を含み，かつその構造係数と誤差分散との同時識別であった。一方ここでの (4.17) 式ではモデル全体として n 個の誤差変数が存在して，構造係数のみの識別が個別に考慮されている。

(13) Narayanan [38] 299–301, Zellner and Theil [50] 61–8.

論において識別され既知とする。なお，多数の誤差変数がモデルに含まれそしてそれらの測定誤差が互いに無相関の場合も，上述と同ように過剰識別となる。これらの過剰識別性はベクトル β^*(あるいは多数の誤差変数が存在するときはそれらの変数の各方程式における係数行列）に関する先験的制約によって解決される。

要約とあとがき

本書は観測不可能な変数を含む経済モデルの推定について，ここ10年ばかりの間に検討された諸結果を中心に説明した。各章の論述は次のごとく要約することができる。

まず第一章では，観測不可能な変数を補助方程式によって推定する経済モデルの例を示しこれによって本研究の重要性を強張し，続いてこれらのモデルが確証的因子分析モデルあることを明らかにした。

第二章では補助方程式を含む基本モデルを設定し，これに Minimum Distance（MD と略記する）推定法を適用すると共にその推定量の漸近的性質を検討した。この結果 MD 推定量に関する従来の諸性質はこの基本モデルの推定量にも妥当し，特に(1)ある一定の収束条件の下において基本モデルの MD 推定量はその最尤推定量と同じように漸近的有効推定量であり，また(2) MD 推定量の反復解はその最尤推定量に一致する。

第三章では補助方程式法の拡充をはかるため第二章の基本モデルを次の諸点に関して拡張した。すなわち外生変数の導入，多数の観測不可能変数の導入，補助方程式の確率化および基本モデルの連立方程式モデルへの拡張等がそれである。この結果(1)補助方程式の確率化によって得られる拡張モデルは，本来の係数制約のほかに因子分析と同じ分散制約を含んでいる。ゆえに推定にあたってこの両制約を同時に考慮するためには最尤推定法に従わねばならない。しかし(2)これ以外の拡張モデルにおいては基本モデルの場合と同じように MD 推定法を適用することができる。しかしその推定量の計算はパラメーターに関して適度識別な場合を除いて一般に反復法に従わなければならない。

第四章では変数誤差モデルの推定問題がとりあげられた。変数誤差モデルの補助方程式による推定は，これまでの章で検討した結果の特殊な場合にあたり，本研究の一つの応用とみることができる。この結果変数誤差を含んだ単一方程式モデルについては，補助方程式法によって(1)モデルの識別不能性が除去され，さらに(2)連立体系への移行によって三段階最小二乗法等の適用が可能となる。他方変数誤差を含んだ連立方程式モデルに関しては，補助方程式法によって(3)誤差変数の内生化が可能となり，これによって新たな連立方程式モデルが構成される。(4)その際出現する各構造方程式の識別は補助方程式に含まれる外生変数と密接な関係にある。補助方程式にいかなる外生変数を選択するかは，操作変数法におけるその変数選択と同ようにかなり任意性が存在する。ここでもこの変数選択について確定した結論を求めることは不可能である。ただこれらの外生変数が経済理論の裏付けの基に選択されることは当然であるが，これ以外に識別問題との関連で述べるならば，体系外の変数からの選択が望ましい。

以上の諸結果からわかる通り，本書は観測不可能な変数を含むモデルの推定に関する理論的検討のみに終始し，その実際の経済モデルへの適用は一切行なわなかった。経済変数に対応する観測値が存在しないという極めて現実的問題を検討しながら，その理論的問題のみに限定したことは問題の皮相のみを扱ったといえよう。結果の各種の経済モデルへの適用は今後の研究課題の一つとして残しておきたい。

参 考 文 献

［1］ Aigner, D. J. and A. S. Goldberger, *Latent Variables in Socio-economic Models*, Amsterdam, North-Holland, 1976.

［2］ Brown, T. M., "Simultaneous Least Squares: A Distribution Free Method of Equation System Structure Estimation," *International Economic Review*, Vol. 1, 173–91, Sept. 1960.

［3］ 伴　金美「Unobservable Variables in Econometrics」理論・計量経済学会報告資料，1975.

［4］ Chernoff, H. and H. Rubin, "Asymptotic Properties of Limited-Information Estimates Under Generalized Condition," in W. C. Hood and T. C. Koopmans, eds., *Studies in Econometric Method*, Chapter 7, New Haven, Yale University Press, 1953.

［5］ Dhrymes, P. J., *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*. New York, Harper, 1970.

［6］ Fisher, F., *The Identification Problem in Econometrics*, New York, McGraw-Hill, 1966.

［7］ Fletcher, R. and M. D. J. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *The Computer Journal*, Vol. 6 163–68, 1963.

［8］ Friedman, M., *A Theory of the Consumption Function*, Princeton, Princeton University Press, 1957.

［9］ Geraci, V. J., "Identification of Simultaneous Equation Models with Measurement Error," *Journal of Econometrics*, Vol. 6, 263–83, 1976.

［10］ Goldberger, A. S., and I. Olkin, "A Minimum Distance Interpretation of Limited-Information Estimation," *Econometrica*, Vol. 39, 635–40, May 1971.

［11］ Goldberger, A. S., "Econometrics and Psychometrics : A Survey of Communalities," *Psychometrika*, Vol. 36, 83–107, June 1971.

［12］ ———, "Structural Equation Methods in the Social Sciences," *Econometrica*, Vol. 40, 979–1001, 1972.

［13］ ———, "Maximum Likelihood Estimation of Regressions Containing Unobservable Independent Variables," *International Economic Review*, Vol. 13, 1–15, 1972 (reprinted in Aigner, D. J. and A. S. Goldberger ［1］).

［14］ ———, "Unobservable Variables in Econometrics," in P. Zarembka, ed., *Frontiers of Econometrics*, 193–213, New York, Academic Press, 1974.

［15］ Goldberger, A. S. and O. D. Duncan, *Structural Equation Models in the*

Social Sciences, New York, Seminar Press, 1973.

[16] Goldfeld, S. M. and R. E. Quandt, *Nonlinear Methods in Econometrics*, Amsterdam, North-Holland, 1972.

[17] Griliches, Z., "Errors in Variables and other Unobservables," *Econometrica*, Vol. 42, 971–98, November 1974 (reprinted in Aigner, D. J. and A. S. Goldberger [1]).

[18] Hauser, R. M. and A. S. Goldberger," The Treatment of Unobservable Variables in Path Analysis," in H. L. Costner, ed., *Sociological Methodology*, Chapter 4, San Francisco, Jossey-Bass, 1971.

[19] Hauser, R. M., "Disaggregating A Social-psychological Model of Educational Attainment," *Social Science Reserch*, Vol. 1, 159–88, 1972.

[20] Hausman, J. A., "Full Information Instrumental Variable Estimation of Simultaneous Equation Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol. 3, 641–52, 1974.

[21] _______, "An Instrumental Variable Approach to Full-Information Estimators for Linear and certain Non-linear Econometric Models, *Econometrica*, Vol. 43, 727–38, 1975.

[22] _______, "Errors in Variables in Simultaneous Equation Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 5, 384–401, 1977.

[23] Hsiao, C., "Identification and Estimation of Simultaneous Equation Models with Measurement Error," *International Economic Review*, Vol. 17, 319–39, 1976.

[24] Johnston, J., *Econometric Methods*, 2nd edition, Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1972 (1st edition, 1963).

[25] Jöreskog, K. G. "A General Approach to Confirmatory Maximam Likelihood Factor Analysis, "*Psychometrika*, Vol. 34, 183–202, 1969.

[26] _______, "A General Method for Analysis of Covariance Structures," *Biometrika*, Vol. 57, 239–51, 1970 (reprinted in Aigner, D. J. and A. S., Goldberger [1], 187–204)

[27] _______, "A General Method for Estimating a Linear Structural Equation System," in Goldberger, A. S. and O. D. Duncan [15], 85–112, 1973.

[28] Jöreskog, K.G. and A. G. Goldberger, "Estimation of a Model With Multiple Indicators and Multiple Causes of a Single Latent Variable," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 70, 631–39, Sept. 1975.

[29] Jorgenson, D. W., "Anticipations and Investment Behavior," in J. S.

Dusenberry, G. Fromm, L.R. Klein and E. Kuh, eds., *The Brookings Quaterly Economic Model of The United States*, 34–92, Chicago, Rand Mcnally and Company, 1965.

[30] Kendall, M. G. and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, London, Griffin, 1961.

[31] Kolluri, B. R., *Analysis of Econometric Models Containing Unobservables*, Doctoral Dissertations, State University of New York, 1977.

[32] Koutsoyiannis, A., *Theory of Econometrics*, London, Macmillan, 1973.

[33] Lawley, D. N. and A. E. Maxwell, *Factor Analysis as a Statistical Method*, London, Butterworth and co., 2nd edition, 1971 (lst edition, 1963, 日本語訳『因子分析法』丘本正監修, 日科技連, 1970).

[34] Madansky, A., *Foundation of Econometrics*, Amsterdam, North-Holland, 1976.

[35] Malinvaud, E., *Statistical Methods of Econometrics*, 2nd revised edition, Amsterdam, North-Holland, 1970.

[36] ________, "The Consistency of Nonlinear Regressions," *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 41. 956–69, 1970.

[37] Nakamura, M., "A Note on the Consistency of Simultaneous Least Squares Estimation," *International Economic Review*, Vol. 1, 192–97, Sept. 1960.

[38] Narayanan, R., "Computation of Zellner-Theil's Three Stage Least Squares Estimate," *Econometrica*, Vol. 37, 298–308, April 1969.

[39] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店, 1960.

[40] Robinson, P. M., "Identification, Estimation and Large Sample Theory for Regressions Containing Unobservable Variables," *International Economic Review*, Vol. 15, 680–92, 1974 (reprited in Aigner, D. G. and A. S. Goldberger [1]).

[41] Rothenberg, T. J, "Identification in Parameteric Models," *Econometrica*, Vol. 39, 577–91, May 1971.

[42] Rothenberg, T. J. and C. T. Leenders, "Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems," *Econometrica*, Vol. 32, 57–76, 1964.

[43] Sargan, J. D., "The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables," *Econometrica*, Vol. 26, 393–415, July 1958.

[44] 洲浜源一「投資関数の基礎的考察」,『名古屋学院大学論集』, 第一巻, 174—89, 1964年7月.

[45] 鈴木光男『ゲームの理論』勁草書房, 1959.

[46] Theil, H., *Principles of Econometrics*, New York, Wiley, 1971.

[47] Turnovsky, S. J., "Empirical Evidence on the Formation of Price Expecta-

tions," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 65. 1441–54, 1970.

[48] Wiley, D. E., "The Identification Problem for Statistical Equation Models with Unmeasured Variables," in Goldberger, A. S. and O. D. Duncan [15], Chapter 4, 1973.

[49] Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," *Journal of the American Ststistical Association*, Vol. 57, 348–68, June 1962.

[50] Zellner, A. and H. Theil, "Three-Stage Least Squares; Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations," *Econometrica*, Vol. 30, 54–78, January 1962.

[51] Zellner, A., "Estimation of Regression Relatioships Containing Unobservable Independent Variables," *Internatinal Economic Review*, Vol. 11, 441–54, October 1970 (reprinted in Aigner, D. J. and A. S. Golberger [1] 67–83).

大阪府立大学経済研究叢書

第1冊	西村孝夫著	イギリス東インド会社史論	＜昭 35＞
第2冊	福原行三著	J．S．ミルの経済政策論研究	＜昭 35＞
第3冊	和田貞夫著	点集合と経済分析	＜昭 35＞
第4冊	内田勝敏著	ブリティシュ・トロピカル・アフリカの研究	＜昭 36＞
第5冊	永島 清著 大野吉輝著	国際経済と経済変動	＜昭 36＞
第6冊	山谷恵俊著 岡本武之著	成長理論の研究	＜昭 36＞
第7冊	竹安繁治著	近世土地政策の研究	＜昭 37＞
第8冊	谷山新良著	保険の性格と構造	＜昭 37＞
第9冊	佐藤浩一著	現代賃金論序説	＜昭 37＞
第10冊	藤井定義著	幕末の経済思想	＜昭 38＞
第11冊	渡瀬 浩著	経営の社会理論	＜昭 38＞
第12冊	今川 正著	線型計画と地域開発	＜昭 38＞
第13冊	馬淵 透著	国際金融と国民所得	＜昭 39＞
第14冊	鍬田邦夫著	金融理論と金融政策	＜昭 39＞
第15冊	村上義弘著	行政法および行政行為の本質	＜昭 39＞
第16冊	鈴木和蔵著	減価償却政策と維持計慮	＜昭 40＞
第17冊	岡本武之著	ケインズ主義経済理論序説	＜昭 40＞
第18冊	片上 明著	イギリス「社会改良」時代の研究	＜昭 41＞
第19冊	風間鶴寿著	相続法の総論的課題 ―相続開始・代襲相続・放棄―	＜昭 41＞
第20冊	前田英昭著	企業行動の理論	＜昭 41＞
第21冊	盛 秀雄著	日本国憲法の主原則	＜昭 42＞
第22冊	石田喜久夫著	自然債務の研究	＜昭 42＞
第23冊	稲葉四郎著	経済学の根柢	＜昭 42＞
第24冊	武部善人著	産業構造分析	＜昭 43＞
第25冊	山谷恵俊著	技術進歩と均衡成長	＜昭 43＞
第26冊	立半雄彦著	L．ワルラスの社会経済学	＜昭 43＞
第27冊	市橋英世著	マーケティング・システムの行動理論	＜昭 44＞
第28冊	横山益治著	不確実性と決定理論 ―ベイジャン接近―	＜昭 44＞
第29冊	大野吉輝著	財政政策と所得分配	＜昭 44＞
第30冊	馬淵 透著	国際収支理論のグラフ的分析	＜昭 45＞
第31冊	石川常雄著	通貨変動理論の研究	＜昭 45＞
第32冊	今井 宏著	議決権代理行使の勧誘	＜昭 45＞

第33冊	右近健男著	離婚扶養の研究 —財産分与論 その1—	<昭 46>
第34冊	森田 劭著	労働市場分析による労働経済の研究	<昭 46>
第35冊	前田英昭著	企業の最適な投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策について	<昭 46>
第36冊	服部容教著	新ケインズ派基礎理論研究	<昭 47>
第37冊	井上和雄著	ユーゴスラヴィアの市場社会主義	<昭 47>
第38冊	門田安弘著	計算価格による分権的システム	<昭 48>
第39冊	森 淳二朗著	配当制限基準と法的資本制度 —アメリカ法の資産分配規制の史的展開—	<昭 49>
第40冊	長野祐弘著	垂直市場システムの研究 —市場システムの基礎理論—	<昭 49>
第41冊	谷山新良著	産業連関分析	<昭 50>
第42冊	唄野 隆著	利子率の期間別構造と国債管理	<昭 50>
第43冊	藤井定義著	懐徳堂と経済思想	<昭 51>
第44冊	宮本勝浩著	分権的経済計画と社会主義経済の理論	<昭 51>
第45冊	西村孝夫著	フランス東インド会社小史	<昭 52>
第46冊	森田 劭著	西ドイツにおける外国人労働力雇用の経済的側面	<昭 52>
第47冊	福島孝夫著	会計収益認識論	<昭 53>
第48冊	市橋英世著	組織サイバネティクス研究 —組織行動の一般理論—	<昭 53>
第49冊	長尾周也著	組織体における権力と権威	<昭 54>
第50冊	洲浜源一著	観測不可能な変数を含む経済モデルの推定	<昭 54>

著 者 略 歴

昭和11年　香川県高松市に生まれる
昭和34年　香川大学経済学部卒業
昭和39年　神戸大学大学院経済学研究科博士課程修了
昭和39年　名古屋学院大学講師
昭和47年　大阪府立大学経済学部 助教授

昭和54年３月25日　印刷
昭和54年３月31日　発行

著 者　洲　浜　源　一

堺市百舌鳥梅町４丁804
発行所　大阪府立大学経済学部

天理市稲葉町80
印刷所　株式会社　天理時報社