退出：戦略とタイミングのモデル分析

ISSN 0473－4661

大阪府立大学経済研究叢書　第77冊

退　出

―戦略とタイミングのモデル分析―

荒　木　長　照　著

大阪府立大学経済学部

大阪府立大学経済研究叢書　第77冊

退　出

—戦略とタイミングのモデル分析—

荒　木　長　照　著

大阪府立大学経済学部

も く じ

序 …………………………………………………………………… 1

§-1 本稿の範囲と目的 ………………………………………… 1

§-2 のれんへの投資と最適停止 ……………………………… 6

§-3 投資行動としての退出 …………………………………… 15

I 退出障壁と不確実性 …………………………………………… 17

§-1 序 ………………………………………………………… 17

§-2 独占企業モデル …………………………………………… 19

§-3 退出ゲーム —対称的な複占の場合— …………………… 27

§-4 退出ゲーム—非対称的な複占の場合— …………………… 41

II 衰退市場における三つの戦略 …………………………………… 43

§-1 序 ………………………………………………………… 43

§-2 確実性下の退出モデル …………………………………… 44

§-3 不確実性下の退出モデル ………………………………… 55

§-4 不確実性の退出戦略への影響 …………………………… 59

II への補論 ……………………………………………………… 63

§-1 序 ………………………………………………………… 63

§-2 モデル ……………………………………………………… 64

§-3 数値解 ……………………………………………………… 70

III 最適停止モデルによる退出時刻の決定 ………………………… 78

§-1 序 ………………………………………………………… 78

§-2　確実性下のモデル …… 79
§-3　不確実性下のモデル …… 81
§-4　反射壁を伴う確率モデル …… 91
§-5　三つのタイミングの関係 …… 95
§-6　コントロールを伴う最適停止モデル—コメント— …… 96

IV　複占市場からの退出時刻の決定 …… 102
§-1　序 …… 102
§-2　確実性下の略奪戦争ゲーム …… 106
§-3　不確実性下の略奪戦争ゲーム …… 110
§-4　拡散確率過程上での退出ゲーム …… 117
§-5　均衡戦略 …… 122
§-6　数値例 …… 128

数学付録 …… 131
§-1　確実性下のダイナミック・プログラミング …… 131
§-2　不確実性下のダイナミック・プログラミング …… 134
§-3　最適停止問題 …… 136
§-4　最適停止ゲーム …… 139

参考文献 …… 142

序

§-1　本稿の範囲と目的

この拙論の目的は、需要が不確実性を伴って時間とともに（平均して）縮小してゆく市場、つまり衰退市場ないし衰退産業からの企業（あるいは事業単位）の退出行動を理論的な見地から、幅広く考察することである.

企業の経営者は不確実な環境の下で投資決定を含むさまざまな意思決定を行なわなければならない. このことによって不確実性の下での意思決定が経営科学の主要な問題になっているのは周知のところである. 後で詳しく述べるように産業からの退出も広い意味でこの投資決定の一つである. 退出という特殊な投資決定を行なうときにも、これに及ぼす不確実性を十分制御することが経営者には必要とされる. 本稿では退出をめぐる様々な問題、たとえば退出障壁、退出ゲームにおけるライバルとの関係、退出タイミングの決定の問題などを考察するが、これらはすべて需要不確実性が存在する環境の下で分析される. 不確実性の影響が本稿を貫く一つのテーマであると言うことができる.

企業の退出行動はこれまであまり理論的な考察の対象とはなされてこなかった. しかし、近年ゲーム理論を用いたいわゆる New I.O.（新しい産業組織論）が発展する中で、後に本論の IV でとりあげるように 2 企業の産業からの退出ゲームとして盛んに分析されるにいたっている. 本稿もこういった動きに刺激されたものであることは言うまでもないが、産業組織論的な立場にたつのではなく、むしろ企業理論的な視点から退出行動の分析を試みるものである. ところで、企業が産業から退出した後、当該企業が解散せず他の市場に参入するとしたとき、そのすべての資産が他の事業に転用可能でないならば、現存資産の処分が問題となる. このことは企業資産の残余処分の問題であり、近年話題に

なっているM&Aあるいは企業売却の問題と密接な関係を持つ．企業売却の厳密な議論は企業の負債（レヴァレッジ）を含む資本構造の分析が不可欠であり、これは、本稿の目的と分析方法には少々複雑であるから、残念ながらこのような企業の財務論的な側面からの分析は本稿では行わない(1)．

製品のライフサイクル仮説によると、需要のダイナミックス上で需要水準は成熟期の後に衰退期をむかえる．成熟期を経験した産業にある企業の管理者はまず二つのことを考えなければならない．その第1は果たして自分が存在している産業は衰退状態に入ったのか否かを見極めることである．第2は、もし衰退していることがわかったならどうするべきかである．

ところで、本稿のII以降においてはダイナミックな企業の分析がなされる．その際、もし企業が市場に対して積極的なコントロールを行なわない場合には、当該企業に対する需要は次の確率微分方程式にしたがうものと想定される．

(1)　$dX = \alpha X dt + \sigma X dW.$

ただし$\sigma > 0$は微小標準偏差のパラメータで、$\alpha < 0$は需要の期待変化率である．市場が衰退しているという前提から需要の期待変化率は負と仮定される．さらに$dW(t)$は標準ウイナー過程の確率微分である。Eを数学的期待値とすれば、$W \equiv W(t, \omega)$は確率空間（Ω、$\mathcal{F}$、p）において、$\omega \in \Omega$について次の条件を満たす確率過程である。

(1)　もちろん全く不可能というわけではない．荒木（1992）は本稿IIIの手法を用いて、極めて単純化された企業売却モデルを考察したものである．もちろん十分満足できるというものではないので、今後さらに発展させねばならない．一方、必ずしも財務論とは直接の関係はないがSchary （1991） は負債を考慮した退出行動を実証的に分析している．

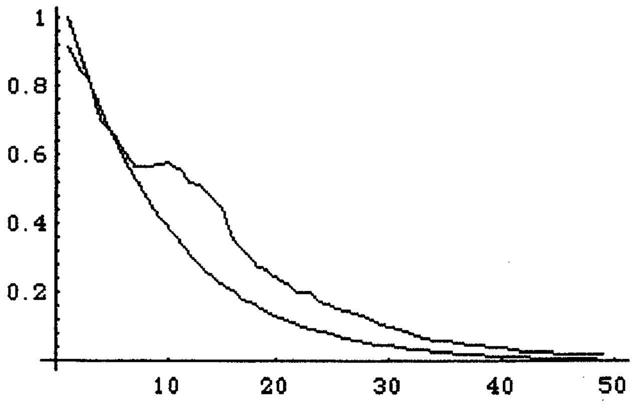


図 1－1　(1)式の微分方程式を差分化した方程式の解の見本経路.
滑らかな曲線は不確実性が存在しないときの経路ないしは平均経路.

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\left\{W(t,\ \omega) : t \geq 0\right\} \quad \text{は Gauss 過程} \\
&P(W(0,\ \omega)=0)=1, \\
&E\left\{W(t,\ \omega)-W(s,\ \omega)\right\}=0, \\
&E\left[\left\{W(t,\ \omega)-W(s,\omega)\right\}^2\right]=|t-s|.
\end{aligned}
$$

(1)式を満たす確率過程はファイナンス論や国際経済学等で近年盛んに用いられており、拡散確率過程と呼ばれる[2]. この拡散確率過程に需要水準がしたがうとき、需要は平均して α の速度で減少し、このトレンド上で確率的攪乱が加わることになる. また X は対数正規分布をなし、確率 1 で非負の値を取ること

(2) たとえば、国際経済学では Krugman and Miller (1991) が、ファイナンスでは Merton (1990) がまとまっている. また拡散過程に関しては、たとえば Karatzas and Shreve (1991) を参照のこと.

がわかっている．

したがって、前述の企業の管理者が直面する第1の問題は、この単純化された需要の時系列において需要の平均速度であるαが負の値を取っているのかどうかを検定することということができる．しかしながら、これに関してはたとえばWong (1971) などを参考にするとして、本稿では当該市場がすでに衰退期に入ったことがわかっているものとして、第2の問題、つまり衰退市場でのとるべき行動について議論する．

企業が退出する際、重要になるのものの一つが退出障壁の高さである．退出障壁とは文字どおり退出をもくろむ企業の障害となるものであるが、これには経済的な理由によるものから、経済外的な心理的なものまで様々なものが考えられる(3)．たとえば退出する際に残された資産のうち処分可能なものの価値、退出後他の市場に再参入して新しく始める事業の収益の期待値とその分散、本業的な事業分野からの撤退の場合には管理者の心情的な障害、多角化企業の場合には他の事業分野との戦略的な関係等々である．本稿のIでは単純な1企業あるいは2企業ゲームモデルを用いて、これら退出障壁を形成するもののうち退出時点での需要の状態、同じく資産の処分価値（スクラップ・バリュー）および他市場への再参入による収益などをとりあげ、これらがいかに退出障壁を決定するかを分析する．その際もちろん不確実性の効果が重要な要素となる．本稿のIは静学的なモデル分析を行なっており、いわばダイナミックな意思決定の一瞬を切り取って分析を行なったものと言えるが、この様にすることで退出障壁を比較的詳しく分析することが可能となるのである．尚、Iでは衰退産業の仮定はおかず定常的な市場に対する予想のもとで議論が進められる．このことは本稿の目的から外れることになるが、静学分析の性質上やむを得ない．

ところで、衰退産業における企業の戦略としては次の三つを考えることがで

(3)　Porter (1980) が詳しい．

きる．つまり、

1. 即時退出する．
2. 暫時市場に残った後退出する（これは刈り取り戦略と呼ばれる）．
3. 最後の供給者として市場に残り続ける．

これらの戦略は需要の状態や前述の退出障壁の高さに依存して選択されなければならない．IIでは、単一企業の場合のこれら三つの戦略の選択問題に関して、Linear-Quadratic-Gaussian モデルを用いて特に退出後の収益と不確実性が戦略の選択にいかに影響するかを明かにする．このモデルは不確実性下の制御系でありコントロール変数として広告量を採用した．本稿をつうじて物的資産への追加的投資は補填投資も含めて全く考慮されていないが、瞬時的な需要創造効果をもつ広告活動、つまりのれんへの投資を行なう企業を想定している．この意味でIIのモデルは企業投資モデルと言える．このようにマーケティングを行なう企業はIIIの一部でも考察される．のれんへの投資については節を改め詳しく論じる．

前述のように本稿の一つのテーマは不確実性の効果である．ダイナミックな環境で不確実性を考慮することで特に意味をもつものが時間である．確実性下ではすべてが確率 1 で前もってわかっているから、ある特定の事象が生起する時刻も容易に計算でき、時間に関して何ら興味深いことがらは存在しない．ところが不確実な環境の下では、ある特定な事象が起こる時刻（本稿ではマルコフタイム）も確率変数となる．もちろんこの特定の事象というのは結果的には、企業が退出するという事象である．この事象が起こる時刻が確率変数であるから、いつ退出すべきかについては前もってはっきりとしたことが言えない．ここにダイナミックな不確実モデルを考える醍醐味と面白さが存在する．IIIは単一企業の退出決定モデルを考え、具体的に退出のタイミングを求め、不確実性

がいかにこのタイミングに影響を与えるかを明かにする．さらに続くⅣはこれを２企業の退出ゲームに発展させる．既に述べたように２企業退出ゲームは産業組織論で多くの業績が存在する．Ⅳは拡散確率過程上での退出ゲームの解を明かにしたものとしては始めてのものである．ここでは不確実性とならんで費用構造が退出時刻にいかに影響を及ぼすかを明かにする．

分析手法について最後に述べておかねばならない．Ⅰを除いて、企業の経営者をコントローラーとする、広告量あるいは／かつ時間による制御モデルが議論の中心になる．解を発見する手法にはおもにダイナミック・プログラミングが用いられている．周知のように不確実性下の動学的な問題はどうしても分散を考慮せねばならなないということから、非線形の微分方程式を解く必要がでてくる．問題によってはポントリャーギンの最大値原理に準ずることも可能なものも存在するが、そのようなケースでも確率制御の場合にはダイナミック・プログラミングによるほうが容易に解を見つけることができる場合のほうが少なくない．制御された系がある行動を起こすべきタイミングを議論するためにはモデルの解は具体的に見つかっていることが必要になるので、ほぼ一貫してダイナミック・プログラミングの手法を用いた．稿末に数学的な簡単な解説を添付する．

§-2　のれんへの投資と最適停止

本稿では実物資本への投資は捨象されている．そのかわりⅡおよびⅢの一部において、衰退する市場にマーケティング活動、特に広告活動を行なうことによって眠っている残存需要を呼び起こす、のれんへの投資を行なう企業を考えている．暫時市場に留まって刈り取り戦略を取る企業であることを想定しているのは言うまでもない．広告によるコントロールモデルの既存文献には、代表的なものとして Nelove and Arrow（1962）や Vidale and Wolfe（1957）などが既にあるが、これらもブランドの忘却率が資本の減耗率と考えれば同様に

のれんへの投資と考えることができる.

さて、本稿で退出タイミングを議論するとき最適停止（optimal stopping）の手法が用いられる. この方法とのれんへの投資を同時に例示する格好の話題があるのでここで紹介しておこう. 生産制御あるいは在庫制御モデルで有名な（s, S）政策モデルがそれである.（s, S）政策自体は Scarf（1960）によるが制御論的にはインパルシブ・コントロール（impulsive control）[1] と呼ばれるものである. このインパルシブ・コントロールは結局いつ制御を実施すべきかを見つける問題であって、このことは市場を退出する時刻を見つけること、つまり最適停止時刻を発見することと本質的に同じである. インパルスシブ・コントロールは最適停止の手法を部分的に含む、より一般的な制御方法であるといえる.

衰退する市場に直面している企業は（s, S）政策によって市場に対して広告を実施することで一時的に需要の回復をはかることができるものとしよう. 今仮に需要水準が $x=a$ を経験したときに、ある一定量の広告を実施するものとする. これによって需要は ξ だけ回復するものと仮定する. また、単位を適当に付け替えて、広告 1 単位で 1 単位の需要を惹起することができるものと考える.

広告の結果需要水準が A に増加したとすれば、$\xi=A-a \geq 0$ とすることができる. 尚、時間とともに広告の効果が減少するような場合は、確定的なモデルではあるが本論Ⅱの補論で扱う.

さて、このとき（1-1）の拡散確率過程にしたがう需要の経路方程式は次のよ

---

(1) 近年国際金融論の分野で、このインパルスシブ・コントロールを用いて、為替レートのバンド・コントロールの議論が盛んである. たとえば Froot and Obstfeld（1991）、Krugman（1991）、Krugman and Miller（1991）、Svensson（1991）などを参照のこと.

うに書き換えることができる.

$$(1)\quad dX = \alpha X dt + \sigma X dW + \sum_{i}^{m}(A-a)\delta(t-\tau_i).$$

ただし τ_i は広告を行なう時刻で、$\delta(t-\tau_i)$ はディラック関数である[2].

(1)式を差分化して $a=0.2$, $A=0.6$ としたときの仮想的な需要の見本経路が図 2-1 である.

さて、企業の最大化すべき目的関数を、(2)式のように需要の単純な一次関数である営業利益 pX から広告にかかる費用 $k+c(A-a)$ を控除した合計額の期待割引現在価値としよう. ただし、パラメータ $c>0$, $k>0$ はそれぞれ広告単位当たりの費用と、広告を行なうことに伴う固定費を表わしている.

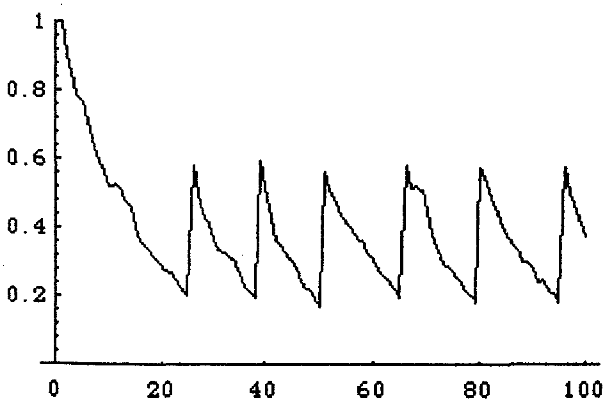


図 2−1　$a=0.2$ のときに、0.4 単位の広告を実施したときの需要の見本経路.

(2)　つまり、$\delta(t-\tau_i)=\begin{cases}1 & t=\tau_i\\ 0 & t\neq\tau_i\end{cases}$.

$$(2)\quad u(x)=\sup_{z} E\left[\int_0^{\rho} e^{-rs}pX(s)ds-\sum_{i=1}^{\tau_m}(k+c(A-a))e^{-r\tau_i}\mid X(0)=x\right]$$

(2)式で z は広告を行なうべき時刻の列を表わしている．またこの企業の技術的な実行可能集合を

$$(3)\quad F=\left\{x\in R;\underline{x}<x<\overline{x}\right\}.$$

として、この問題の計画期間はこの実行可能性集合から需要水準が最初に離脱する時刻 ρ までとする．つまり、

$$(4)\quad \rho=\inf\left\{t\geq 0;X(t)\notin F\right\}.$$

である．技術的な実行可能集合の下限 $\underline{x}$ は企業活動に最低限必要な需要水準を表わし、上限 $\overline{x}$ は衰退市場としてのそれまでの計画を変更するに値するような、例えば新たな拡張的投資を必要とするような需要の水準である．

さて、ここで $\underline{x}<a$ と仮定しておく．したがって、(2)式において広告を行なう時間の列の終点は

$$(5)\quad \tau_m=Max\left\{\tau_i\mid\tau_i\leq\rho\right\}.$$

となる．

この企業の管理者は(1)にしたがいながら期待現在価値を最大にすべく広告を行なう時刻、言い換えればいかなる需要水準 a を観測したときに広告を行なうべきか、そしてどれだけ行なうべきか、つまり A はいかほどであるかを決定しなければならない．

さて、Bensoussan (1982) によるとこの問題の解は、次の準変分不等式 (quasi variational inequality) を解くことでえられることがわかっている.

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&Au \geq px\\
&u \geq Mu\\
&(Au-px)(u-Mu)=0\\
&u=0 \quad \forall x \in \partial F
\end{aligned}
$$

ただし、(6)式中の A は広告量ではなく次のような微分オペレーターである.

$$
(7)\quad Au=-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{d^2u}{dx^2}-\alpha x\frac{du}{dx}+ru.
$$

また、

$$
(8)\quad Mu=-k+\sup_{\xi \geq 0}(u(x+\xi)-c\xi).
$$

である. (6)式によると状態空間である需要の集合は二つの領域に分割することができる. その一つが

$$
C=\{x \mid u(x)>Mu(x)\}=\{x \mid x>a\}
$$

である. この領域では、広告を行なわないほうが企業の期待価値が大きいような需要の領域である. したがって、このとき(6)式より等式 $Au=px$ が成立する. この領域は通常の業務を遂行すべきという意味で継続領域と呼ぶことにする. 一方、もう一つの領域は、

$$
\overline{C}=\{x \mid u(x)=Mu(x)\}=\{x \mid x \leq a\}
$$

である. これは言うまでもなく広告を行なうべき需要の範囲である. 停止問題ではこの領域に需要があればすぐに退出すべき領域であり、これを停止領域と

呼ぶ．もちろんここでは停止問題ではないから、さしずめ広告実施領域とでも呼ぶべきであろう．よって$x\in\overline{C}$について、

$$(9)\quad u(x)=-k-c(A-x)+u(A),\ x\in\overline{C}.$$

となる．(9)式の左辺は需要水準$X=a$を観測してから計画期間の将来にわたって稼得しうるネットキャッシュフローの期待割引現在価値である．これを今後単純に期待企業価値と呼ぶならば、広告を行なうべき時点では、この価値が広告を行なったことによって増加した需要水準によって、将来までにえられるであろう企業の期待価値でもって広告の費用をちょうどまかなえるだけのものでなければならないことを述べている．またそのような水準まで広告を行なわなければならないことも意味しているわけである．明かにこれ以上でもこれ以下でも最大化したことにはならない．これはvalue-matching条件と呼ばれている条件で、最適停止問題でしばしば登場する条件である．また滑らかな解を求めるために次の二つの条件も要求される．

$$(10)\quad \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=a}=c.$$

$$(11)\quad \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=A}=c.$$

これらはsmooth-passing条件と呼ばれ、数学的には(9)式が一階の微分に関しても成立する正規性の条件である．この経済学的な意味については本文で詳しく説明する．

さて、実際に微分方程式を解くと(6)、(7)、(10)および(11)から、

$$(12)\quad u(x)=c_1x^{\gamma}+c_2x^{\lambda}+\frac{p}{r-\alpha}x.$$

をえる．ただし、

$$\gamma=\frac{1-2\alpha/\sigma^2+\sqrt{(1-2\alpha/\sigma^2)^2+8r/\sigma^2}}{2}>1,$$

$$\lambda=\frac{1-2\alpha/\sigma^2-\sqrt{(1-2\alpha/\sigma^2)^2+8r/\sigma^2}}{2}<0,$$

$$c_1=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{aA}{a^\gamma A^\lambda-a^\lambda A^\gamma}(A^{\lambda-1}-a^{\lambda-1})\left(c-\frac{p}{r-\alpha}\right),$$

$$c_2=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{aA}{a^\gamma A^\lambda-a^\lambda A^\gamma}(a^{\gamma-1}-A^{\gamma-1})\left(c-\frac{p}{r-\alpha}\right)$$

であるものとする．(12)は言うまでもなく企業の期待価値である．この方程式は観測される需要の初期値の関数であることに注意を要する．また、(12)式の最終項は、実は何ら制御を行なわないときにこの企業が無限期間にわたって稼ぎうる期待価値を表わしている．つまり、

$$(13)\quad \frac{p}{r-\alpha}x=E\left[\int_0^\infty e^{-rs}pX\,ds \mid X(0)=x\right]$$

である．このことは、実際に（1-1）を用いて積分すれば容易に確認することができる．したがってインパルスシブ・コントロールを行なうだけの価値があるためには、(12)式において制御を行なう範囲で、

$$(14)\quad c_1x^\gamma+c_2x^\lambda>0$$

でなければならないことになる．

さて、$c-\dfrac{p}{r-a}<0$、つまり広告を行なう単位当たり費用のほうが(13)式の単位当たり価値よりも小さいならば、$c_1<0$、$c_2>0$ であるから、企業の期待価値の需要に対する微分商 $\dfrac{du(x)}{dx}$ は、需要がゼロに近づくにつれて、また需要が非常に大きい値になるにつれて、それぞれ $-\infty$ に発散する．したがって、微

分商 $\dfrac{du(x)}{dx}$ のグラフは図 2-2 のようになる．したがって、(9)式からわかるように図中の斜線の部分の面積が広告の固定費 k に等しくなる(3)．正確に言うと、このように広告のタイミングとその量を決定しなければならないと言える(value-matching 条件)．一方、(9)式の右辺において、A が最適に選ばれたと仮

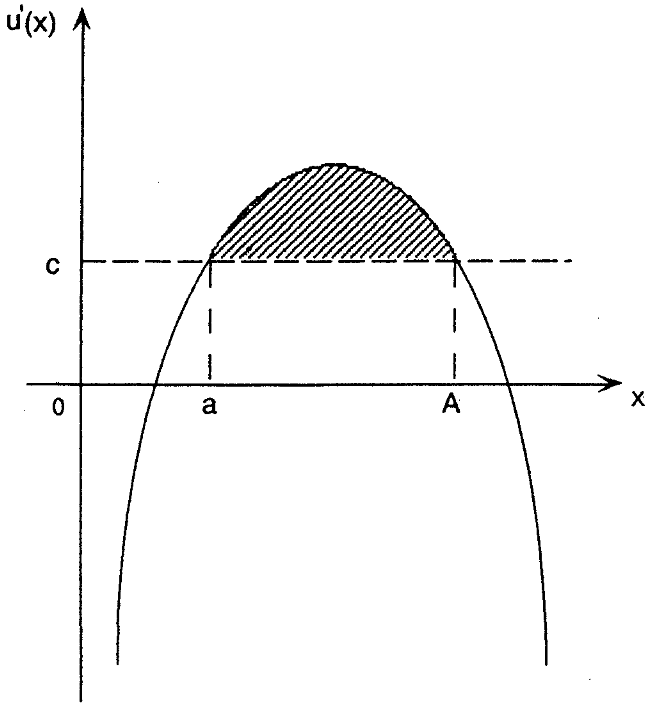


図 2−2

(3) もしこの固定費 k がゼロのときには制御は瞬時的制御 (instantaneous control) となる．たとえば Dixit (1991)、Harrison and Taksar (1983)、Harrison, Sellke and Taylor (1983) などが参考になる．

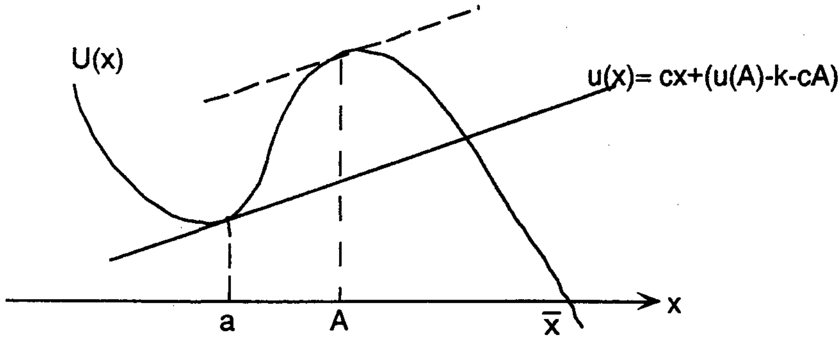


図 2－3

定してこれを定数と考え、さらにこの方程式が需要量 x の関数であるとみなせば、この一次式は $x=a$ のときに企業価値曲線 $u(x)$ と接することになる．したがって図 2-2 を参考にすれば最適な企業価値曲線 $u(x)$ の概形は図 2-3 のように描けるであろう．ここで注意すべきは、図 2-3 において $x=\overline{x}$ のときに期待企業価値 $u(x)$ はゼロの値をとっているということである．つまり、

$$(15)\quad u(x)=c_1\overline{x}^{\gamma}+c_2\overline{x}^{\lambda}+\frac{p}{r-\alpha}\overline{x}=0$$

である．これは(6)の最後の条件つまり企業の技術的な上限にあたると、企業はこの市場での従来の活動はやめてしまうという条件である．あまりに多量の需要を経験して、より大型の技術を導入するためにこれまでの技術を放棄してしまうと考えればよい．一方の技術の下限のほうは、$\underline{x}<a$ の仮定から考える必要はない．

以上をまとめると、管理者は(12)式、value-matching 条件の(9)式および(15)式

から、広告を行なうべき需要水準aと広告量の大きさ$A-a$とを決定することができることになる．インパルシブ・コントロールの他にも、本論Ⅱとその補論では、それぞれ広告量による線形フィードバック制御とバン・バン制御モデルがとりあげられる．

ところで、ⅢとⅣで明かとなる退出行動を記述する最適停止モデルの場合には、この節のモデルの企業が広告を行なう一番始めの時刻が退出時刻にあたる．また、退出時点に残された資産の市場評価額であるスクラップバリューをその時点での需要の大きさの関数と仮定してこれを$B(x)$としたときに、前述の value-matching 条件である(9)式が、

(16) $u(x)=B(x)$

に、そして smooth-passing 条件の(10)および(11)が、

(17) $u'(x)=B'(x)$

に変更される．したがって、最適停止モデルは一度限りのインパルスシブ・コントロールモデルということができよう．(16)式については次節で投資関数との関連で詳しく議論する．

§-3　投資行動としての退出

産業からの退出は投資残高の引き揚げであり、いわば負の投資行動である．この投資行動は正の投資行動を説明しようとするトービンのｑ理論のアナラジーとして考えることができる．

新古典派の本格的な投資理論として登場した Jorgenson（1963）は、実証的あるいは理論的な見地から様ざまな問題点を指摘された[(1)]．現在では、トービンのｑ（Tobin（1969））を用いて説明する投資理論[(2)]の方が有力視されてい

(1)　吉川（1984）参照．

る[3]．トービンのｑは、企業の投資プロジェクトの市場評価を織り込んだ企業の市場価値額の、市場で評価された資本の再生産費用に対する比率である．この投資理論はｑ＞１の範囲において投資額がトービンのｑの増加関数であると主張するものである．企業の市場価値とは当該企業の株式総価値額であり、最も単純な場合これは企業のネットキャッシュフローの現在価値に等しい．

本稿では退出するという投資プロジェクトに対する企業の市場価値を $u(x)$ で表わすことになっている．前節では既に企業の期待価値という言葉を用いているが、この意味で用いていることは言うまでもない．一方、資本の再生産費用は現時点でのスクラップバリューに等しいと考えることができるから、本稿の場合のトービンのｑは（2-16）の記号を用いると

$$q=\frac{u(x)}{B(x)}$$

となる．この投資プロジェクトは負の投資であるからちょうどトービンの投資モデルとは逆に $q \leq 1$ のときにこのプロジェクトは意味があると考えることができる．

結果から言えば、退出プロジェクトが実行されるとすれば、それはｑ＝１のときということができる．というのも、ｑ＞１のときには、市場に残ってキャッシュフローを稼ぐことの方が退出によってなにがしかの価値をえることよりも有利であるから、投資の引き揚げを行なわないことが合理的であり、また、ｑ＜１のときには後述（本論Ⅲ）するように既に退出していたほうが有利であるからである．したがって（2-16）は退出という投資決定の１つの指標ということができる．

---

(2) たとえば Hayashi (1982).

(3) しかしながら実証的には問題も多い．吉川（1992）を参照のこと．

I　退出障壁と不確実性

§-1　序

退出の決定は様々な理由でなされるが、最も理解しやすいものは、需要の継続的な縮小によるもの、つまり衰退産業からの退出である．極めて深刻な継続的市場の縮小は、当該市場からの撤退戦略を企業に選択せしめる．収益が継続的に減少してゆくなかで、新たな拡張的投資を控え、合理的に資源を活用することで、できるだけ多くのキャッシュフローを退出までに獲得し、それまでの投資額を回収する．これは刈り取り戦略と呼ばれる衰退産業における最適な戦略の一つである[(1)]．しかしながら、市場が依然として成長段階にあるときに当該製品分野から撤退してしまうケースもありうる[(2)]．これはまだ高値で製造設備等が売却できるうちに産業から退出しようとする場合である．市場が衰退してしまい当該製品にスペシィフィックな資産や設備が陳腐化してしまい、資産の売却益が小さなものになってしまえば、これまでの投資額が十分回収されず、所謂サンクコストが発生する．このコストが多大になれば参入障壁ならぬ退出障壁が存在することになる．そうなる前に退出しようというものである．このように、市場のさまざまな状態で退出という行動は考慮されるべきである．そのなかで本稿では特に前者の衰退市場を主に考察するわけであるが、ここでは少しの間この仮定をおかず、衰退と成長の中間的な定常的な市場環境を仮定して議論する．

既に述べたように退出の意思決定を左右するものが退出障壁の存在である．ここでは、さまざまな要因の中で、とりわけ需要の状態、退出時点での資産価

(1)　Porter(1980)は、様々な衰退産業における最適戦略を考察している．

(2)　Porter(1980)は、アメリカの真空管メーカーレイセオン社の事例を紹介している．

値、さらには退出後の収益や新たな市場への参入コストなどが退出障壁を決定する重要な要因であると考えることにする．一方、これらの障壁を形成する可能性のある諸要因の重要度、あるいは価値は市場によって評価されるわけであるが、これも序で述べたように、評価に際し大きな影響を与えるものが不確実性である．そこで、退出行動に直接影響を与えるような不確実性をとりあげ、それがいかに退出障壁や退出の決定に影響を与えるかを考察する．

これまで、退出の問題に関しては退出時間決定の分析が数多く存在する[3]．退出するタイミングの決定に関してはⅢ以降で考察するとして、ここではより基本的な企業の一時点退出決定モデル、つまりダイナミックな企業の意思決定をある時点で切り取り、退出するか否かをその一時点において決定するモデルを考察する．以下で用いられる分析方法は基本的には Reinganum（1983）の新技術採用２人ゲームモデルのそれである．まず§-2 においてゲームモデルの準備として独占企業の場合を考察する．不確実性が退出の意思決定にどのような影響を与えるかを中心に、特に三つ場合を考えることにする．つまり不確性実性がまったく存在しない場合、退出後の収益に不確実性が存在する場合、そして退出時の需要に不確性実性が存在する場合をそれぞれ考察する．つづく§-3 では完備情報のもとでの対称的な２企業退出ゲームモデルを分析する．ゲームの均衡の存在と、独占企業モデルと同様に情報に関する三つのケースについて議論する．最後に§-4 で、非対称的な退出ゲームの均衡について若干の議論をおこなう．

(3) 詳しくはⅣを参照．ここでは関連文献をあげておく．赤壁弘康・荒木長照（1990)、荒木長照（1990）は不確実性下の独占企業の退出タイミングを、Fine& Li（1989)、Huang& Li（1990)、荒木長照（1991）は不確実性下の退出ゲームを、Fudenberg & Tirole (1986), Ghemawat & Nalebuff（1985）(1990), Lieberman（1990), Londregan（1990), Reynolds（1988), Whinston（1988）は確実性下の退出ゲームを議論している．

§-2　独占企業モデル

独占企業のケースは余り興味深いものではないが、退出の決定のメカニズムを理解する基礎となるのであえて考察することにしよう.

企業はそれぞれのケースに共通して次のように行動する．まず、今期に来期退出するか否かを決定する．その後すべての状態が観測され、それに応じて費用なしで決定が変更される[1]．その結果退出しなければ、当該企業は直面する需要曲線にしたがって利潤極大化の結果得られる最適な利潤を受け取る．そして、来期以降この額を無限期間にわたって受け取れると企業は考えているものと想定する．一方、退出時点に残った資産は他用途に転用可能とし、退出する企業はこの資産つまりスクラップバリューを受け取る．この価値は退出しなければ受け取ったであろう最適な供給量 X^* で評価して、sX^* で表すことにする．ただし、パラメーター s は負の値をとることも許す．退出後、さらに参入コスト $e_n \geq 0$ を支払って、ビジネス機会のある別の市場に再参入するならば、参入以後、その市場から新たな価値が発生することになる．この新たな企業価値の列を参入時点（退出時点に等しいものとする）で評価したものを R で表す．したがって、企業は、退出とそれに続く活動によって、

(1)　$sX^* + R - e_n$

を受け取るものと仮定する．複数の異なる情報環境のもとで、退出を特徴づけるパラメーターを求め、それぞれの環境とパラメータとの関係を考察する．

独占企業はテキストタイプの単純な1次の右下がりの需要曲線

(2)　$P = a - X$

---

(1)　不確実性が存在するとき、本節のモデルは完備・不完全・不確実情報モデルであり、そうでないとき、完備・不完全・確実情報モデルである.

に直面しているとする．実行可能条件は$0 \leq X < a$で、集合Fを次のように定義する．

(3)　$F=\{X \mid 0 \leq X < a\}$.

簡単化のために生産あるいは販売に関して費用はかからない(2)ものとすれば、利潤πの最大化の一階の条件より、最適生産量X^*、および対応する最大利潤π^*は、それぞれ、

(4)　$X^*=\dfrac{a}{2}$,

(5)　$\pi^*=\dfrac{a}{2}X^*$

となる．$X^* \in F$であるから、この解は実行可能である．もしこの企業が退出せずに来期以降も市場に留まるときには、それ以降毎期$\pi^*=\dfrac{a}{2}X^*$の利潤をえるであろうと企業は考えていることは前述のとおりである．

退出の決定は退出しないことによって市場から得られる将来利益と、退出後の将来利益から退出・新規参入のコストを差し引いた純利益との大小関係によって決まる．前者の利益の方が大きければ、企業はそのまま市場に留まるだろうし、反対に後者の純利益の方が大きければ企業は当該市場からの退出を決定するだろう．

ケース１

(2)　スクラップバリューの大きさを、生産費のそれと関係付けて理解しようとするときには、費用関数も明示的にモデル化する必要があるだろう．そのときには、例えばcX^2のような費用関数を仮定すればよい．このことは§-3で考察されるゲームモデルに関しても言える．

まず基準となる不確実性が存在しない場合である．退出するという意思決定を1で、市場に残るという意思決定を0で表し、$0<\delta\leq 1$を割引因子$(=1/(1+r)$、ただしrは利子率）とする．退出しないときの企業の現在価値$J(0)$、退出したときの企業の現在価値$J(1)$は、それぞれ

$$(6)\quad J(0)=\delta\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi^{*}=\frac{\delta}{1-\delta}\pi^{*}=\frac{\delta}{1-\delta}\frac{a}{2}X^{*},$$

$$(7)\quad J(1)=\delta sX^{*}+R_n\text{、ただし }R_n=\delta(R-e_n)$$

となる．ここで$\sigma(X)$を次の様な（最適供給量でなく）需要量の関数と定義する．

$$(8)\quad \begin{aligned}\sigma(X)-R_n&=J(0)-J(1)\\&=\delta\left(\frac{1}{(1-\delta)}\frac{a}{2}-s\right)X-R_n.\end{aligned}$$

さらに集合Sを次のように定義する．

$$(9)\quad S=\{X\in F\mid\sigma(X)<R_n\}.$$

集合Sが空集合でないとき、この集合に企業の最適な供給量の値が属するかぎり、つまり$X^{*}\in S$のとき退出後の純収益が継続的に市場に留まることによる収益を越える．したがって、集合Sは退出すべき需要量の集合ということになり、これを退出領域あるいは停止領域と呼ぶことにする．集合$\sigma(X)$は、$a/2(1-\delta)$、s及びR_nの値の大小によって特徴づけられる．特に$R_n>0$の場合、つまり他の市場に利潤機会が存在する場合を考えることにする[3]．した

(3) $R_n\leq 0$の場合には、もしスクラップバリューが負でなければ、退出した後に他の市場への参入を行なわないケースを考えなければならない．

がって、このとき $a/2(1-\delta)-s>0$ の場合と、$a/2(1-\delta)-s<0$ の場合の二つのケースをさらに考えればよい．ところで、$a/2(1-\delta)$ の値は退出時点で評価した市場に残ることによる収益の現在価値である．ところが、退出しないで市場に残ることによって s だけ諦めなければならない．つまり市場に残ることによって費用として s を支払うと考えることができる．したがって、$a/2(1-\delta)-s$ が市場に残ることによる純収益の現在価値ということができる．よって、$R_n>0$ であるとすれば他市場にビジネスチャンスが存在するから、もし $a/2(1-\delta)-s<0$ であるならば、企業は何も考えずただ退出すればいいことになる．このような状況は余り興味を引かないので、もう一方のケースを考えることにしよう．つまり次の仮定1のような状況を考えるわけである．

仮定 1

次の不等式が成立する．

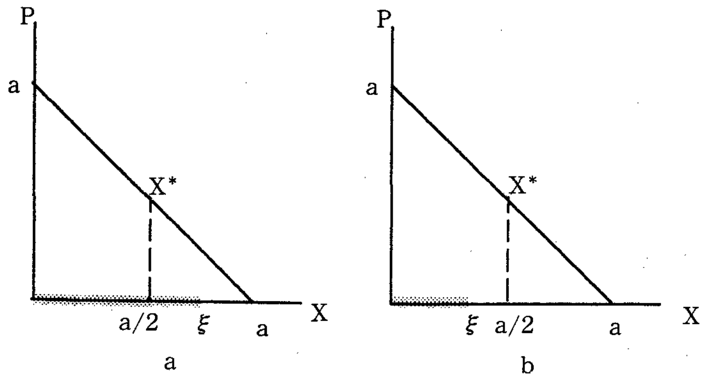
(10)　$R_n=\delta(R-e_n)>0,$

(11)　$\dfrac{1}{1-\delta}\dfrac{a}{2}>s.$

仮定1が成立すれば企業は市場に残ることと、他市場で営業活動を行なうことの両方に正の収益が存在する．よって、モデルのパラメーターの値によって退出するのが適当なケースと、市場に残るのが適当な場合とが現われることになる．そこで退出領域について次の集合を定義する．

(12)　$\partial S=\{X\in F\ \ |\sigma(X)=R_n\}.$

このとき、



図Ｉ－2.1　独占企業の停止領域（網目の部分が停止領域 S）

⒀　$^{\forall}X \in \partial S$ について $X=\dfrac{R_n}{\delta\left(\dfrac{1}{(1-\delta)}\dfrac{a}{2}-s\right)}\equiv \xi$

とすると、仮定１のもとで ξ は退出領域（$S=\{X \in F \mid X<\xi\}$）と市場に留まるべき継続領域（$C=\{X \in F \mid X>\xi\}$）とを分ける閾値を表すことになる．したがって、供給量 X^* と、停止領域 S と継続領域 C とを分かつ閾値 ξ とによって企業の退出決定がなされることになる．図Ｉ-2.1a が退出を実行すべき状態を、図Ｉ-2.1b は継続して市場に留まるべき状況をそれぞれ描いたものである(4)．

さて、⒀式において、参入コスト の上昇つまり R_n 値の減少、あるいは退出時点でのスクラップバリューの減少は明らかに退出を手控えさせる効果をもつ．そして、このとき退出の閾値 ξ は減少する．このように閾値 ξ が低下する

(4)　仮定１のもとで、集合 S は空集合にはならないが、集合 C は空集合となる場合もある．退出後のネットキャッシュフローが極めて大きい場合がそれである．

ことを、退出障壁が高くなる、あるいは障壁が上がるということに決めておく．つづく二つのケースは、不確実性がこの退出の閾値にどのような効果をもたらすかを明らかにする．

ケース2

退出後、他の市場に新規参入することによって得られるネットキャッシュフロー R_n に不確実性が存在する場合を考察する．ただし、前述のように退出を決定した後、退出を行なう直前になって新規参入による収益が観測されるものとする．もしその収益が、継続的に市場に留まる場合のそれよりも小さい場合は、その時点で退出を取りやめることができるものとする．この節の分析目的は退出の意思決定そのものであるから、分析の対象となる意思決定の時点は確率変数の実現値を観測する前ということになる．しかし退出の決定を観測結果に応じて変更することができるから、意思決定の段階では、起こりうる決定の変更も織り込んでおかなければならないことに注意を要する．

そこで、不確実性が存在する場合の退出後の収益 $\tilde{R}_n$ は次の様な確率分布にしたがっていることがあらかじめわかっているものとする．

$$(14)\quad \tilde{R}_n=\begin{cases} R_n + \varepsilon \cdots\cdots\cdots\cdots p^r \geq 0 \\ R_n - \varepsilon < 0 \cdots\cdots 1-p^r \geq 0 \end{cases}.$$

ただし、R_n はケース1の退出後の収益と同じものとし、また $\varepsilon > 0$ と決めておく．ここで退出を決めた企業が $\tilde{R}_n=R_n + \varepsilon$ を観測すれば、仮定1より退出は十分考慮に値する選択肢と認識される．一方、場合分けを簡単にするために $\tilde{R}_n=R_n-\varepsilon$ を観測した場合は、退出後の新たな市場への参入は行なわず、市場に留まることを選択するものと仮定する．このことはスクラップバリューを

もってしても負のネットキャッシュフローをあがなえないことを意味する．他方、退出しないことを決めた場合には不確実性の直接的影響はないものと仮定する．このとき、退出しないときの企業の現在価値、退出したときの企業の期待現在価値はそれぞれ次のようになる．

$$(15)\quad J(0)=\delta\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi^*=\frac{\delta}{1-\delta}\pi^*=\frac{\delta}{1-\delta}\frac{a}{2}X^*,$$

$$(16)\quad J(1)=p^r(\delta sX^*+R_n+\varepsilon)+(1-p^r)\frac{\delta}{1-\delta}\frac{a}{2}X^*$$

仮定 1 が満たされているものとすれば、ケース 1 の場合と同様にして、

$$(17)\quad \sigma(X)-p(R_n+\varepsilon)=p\delta\left(\frac{1}{1-\delta}\frac{a}{2}-s\right)X-p(R_n+\varepsilon)$$

をえる．また、$^\forall X\epsilon\partial S$ に対して、

$$(18)\quad X=\frac{R_n+\varepsilon}{\delta\left(\frac{1}{1-\delta}\frac{a}{2}-s\right)}\equiv\xi^r$$

となる．(13)式、及び(18)式から明らかなように、ケース 1 とケース 2 の停止領域を決定するそれぞれの閾値に関して、$\xi^r\geq\xi$ が成立する．つまり、リスクの存在によって退出障壁が低くなる．不確実性が存在することで、退出後の収益やスクラップバリューを大きくするのと同じ効果をもつといえる．これは退出後の収益が悪化するときには退出を諦め市場に留まるというオプションを行使することができるから、このことが一種の保険の役割を果たし損失発生のリスクを回避してくれるからである．従って退出することによる収益だけが評価され、より退出しやすい状況、つまり退出障壁の低下を見るのである．

ケース3

退出時の需要に不確実性がある場合を考える．需要関数(2)のパラメータ a が両企業に共通な次のような確率分布にしたがうものとする．ただし、$u \geq 0$ と仮定しておく．

$$(19)\quad \tilde{a}=\begin{cases} a+u & \cdots\cdots p^x > 0 \\ a-u > 0 & \cdots 1-p^x > 0 \end{cases}.$$

退出しないと決めた企業で、$\tilde{a}=a+u$ を観測した場合は、より多くの需要に直面する．一方、$\tilde{a}=a-u$ を観測したときには、即時退出してしまうものと仮定する．他方、退出することを決めた企業の決定には不確実性の直接的影響はないものと仮定する．

結局確率 P^x は退出時の収益が増加する確率である．期待利潤を $E\pi$ で表すと、

$$(20)\quad \begin{aligned} E\pi &= p^x\{(a+u)X-X^2\}+(1-p^x)\{(a-u)X-X^2\} \\ &= \{a-(1-2p^x)u\}X-X^2 \end{aligned}$$

となる．期待利潤極大化の一階の条件から最適期待供給量 X^{e*} を求め、それを確実性下の供給量 X^* で評価すれば、

$$(21)\quad X^{e*}=\frac{a-(1-2p^x)u}{2}=\frac{a-(1-2p^x)u}{a}X^*$$

であり、これまでと同様にして、退出しない場合には、時期以降も同じ期待価値を受け取るものと考えれば次式をえる．

$$(22)\quad J(0)=(1-p^x)\left(\delta s\frac{a-u}{a}X^*+R_n\right)+p^x\frac{\delta}{1-\delta}\frac{a+u}{2}\frac{a+u}{a}X^*,$$

$$(23)\quad J(1)=\delta s\frac{a-(1-2p^x)u}{a}X^*+R_n.$$

したがってこれまでと同様に、閾値ξ^xを求めると、

$$(24)\quad X=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{R_n}{\frac{a+u}{a}\left[\frac{1}{1-\delta}\frac{a+u}{2}-s\right]}\equiv\xi^x$$

となる．よって、$\xi\geq\xi^x$つまり退出障壁が上がることがわかる．退出時点の需要が減少し当該市場の魅力を減ずる可能性があるにもかかわらず、退出決定時点で退出障壁が高まる．不確実性が存在することで、退出後の収益やスクラップバリューを小さくするのと同じ効果をもつといえる．これは、需要がより大きくなる可能性があり、市場に留まることが魅力的になるというのが一つの原因である．しかしその一方で、需要が縮小する可能性もあるが、このときには前のケースとは逆に退出することで損失を回避できるから、この保険効果によって市場に留まることが相対的に大きく評価され、退出障壁が高まるものと考えることができる．

§-3　退出ゲーム－対称的な複占の場合－

この節では対称的な二企業による複占市場を想定する．対称性については以下で明確にされる（表 I -3.1）．

ゲームはそれぞれのケースに共通して次のように進められる．まず、今期に両企業は来期退出するか否かを決定する．その後総ての状態が観測され、それに応じて費用なしで決定が変更される．ここまでは前節と同じで、その結果退出する企業がなければ、両企業はクールノーゲームを行ないそれぞれ均衡利潤を受け取る．そして、来期以降同額を無限期間にわたって受け取るものと考える．もしいづれか一つの企業が退出してしまったならば、市場に留まった企業

は独占利潤を同様に受け取る．一方、退出時点に残った資産は他用途に転用可能とし、退出する企業はこの資産つまりスクラップバリューを受け取る．この価値は退出しなければ受け取ったであろうクールノー供給量 X^* で評価して、sX^* で表すことにする．ただし、パラメーター s は負の値をとることも許す．退出後、さらに参入コスト $e_n \geq 0$ を支払って、ビジネス機会のある別の市場に参入するならば、参入以後、その市場から新たな価値が発生することになる．この新たな企業価値の列を参入時点（退出時点に等しいものとする）で評価したものを R で表す．したがって、退出によって、

(1)　$sX^* + R - e_n$

を受け取るものと仮定する．

ケース 1

不確実性がない場合を考えよう．まず、クールノーゲームを定式化する．それぞれの企業の製品に対する需要量 X_i に対して、財の市場価格は逆需要関数(2)によって一通りに決まる．

(2)　$P = a - X_1 - X_2,\ a > 0.$

財の生産販売には、費用はかからないものとすと[1]、利潤 π_i はそれぞれ、

(3)　$\pi_1 \equiv PX_1 = aX_1 - X_1^2 - X_1X_2,$

(1)　スクラップバリューの大きさを、生産費のそれと関係付けて理解しようとするときには、費用関数も明示的にモデル化する必要があるだろう．そのときには、前節と同様に、たとえば $c_iX_i^2$ のような費用関数を仮定すればよい．

(4)　$\pi_2 \equiv PX_2 = aX_2 - X_2{}^2 - X_1X_2$

となる.

利潤極大化の一階の条件より均衡供給量は、

(5)　$X_1{}^* = X_2{}^* = \dfrac{a}{3}.$

である．よって、均衡利潤は次のようになる.

(6)　$\pi_1{}^* = \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{a}{3}X_1{}^*,$

(7)　$\pi_2{}^* = \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{a}{3}X_2{}^*.$

このときゲームはクールノー・ナッシュ均衡にあると呼ばれる.

ところで、価格 P は正でなければならないので実行可能集合を

(8)　$F = \{(X_1,\ X_2) \mid a - X_1 - X_2 > 0\}$

と定義する．ナッシュ均衡では $(X_1^*,\ X_2^*) \epsilon F$ である．また、後の準備のために集合 F_i を集合 F の X_i 軸への正射影と定義しておく.

ここでライバル企業が先に退出してしまった場合を考えてみよう．残された企業 i は独占企業となるから、このときの最適供給量を X_i^{m*} で表し、独占利潤をクールノー均衡で評価すれば次の関係がわかる.

(9)　$\pi_i^{m*} = \dfrac{a}{2}X_i^{m*} = \dfrac{3a}{4}X_i{}^*.$

一方、第 i 企業の退出ゲームにおける戦略は、退出する確率 $q_i \epsilon [0,\ 1]$ を選

ぶこととし、企業が危険中立的であるとすれば、第1企業の現時点での期待価値$J^1(q_1,\ q_2)$は、

$$J^1(q_1,\ q_2)=q_1q_2J^1(1,\ 1)+(1-q_1)q_2J^1(0,\ 1) \\ +q_1(1-q_2)J^1(1,\ 0)+(1-q_1)(1-q_2)J^1(0,\ 0) \tag{10}$$

となる．$q_1=1$が企業は必ず退出するという意思決定を、$q_1=0$が必ず市場に留まるという意思決定を表すことに注意すれば、(10)の各項は次の様になる．

(11-a)　$J^1(0,\ 0)=\delta_1\sum_{t=1}^{\infty}\delta_1^{t-1}\pi_1^*=\dfrac{\delta_1}{1-\delta_1}\pi_1^*=\dfrac{\delta_1}{1-\delta_1}\dfrac{a}{3}X_1^*$,

(11-b)　$J^1(1,\ 0)=\delta_1s_1X_1^*+R_{n1}$、ただし $R_{n1}=\delta_1(R_1-e_{n1})$,

(11-c)　$J^1(0,\ 1)=\delta_1\sum_{t=1}^{\infty}\delta_1^{t-1}\pi_1^{m*}=\dfrac{\delta_1}{1-\delta_1}\dfrac{3a}{4}X_1^*$,

(11-d)　$J^1(1,\ 1)=\delta_1s_1X_1^*+R_{n1}$.

ここで退出ゲームの均衡を定義する．

定義（ナッシュ均衡）

退出確率の組$(q_1^*,\ q_2^*)$が退出ゲームのナッシュ均衡であるとは、次の不等式が同時に成立するとき、そしてそのときだけである．

(12-a)　$\forall q_1\in[0,\ 1]$に対して、$J^1(q_1^*,\ q_2^*)\geq J^1(q_1,\ q_2^*)$

(12-b)　$\forall q_2\in[0,\ 1]$に対して、$J^2(q_1^*,\ q_2^*)\geq J^2(q_1^*,\ q_2)$

以上の準備のもとに、定義されたナッシュ均衡の存在を考察してみよう．相手の戦略を一定として当該企業が退出する場合と、そうでない場合のそれぞれ

のペイオフを比較する．まず、第2企業の特定の戦略について次の二つの関数を定義する．

$$
\begin{aligned}
\eta_1(X_1)-R_{n1} &\equiv J^1(0,\ 0)-J^1(1,\ 0) \\
&=\delta_1\left(\frac{1}{1-\delta_1}\frac{a}{3}-s_1\right)X_1-R_{n1}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1(X_1)-R_{n1} &\equiv J^1(0,\ 1)-J^1(1,\ 1) \\
&=\delta_1\left(\frac{1}{1-\delta_1}\frac{3a}{4}-s_1\right)X_1-R_{n1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

さらに、第2企業の任意の戦略について、

$$
\begin{aligned}
\mu_1(X_1)-R_{n1} &\equiv J^1(0,\ q_2)-J^1(1,\ q_2) \\
&=q_2J^1(0,\ 1)+(1-q_2)J^1(0,\ 0) \\
&\qquad -q_2J^1(1,\ 1)-(1-q_2)J^1(1,\ 0) \\
&=q_2\phi_1(X_1)+(1-q_2)\eta_1(X_1)-R_{n1}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

と定義する．(13)〜(15)より次の不等式を得る．

$$\eta_1(X_1) \leq \mu_1(X_1) \leq \phi_1(X_1). \tag{16}$$

集合 S_1^1 を次のように定義する．

$$S_1^1=\{X_1 \in F_1 \mid \phi_1(X_1) < R_{n1}\}. \tag{17}$$

集合 S_1^1 が空集合でないとき、$X_1{}^* \in S_1^1$ に対して、企業1の均衡戦略は、$q_1{}^*=1$ となる．というのも、当該企業のクールノー供給量が、需要量の集合 S_1^1 の特定の要素の値に等しいかぎり、(14)よりライバル企業が退出するとしたときに、退出後の収益が継続的に市場に留まることによる収益を越える．ところが

(15)及び不等式(16)から、このとき、同時にライバルの任意の戦略に対して退出後の純収益が継続的に市場に留まることによる収益を越える．よって、$X_1^* \in S_1^1$ に対して、この企業の均衡戦略は、$q_1^*=1$ となる．一方、

$$(18)\quad \partial S_1^1=\{X_1 \in F_1 \mid \phi_1(R_1)=R_{n1}\}$$

として、$X_1 \in \partial S_1^1$ に対して、

$$(19)\quad X_1=\frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{R_{n1}}{\frac{1}{1-\delta_1}\frac{3a}{4}-s_1}\equiv\xi_1$$

と定義すれば ξ_1 は停止領域の上限あるいは下限を表す閾値となる．同様に、集合 S_0^1 を次のように定義する．

$$(20)\quad S_0^1=\{X_1 \in F_1 \mid \eta_1(X_1) > R_{n1}\}$$

したがって、集合 S_0^1 が空集合でないとき、$X_1^* \in S_0^1$ に対して、この企業の均衡戦略は、$q_1^*=0$ となる．また、

$$(21)\quad \partial S_0^1=\{X_1 \in F_1 \mid \eta_1(X_1)=R_{n1}\}$$

とすると、$X_1 \in \partial S_0^1$ に対して、

$$(22)\quad X_1=\frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{R_n}{\frac{1}{1-\delta_1}\frac{a}{3}-s_1}\equiv\zeta_1$$

	$s < a/3(1-\delta)$	$a/3(1-\delta) \le s < 3a/4(1-\delta)$	$3a/4(1-\delta) \le s$
$R_n > 0$	$0 < \xi < \zeta$　I	$0 < \xi$　II	全域停止領域　III

表　I－3.1　二つの閾値と収益の関係

と定義して、同様に考えれば、ζ_1 は継続領域の上限あるいは下限を表す閾値となる.

これら二つの閾値の関係は、s 及び R_n の値の大きさによって決まる. 前節の場合と同様 $R_n > 0$ のときに限定すれば、それぞれの企業ごとに三つのケースを考えることができる(6). 表 I -3.1 はそれをまとめたものである. ところで、前節の議論から、$a/3(1-\delta)-s$ は複占市場の場合に企業が市場に残ることによる純収益の現在価値である. 独占市場についても同様であるから、従って、表 I - 3.1 の I は独占・複占どちらの状態であっても市場に留まることは正の収益を保証する場合である. 停止領域と継続領域の両方が現われる可能性がある. II は独占企業として市場に残ることには正の利潤が存在するが、複占のときにはそうでないケースである. このとき、継続領域は現われない. III はいかなる形態でも市場に残ることには魅力がないケースである. 退出することにだけ魅力があるから、閾値は存在せず総て停止領域となる.

III は興味深くないので、他の二つの場合をとりあげる. 本節ではこのうち両企業が I で、対称的な場合のゲームの均衡について考察を進めることにする. 次節で一方の企業が I で、他の企業が II の非対称的な場合を考察する. 両企業が II であるケースは本節の議論と基本的に同質であるから、これを省略する.

そこで次の仮定をおく.

仮定 2（ケース I）

次の不等式が両企業について成り立つ.

(23) $R_n=\delta(R-e_n) > 0,$

(24) $\dfrac{1}{(1-\delta)}\dfrac{a}{3} > s.$

改めて、企業 1 の退出に値する需要量の集合である停止領域を S_1 として、次

のように定義し、

(25)　$S_1 = \{X_1 \in F_1 \mid X_1 \leq \xi_1\}$,

企業1の市場に留まるに値する需要量の集合である継続領域を C_1 として、次のように定義する.

(26)　$C_1 = \{X_1 \in F_1 \mid X_1 \geq \zeta_1\}$.

一方、$R_1 = \{X_1 \in F_1 \mid \xi_1 < X_1 < \zeta_1\}$ とすると、

(27)
$$\begin{aligned} R_1 &= \{X_1 \in F \mid \xi_1 < X_1 < \zeta_1\} \\ &= \{X_1 \in F \mid \eta_1(X) < R_{n1},\ \phi_1(X) > R_{n1}\} \end{aligned}$$

であるから、$X_1^* \in R_1$ については、相手が市場に留まるならば退出し、相手が退出するならば市場に留まるという純粋戦略か、あるいは退出・継続の混合戦略の両方の可能性がある．そこで均衡混合戦略を見つけだすことにする．今かりに第2企業が $q_2{}^*$ という混合戦略を使うとすれば、第1企業は $J^1(1,\ q_2^*) = J^1(0,\ q_2^*)$ のときに戦略を確率化する．このときには、ライバルの任意の混合戦略に対して、当該企業は退出と継続とは同じ価値をもつ．つまり二つの戦略を確率化するわけである．この逆も成り立つことは明らかであるから混合戦略は、(15)より、

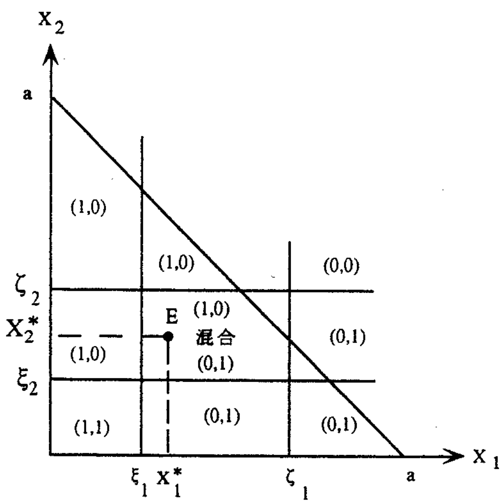
(28)　$$q_2{}^* = \frac{R_{n1} - \eta_1(X_1{}^*)}{\phi_1(X_1{}^*) - \eta_1(X_1{}^*)}$$

となる．同様にして、

(29)　$$q_1{}^* = \frac{R_{n2} - \eta_2(X_2{}^*)}{\phi_2(X_2{}^*) - \eta_2(X_2{}^*)}.$$

をえる．$0 \leq q_2{}^* \leq 1$ であることは(25)～(27)より明らかである．$0 \leq q_1{}^* \leq 1$ も同様．

ゲームの対称性より、図Ⅰ-3.1 を得る[(2)]．直線 aa よりも左下の領域が実行可能な領域である．これまで、複占の場合はもちろんのこと、独占の場合も、また退出時点のスクラップバリューも総てクールノー・ナッシュ均衡供給量で評価してきたから、結局退出ゲームの均衡点はクールノー・ナッシュ均衡供給量の組（$X_1{}^*$，$X_2{}^*$）が継続領域の閾値 ζ_1 と停止領域の閾値 ξ_1 とによってできる X_1X_2 平面上の最大で九つのグリットのどこに存在するかによって決まることになる．図Ⅰ-3.1 では、クールノー・ナッシュ均衡 E は (1, 0) - 混合 - (0, 1) のグリッドの中にあるから、退出ゲームのナッシュ均衡は、(1, 0)、(0, 1) も含めて、混合戦略のクラスで存在することになる．従って均衡結果は様々な組み



図Ⅰ－3.1　対称的な場合の退出ゲームのナッシュ均衡

(2)　仮定２のもとで、集合 s_1 は空集合にはならないが、集合 C_1 は空集合となる場合もある．退出後のネットキャッシュフローが極めて大きい場合がそれである．

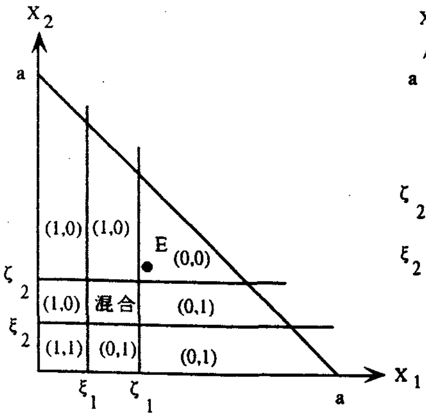


図 I －3.2　退出障壁が高い場合

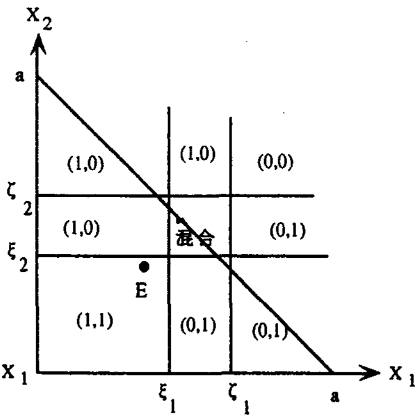


図 I －3.3　退出障壁が低い場合

合わせが起こりうる.

ところで、⒆及び㉒からわかるように、新規参入のコスト e_n が大きい値を、退出後の収益 R やスクラップバリュー sX^* が小さい値をとれば、閾値の組（ξ_1, ζ_1）は左へシフトする. これらはいづれも退出を阻害する要因である. つまり退出するために越えなければならないハードル（退出障壁）が高いほど閾値は左にシフトすることになる. これは前節と同じ結果である. 図 I -3.2 は、両企業の退出障壁が高い場合を示している. 反対にこれが低いと、両企業ともさっさと撤退してしまう. これが図 I -3.3 である. このようにして退出障壁の高さによって様々な均衡結果を考えることができる.

ケース 2

退出後、他の市場に新規参入することによって得られる収益に不確実性が存在する場合を考察する. 不確実性が存在する場合の退出後のネットキャッシュ

フローの現在価値$\tilde{R}_n$は、$\varepsilon > 0$として、両企業に共通の前節と同じ次の様な確率分布にしたがうものとする.

$$(30)\quad \tilde{R}_n = \begin{cases} R_n + \varepsilon \cdots\cdots\cdots p^r \geq 0 \\ R_n - \varepsilon < 0 \cdots 1 - P^r \geq 0 \end{cases}$$

ここで退出を決めた企業が$\tilde{R}_n = R_n + \varepsilon$を観測すれば、仮定2より退出は十分考慮に値する選択肢と認識する. 一方、$\tilde{R}_n = R_n - \varepsilon$を観測した場合は、退出後の新たな市場への参入は行なわず、市場に留まることを選択するものと仮定する. このことはスクラップバリューをもってしても負のネットキャッシュフローをあがなえないことを意味する. 他方、退出しないことを決めた企業の決定には不確実性の直接的影響はないものとし、第2企業についても同じように仮定する.

企業はリスク中立的であるとして、企業1の期待収益の各項を求める. 独占企業の場合と異なり特に注意すべきことは、ライバル企業がたとえ退出すると決めたとしても来期に確率1で退出するとは限らないという点である. このことはもし当該企業が市場に留まったとしても、独占企業として存在するか複占企業として存在するかがライバル企業の収益に関する確率に依存するということを意味する. これらに留意して以下を得る.

$$(31\text{-a})\quad J^1(0,\ 0) = \delta_1 \sum_{t=1}^{\infty} \delta_1{}^{t-1} \pi_1^* = \frac{\delta_1}{1-\delta_1} \pi_1^* = \frac{\delta_1}{1-\delta_1} \frac{a}{3} X_1^*,$$

$$(31\text{-b})\quad J^1(1,\ 0) = p_1^r(\delta_1 s_1 X_1^* + R_{n1} + \varepsilon_1) + (1 - p_1^r) \frac{\delta_1}{1-\delta_1} \frac{a}{3} X_1^*,$$

$$(31\text{-c})\quad J^1(0,\ 1) = \frac{\delta_1}{1-\delta_1} \left[p_2^r \frac{3a}{4} X_1{}^* + (1 - p_2^r) \frac{a}{3} X_1{}^* \right],$$

$$J^1(1,\ 1)=p_1^r(\delta_1 s_1 X_1^* + R_{n1} + \varepsilon_1)$$

(31-d)

$$+(1-p_1^r)\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\left[p_2^r \frac{3a}{4} X_1{}^* + (1-p_2^r)\frac{a}{3} X_1{}^*\right].$$

これまでと同様にして、仮定２のもとで停止領域の閾値 ξ_1^r 及び継続領域の閾値 ζ_1^r を求める.

(32)　$$X_1 = \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{R_{n1}+\varepsilon_1}{\dfrac{1}{1-\delta_1}\dfrac{3a}{4}\left(1-\dfrac{5}{9}(1-p_2^r)\right)-s_1} \equiv \xi_1^r$$ (3)

(33)　$$X_1 = \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{R_{n1}+\varepsilon_1}{\dfrac{1}{1-\delta_1}\dfrac{a}{3}-s_1} \equiv \zeta_1^r$$

ナッシュ均衡の存在は前節と同様であるからここでは省略する. (2-19)、(2-22)、(32)及び(33)から、$\xi_1^r \geq \xi_1$、$\zeta_1^r \geq \zeta_1$ を得る. 退出後の収益が減少するというリスクがあるにもかかわらず、退出決定時点で退出障壁が低下する. 不確実性が存在することで、退出後の収益やスクラップバリューを大きくするのと同じ効果をもつといえる. これは退出後の収益が悪化するときには退出を諦め市場に留まるというオプションを行使することができるから、このことが一種の保険の役割を果たし損失発生のリスクを回避してくれるからで、従って退出することによる収益だけが評価され、より退出しやすい状況、つまり退出障壁の低下を見るのである. ここでとくに注意すべきは、停止領域の閾値 ξ_1^r がライバル企業の収益が増減する確率に依存しているということである. これは、観測結果によっては当初退出するつもりであったライバルが退出を取りやめる可能性があり、従って当該企業が独占企業として市場に存在するところを、複占者

---

(3)　仮定２より、$\dfrac{1}{1-\delta_1} \cdot \dfrac{3a}{4}\left(1-\dfrac{5}{9}(1-p_2^r)\right)-s_1>0$.

として市場にとどまらざるを得ないという事象が起こりうる分、市場に留まったときの収益が小さく評価され、相対的に退出がより魅力的なものになると考えることができる．また、ε は不確実性の程度を測るパラメーターであるが、この値がゼロのときつまり当該企業に不確実性が存在しないときでもライバル企業に不確実性が存在すれば退出障壁が低下することもわかる．

ケース3

退出時の需要に不確実性がある場合を考える．需要関数（2-2）のパラメータ a が両企業に共通な次のような確率分布にしたがうものとする．ただし、$u>0$ と仮定する．

$$(34)\quad \tilde{a}=\begin{cases} a+u & \cdots\cdots p^x>0 \\ a-u>0 & \cdots 1-p^x>0 \end{cases}.$$

退出しないと決めた企業で、$\tilde{a}=a+u$ を観測した場合は、より多くの需要に直面する．一方、$\tilde{a}=a-u$ を観測したときには、独占・複占を問わず即時退出してしまうものと仮定する．他方、退出することを決めた企業の決定には不確実性の直接的影響はないものと仮定する．

リスク中立的な企業の期待利潤最大化の一階の条件より、第1企業のクールノー期待供給量 $X_1^{s^*}$ は、

$$(35)\quad X_1^{s^*}=\frac{1}{3}[a-(1-2p^x)u]=\frac{a-(1-2p^x)u}{a}X_1^*.$$

であるから、同様にして次式をえる．

(36-a)
$$J^1(0,\ 0)=(1-p^x)\left(\delta_1 s_1\frac{a-u}{a}X_1^*+R_{n1}\right)+p^x\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\frac{a+u}{3}\frac{a+u}{a}X_1^*,$$

(36-b)
$$J^1(1,\ 0)=\delta_1 s_1\frac{a-(1-2p^x)u}{a}X_1^*+R_{n1},$$

(36-c)
$$J^1(0,\ 1)=(1-p^x)\left(\delta_1 s_1\frac{a-u}{a}X_1^*+R_{n1}\right)+p^x\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\frac{3(a+u)}{4}\frac{a+u}{a}X_1^*,$$

(36-d)
$$J^1(1,\ 1)=\delta_1 s_1\frac{a-(1-2p^x)u}{a}X_1^*+R_{n1}.$$

仮定2のもとでこれまでと同じようにして停止領域の閾値 ξ_1^x、継続領域の閾値 ζ_1^x を得る.

(37)
$$\xi_1^x=\frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{R_{n1}}{\dfrac{a+u}{a}\left[\dfrac{1}{1-\delta_1}\dfrac{3}{4}(a+u)-s_1\right]}.$$

(38)
$$\zeta_1^x=\frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{R_{n1}}{\dfrac{a+u}{a}\left[\dfrac{1}{1-\delta_1}\dfrac{1}{3}(a+u)-s_1\right]}.$$

これらから $\xi_1^x\leq\xi_1$、$\zeta_1^x\leq\zeta_1$ という関係が存在することがわかる. 退出時点の需要が減少し当該市場の魅力を減ずる可能性があるにもかかわらず、退出決定時点で退出障壁が高まる. 不確実性が存在することで、退出後の収益やスクラップバリューを小さくするのと同じ効果をもつといえる. これは、需要がより大きくなる可能性があり、市場に留まることが魅力的になるというのが一つの原因である. しかしその一方で、需要が縮小する可能性があるが、このときには前節とは逆に退出することで損失を回避できるから、この保険効果によっ

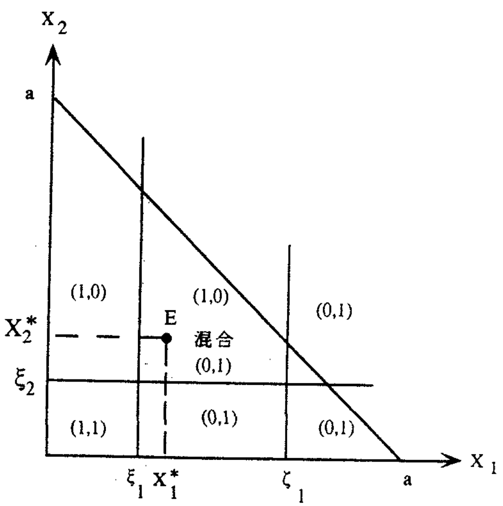
て市場に留まることが相対的に大きく評価され、退出障壁が高まるものと考えることができる.

§-4　退出ゲーム－非対称的な複占の場合－

この節では、どちらか一つの企業がパラメーターに関して表Ⅰ-3.1のⅠつまり $s < a/3(1-\delta)$ もう一方の企業がⅡつまり $a/3(1-\delta) \leq s < 3a/4(1-\delta)$ の場合の均衡を議論する. 特に、何ら一般性を失うことなく、第1企業がⅠ、第2企業がⅡとする. このことは次の仮定を意味する.

仮定3（ケースⅠとⅡの並存）
次の不等式がそれぞれの企業について成り立つ.

(1)　$R_{ni}=\delta_i(R_i-e_{ni})>0$, $i=1, 2$,



図Ⅰ－4.1　非対称的な場合の退出ゲームのナッシュ均衡

(2)　$\dfrac{1}{(1-\delta_1)}\dfrac{a}{3} > s_1$,

(3)　$\dfrac{1}{(1-\delta_2)}\dfrac{a}{3} \leq s_2 < \dfrac{1}{(1-\delta_2)}\dfrac{3a}{4}$.

仮定 3 のもとで第 1 企業は停止領域の閾値として (3-19) 式の ξ_1 を、また継続領域の閾値として (3-22) 式の ζ_1 をもつ．一方企業 2 について、仮定 3 のもとでは継続領域は消滅し、停止領域とライバル企業が市場に留まるならば退出するか、相手が退出するならば市場に留まるという純粋戦略か、あるいは退出・継続の混合戦略の両方の可能性がある．それぞれの企業のそれぞれに閾値、そして混合戦略の均衡確率は前節で計算したとおりであるからここでは繰り返さない．非対称的な場合のナッシュ均衡の一つの例が図 I -4.1 である．実行可能領域 F には最大で六つのグリッドが描ける．図 I -4.1 はこのケースである．

II　衰退市場における三つの戦略

§-1　序

ダイナミックな企業モデルを考察する．Ｉでは需要が減少するという状況は考えなかったが、これ以降、衰退する産業、つまり縮小する市場からの退出を想定する．

本節では、与えられた状況のもとで企業は、

1. 即時退出
2. 刈り取り戦略（行動）
3. 市場に踏み留まる

の三つの行動のどれを採用すべきかという問題を考察する．ここで特に注意を要するのが２の刈り取り戦略である．既に述べたようにこれは暫時市場に留まり、市場に残された需要を十分に刈り取った後退出するという行動であるが、このことは必然的に退出するまでの最適な企業行動の決定と、退出時刻の決定が同時になされている必要がある．これを定式化するには、後にIIへの補論において述べるように、かなり困難をともなう．そこでここでは取敢ず、２の刈り取り戦略を採用したときには、有限のある一定の時刻に退出するものと考え、退出時刻の具体的な決定はこれとは別にIIIで行なうことにする．

さて、上述の三つの選択肢に関する意思決定はある一定の時点（モデルの初期点）で行なわれるものとする．このIIでは意思決定を行なうときに勘案すべき用件として、市場に留まることによる収益の合計、適当な有限時間市場に留まることから得られる収益、そして退出後他のビジネス分野への新規参入に

よってえられる収益である．これらの要因によって決定される、即時退出による企業の価値、暫時市場に留まった後に退出したときの企業の価値、そして市場に踏み留まることによる企業の価値これら三つの価値の大きいものに対応する戦略（行動）が選択されることになる．

産業が衰退するとは、Porter (1980) によると、長期にわたって需要が下落しつづける産業のことであって、その需要減退の原因を景気変動やストライキ、原料不足といった短期的継続性しか持たないものに求められないような、需要の動特性を持った産業のことである．したがって、需要はトレンドとして負の成長率をもつということになるが、即時退出を行なうというのであれば、縮小する需要に対して何ら方策を講ずる必要もない．しかし、暫時市場に留まるというのであれば、一定の範囲内において、市場に対して何らかの投資を行なうことも企業の目的に対して非合理的とはいえない．ここでは序で述べたのれんに対する投資、つまり広告活動などのマーケティング活動を行なう企業を考える．この投資によって衰退する市場は若干の成長率を回復することになる．

まず§-2において、需要に不確実性が存在しない単一企業モデルを考察し、退出後の収益と退出時間との関係を考察する．§-3において、需要不確実性が存在するケースを考察する．そして、§-4において、不確実性が退出の意思決定にどの様な影響を及ぼすかについて議論する．

§-2 確実性下の退出モデル

企業は広告量を調整することによって、製品の生産・販売活動に伴い将来にわたって得られるキャッシュフローを一定の割引率 $r>0$ で割り引いた現在価値および、退出時に事業を売却することによってえられるもの、ないしは退出時点に残ったものを他の用途に再投資することによってえられる利益の現在価値の期待値とを最大化すべく行動するものとしよう．Iで明示的に考えた新規

参入のコストはここでは考えないものとする.

当該企業は1つの財だけを販売するものと考え、その財に対する第 t 期の需要を $X(t) \geq 0$, 広告量を $A(t) \geq 0$, で表すことにする. 第 t 期の需要 $X(t)$ の変動は次の単純な微分方程式に従うものとする.

(1) $\dfrac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) + \beta A(t)$

(2) $X(0) = X_0 > 0$

需要の衰退速度 α は負の定数、広告による需要創出効果を表す β は正の定数である. ただし、あくまで市場は衰退しているから α は相対的に十分大きな負の値を、また、β は十分小さな値を想定する.

さて、今この企業が第 T 期 ($T \in [0, \infty]$) を退出時間と決めたと仮定すると、その時点において事業を売却して得られた資金を他の投資機会に投じる、あるいは現存資産を転用するとすれば、T 期以降、毎期ごとに何がしかの利得を得ることになる. 簡単化のために、この利得を $t \geq T$ について退出時点の需要の増加関数 $\Theta(X(T))$ で表わす. つまり、

仮定 1

$\Theta(X(T))$ は次の性質を持つ、

$$\frac{d\Theta(X)}{dX} \geq 0,$$

$$\Theta(X) \geq 0.$$

この仮定は退出時点に多くの需要が残されていればそれだけ、退出時点に残った資産の価値であるスクラップバリューは小さく評価されることはないということを意味する. もちろん $t < T$ なる t について、この関数の値はゼロで

ある.

常に需要と供給は一致し、第 t 期の売上高 $X(t)$ に対応する瞬時的な営業収入を $R(X(t))$ 、同じく広告量 $A(t)$ に対応する費用を $C(A(t))$ とすれば、当該企業の退出までの第 t 期のネットキャッシュフローは $R(X(t))-C(A(t))$ となる. したがって、当該企業の将来にわたるネットキャッシュフローの現在価値は次のように書くことができる.

$$(3)\quad V(A)=\int_0^T e^{-rt}\{R(X(t))-C(A(t))\}dt+\int_T^\infty e^{-rt}\Theta(X(T))dt.$$

ただし、

$$\frac{dR(X)}{dX}>0,$$

$$\frac{d(A)}{dA}>0$$

である.

(3)式においては、期間 $[0, T]$ が操業時間となっているが、$t=0$ は産業（企業）が衰退期に入ったある時点と考え、企業は $t=0$ 時点において退出時間 T を決定するものとする. ただし、退出時刻として $T=0$ あるいは $T=\infty$ も選択することは可能であるとする. 前者が即時退出を、後者が市場に留まり続けることを意味するのは言うまでもない. また、(3)式の右辺第 2 項の積分区間が $[T, \infty]$ となっている. これは他の投資機会から得られる利得が無限期間継続するということを意味するが、技術的に簡単化するための仮定である.

最適な行動の決定を議論するためには、実際に以下で得られる最適化問題を解かなくてはならない. (3)式を単純化して(4)式のように仮定する. これによって明示的に解を得られるもっとも単純な最適制御問題の 1 つとして、この問題

を考察する.

$$(4)\quad V(A)=\int_0^T e^{-rt}\{aX(t)^2-bA(t)^2\}dt+\int_T^\infty e^{-rt}\theta X(T)^2dt$$

$$=\int_0^T e^{-rt}\{aX(t)^2-bA(t)^2\}dt+e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r}$$

ただし、a, b は正の定数で、θ は非負の定数である.

以上から、企業は需要量 X を状態変数,広告量 A を制御変数として、(1)及び(2)の制約のもとで、ネットキャッシュフローの現在価値をあらわす(4)式を最大化する. いわゆる Linear-Quadratic 型の制御問題である.

以上の準備のもとで最大化問題を解く. そこで(4)式に対して次の関数を定義する. この関数は任意の t 時点からのちの企業の割引現在価値を意味する.

$$(5)\quad J(x,\ t)=\sup_A\int_t^T e^{-r(s-t)}\{aX(s)^2-bA(s)^2\}ds+e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r}.$$

ダイナミックプログラミングの手法を用いると、Hamilton-Jacobi-Bellman の方程式(6)及びその境界条件(7)を得る.

$$(6)\quad -J_t(x,\ t)=\sup_A\{e^{-rt}(ax^2-bA^2)+(\alpha x+\beta A)\times J_x(x,\ t)\}$$

$$(7)\quad J(X,\ T)=e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r}$$

ただし、

$$J_t(x,\ t)=\frac{\partial J(x,\ t)}{\partial t},$$

$$J_x(x,\ t)=\frac{\partial J(x,\ t)}{\partial x}$$

である.

一方、(6)の右辺を極大化するＡは

(8)　$$A=\frac{\beta e^{rt}J_x}{2b}$$

である. したがって、(8)を(6)に代入すれば、(6)は t と X に関する非線形偏微分方程式(9)となる.

(9)　$$e^{-rt}aX^2+e^{rt}\frac{\beta^2}{4b}J_X^2+aXJ_X+J_t=0$$

以上から、(9)式を境界条件(7)のもとに解くことになる. そこで、$J(x,\ t)=\eta(t)x^2$ とおくと、(9)式は次のようになる.

(10)　$$\eta'=-\frac{\beta^2e^{rt}}{b}\eta^2-2a\eta-e^{-rt}a.$$

さらに $\eta=e^{-rt}Y_1$ とおくと、(10)式は、

(11)　$$-rY_1=-\frac{\beta^2}{b}Y_1{}^2-2aY_1-a$$

と書き表せる. したがって、(11)式より、

$$Y_1=\frac{b}{2\beta^2}\left(r-2a\pm\sqrt{(r-2a)^2-4a\frac{\beta^2}{b}}\right)$$

である. a は負で十分大きい、β は十分小さい値を考えているから、

$$(r-2a)^2-4a\beta^2/b\geq 0$$

と仮定して差しつかえない．さらに、Y_1 として、マイナスの符号の方を選んで、

(12) $$Y_1=\frac{b}{2\beta^2}\left(r-2\alpha-\sqrt{(r-2\alpha)^2-4a\frac{\beta^2}{b}}\right)>0$$

と決めておく．プラスの方を選んでも基本的には議論は同様であるが、1. 計算の手間がかかる．2. 結果が相対的に退化したもの、つまり特殊なものになる．という理由からマイナスの方を選択する．プラスについては以下で若干のコメントを行なう．

さて、さらに変数を $\eta=e^{-rt}Y_1+\mu$ へと変換すれば、(10)式は、

(13) $$\mu'=-\frac{\beta^2}{b}e^{rt}\mu^2-\left(2\alpha+\frac{2\beta^2}{b}Y_1\right)\mu$$

となり、ここで $\frac{1}{\mu}=\phi$ とおけば、(13)式は次のようになる．

(14) $$\phi'=\frac{\beta^2}{b}e^{rt}+\left(2\alpha+\frac{2\beta^2}{b}Y_1\right)\phi.$$

同様の変数変換を境界条件にも適応し、単純な線形微分方程式(14)を解けば次のようになる．

(15) $$\phi=\frac{P_1\beta^2e^{rt}-(P_1\beta^2+bQ_1)e^{Q_1(T-t)+rt}}{bP_1Q_1}.$$

ただし、

(16) $$P_1=Y_1-\frac{\theta}{r}\neq 0,$$

(17) $$Q_1=\sqrt{(r-2\alpha)^2-4\frac{a\beta^2}{b}}$$

とする[(1)].

以上より、次式を得る.

$$(18)\quad J(X,\ t)\equiv J=\left\{Y_1+\frac{bP_1Q_1}{\beta^2P_1-\{\beta^2P_1+bQ_1\}e^{Q_1(T-t)}}\right\}e^{-rt}X(t)^2.$$

さて、序で述べた三つの行動の選択を考察してみよう. 企業は、産業が衰退を始めた時点 ($t=0$) においてどの行動をとるかを決定するものとする. ところで、$J\equiv J(X,\ t)$ は退出時刻をどのように設定するかは別にして、t 時点以降に企業が稼ぎうるネットキャッシュフローの合計である. すなわち、企業の現在価値である. そこで $t=0$ 時点における即時退出 ($T=0$) の場合の企業価値を $J^0(0)$、有限の正の時間を退出時刻とする場合のそれを $J^T(0)$ [(2)]、退出しないで市場に留まる場合 ($T=\infty$) を $J^\infty(0)$ とすれば、当該企業はこれら三つの企業価値のうちでもっとも大きい値の J に対応する退出時刻を選択するであろう. それでは、これらの値を実際に計算してみよう.

まず、即時退出 ($T=0$) の場合、(4)式に注意すれば $J^0(0)$ は次のようになる.

$$(19)\quad J^0(0)=\frac{\theta}{r}X(0)^2.$$

---

(1) (12)式において大きな値の Y_1、つまり

$$Y_1=\frac{b}{2\beta^2}\left(r-2a+\sqrt{(r-2a)^2-4a\frac{\beta^2}{b}}\right)>0$$

を選んだときには、

$$Q_1=-\sqrt{(r-2a)^2-4\frac{a\beta^2}{b}}$$

に変更する必要がある. この場合の最終的な結果については§-4を参照のこと.

(2) ここでは具体的な退出時刻の決定を論じているわけではない. それは次のIIIで行なうのであって、したがって有限な退出時刻はここではあくまでパラメータにすぎない.

次に、正の有限値 T を退出時間とするときには、⒅式の最右辺を $J^{T}(t)$ と定義すればよい.

最後に、市場から退出しないときには、$T=\infty$のときの境界条件を考慮すれば、$J=Y_1e^{-rt}X(t)^2$ が(9)の解であるら、

$$(20)\quad J^{\infty}(0)=Y_1X(0)^2.$$

である. そこで、これら三つの値を比較してみることにしよう.

ケース1　$J^{\infty}(0)>J^{0}(0)$ の場合.

このとき⒆、⒇より $Y_1>\theta/r$ を得る. したがって、$P_1>0$ だから⒅より、$J^{\infty}(0)>J^{T}(0)$ を得る. 逆に、$Y_1>\theta/r$ のときも $J^{\infty}(0)>J^{0}(0)$ かつ $J^{\infty}(0)>J^{T}(0)$ を得る. よって、この場合、企業は退出時刻として無限大、即ち当該市場からは退出しないことを選択する. この場合の最適な広告量は、(8)および⒇より、

$$(21)\quad A(t)=\frac{\beta}{b}Y_1X(t)$$

であり、瞬時的に、需要量に対応して一定の広告を行なえばよいことがわかる. 線形フィードバック制御量である.

ケース2　$J^{\infty}(0)<J^{0}(0)$の場合.

このとき $Y_1<\theta/r$ であるから、$P_1<0$ である. 逆に、$Y_1<\theta/r$ であれば $J^{\infty}(0)<J^{0}(0)$ となる.

ここで、有限の正の時間 T を退出時刻として設定したとする. もし

$$(22)\quad Y_1+\frac{bP_1Q_1}{\beta^2P_1-\{\beta^2P_1+bQ_1\}e^{Q_1T}}>\frac{\theta}{r}$$

であれば、$J^T(0)>J^0(0)$ となり、有限の正の時間 T に企業は退出することになる．逆に、$J^T(0)>J^0(0)$ であれば、(22)が成立する．もちろん

$$Y_1+\frac{bP_1Q_1}{\beta^2P_1-\{\beta^2P_1+bQ_1\}e^{Q_1T}}\leq\frac{\theta}{r}$$

であれば、$J^T(0)\leq J^0(0)$ となり、即時退出する．

一方、(22)より

$$\begin{aligned}
(22)\quad &\Leftrightarrow P_1+\frac{bQ_1}{\beta^2P_1-(\beta^2P_1+bQ_1)e^{Q_1T}}\cdot P_1>0\\
&\Leftrightarrow \frac{bQ_1}{\beta^2P_1-(\beta^2P_1+bQ_1)e^{Q_1T}}<-1\\
(23)\quad &\Leftrightarrow \begin{cases} bQ_1>(\beta^2P_1+bQ_1)e^{Q_1T}-\beta^2P_1\\ \text{かつ}\\ \beta^2P_1-(\beta^2P_1+bQ_1)e^{Q_1T}<0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow Y_1+\frac{b}{\beta^2}Q_1<\frac{\theta}{r}<Y_1+\frac{e^{Q_1T}}{e^{Q_1T}-1}\cdot\frac{b}{\beta^2}Q_1
\end{aligned}$$

であるから、結局、有限の正の時間 T に対して、

$$(24)\quad Y_1+\frac{b}{\beta^2}Q_1<\frac{\theta}{r}<Y_1+\frac{e^{Q_1T}}{e^{Q_1T}-1}\cdot\frac{b}{\beta^2}Q_1$$

のとき時間 T に企業は退出することになる．逆も言える．

(24)式が成立しているとき、(8)及び(18)より最適な広告量は、

(25) $$A(t)=\frac{\beta}{b}\left[Y_1+\frac{bP_1Q_1}{\beta^2P_1-(\beta^2P_1+bQ_1)e^{(T-t)Q_1}}\right]X(t)$$

となる．需要量 $X(t)$ の係数に時間 t が含まれていることを除けば、(21)式同様線形フィードバック制御である．

一方、(23)より、

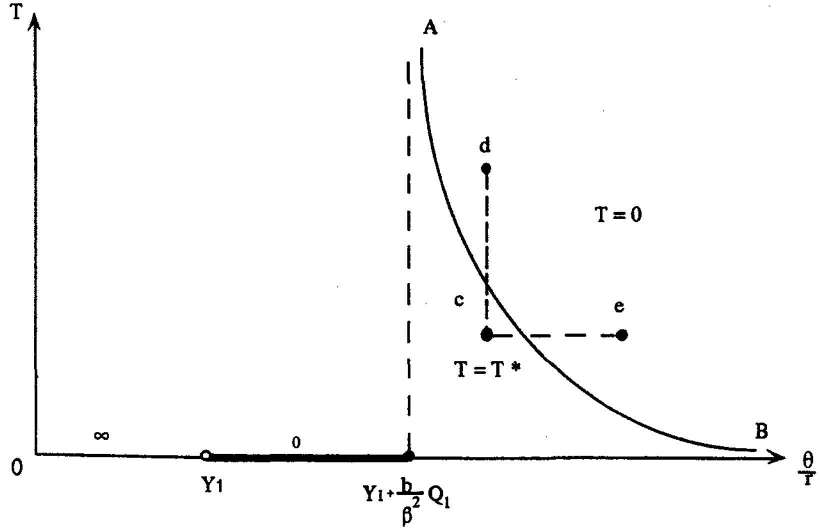
(26) $$\beta^2P_1-(\beta^2P_1+bQ_1)e^{Q_1T}=-bQ_1$$

は、$J^T(0)=J^0(0)$ を満たす点$\left(T,\ \frac{\theta}{r}\right)$の集合である．このケースでは $\beta^2P_1+bQ_1<0$ であることに注意をすれば、(26)式を微分することによって、

(27) $$\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\theta}{r}\right)}<0,\quad \frac{\partial^2T}{\partial\left(\frac{\theta}{r}\right)^2}>0$$

という性質をもつ．したがって、退出時間 T と退出後の収益の大きさを測るパラメーター θ/r との関係は図Ⅱ-2.1 のように描くことができる．

図Ⅱ-2.1 によれば、退出後の収益が相対的に少ない場合、即ち、$0\leq\frac{\theta}{r}<Y_1$ なるときには、退出するよりも、市場に留まって残存需要から利益を得たほうが有利であることがわかる．ところが、その収益がより大きなものであると$\left(Y_1<\frac{\theta}{r}<Y_1+bQ_1/\beta^2\right)$、当該市場に留まるよりも、即時退出によって、他の市場での事業への参入や、他の資産への投資をおこなう方が有利となる．そしてさらに、退出後の収益がさらに大きくなると$\left(Y_1+bQ_1/\beta^2<\frac{\theta}{r}\right)$、図Ⅱ-2.1 の曲線 AB の右上に位置する$\left(T,\ \frac{\theta}{r}\right)$の組を選択したならば、即時撤退の方が暫時市場に留まった後退出するよりも有利であり、曲線 AB の左下に位置する$\left(T,\ \frac{\theta}{r}\right)$の組を選択したならば、暫時市場に留まった後退出する方が即時撤退のよりも有利である．例えば図中の点 c は一定の退出後の収益 θ/r と、計



図II－2.1 確定モデルの場合の三つの戦略とパラメータ.
$Y_1+bQ_1/\beta^2<\dfrac{\theta}{r}$ のとき、$T^*>0$ を設定.

画された退出時刻 T の組み合わせに対して計画時点までの刈り取り戦略を合理的なものとして保証している．ところがこの状態から点 d にこの企業の計画が変化したとすると、このような退出時間と退出後の収益との組み合わせはもはや不利となり、即時撤退行動を取らなければならなくなる．一方、点 c から点 e への計画変更はむしろ退出後の行動の変更であって、退出時刻の変更ではない．このような退出後の計画変更は、退出後の収益が以前にもまして大きいことを意味すから、一定の時間市場に留まるという計画よりも即時退出戦略を選択せしめると解釈することができる．また、曲線 AB は暫時市場に留まることが有利であるような退出時間の上限であるから、退出後の収益が大きくなるにつれて、早くその利益を享受することの魅力が増大するので、退出時間刻 T

の上限は下がってくるのがわかる.

§-3　不確実性下の退出モデル

§-2 のモデルを需要に不確実性が存在する場合に拡張する. そのうえで不確実性が退出の意思決定にどの様な影響を与えるかを考察する.

モデルの設定は確実性下のモデルのそれと基本的には同じである. ただ需要の動特性を記述する微分方程式に不確実性が加印される. 当該企業が販売する財に対する第 t 期の需要を $X(t) \geq 0$, 広告量を $A(t) \geq 0$ で表すことにする. 第 t 期の需要 $X(t)$ の変動は $\alpha X(t)+\beta A(t)$ を drift 項、即ち、需要の期待変化、$\sigma X(t)$ (ただし σ は正値定数) を微小標準偏差とする時間について連続な拡散確率過程、

(1)　$dX(t)=(\alpha X(t)+\beta A(t))dt+\sigma X(t)dW(t)$

(2)　$X(0)=X_0>0$

に従うものとする。ここで、X_0 は非確率的な定数で、$dW(t)$ は標準ウイナー過程の確率微分である。需要の期待衰退速度 α は負の定数、広告による期待需要創出効果を表す β は正の定数である. ただし、あくまで市場は衰退しているから α は負で十分大きな値を、また、β は十分小さな値を想定する.

最適な退出の決定を議論するための単純化した目的関数を、

(4)
$$\begin{aligned} V(A) &= E\left\{\int_0^T e^{-rt}\{aX(t)^2-bA(t)^2\}+\int_T^\infty e^{-rt}\theta X(T)^2 dt\right\} \\ &= E\left\{\int_0^T e^{-rt}\{aX(t)^2-bA(t)^2\}dt+e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r}\right\} \end{aligned}$$

とする. ただし、a, b は正の定数で、θ は非負の定数である.

以上から、企業は需要量 X を状態変数，広告量 A を制御変数として、(1)及び(2)の制約のもとで、ネットキャッシュフローの現在価値の期待値をあらわす(4)式を最大化する、Linear-Quadratic-Gaussian 型の確率制御問題である．最大化問題を解くために(4)式に対して次の関数(5)を定義する．この関数は任意の t 時点での需要量を所与として、t から後の企業の期待割引現在価値を意味する．

$$J(x,\ t)=\sup_{A} E\left[\int_t^T e^{-r(s-t)}\{aX(s)^2-bA(s)^2\}ds+e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r}\,\middle|\,\{X(s)\}_t^T,\ X(s)=x\right] \tag{5}$$

ダイナミックプログラミングの手法を用いると、Hamilton-Jacobi-Bellman の方程式(6)及びその境界条件(7)を得る．

$$-J_t(x,\ t)=\sup_{A}\{e^{-rt}(ax^2-bA^2)+(\alpha x+\beta A)\times J_x(x,\ t)+\frac{(\sigma x)^2}{2}\times J_{xx}(x,\ t)\} \tag{6}$$

$$J(x,\ T)=e^{-rT}\frac{\theta X(T)^2}{r} \tag{7}$$

ただし、

$$J_t(x,\ t)=\frac{\partial J(x,\ t)}{\partial t}、$$

$$J_x(x,\ t)=\frac{\partial J(x,\ t)}{\partial x}、$$

$$J_{xx}(x,\ t)=\frac{\partial^2 J(x,\ t)}{\partial x^2}$$

である．(6)の右辺を極大化する A は

(8) $A=\dfrac{\beta e^{rt}J_x}{2b}$

であるから、(8)を(6)に代入すれば、(6)は t と x に関する 2 階非線形編微分方程式(9)となる.

(9) $e^{-rt}ax^2+e^{rt}\dfrac{\beta^2}{4b}J_x^2+\alpha xJ_x+\dfrac{(\sigma x)^2}{2}J_{xx}+J_t=0$

これまでと同様にして、方程式(9)の解(10)を得る.

(10) $J(x,\ t)\equiv J=\left\{Y_2+\dfrac{bP_2Q_2}{\beta^2P_2-\{\beta^2P_2+bQ_2\}e^{Q_2(T-t)}}\right\}e^{-rt}x(t)^2$

ただし、

(11) $Y_2=\dfrac{b}{2\beta^2}\left\{(r-2\alpha-\sigma^2)-\sqrt{(r-2\alpha-\sigma^2)^2-\dfrac{4a\beta^2}{b}}\right\}>0,$

(12) $P_2=Y_2-\dfrac{\theta}{r}\neq 0,$

(13) $Q_2=\sqrt{(r-2\alpha-\sigma^2)^2-4\dfrac{a\beta^2}{b}}$

とする. a は負で十分大きく、β は十分小さいから、

$$(r-2\alpha-\sigma^2)^2-4a\beta^2/b>0$$

として差しつかえない.

さて、企業の退出時刻の選択問題を考察する. これまでと同じく、企業は、産業が衰退を始めた時点 ($t=0$) において退出時刻を決定するものとする. $t=0$ 時点における即時退出 ($T=0$) の場合の企業価値を $J^0(0)$、有限の正の時間

を退出時間とする場合のそれを $J^{T}(0)$、退出しない場合 ($T=\infty$) を $J^{\infty}(0)$ とすれば、当該企業はこれらのうちでもっとも期待値の大きい J に対応する時間を、退出時刻として決定する.

前節同様にして次の関係を得る.

(i)　$0 \leq \dfrac{\theta}{r} < Y_2$ のときには退出しない. 最適なコントロールは

(14)　$$A(t)=\frac{\beta}{b}Y_2X(t)$$

で与えられる.

(ii)　$Y_2 < \dfrac{\theta}{r} < Y_2+bQ_2/\beta^2$ のときには即時退出する.

(iii)　正の退出時間 T に対して、

$$Y_2+\frac{b}{\beta^2}Q_2 < \frac{\theta}{r} < Y_2+\frac{e^{Q_2T}}{e^{Q_2T}-1}\cdot\frac{b}{\beta^2}Q_2$$

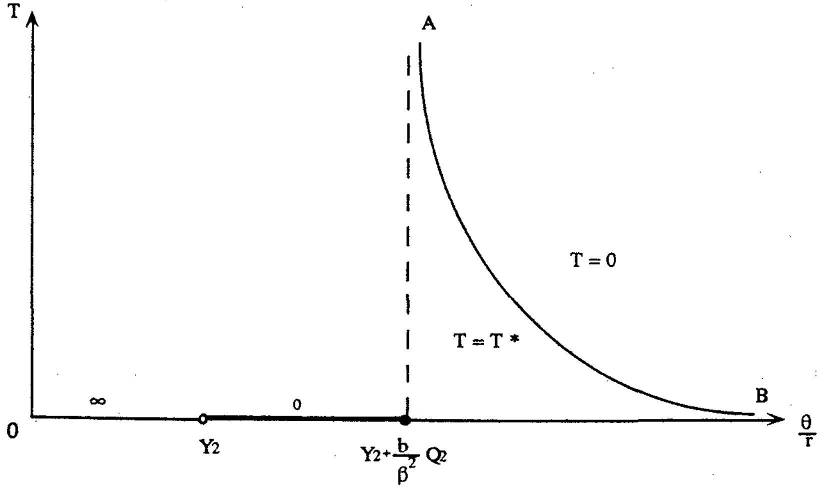
のときには、その時刻に退出する. この場合の最適なコントロールは

(15)　$$A(t)=\frac{\beta}{b}\left[Y_2+\frac{bP_2Q_2}{\beta^2P_2-(\beta^2P_2+bQ_2)e^{(T-t)Q_2}}\right]X(t)$$

で与えられる. また退出時間 T の上限は

(16)　$$\beta^2P_2-(\beta^2P_2+bQ_2)e^{Q_2T}=-bQ_2$$

となり、この上限について、退出時間と退出後の収益パラメーターとの間に次の関係が存在する.



図Ⅱ－3.1　確率モデルの場合の三つの戦略とパラメータ

(17)　$\dfrac{\partial T}{\partial\left(\dfrac{\theta}{r}\right)} < 0\ ,\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial\left(\dfrac{\theta}{r}\right)^2} > 0$

以上を図示すれば図Ⅱ-3.1 となる.

§-4　不確実性の退出戦略への影響

最後に残されたことは不確実性が退出戦略にどの様な影響をもたらすかを調べることである．そこで次のような関数(1)を定義する．ただし、$^\forall\sigma$ に対して、

$$(r-2\alpha-\sigma^2)^2-4\alpha\beta^2/b > 0$$

とする.

$$G(\sigma) \equiv Y_1 - Y_2$$

(1) $$= \frac{b}{2\beta^2}\left\{\sigma^2 + \sqrt{(r-2\alpha-\sigma^2)^2 - 4\frac{a\beta^2}{b}} - \sqrt{(r-2\alpha)^2 - 4\frac{a\beta^2}{b}}\right\}$$

この関数は次の性質をもつことは明かである.

(2) $G(0)=0$,

(3) $\dfrac{dG(\sigma)}{d\sigma} < 0$.

したがって、関数 $G(\sigma)$ の連続性から、${}^{\forall}\sigma > 0$ に対して、$Y_1 < Y_2$ を得る. つまり、退出せずに市場に留まることを合理的とするパラメータの範囲が広がることを意味する. 言い換えれば、より大きい退出後の収益がないと退出に値しないということになる. I の言葉を用いれば、需要不確実性は t 退出障壁を高める効果をもつといえる.

一方、関数 $H(\sigma)$ を次のように定義する.

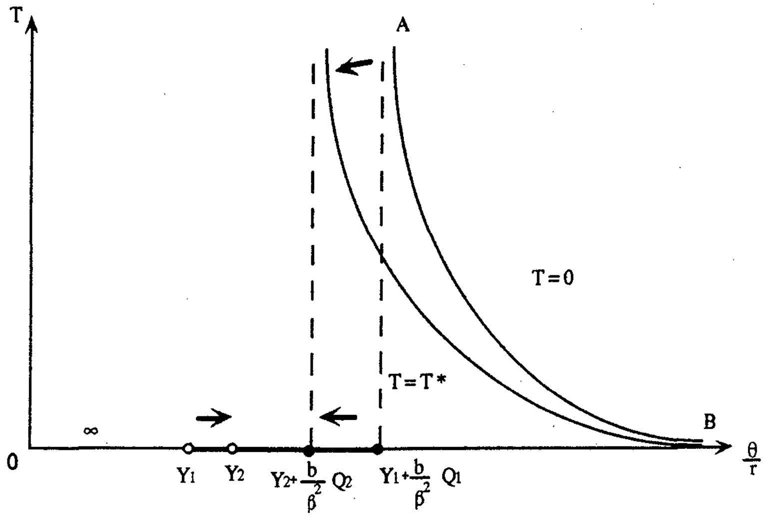
$$H(\sigma) \equiv Y_1 + \frac{b}{\beta^2}Q_1 - \left(Y_2 + \frac{b}{\beta^2}Q_2\right)$$

(4) $$= \frac{b}{2\beta^2}\left\{\sigma^2 - \sqrt{(r-2\alpha-\sigma^2)^2 - 4\frac{a\beta^2}{b}} + \sqrt{(r-2\alpha)^2 - 4\frac{a\beta^2}{b}}\right\}$$

明かに ${}^{\forall}\sigma > 0$ に対して $H(\sigma) > 0$ であるから、

$$Y_1 + \frac{b}{\beta^2}Q_1 > Y_2 + \frac{b}{\beta^2}Q_2$$

である. これらを総合して不確実性の影響を図示したものが図II-4.1 である.



図Ⅱ－4.1　不確実性の影響

最後に（2-12）式においてプラスの値を選んだ場合、つまり

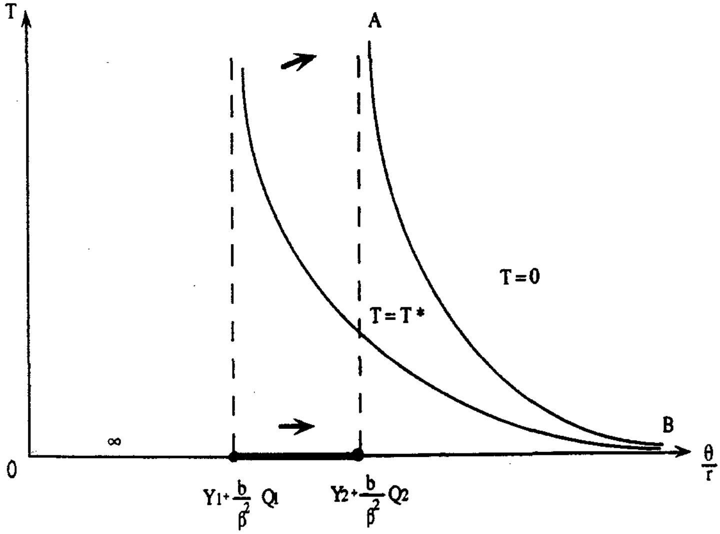
$$(5)\quad Y_1=\frac{b}{2\beta^2}\left(r-2\alpha+\sqrt{(r-2\alpha)^2-4a\frac{\beta^2}{b}}\right)\equiv Y_1^+>0$$

なる場合についてコメントしておく．ただし既に述べたようにこの場合には

$$(6)\quad Q_1=-\sqrt{(r-2\alpha)^2-4\frac{a\beta^2}{b}}\equiv Q_1^+$$

としなければならない．この場合もこれまでと同様の議論を行なうことによって不確実性と退出時刻に関して図Ⅲ－4.2 のようなグラフを得る．

これまでと顕著に異なる点は、即時撤退戦略が優位であるようなパラメータの範囲、つまり



図Ⅲ－4.2

$$J^0(0) > J^x(0)$$

なる θ/r の範囲が消滅していることである．したがって $Y_1^+ + \dfrac{b}{\beta^2}Q_1^+$ が退出せずに市場に継続的に留まるべきパラメータの範囲とそうでない範囲とを分ける閾値となる．そこで(4)式と同様の計算を行なえば、

$$(7)\quad Y_1^+ + \frac{b}{\beta^2}Q_1^+ < Y_2^+ + \frac{b}{\beta^2}Q_2^+$$

となり、このケースでも不確実性は市場に留まるべき可能性を増大させる効果をもつことがわかる．

Ⅱへの補論

§-1　序

Ⅱではコントロールの手法でもって、あらかじめ決定されていた退出時間までの最適な制御の方法と、不確実性が退出の意思決定、特に三つの戦略の選択にいかなる影響を及ぼすかについて考察した．この補論では基本的には同様のモデルを用いて、確実性下で、最適な広告量の制御方法と同時に退出の時間も決定する企業を考察する．

制御量と計画期間の最適なる同時決定は極めて難しい問題である．不確実性下の制御モデルは必然的にクローズド・ループ制御になるから[1]、最適退出時間とコントロール関数を同時に発見することは極めて困難である．しかしながら、確実性下の単純な制御問題のように、制御がオープン・ループの場合には比較的容易にこれら二つの制御量を同時考察することができる場合がある．本稿は不確実性の効果の分析にその重きをおいているので、確定的なモデルを取り立てて分析することは、その主旨からすれば脇道に逸れることになるが、現実的には企業は同時決定を行なっていると考えたほうが自然であるので、補論という型でこれを議論することにした．

周知のように、経営科学あるいはORの問題のなかに、機械のメンテナンス問題そして取り替え問題というものがある[2]．これらはしばしば同時に考察される場合がある．たとえば Thompson（1968）は次の様な問題を考察している．

---

(1) Bensoussan, Gerald Hurst,Jr. and Naslund（1974）を参照.

(2) Tapiero（1988）や Bensoussan, Gerald Hurst, Jr. and Naslund（1974）等を参照.

ある企業が生産活動をする．生産に用いられる機械は物理的に消耗してゆく．これに対してメンテナンスを施すことによって、機械の物理的磨耗による生産効率の悪化を改善することができる．そして同時に機械を取り替え、新たなものを購入する際の現存機械の経済的価値、つまりスクラップバリューもメンテナンスを施していることによって高くなる．このような状況のなかで、企業の担当者はどの程度メンテナンスを施し、同時に新たな機械と、いつ入れ替えすればいいかを決定しなければならない．

Thompson の問題において、メンテナンスを広告に、取り替え時刻を退出時刻に換えることによって、ここで考察しようとしている問題として考えることができる．

§-2　モデル

T 時点でこの企業は当該市場から退出すると仮定して、企業の目的関数 $V(T)$ は次の様に定義される．

$$(1)\quad V(T)=\int_0^T e^{-rs}Q(s)ds+e^{-rT}\theta\pi(T).$$

ただし、

$$(2)\quad Q(t)=\pi(t)-pA(t)$$

で、$\pi(t)$ は t 時点での当該企業の生産活動からの経常的な利潤を、$A(t)$ は広告量を p はその単位当たりに費用を表しているものとする．したがって、$Q(t)$ は経常的な純利潤を表すことになる．また、$\theta\pi(T)$ は退出時点でのこの企業のスクラップバリューを表しているものとする．ここで制御変数である広告量に関して次のような制約を設ける．

(3)　$0 \leq A(t) \leq \overline{A}$.

さて、生産販売活動による利潤 $\pi(t)$ は次の確定的な微分方程式(4)にしたがうものと仮定する.

(4)　$$\frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t)\text{, } \alpha < 0\text{, } \varphi(t) \geq 0 .$$

関数 $\varphi(t)$ は広告制御モデルでよく用いられる広告の効果を表わし、時間に関する減少関数と考える. 一方、衰退産業を想定しているから $\alpha < 0$ であるが、利潤に関してはⅡと同様にさらに別の仮定を追加する必要がある. (4)式によると広告はそれを行なうことによって利潤の減少をおさえる効果があることがわかる. しかし、あくまで衰退産業を考察の対象としているから、広告を行なう効果は部分的なもの、つまり収益の減少を食い止めるほどの効果はもっていないことを仮定する必要がある. そこで次の仮定をおく.

(5)　$$\frac{d\pi(t)^m}{dt} < 0 .$$

ただし、

(6)　$$\pi(t)^m=\int_0^t (\alpha+\varphi(s)\overline{A})ds$$

である. この仮定のもとで、企業が解決しなければならない問題は次の様に表現することができる.

(7)　$$\begin{aligned}&\underset{A,T}{Max}\, V(T)\\ &s.t.\ \frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t),\\ &\qquad 0 \leq A(t) \leq \overline{A}\end{aligned}$$

まず、退出時刻Tを一定の値に固定して議論をすすめる．制御変数である広告量に関して最適なコントロールが見つかってから割引現在価値を最大にすべく退出時刻を決定する．この問題のように確定的な環境での動的な最適化で、しかも制約をともなっている場合には、ダイナミック・プログラミングよりもポントリャーギンの最大値原理によって問題を解いたほうが容易な場合が多い．そこで Bensoussan, Gerald Hurst,Jr. and Naslund (1974) にしたがって、問題(7)をさらに扱いやすいかたちに変形する．

目的関数(1)を任意の時間tに関する方程式と読み換えて、これを時間に関して微分すれば次式をえる．

$$\text{(8)}\quad \frac{dV(t)}{dt}=(\pi(t)-pA(t))e^{-rt}+\theta\frac{d\pi}{dt}e^{-rt}-r\theta\pi e^{-rt}$$

$$=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt}$$

目的関数である企業の割引現在価値を状態変数の一つとして扱い、この新たな状態変数の退出時刻での値を目的関数とする．そうすると最大化問題(7)は次のような問題に変換することができる．

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned}&\underset{A,\,T}{Max}\,V(T)\\ &s.t.\ \frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t),\\ &\qquad \frac{dV(t)}{dt}=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt},\\ &\qquad 0\le A(t)\le \overline{A}\end{aligned}$$

問題(9)に対応するハミルトニアンHは、

$$\text{(10)}\quad H=\rho_1(\alpha+\varphi A)+\rho_2\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt}$$

となる．よって、最大値原理より、随伴変数に関して次の関係が成り立つ．

(11) $\dot{\rho}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi} = -\rho_2(1-r\theta)e^{-rt}$ ， $\rho_1(T) = \dfrac{dV(T)}{d\pi} = 0$.

(12) $\dot{\rho}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial V} = 0$ ， $\rho_2(T) = \dfrac{dV(T)}{dV} = 1$.

境界条件付き連立微分方程式(11)、(12)の解は次のようになる．

(13)
$$\rho_1(t) = \frac{1-r\theta}{r}(1-e^{-r(T-t)})e^{-rt}$$
$$\rho_2(t) = 1$$

よって、(10)および(13)より最大化ハミルトニアン $H(t)^*$ は(14)式となる．

(14)
$$H(t)^* = \left[\left\{\left(\frac{1}{r} - \frac{1-r\theta}{r}e^{-r(T-t)}\right)\varphi - p\right\}A + \left(\frac{1}{r} - \frac{1-r\theta}{r}e^{-r(T-t)}\right)\alpha + (1-r\theta)\pi\right]e^{-rt}$$

(14)式はコントロール変数 $A(t)$ に関して 1 次であるから最適制御はバン・バン制御となる．すなわち、

(15a) $\varphi(t) > \dfrac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}}$ 　　のとき $A(t) = \overline{A}$.

(15b) $\varphi(t) = \dfrac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}}$ 　　のとき $A(t)$.

(15c) $\varphi(t) < \dfrac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}}$ 　　のとき $A(t) = 0$.

さて、(15)式の左辺である広告効果関数は仮定から時間に関して減少関数であり、右辺は同じく時間の増加関数である．したがって、一定の T について次の

ような一意的なある時間 $\overline{t}$ が存在する.

$$(16)\quad \overline{t}=Max\left(0,\ \left\{t\mid\varphi(t)=\frac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}}\right\}\right).$$

したがって、(15)は次のように書き換えられる.

(17a)　$t<\overline{t}$　のとき　$A(t)=\overline{A}$.

(17b)　$t=\overline{t}$　のとき　$A(t)$　は任意.

(17c)　$t>\overline{t}$　のとき　$A(t)=0$.

(17)が企業の最適な広告戦略である. (b)のケースは、連続時間モデルの場合一瞬の出来事であるから無視しても構わない. 実際に(b)が生じた場合には、たとえば(c)の政策を採用することと前もって決めておけばよい.

(17)のルールで制御される企業の目的関数である割引現在価値 $V(T)$ を、退出時刻 T に関して最大化しなければならない. ところが目的関数 $V(T)$ はもはやコントロール変数である広告量によって、最適にコントロールされているから(2)は次のように書き換えられなければならない.

$$(18)\quad V(T)=\int_0^T e^{-rs}Q(s,\ A(s,\ T))ds+e^{-rT}\theta\pi(T).$$

よって、(18)を退出時間 T に関して微分してゼロとおけばよい. つまり、

$$(19)\quad \begin{aligned}\frac{dV(T)}{dT}&=(\pi(T)-pA(T))e^{-rT}+\int_0^T e^{-rs}\frac{\partial Q(s,\ A(s,\ T))}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial T}ds\\&\qquad+\theta\frac{d\pi}{dT}e^{-rT}-r\theta\pi e^{-rT}\\&=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rT}=0\end{aligned}$$

である．最適退出時刻を T^* とおけば、次のような意味のある三つの場合を考えることができる．

ケース1． $0=\bar{t} < T^*$ の場合．

この場合は、広告は一切行なわず収益の減少するがままにしておき、$t=T^*$ のときに当該市場から退出すればよい．したがって最適な退出時刻は(19)式において $A(t)=0$ とおけばいいから、

$$(20) \quad \pi(T^*)=\frac{-\theta\alpha}{1-r\theta}$$

である．よって、この条件の下で(4)式を積分することで、最適な退出時刻を陽にえることができる．すなわち、

$$(21) \quad T^*=\frac{-1}{\alpha}\left(\pi_0+\frac{\theta\alpha}{1-r\theta}\right),\ \pi(0)=\pi_0$$

をえる．

ケース2． $0 < T^* < \bar{t}$ の場合．

この場合は、一定の、しかも最大の広告量 $A(t)=\bar{A}$ を連続的に市場に施し、可能なかぎり市場需要を喚起しその後しかるべき時刻、つまり $t=T^*$ のときに当該市場から退出すればよい．したがって最適な退出時刻は(19)式において $A(t)=\bar{A}$ とおけばいいから、

$$(22) \quad \pi(T^*)=\frac{\theta\alpha+(\theta\varphi(T^*)-p)\bar{A}}{1-r\theta}$$

をえる．よって、この条件の下で(4)式を積分したものと、(22) 式とによって最適な退出時刻を知ることができる．

ケース 3.　$0 < \overline{t} < T^*$ の場合.

この場合は、$t=\overline{t}$ までの間は、最大の広告量 $A(t)=\overline{A}$ を連続的に市場に施し、可能なかぎり市場需要を刈り取る．その後 $t=\overline{t}$ で広告を行なうことを取りやめ、$t=T^*$ の時点で市場から退出することが最適となる．ケース 1、ケース 2 の計算方法を境界条件を考慮して継続的に行なえば退出時刻が求められる．このケースに関しては節を改めて、数値例で具体的にみることにする．

§-3 数値解

Thompson も興味深い数値例を用意しているが、本稿では、特に広告の効果の違いに着目し、彼のものよりも統一的な新たな数値例を提示する．各パラメータの値は、各ケースに共通に次のように設定する．$\alpha=-0.08$、$r=0.1$、$p=0.019$、$\theta=0.1$、$\pi(0)=1.0$、$0 \leq A \leq 0.1$．広告効果関数 $\varphi(t)$ はパラメータ a を伴った次のような関数と仮定する．

(1)　$\varphi(t)=ae^{-0.1\cdot t}$, $a>0$.

退出時刻を求めるには、各ケースに共通に次のような手順で計算が進められる．まず、$t<\overline{t}$ のとき (2-4) 式を積分する．その結果、

(2)　$\pi(t)=-0.08t-ae^{-0.1t}+1+a$

をえる．次に(2)式の値を $t=\overline{t}$ のときの初期条件として、$t>\overline{t}$ に関して同じく (2-4) 式を積分すれば、

(3) $\pi(t)=-0.08t-ae^{-0.1\bar{t}}+1+a$

となる．これは時間 t に関する線形の関数である．以上から、制御量 $A=\overline{A}=0.1$ を実施する時間と、$A=0$ を実施する時間とを分ける臨界的な時間 $t=\bar{t}$ の以前で、企業の収益は(2)によって、その後は(3)によって表せることになる．

さて、もし退出時に広告を行なっていなければ、(2-20) 式より最適な退出時間 T^* における当該企業の利潤は、

(4) $\pi(T^*)=\dfrac{8}{990}$

である．一方、(2-15b) は制御量である広告量をその最大値から最小値に変更する時点 $t=\bar{t}$ を規定する関係であるが、これに数値を代入すれば、

(5) $ae^{-0.1\bar{t}}=\dfrac{0.0019}{1-0.99e^{-0.1(T^*-\bar{t})}}$

であるから、(3)式を退出時間 $t=T^*$ で評価し、これに(4)を代入することで、

(6) $\dfrac{8}{990}=-0.08T^*-ae^{-0.1\bar{t}}+1+a$

をえる．よって(5)式と(6)式を同時に解くことによって、最適な退出時刻と制御量の変更時刻との組 $(T^*,\ \bar{t})$ をえることができる．

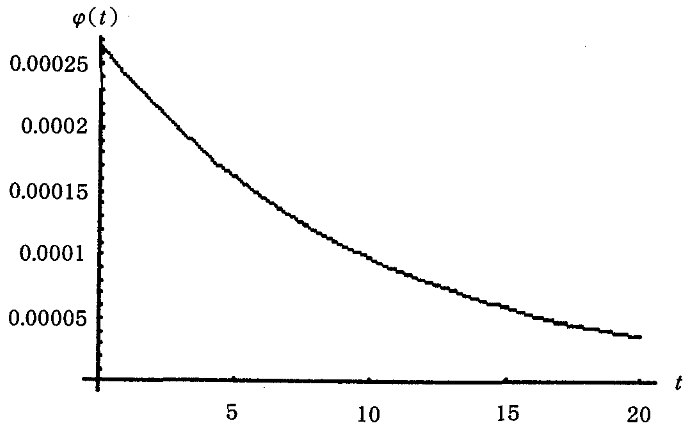
次に広告効果関数を特定化し前節のそれぞれのケースに関して最適な退出時間を具体的に求めてみることにする．その際注意すべきことは仮定の式 (2-5) と (2-6) である．これらの仮定は、広告を行なうことによって、市場の需要を喚起し企業の収益を増加させることができる．しかしながら、そのことによっ

て衰退する市場をそうでないものにするほどには改善し切れないということを意味していた．これらの条件を満たすような広告効果関数を考案しなければならない．

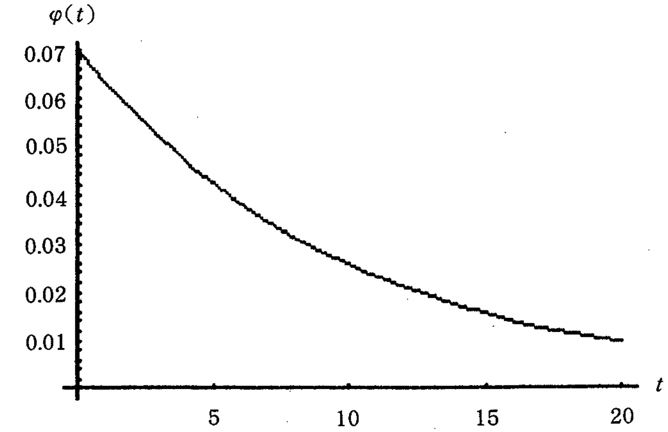
ケース1

このケースは前節で述べたように、終始広告は行なわずそのまま退出するケースである．これは広告を行なうことによって需要を喚起することがあまり望めない市場にこの企業が存在しているためと思われる．つまり当該企業の広告効果関数はその水準の低いものであるということができる．そこで、いささか唐突ではあるが広告効果関数を次のように特定化することにしよう．

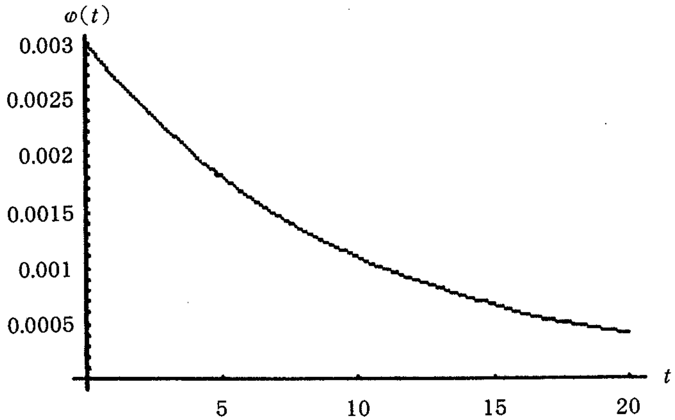
(7)　$\varphi(t) = 0.0002663e^{-0.1t}$．



図ⅡA−3.1　$a = 0.0002663$ のときの広告効果関数．



図ⅡA－3.2　$a=0.0699688$ のときの広告効果関数.

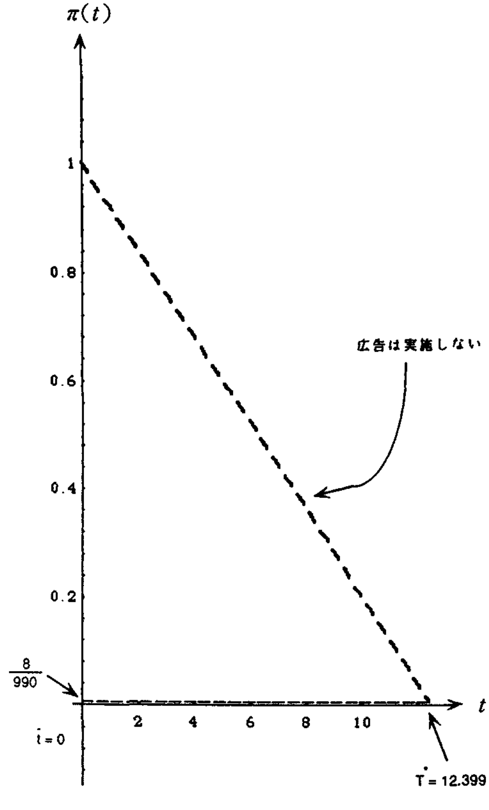


図ⅡA－3.3　$a=0.003$ のときの広告効果関数.

(7)式を(5)と(6)に代入し、Newton 法によって同時に解くと、$\bar{t}=0$，$T^*=12.399$ をえる.

ケース２

このケースは逆に継続的に広告を行ないそのまま退出すべき場合を考える.

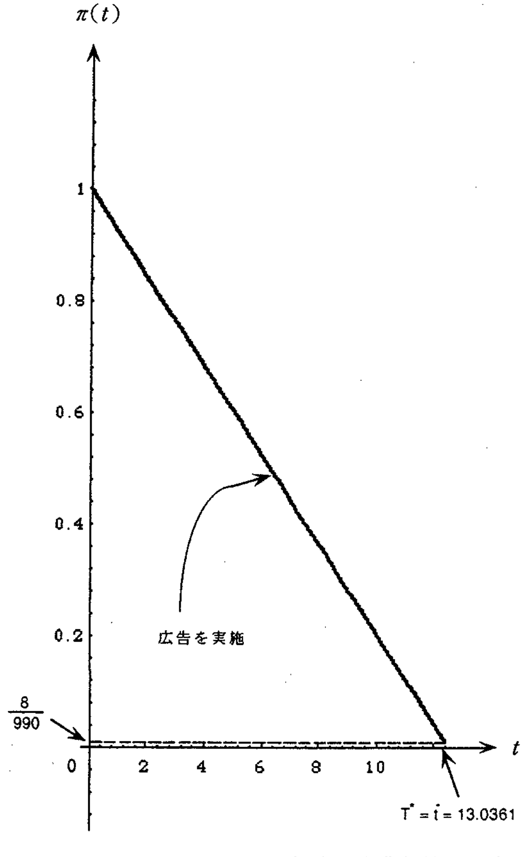


図IIA－3.4　$a=0.0002663$ の場合の企業収益と最適退出時刻.

広告の効果が相対的に大きい市場を前提にしたものである．効果関数を次のように相対的に高水準のものを仮定する．

(8)　$\varphi(t)=0.0699688e^{-0.1t}$．

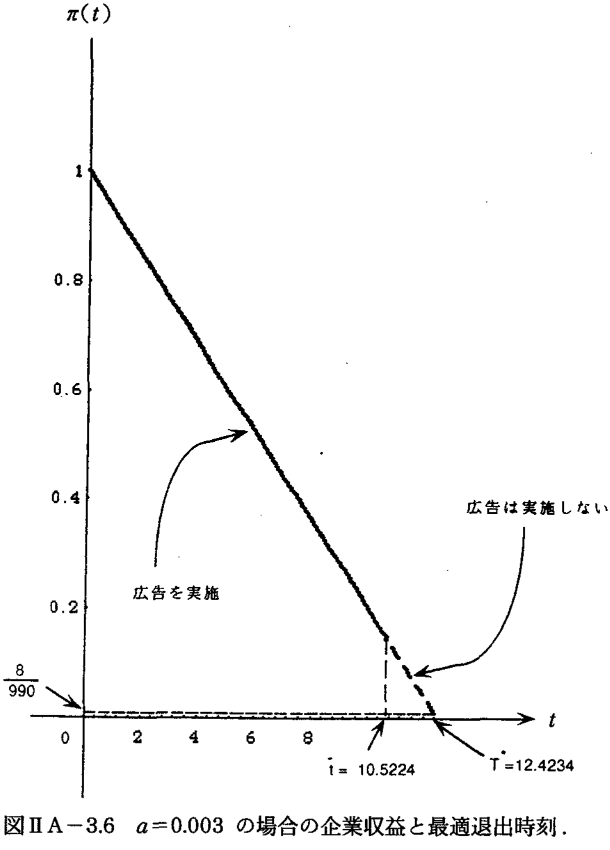
最適退出時刻は、$T^*=\overline{t}=13.0361$ となる．



図ⅡA－3.5　$a=0.0699688$ の場合の企業収益と最適退出時刻

ケース3

このケースは上述の二つのケースのちょうど中間的な場合である．というのも、はじめのうちは広告による需要喚起効果が十分存在するからその最大値まで広告を行なう．やがて利潤の減少に伴って、効果もあまり期待できず広告を取りやめてしまわなければあらないからである．そこで効果関数を次のように



図IIA−3.6　$a=0.003$ の場合の企業収益と最適退出時刻．

仮定する.

(9)　$\varphi(t)=0.003e^{-0.1t}$.

広告活動を停止すべき時刻は $\bar{t}=10.5224$ であり、したがって、最適退出時刻は $T^*=12.4234$ と計算される.

Ⅲ　最適停止モデルによる退出時刻の決定

§-1　序

ここでは、不確実性を含みながら減少してゆく需要に直面している企業（事業部）を想定し、この企業が当該産業から退出する問題を最適停止問題として定式化し、最適な退出タイミングと不確実性との関係を明確にすることを目的とする．Ⅱで積み残した問題の部分的解答である．Ⅱでは正値の退出時刻はパラメータに過ぎなかった．ここではその時刻の決定を分析する．

単純なリスク中立的な企業モデルを想定する．この企業は現在何らかの市場のなかに存在し、不確実性を含む需要水準を観測しながら退出するタイミングを狙っている．まずⅡの様な広告は行なわない企業を考える．この企業は、引き続きこの市場に留まり生産販売行動によって正の利益をあげるか、当該産業から退出するかの二つの行動が可能であるとする．

暫時市場に留まり、将来の適当な時点で企業が退出したときのスクラップバリューを含んだネットキャッシュフローの期待割引現在価値を、ここでは取敢ず U で表す．また現時点での企業のスクラップバリューを B で表すことにする．今仮に $U > B$ なる不等式が満たされるような需要量を観測したとすると、この企業は明らかに現時点での退出は見送り、さらに市場に留まり企業活動を続けたほうが有利である．一方、$U < B$ なる関係が成立していたとすれば、以下で詳しくみるように、今度は逆に既に退出していたほうが有利となる．これは将来の退出時点の決定そのものが誤っている場合で、そもそも合理的でない行動の結果と言える．結局、$U = B$ の時が退出と市場に留まることとを無差別にする状態にほかならない．そしてこのときに退出すべきである．この等式が成り立つような需要水準を退出の閾値、この閾値に対応する時間を最適退出タ

イミングということにする.

Ⅱと同様に、需要は確率的なノイズを伴い平均して減少してゆくという動特性を想定する. 平均すれば需要水準のトレンドは不確実性が存在しない場合の需要水準に等しいのであるが、当該企業は暫時市場に踏み留まることによって、このトレンド上の需要水準以上の需要を享受する可能性がある. もちろん水準以下に減少する可能性も存在するわけであるが、このようなインセンティブによって、ある条件（§-3 仮定 1）のもとでは退出時刻は不確実性が存在しない場合に比べると遅くなることを明かにする. 一方、退出時刻が遅れるということは、需要水準が増加する可能性とともに、需要の低下が起こる可能性も増加することであるから、このことはすなわち退出時刻の遅延による収益に関するリスクが存在すると言うことができる. 企業の産業からの退出タイミングの決定を、最適停止問題として定式化し、そのクローズドフォームの解を導き、リスクの存在を明らかにする.

§-2 では基準となる確実性下の退出時刻決定を考察する. これはそれ以降のモデルとの比較のためのベンチマークモデルである. §-3 は不確実性を需要のダイナミックスのなかに導入してタイミングを決定することを試みる. §-4 では需要水準の変化しうる範囲に制限（反射壁）がある場合の退出時刻の決定モデルを考察し、§-5 でこれら三つのモデルから導きだされた退出のタイミング（退出の閾値の関係）を比較検討する. §-6 では広告量によるコントロールを含む停止問題を考える. つまり、不確実性下で市場に対して広告活動を行ない市場需様を喚起しながら退出するタイミングを狙う企業を考察する. これはまだ完全な形ではないがⅡで積み残した問題への解答の試みである.

§-2 確実性下のモデル

単純な企業モデルを設定する. この企業は前述の企業価値を最大にするように最適な退出タイミングを決定する. 各記号の意味は次のとおりである.

$X(t)$ を t 時点における当該企業に対する確定的な需要量とする．企業は何ら不確実性なくこの需要水準を観測できるものとする．そして観測された需要にちょうど見合うだけ供給販売を行なうものとする．$pX(t)$ で t 時点でのネットキャッシュフローを表す．$\theta x(\tau)+S$ は τ 時点で実現した需要水準 $x(\tau)$ で企業が産業から退出したときのスクラップバリューとする．ただし、$\theta \geq 0$，$S > 0$ である．$\theta=0$ の場合はこの値が需要に依存しないケースであるから、スクラップバリューに関するこの表現は需要に関する１次式としては一般的なものである．

さて、需要量は単純な微分方程式(1)にしたがうものとする．

(1) $dX=\alpha Xdt\ , \quad \alpha < 0.$

割引率をｒとして、企業の目的関数を次のように仮定する．ただし退出時刻である τ は有限の値をとるものと仮定しておく．

(2) $J_x(\tau)=\int_0^{\tau} e^{-rs}pX(s)ds+e^{-r\tau}(\theta X(\tau)+S)$

以上から確実性下の当該企業の退出問題は(1)の制約のもとで(2)式を最大にすべく退出時刻 τ を決定することになる．この問題は簡単に解けて、最適な退出時刻に対応する需要水準を ξ^d とすれば、

(3) $\xi^d=\dfrac{rS}{p-(r-\alpha)\theta}$

を得る．以下、(3)式の分母は正の値をとるものと仮定する．つまり確定的な場合退出タイミングが存在することを仮定する．

(3)式の両辺に dt をかけて、を次のように変形する．

(4) $p\xi^d dt=r(\theta\xi^d+S)dt+r(-\alpha\theta\xi^d)dt.$

(4)式の左辺は極く短い時間 dt のあいだ、市場にこの企業が残留することからえられる利潤あるいはネット・キャッシュフローの値である．一方、右辺第一項は退出しないことによって諦めざるをえないスクラップバリューの機会費用で、第二項は市場に留まっているあいだに需要が減少してしまうことによる、もし退出していたら手にしていたであろうスクラップバリューの目減り分による機会費用である．この企業が t 時点において市場に留まっているとき、需要水準として $X(t) > \xi^d$ を観測したとしよう．このときには市場に留まることが明かに有利であることがわかる．したがってもうしばらくこの企業は市場に存在することを選択すべきである．一方、$X(t) < \xi^d$ を観測したとしよう．このときには逆に、市場に留まることによって生ずる機会費用を市場からえるキャッシュによってまかなうことができない．したがって、この場合にはこの企業は退出していたほうが有利となる．よってこれら二つの条件の臨界的なケースである(4)式が退出を行なうべき需要の値、すなわち退出の閾値となる．したがって不確実性が存在しない場合には、この企業は需要水準 ξ^d を観測したときに当該産業から退出すればよいことになる．

§-3 不確実性下のモデル

不確実な需要に直面する単純な企業モデルを設定する．この企業は期待企業価値を最大にするように最適な売却タイミングを決定するものとする．

さて、需要量は次のような確率微分方程式にしたがうものとする．

(1) $dX = \alpha X dt + \sigma X dW$.

ただし、W は標準ウイナー過程で、次の不等式を仮定する．

仮定 1

(2)　$0 < 2\sigma < -\alpha$,　$-1 < \alpha < 0$.

(1)はオプション理論で周知の拡散確率過程であり、変数 X は確率 1 で正の値をとることがわかっている．また仮定 1 から、需要量は平均して縮小してゆくことになる．ただしそのスピードはそれほど大きくはないが、その速度は確率的攪乱によって需要の縮小傾向が見失われるほどに小さくはないことになる．

企業の目的関数を次のように定式化する．

$$J_x(\tau)=E\left[\int_0^\tau e^{-rs}pX(s)ds+e^{-r\tau}(\theta x(\tau)+S)\,|\,X(0)=x\right] \tag{3}$$

ただし、退出時刻に関しては確率 1 で $0 \leq \tau < \infty$ が成立するものと仮定しておく．需要が平均して減少しているから、退出時刻は明らかに存在する．

以上から当該企業の退出問題は(1)、(2)の制約のもとで(3)式を最大にすべく退出時刻 τ を決定することになる．

この問題は、既に序で述べた様に最適停止問題と呼ばれるものである．変分不等式によってこの解を見つけることができる．Friedman (1976) によると、次の(4)(5)を満たす解 $u(x)$ が一意的に存在する．

$$Au(x)+ru(x)=px\ ,\quad u(x) \geq \theta x+S \quad for\ x \in C \tag{4}$$

$$Au(x)+ru(x)\geq px\ ,\quad u(x) = \theta x+S \quad for\ x \notin C \tag{5}$$

ただし、

$$A=-\frac{1}{2}(\sigma x)^2\frac{d^2}{dx^2}-\alpha x\frac{d}{dx},$$

$$C=\{x\,;u(x)>\theta x+S\}$$

である．しかもこのとき $u(x)=\sup_{\tau} J(\tau)$ であることが証明されており、最適停止時間すなわちこの場合最適退出タイミングは $\tau^{*}=\inf\{t\,;x(t)\notin C\}$ で表される．

集合Cは§-1の議論から、企業が退出を見送るべき需要水準の集合で、継続して市場に留まるべき需要の集合つまり継続領域である．需要 x の連続性から、観測される需要量 x が最初にこの集合 C から離脱するとき、つまり $u(x)=\theta x+S$ なる x を企業が観測したときに産業から退出すべきであるといえる．このことは§-1の言葉で言うならば、$U=B$ ということになる．このことの経済学的な意味は後に述べるとして、数学的に(4)および(5)の解を求めてみよう．

まず、$\xi\in\partial C$(つまり退出の閾値）と定義して、上の微分方程式を、序の§-2で既に紹介した二つの境界条件 value-matching 条件（$u(\xi)=\theta\xi+S$）、および smooth-passing 条件（$u'(\xi)=\theta$）を用いて解く．というのも(4)と(5)によると、この企業が市場に留まってときには、当該企業の期待企業価値 $u(x)$ は微分方程式(4)に従わければならない．そして退出の閾値を観測したときには $u(x)=\theta x+S$ となっていなければならないことが(5)からわかるから、結局、value-matching 条件を一つの境界条件とし、連続な解をえるために smooth-passing 条件をもう一つの境界条件とするのである．このようにして(4)および(5)を解くと次のような解をえる．

$$u(x)=$$

$$\frac{1}{\lambda-\gamma}\left[\left\{\left((1-\gamma)\theta-\frac{1-\gamma}{r-\alpha}p\right)\xi^{1-\lambda}-\gamma S\xi^{-\lambda}\right\}x^{\lambda}\right. \tag{6}$$
$$\left.+\left\{\left((\lambda-1)\theta-\frac{\lambda-1}{r-\alpha}p\right)\xi^{1-\gamma}+\lambda S\xi^{-\gamma}\right\}x^{\gamma}\right]$$
$$+\frac{p}{r-\alpha}x.$$

ただし、

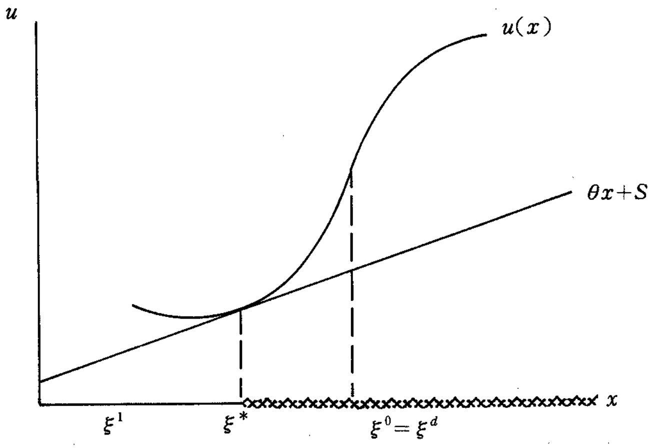
$$\lambda=\frac{-\left(\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1\right)-\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{2\sigma^2}-1\right)^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}$$

$$\gamma=\frac{-\left(\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1\right)+\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1\right)^2+\frac{8r}{\sigma^2}}}{2}$$

とする.

さて、(6)式は最適な退出時刻でのスクラップバリューを既に織り込んだ企業価値である. この関数から退出時刻を求めなければならない. ところで(6)式は需要 x の関数であると同時に退出の閾値 ξ の関数でもある. したがって、最適退出時刻を求めるには別に新たなルール、つまり退出の閾値を決定するルールを導入しなければならない.

その決定は以下で議論することとしてひとまず置き、ここでは、仮にこの閾値が何らかのルールで決定されたものと考える. そこで、その値を ξ^* として、(6)式のイメージを図示したものが図 Ⅲ- 3.1 である. 図 Ⅲ- 3.1 においては、$u(x)\geq\theta x+S=B$ なる関係が満たされており、§-1 で述べたように合理的に退出タイミングが決定されている場合を描いたものと言える.



図Ⅲ－3.1　退出決定のメカニズム

図 Ⅲ- 3.1 の ξ^* より大きい需要量、例えば ξ^0 の値で退出したときの企業の期待割引現在価値 $u(x)$ は、ξ^* でそのようにしたときのものよりも大きい．このことは、利潤は平均して減少しているから、ξ^0 で退出せずに ξ^* まで退出をのばした間にいくばくかの正の利潤を、市場に滞留することで得られるということを意味している．つまり図 Ⅲ- 3.1 のグラフの傾きが左下がりである間は退出せずに市場に残り需要あるいは利潤の変化を観測すべきであるということが言える．これは継続領域の定義でもある．そうして、これまでの議論からわかるように、$x=\xi^*$ のときに value-matching 条件及び smooth-passing 条件が満たされ、企業はこのとき退出すればよいことになる．

一方、図 Ⅲ- 3.1 によると ξ^* より小さい値のときには $u(x)$ のグラフは企業のスクラップバリュー方程式 $\theta x(\tau)+S$ よりも上に位置するように描かれている．これは次のように説明できる．まず、ξ^* を最適退出の閾値とする．この点

で $u(x)$ とスクラップバリュー方程式とが交わり、その後 $u(x)$ の値がスクラップバリューの値よりも小さくなったと仮定しよう．この場合にはグラフIII-3.1とは異なり、$u(x)$ は左下がりとなるから、ξ^* よりも小さい値を観測するまで市場に残ってもこの企業は市場から収益をあげることができる．一方、$x=\xi^*$ の極く近傍を考えれば、この場合にはスクラップバリュー方程式のグラフの傾きよりも $u(x)$ のグラフの傾きの方が大きいことになる．$u(x)$ のグラフの傾きは市場に留まって得られる限界的な利潤であるから、この場合には市場に留まることの方が、退出して企業のスクラップバリューを得ることよりも有利になる．以上をまとめると、このケースでは、企業にとっては市場に残ることはそれ自身が魅力的なうえに、市場に留まることの方が、退出して企業のスクラップバリューを得ることよりもさらに魅力的なこととなる．ところが、このことは ξ^* が最適な退出の閾値であることに矛盾する．したがって、もし最適に退出時刻をこの企業が決定していたとすれば、それは図 III-3.1のように ξ^* より小さい値の領域で企業の期待価値 $u(x)$ のグラフは企業のスクラップバリュー方程式 $\theta x(\tau)+S$ よりも下に位置することはない．よって ξ^* において企業の期待価値とは企業スクラップバリュー直線 $\theta x(\tau)+S$ とは、図2のようにお互いに接しあう関係でなければならないことになる．これが value-matching 条件および smooth passing 条件の意味するところである[1]．

Tobin の q のアナラジーによる投資行動としての退出に関してふれた序§-3で述べたように、退出という投資行動は $u(x) \leq \theta x+S$ なる需要の集合の中で、特に value-matching 条件が成立する $u(x)=\theta x(\tau)+S$ のときに行なうべきであることがわかる．またIIIの§-1で述べたように $u(x) < \theta x+S\equiv B$ なるのは合理的な退出時刻の決定がなされていないということもわかったことになる．

---

(1) Krugman (1989) にも、ほとんど異なるモデルに関して smooth passing 条件に関する詳しい説明がある．

さて、次に棚あげにしておいた退出タイミングの決定ルールを仮定して具体的に閾値を求めてみよう．ここでは赤壁（1988）や赤壁・荒木（1990）と同じ方法をとることにする．それが次の(7)式[2]である．

$$(7)\quad u_{xx}|_{x=\xi} = -\xi u_{xxx}|_{x=\xi}.$$

これを理解するために、次のような二つの集合をを定義する．

$$(8)\quad \begin{cases} \xi^0 = \left\{ x \mid \left. \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right|_{x=\xi} = 0 \right\} \\ \xi^1 = \left\{ x \mid \left. \dfrac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} \right|_{x=\xi} = 0 \right\} \end{cases}.$$

これらを実際に計算すると一意的な値に退化する．すなわち、

$$(9)\quad \xi^0 = \xi^d = \frac{rS}{p-\theta(r-\alpha)},$$

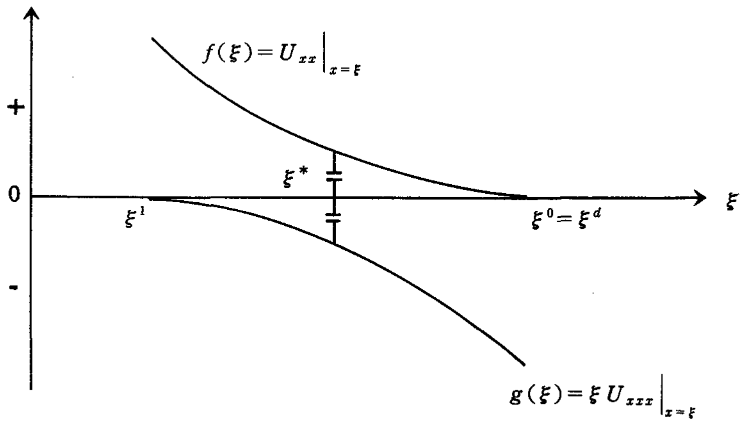
$$(10)\quad \xi^1 = \xi^0 \cdot \frac{2\sigma^2+2\alpha}{\sigma^2+2\alpha}$$

である．

(9)式で ξ^d は確実性下の最適退出の閾値である．仮定１から $\xi^1 \leq \xi^0$ なる関係がわかる．そこで、(7)式を実際に計算し、$\xi^1 \leq \xi \leq \xi^0$ に関してそのグラフを図示したものが図 Ⅲ - 3.2 である．この図を用いて(7)式の意味を考えてみよう．

---

(2)　この条件はより高次の最適性を保証するものであるが、国際金融論でよく議論されるバンドコントロールモデルに関して、Dumas（1991）は super contact 条件なるものを議論している．かの条件は value function の二階微分をゼロとおくもので、序で少し述べた Instantenuous contorol の最適性の条件である．モデルは本稿のものより単純なものであるが、比較するのは面白い．



図Ⅲ－3.2 最適タイミングの決定ルール

図中の関数 $f(\xi)$ は企業価値 $u(x)$ の需要量に関する加速度である．図 Ⅲ - 3.1 によると当該区間でこの値は正である．つまり減少する企業価値のスピードを抑制する一種の力として作用している．

一方、関数 $g(\xi)$ はこの加速度に内在するより高次の力であり当該区間について負の値をとる．つまりこの力は企業価値の減少をより加速する力であるといえる．図 Ⅲ - 3.1 からわかるように退出の閾値は企業価値曲線 $u(x)$ が、スクラップバリュー直線 $\theta x+S$ にスムースに着地する点で決まるから、相反する二つの力 $f(\xi)$ と $g(\xi)$ とがちょうどバランスする点に、退出の閾値を決めるのが極めて自然であるといえる．これが(7)式が意味するところである．

そこで(6)および(7)から最適退出時間に対応する需要量 ξ^* を求めると次のようになる．

(11) $\xi^* = \xi^0 \cdot \dfrac{2\alpha+\sigma^2}{2\alpha}.$

よって、仮定1より次の関係をえる.

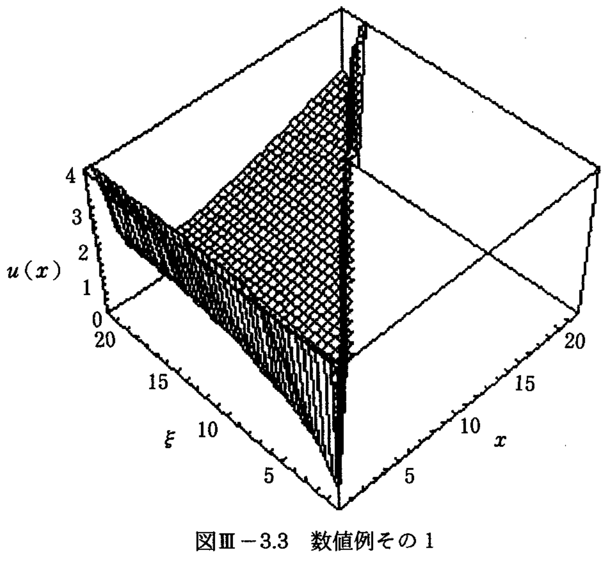
(12) $\xi^* < \xi^d.$

平均して需要が減少してゆくから、(12)の不等式から不確実性が存在するほうが明かに最適な退出時刻は平均して遅いことがわかる.

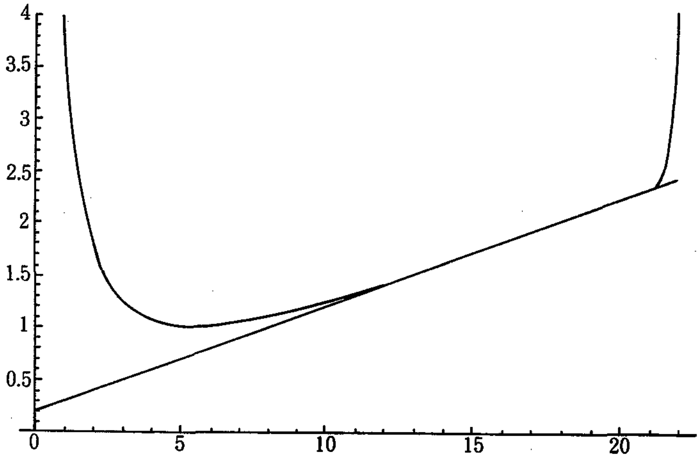
ちなみに(11)式において $\sigma=0$ とおいてみると、$\xi^*=\xi^d$ となるから、退出決定のルール(7)は正しいといえる. また、$\partial\xi^*/\partial\sigma > 0$ であるから、新たに次のような指標を定義すれば、

(13) $d(\sigma) \equiv \xi^d - \xi^*$

によって退出タイミングの遅延によるリスクの大きさを測ることができる. こ



図Ⅲ－3.3　数値例その1



図Ⅲ－3.4 数値例その2

の場合 $d(\sigma) > 0$ であるからもちろんリスクが存在するといえる.

数値例

具体的に $r=0.1$, $\alpha=-0.08$, $\sigma=0.03$, $p=0.019$, $\theta=0.1$, $S=0.2$ を代入してみよう. このとき特に注意を要することは、企業価値である $u(x)$ は正の値を取らなければ意味がないということである. このためには(6)式からわかるように、パラメータ S があまり大きな値を取ってはいけないということである. ここで提示した例はこの条件を満たしている. そこで、(6)式を需要量 x と退出の閾値 ξ との関数とみなして、三次元にプロットしたものがⅢ - 3.3 である. この状態はまだ退出のルールが特定化されていないので、図中のの任意の ξ が退出の閾値の候補となる.

そこで(7)式によって最適退出の閾値ξ^*を特定化すると、$\xi^*=19.8875$となる．この値でξを固定し、スクラップバリュー直線も合わせて表示したものがⅢ - 3.4である．この図によると企業価値曲線とスクラップバリュー直線とがちょうど$\xi^*=19.8875$で接しており、この点が退出の閾値となる．また、$\xi^d=20$であり、したがって退出遅延によるリスクの大きさは$d(\sigma)=0.1125$と測定される．

§-4　反射壁を伴う確率モデル

§-3のモデルにおいては確率変数である需要水準は確率1で正の値をとるが、その一方でいくらでも大きい値をとる可能性も存在した．この節では企業に技術的な制約による、既知で有限の需要水準の上限$x^* > 0$が存在することを仮定して、同様の退出時刻の決定を議論する．

§-3の確率微分方程式（3-1）は事実上$X(t)=0$を吸収壁としてもっている．つまりいったん$X(t)=0$に需要水準が達したならば、それ以降需要はこの状態を脱することができなくなる．この吸収壁は確率過程に制約が課せられたものの代表的なものである．もとっも、本論のモデルはこの制約は有効ではないのだが．本節では別の制約である反射壁を考慮する．一定の需要水準x^*に反射壁が存在するものと考えることにしよう．以下の議論は赤壁・荒木（1990）を本節の議論に一致するようにモデルを若干変更したものである．

反射壁を考えることによる前節の議論の修正点は、需要の変化に関する推移確率に、反射された場合の同量の需要の変化に対応する推移確率を新たに考慮する必要があるという点である[(1)]．その他は基本的に同様の方法を踏襲すればいい．

需要量$X(t)$は反射壁x^*が存在することによって次のように書き換えられる．

---

(1)　Karlin and Taylor（1975）を参照のこと．

(1)　$X(t)=x^*-|\hat{X}(t)-x^*|$.

ここで、$\hat{X}(t)$ は反射壁 x^* に到達するまでの時刻 t での需要水準で、これまで同様の拡散確率過程にしたがうものとする．すなわち、

(2)　$d\hat{X}=\alpha\hat{X}dt+\sigma\hat{X}dW$

である．一方、企業の目的関数は、

(3)　$J_x(\tau)=E\left[\int_0^\tau e^{-rs}pX(s)ds+e^{-r\tau}(\theta x(\tau)+S)\mid X(0)=x\right]$.

であり、また、

(4)　$u(x)=\sup_\tau J_x(\tau)$

と定義しておく．したがって、企業の行動は(1)、(2)の制約の下で期待現在価値(3)を最大にすべく退出時刻を決定することとなる．

一方、この企業が無限期間当該市場に留まったと仮定したとき、この企業は次の期待割引価値をこの市場からえることになる．すなわち、

(5)　$J_\infty(x)=E\left[\int_0^\infty e^{-rs}pX(s)ds\mid X(0)=x\right]$

である．Dynkin (1965) によると、マルコフ過程 $\{X(t)\}$ 上で、この期待価値は次の微分方程式を満足することが示されている．

(6)　$rJ_\infty-\alpha x\dfrac{dJ_\infty}{dx}-\dfrac{\sigma^2}{2}x^2\dfrac{d^2J_\infty}{dx^2}=px$.

ここで$x=e^y$と変数変換を行ない、伊藤の微分則を適応すれば(6)式は次のように書き直すことができる.

$$(7)\quad rJ_\infty-\left(\alpha-\frac{\sigma_2}{2}\right)\frac{dJ_\infty}{dy}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2J_\infty}{dy^2}=pe^y.$$

仮定された反射壁x^*を考慮すれば、(7)式は次のように解ける.

$$(8)\quad J_\infty(x)=p\left\{\frac{4(x^*)^{1-\nu}\cdot x^\nu}{\sigma^2(\nu-\lambda)(1+\nu)(1-\nu)}-\frac{2x}{\sigma^2(1-\nu)(1-\lambda)}\right\}.$$

ただし、

$$\nu=\frac{\frac{\sigma^2}{2}-\alpha+\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\right)^2+2\sigma^2r}}{2},$$

$$\lambda=\frac{\frac{\sigma^2}{2}-\alpha-\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\right)^2+2\sigma^2r}}{\sigma^2}$$

である. さらにDynkinによると、$J_\infty(x)$はマルコフ停止時間τに対して、

$$(9)\quad E\left[\int_0^\tau e^{-rs}pX\,ds\mid X(0)=x\right]=J_\infty(x)-E\left[e^{-r\tau}J_\infty(X(\tau))\mid X(0)=x\right]$$

が成立することが示されている.

さて、ここで関数$h(t,x)$を次のように定義する.

$$(10)\quad h(t,\ x)=[u(x)-J_\infty(x)]e^{-rt}.$$

したがって、これまでの議論から、

$$(11)\quad h(t,\ x)=e^{-rt}\sup_{\tau}\left[\{\theta X(\tau)+S-J_{\infty}(X_{\tau})\}e^{-r\tau}\mid X(0)=x\right]$$

と書くことができる．そこで市場に留まるべき需要と時間の組の集合である継続領域を

$$(12)\quad C\equiv\{(t,\ x)\mid h(t,\ x)>[\theta x+S-J_{\infty}(x)]e^{-rt}\}$$

と定義し、さらに境界集合を

$$(13)\quad \partial C\equiv\{(t,\ x)\mid h(t,\ x)=[\theta x+S-J_{\infty}(x)]e^{-rt}\}$$

とすれば、これらは典型的な停止問題となり、関数 $h(t,\ x)$ は次の微分方程式の解となる．

$$(14)\quad h_t+\nu x h_x+\frac{\sigma^2}{2}x^2 h_{xx}=0 \qquad (t,\ x)\in C,$$

$$(15)\quad h_x=\{\theta-J_{\infty}(x)\}e^{-rt} \qquad (t,\ x)\in\partial C.$$

そこで退出の閾値を $(t,\ \xi(t))\in\partial C$ として、この方程式を解けば次式を得る．

$$(16)\quad h(t,\ x,\ \xi)=\frac{e^{-rt}}{\nu-\lambda}\left[\{(1-\lambda)\Gamma\xi-\lambda S\}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\nu}+\{(\nu-1)\Gamma\xi+\nu S\}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\lambda}\right]-\Sigma x^{\nu}e^{-rt}$$

ただし、

$$\Gamma=\theta+\frac{p}{\frac{\sigma^2}{2}(1-\nu)(1-\lambda)},$$

$$\Sigma=\frac{2p(x^*)^{1-\nu}}{\frac{\sigma^2}{2}(\nu-\lambda)(1-\nu)(1+\nu)}$$

である.

(16)式は撤退タイミング決定のルールを特定化していないから、最適な退出時刻はわからない. そこで前節と同様なルールをこの企業は採用するとすれば、退出の最適な閾値 ξ^{**} をえる.

(17) $$\xi^{**}=\xi^d\cdot\frac{2\sigma^2-2\alpha}{3\sigma^2-2\alpha}.$$

ただし、ξ^d は確実性下の退出の閾値である. $X(0)=x<x^*$ なる関係が満たされているかぎり、ここで考察している反射壁を伴う問題に対応する確実性下の解と、反射壁を伴わない前節の問題に対応する確実性下の解は一致する. そのように仮定すれば、(17)より、

(18) $$\xi^{**}<\xi^d.$$

となり前節同様に不確実性は退出を平均して遅らせる効果をもっていることがわかる.

§-5　三つのタイミングの関係

以上で確実性下の退出の最適な閾値 ξ^d、制約されていない拡散確率過程での閾値 ξ^*、そして反射壁をもった過程の下での退出の閾値 ξ^{**}、合計三つの閾値を具体的にえたことになる. これらを比較すると、

(1) $\xi^{*} < \xi^{**} < \xi^{d}$

なる関係が存在することがわかる．

反射壁が存在しないとき不確実性が退出を遅らせる効果については既に述べたところである．一方、(1)によれば、反射壁が存在する場合には、そうでない場合よりも退出が早く行なわれることになる．反射壁が存在することによって、需要水準の変動可能な幅が一定におさえられることになり、そうでないときよりも期待企業価値が低く評価されてしまうことになる．したがって、市場に留まることによる期待値が小さくなるから、相対的に退出がより魅力的となり、退出すべき時刻が早く訪れることになるものと考えられる．この結果をまとめておく．

仮定１のもとで、平均すれば不確実性は退出タイミングを遅らせる効果をもつ、しかし需要のダイナミックスに反射壁が存在するときには、この不確実性の退出タイミング遅延効果は若干減じられる．したがって、リスクもその分減じられることになる．

§-6 コントロールを伴う最適停止モデル ― コメント ―

この節では§-3の制限のない拡散確率過程の下での退出時刻決定モデルにコントロール変数としての広告活動を導入する．広告によるコントロールが可能なモデルは序あるいはⅡおよびその補論で既に考察されているが、後者との基本的な違いは、最適な広告量によるコントロールと同時に退出時間を決定する点にある．またⅡへの補論で論じた同時決定モデルとの違いは状態変数に関して不確実性が加印されているかどうかという点と、バン・バン制御か連続的

なフィードバック・コントロールによるかという点にある．また序のモデルとのちがいは広告の実施の仕方がインパルス・コントロールによるか、連続的なフィードバック・コントロールによるかという点にある．

IIと同様広告量を$A(t) \geq 0$で表わす．広告による需要創出効果を考慮して、需要は次の確率微分方程式にしたがうものと仮定する．

$$(1) \quad dX=(\alpha X+\beta A)dt+\sigma X dW.$$

ただし、

$$(2) \quad \alpha < 0,\ \beta > 0,\ \sigma > 0,\ \sigma^2 - r + 2\alpha < 0$$

と仮定する．(2)式の最後の関係は需要に加わるノイズの大きさがあまり大きくならないことを保証するものである．

さて、ここでは計画期間の上限を$T_0 > 0$と仮定する．IIと同様に、広告を行なうことによる費用を単純な二次関数と仮定し、経常的な生産販売活動による利潤も需要の二次関数と仮定すれば、このとき企業の目的関数は、

$$(3) \quad J_x(\tau)=E\left[\int_0^{T_0 \wedge \tau} e^{-rs}(pX(s)^2-A(s)^2)ds \right.$$
$$\left. +\chi_{\tau < T_0} e^{-r\tau}(\theta x(\tau)+S) \mid X(0)=x \right]$$

ただし、

$$\chi_{\tau \leq T_0}=\begin{cases} 1 \cdots & \tau \leq T_0 \\ 0 \cdots & \tau > T_0 \end{cases},\ S \neq 0,\ \theta > 0$$

である．ここではトリヴィアルでないケース、つまり$0 \leq \tau \leq T_0$の場合を特に

考えることにする. さて、企業は(1)の下で目的関数(3)を最大化すべく広告量と退出時刻を決定しなければならない. Ⅱへの補論で既に述べたように、不確実性下の制御モデルは必然的にクローズド・ループ制御になる. つまり、広告を行なってそれによって獲得できる需要量を観測しながら、また新たに実行すべき広告量と同時に退出すべきか否かを決定していかなければならない. そこでまず広告によるコントロールに関する最大化ハミルトニアン $H^*(x, t, \mu)$ を次のように定義する.

(4) $H^*(x, t, \mu) \equiv \sup_A \{px^2 - A^2 + \mu(\alpha x + \beta A)\}$.

よって、(4)を満たすコントロールは、

(5) $A(t, \tau) = \dfrac{\beta}{2}\mu$

となる.

想定している市場は継続的に縮小している市場であるから、(5)にしたがう様な $A(t) \geq 0$ なる広告活動を市場に対して施すことによっても、市場の縮小は食い止められないものと考えることにする. そこで次のような最適な制御量が存在するものと仮定し、以下このような経路に注目する.

(6) $\alpha X + \beta A(t, \tau) \leq 0$.

(5)式を(4)式に代入することによって、次式をえる.

(7) $H^*(x, t, \mu) = px^2 + \mu\alpha x + \dfrac{\beta^2}{4}\mu^2$.

さて、Friedman (1976) によると次の関係を満たす関数 $u(t, x)$ が存在することがわかっている.

(8) $$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu+H^*\left(x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ u \geq \theta x+s$$

$$for(t,\ x)\in C$$

(9) $$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu+H^*\left(x,\ t,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\geq 0,\ u=\theta x+S$$

$$for\ (t,\ x)\notin C$$

ただし、

$$Lu=\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ru\ ,$$

$$C=\{(t,\ x);\ u(t,\ x)>\theta x+S\}$$

であるとする．すなわち集合Cは市場に留まるべき時間と需要量の組で、これまでの用語で言えば継続領域を表わしていることになる．またこのとき最大化ハミルトニアンの随伴変数は、

(10) $$\mu=\frac{\partial u}{\partial x}$$

となる．これらの関係が満たされ、しかも停止時刻つまり退出時刻として継続領域Cをはじめて離脱する時刻を選べば、さらに次の方程式が成立することがわかっている．

(11) $$u(t,\ x)=\underset{A,\tau}{Max}\,J_x(\tau)\ .$$

実際に微分方程式を解くと企業価値は(12)式のようになる．

(12) $$u=\left[1-\frac{2\sqrt{a^2-4p\beta^2}}{(e^{(a+2\beta^2Y)(t-T_0)}-1)a+(e^{(a+2\beta^2Y)(t-T_0)}+1)\sqrt{a^2-4p\beta^2}}\right]Yx^2$$

ただし、

$$0 \leq t \leq T_0,$$

$$a = \sigma^2 - r + 2\alpha,$$

$$Y = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4p\beta^2}}{2\beta^2}$$

を表わすものとする.

ところで⑿は非負の値を常にとらなければ意味がないが、実際に⑿式の［ ］を計算すれば、その値は計画時間をつうじて正で、しかも1よりも小さいことがわかる. したがって、⑸、⑽および⑿より最適な広告量は、$0 \leq \tau \leq T_0$ に対して、

$$(13) \quad A^* = \left[1 - \frac{2\sqrt{a^2 - 4p\beta^2}}{(e^{(a+2\beta^2 Y)(t-T_0)} - 1)a + (e^{(a+2\beta^2 Y)(t-T_0)} + 1)\sqrt{a^2 - 4p\beta^2}}\right] \beta Y x$$

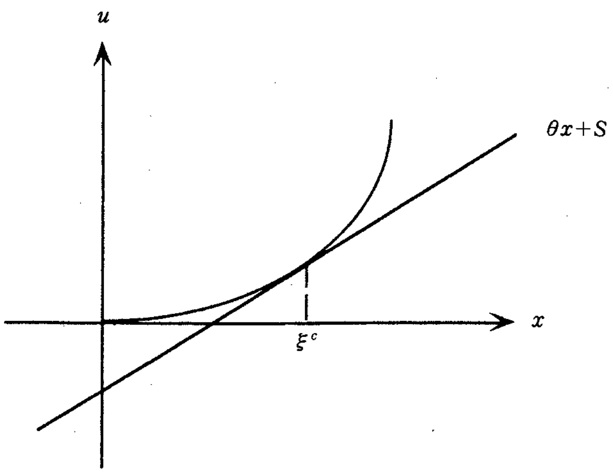
と表わせる. これはⅡでえられたものと同様な線形フィードバック制御量である.

さて、このように市場に対して広告を行ないながらも、⑹式の仮定から需要は平均してその水準が減少してゆくことになる. そこで、やがて訪れる継続領域を最初に離脱する時刻を τ、対応する需要量を ξ^c、すなわち $(\tau, \xi^c) \in \partial C$ と定義する. そこで value-matching 条件および smooth-passing から退出の閾値に関して次の関係をえる.

$$(14) \quad \xi^c = -\frac{2S}{\theta}.$$

⒁において $S < 0$ と考えれば経済的学的な意味が存在する. したがって、はじめて ξ^c を始めて観測した時点 $t = \tau$ で企業は市場を退出すればいいことになる

（図 Ⅲ -6.1 ）．ところで(14)式の右辺はスクラップバリューに関するパラメータだけで構成されていて、分散パラメータを含んでいない．したがって、§-3 のようなコントロールを伴わないモデルと同様に考えれば、(14)式からは退出の閾値はいかなる不確実性の影響もうけない、すなわち、平均すれば退出時刻は不確実性によって変化しないということになる．ところが、この節のモデルにおいてはそうではない．たとえ退出の閾値(14)が需要の瞬時的分散のパラメータに依存していなくても、最適制御(13)による不確実性の影響が存在する可能性がある．残念ながらこれ以上の分析は別の機会に譲ることとしここでは影響が存在する可能性だけを示すにとどめおく．



図Ⅲ－6.1　$t=\tau$ のときに ξ^c を観測し退出する。

Ⅳ　複占市場からの退出時刻の決定

§-1　序

複占企業退出ゲームを定式化する．近年、衰退産業からの企業の退出行動は、退出時間を戦略変数とするゲーム論的なアプローチで議論されることが多い．最近の文献を情報構造の観点からまとめたものが表Ⅳ－1である．自然の状態（需要の状態）に関して不確実性が存在するか否か、ライバル企業のタイプ（費用構造）に関して不確実性が存在するか否かの合計四種類に対して、現在のところ三とおりのモデルが考案されている．いずれも、企業の規模や費用構造のちがいが退出時間にいかに影響するかについての議論がなされている[1]．このうち典型的なものに関しては次節以下で詳しくみることとして、ここでこれらに関して若干の展望を行なっておく．

表1にあげてある既存のモデルは基本的にすべて略奪戦争ゲーム（War of attrition game）という種類のものである[2]．これらの中で最も典型的なものはGhemawat and Nalebuff (1985) である．彼らは、市場に二つの企業が存在できないような状況からゲームを出発させ、結果的に規模の小さい企業よりも大きい企業のほうが先に退出するという一意的なサブゲームパーフェクト均衡の存在を証明している．Ghemawat and Nalebuff (1990) は基本的に同様なモデル設定のうえで連続的に生産能力を調整する企業を想定している．一意的な近視眼的な（myopic）サブゲームパーフェクト均衡の存在を証明している．均衡においては、まず規模の一番大きな企業が能力を低下させてゆき、当該企業規模の次に小さい規模の企業のそれになるまで能力調整が続く．このことが

(1)　退出ゲームモデルの既存文献に関する簡単なサーベイはGhemawat and Nalebuff (1990) を参照のこと．

	需要不確実	確実
完備情報	Fine and Li (1989) Huang and Li (1990)	Ghemawat and Nalebuff (1985) Reynolds (1988) Whinston (1988) Ghemawat and Nalebuff (1990) Londregan (1990)
不完備情報		Fudenberg and Tirole (1986)

表IV－1　既存文献の情報構造

さらに規模の小さい企業にまで進行し、最終的には最も規模の小さい企業にまでつづく．

一方、Reynolds (1988) は、複数のプラントを持つ場合を考察している．等しいサイズで生産能力を削減していくとき．規模の大きい企業の方が先に退出する．一方、プラントの数が等しいときには、コストが大きい企業の方が早く退出するという均衡の存在を証明している．§-4～5で考察する不確実性下の退出ゲームはこの後者の結論を需要不確実性下で補強するものとなる．Whinston (1988) も同じく複数のプラントを持つ場合を対象にしている．彼はプラントサイズに等しいサイズで生産能力を調整できる企業を考え、それらによる寡占的競争を考察している．それぞれの企業が異なったプラントサイズで能力調整を行なうと退出の順序に関して何も言えないことを明らかにしている．

Londregan (1990) は、製品ライフサイクル全般に関して退出の問題を考察している．また、退出後の再参入も分析している．再参入費用が正なら、市場の衰退局面においてはサブゲームパーフェクト均衡が存在し、大きな企業が先

(2) Fudenberg and Tirole (1992) 参照.

に退出するという結論をえている.

Fudenberg and Tirole (1986) はライバル企業の費用に関して、不確実な情報しかもっていない企業を想定し、いわゆる不完備情報ゲームを考察している. 複占の場合の逐次均衡の存在を議論している. えられる均衡においては、より効率の悪い企業の方が早く退出する.

需要あるいは収益に関して不確実なゲームのうち、Huang and Li (1990) は非マルコフ的な需要不確実性下の連続時間退出ゲームの均衡の存在について考察している. 一方、Fine and Li (1989) は、市場が確率的に衰退すると仮定し、需要の確率分布が以前よりも確率的に悪化するという意味で縮小する市場を想定している. その結果、一意的でないサブゲームパーフェクト均衡の可能性を示した. それまでのほとんどの確定的なゲームが均衡の一意性を導いていることに対して一石を投じるものである.

最後に、アメリカの化学工業の撤退現象に関する実証研究を行なったのが Lieberman (1990) である. 企業規模は果たして撤退戦略の指標足りうるのかということ. さらに、規模の経済は撤退に対してどのように影響しているのだろうかといったことに関して検証を行なった. その結果は、サイズの効果と規模の経済の効果とは、ほいぼバランスしているようであり、Ghemawat and Nalebuff (1985) が言うようなサイズの大きな企業の方が先に退出するということは有意ではない. しかし、Ghemawat and Nalebuff (1990) が証明した企業サイズの収縮的収束傾向は見られるという結果をえている. 日本の衰退産業に関するこのような実証研究は存在しない. 日本は構造不況業種に関する協調的な設備縮小を行なわさせる政策がとられており、必ずしもアメリカのような競争的な環境にないことは事実である. したがって、日本の衰退産業に関して非協力ゲームを適用するには無理があるかもしれない. いずれにしても日本における実証研究は今後の課題である.

さて、§-4～5では、特に費用構造と退出時間の関係に着目し、費用構造については完備情報で需要について不確実性が存在する場合のクールノー型の複占退出ゲームを考える．Fine & Li (1989)、Huang & Li (1990) も不確実性下の退出ゲームを考察しているが、ここでは彼らとは異なり、これまでどおり需要が拡散確率過程に従う場合の確率ゲームを考えることにする．このように仮定することで不確実性の程度について議論することが容易になるという利点があることは既にみたところである．この点を生かして、従来の費用構造と退出時間の関係に加えて、不確実性と退出時間の関係についても明らかにする．

ところで、たとえ退出することを競う企業であっても、市場にライバル企業が存在するかぎり企業は数量や価格、あるいは広告宣伝などを戦略とする何らかのビジネスゲームを行なうものである．本稿のクールノー型のゲームで言えば、長期的な生産量に関するゲームがそれである．しかしこれを微分ゲームの中でそのまま定式化すれば、ちょうどⅢで独占企業の場合に関して定式化したように、DP方程式とハミルトニアンの混合方程式に直面しなければならない[3]．そうなればゲームの解の存在はともかく、それを具体的に捜し出すことにはかなりの困難を伴うことが容易に想像できる．そこで、この困難を避け、現実の第一次接近として、生産量に関する瞬時的な均衡を連ね、退出時間に関して通時的なゲームを行なうものとする．つまり両企業ともに生産量に関しては、極めて近視眼的な戦略をもっているものと仮定して議論を行なうことにする[4]．このように考えることによって、実質的にゲームは退出時刻つまり最適停止時刻に関するゲームとして定式化できることになる．

停止時間が戦略変数となる最適停止ゲームは複数の文献が参考になるが[5]、

(3) Bensoussan and Friedman (1974), Friedman (1976) を参照．ただしこれらはゼロ和ゲームについての分析である．

(4) Ghemawat and Nalebuff (1990) も近視眼戦略を用いている．

(5) Bensoussan and Lions (1982) や Friedman (1976) が参考になる．

経営・経済学で特に有用な非ゼロ和ゲームに関して Bensoussan and Friedman (1977) を参考にした．§-2 で確実性下の略奪戦争ゲームとして、Ghemawat and Nalebuff (1985) をとりあげる．§-3 では、不確実性下の略奪戦争ゲームとして Fine & Li (1989) のモデルを再考してみる．§-4 において拡散確率過程の下での最適停止ゲームを定式化し、§-5 でその解析的な解を明示的に導き、戦略を特定化することでゲームの均衡を評価し、さらに不確実性の効果を検討する．最後の §-6 は若干の数値例を提示する．

§-2 確実性下の略奪戦争ゲーム

Ghemawat and Nalebuff (1985) の退出ゲームは、この種のゲームモデルのなかで最も典型的なモデルである．ふたつの企業が、ライバルより先に退出するか、それとも市場に残るかを決定するゲーム的状況である．市場に留まることを 0 で、退出することを 1 で表わすものとする．単一の財を供給する二つの企業 ($i=1, 2$) が現在市場に存在している．財の価格は p 、市場全体の産出量を q とする．逆需要関数 $p(q, t)$ は時間と産出量との関数で、次の関係を満たすものと仮定する．

$$(1)\quad \frac{\partial p(q,\ t)}{\partial t} < 0\ ,\quad \frac{\partial p(q,\ t)}{\partial q} < 0\ ,\quad \frac{\partial p(q,\ t)q}{\partial q} < 0\ ,$$
$$\lim_{t\to\infty} p(q,\ t)=0\ .$$

$K_i \geq 0$ は第 i 企業の生産能力を表わす．ここで何ら一般性を失うことなく $K_1 > K_2$ を仮定する．つまり生産能力の意味で第 1 企業のほうが規模が大きいと考えるわけである．市場全体の生産関数は、生産能力 1 単位につき 1 単位の財を生産することが可能であるものと仮定する．

さて、$t=0$ の時点で $p(K_1+K_2,\ 0)=c$ が成り立っているものとする．ただし

c は平均費用である．さらに $D_i(t,\ i+j)=0$ が t に第 i 産業と第 j 産業が市場に留まっているとき、第 i 産業が依然として市場に留まろうという意思決定を表わし、$D_i(t,\ i+j)=1$ は t に第 i 産業と第 j 産業が産業に留まっているとき、第 i 産業が市場から撤退しようううという意思決定を表わすものとする．t_1^*，t_2^* を $p(K_i,\ t_i^*)=c$，$i=1,\ 2$ なる時間、つまり第 i 企業が市場需要をまかなうだけ生産したときに、対応する市場価格がちょうど平均費用に等しくなるような時間と定義する．(1)の仮定からこの時間に関して、

(2)　$t_2^* > t_1^*$

が成立する．

さて、z を両企業が市場に残留している最後の時間を表わすものとする．ここで $z < t_i^*$ のときに次のような関数を定義する．ただし、r は割引率とする．

(3)　$C_i(z,\ t_0)=\int_{t_0}^{z}\{p(K_1+K_2,\ t)-c\}K_i e^{-r(t-t_0)}dt,$

(4)　$V_i(z,\ t_0)=\int_{z}^{t_i^*}\{p(K_i,\ t)-c\}K_i e^{-r(t-t_0)}dt.$

z 時点までは両企業とも市場に存在するから、$C_i(z,\ t_0)$ は任意の時間 $t_0 < z$ で評価した、z 時点までの企業 i の非正の利潤を、$V_i(z,\ t_0)$ はライバル企業が退出した後の割引利潤を表わしている．ここでもし i 企業が j 企業よりも長く市場に留まったという状況を想定するならば i 企業の利潤 $P_i(z,\ 0)$ は、

(5)　$P_i(z,\ 0)\equiv V_i(z,\ 0)+C_i(z,\ 0)$

となる．j 企業の利潤 $P_j(z,\ 0)$ は、

(6)　$P_j(z,\ 0)\equiv C_j(z,\ 0)\leq 0$

である．$t=0$ 以降にはただ一つの企業しか正の利潤を稼ぐことができないということから、考えられるナッシュ均衡に対応する純粋戦略は次の二つしかない．それは企業1が0時点で退出し、企業2が t_2^* 時点で退出するか、その逆に企業2が0時点で退出し、企業1が t_1^* 時点で退出するというものである．

命題

存在する一意的な完全均衡は、規模の大きい企業1が時間0で即時撤退し、相対的に規模の小さい企業2が t_2^* に撤退するというものである．

証明は多期間ゲームでよく使われるバックワードな推論によってなされる．証明のスケッチは次のようである．まず、時間 x_A を企業2が $[t_1^*,\ t_2^*]$ で独占的利潤を刈り取るために、$[x_A,\ t_2^*]$ の間よろこんで損失を被る時間とする．形式的には、

(7)　$P_2(t_1^*,\ x_A)=V_2(t_1^*,\ x_A)+C_2(t_1^*,\ x_A)\equiv 0$

となる．企業1は t_1^* までに退出する．というのも独占者として市場に残ろうという楽観的な仮定のもとであっても t_1^* より後では損失を被ってしまうであるからである．したがって、企業2が抱く最も悲観的な予想は企業1は t_1^* まで市場に留まるであろうということになる．この悲観的な信念にもかかわらず、企業2は x_A まで留まり、さらに t_2^* まで留まることを選択する．したがって、もし企業2が x_A まで留まろうとすれば、企業1は企業2が t_2^* まで市場に留まることを阻止するための credible threat を与えることは出来ない．$[x_A,\ t_2^*]$ の間、両企業が市場に留まることは企業1の損失を意味するから、企業1は x_A において即時退出を選択する．すなわち、

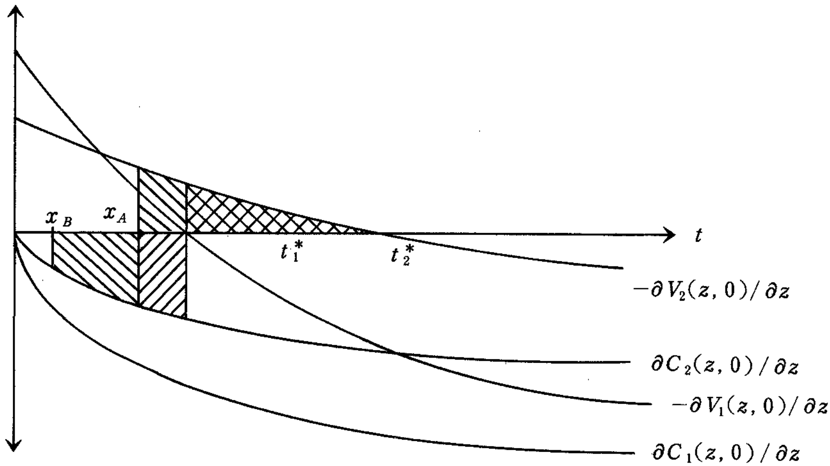
(8)　$D_1(t,\ 1+2)=1\quad \forall\epsilon[x_A,\ \infty]$

である．企業 2 は x_A 以降独占的利潤を保証される．そこで、$[x_A,\ t_2^*]$ の間に得る独占利潤のために、$[x_B,\ x_A]$ の間に企業 2 はよろこんで損失を被るとしよう．つまり、

$$(9)\quad P_2(x_A,\ x_B)=V_2(x_A,\ x_B)+C_2(x_A,\ x_B)\equiv 0$$

である．企業 2 は x_B を越えて，t_2^* まで市場に留まることを最適とするから、企業 1 は x_B までに退出することを最適と考えることになる．

同様にして x_C を定義しよう．ここで、x_A と x_B との間隔を考えれば、この間隔は x_B と x_C との間隔よりも小さくなる．というのもバックワードに進んでいるから進めば進むほど残される独占利潤が大きくなり、埋め合わされるべき複占による時間当たりの損失が小さくなってゆくからである．このようにしてやがて原点にたどり着くこととなる．したがって、



図Ⅳ－2.1　Ghemawat and Nalebuff の退出ゲーム

(10)　$P_2(x_n,\ 0) \geq 0$

なる不等 式が満たされれば、企業2は$[0,\ t_2^*]$の間、市場に残留することになり、企業1は時間0に即時退出することになる．図Ⅳ-2.1を参照．

§-3 不確実性下の略奪戦争ゲーム

需要が不確実な環境下での略奪戦争ゲームはFine and Li (1989) モデルが興味深い．彼らは事実上Ghemawat and Nalebuff (1985) を確率的な離散時間モデルに拡張したことになる．

さて、彼らの定義による衰退市場とは、需要の確率分布が以前よりも確率的に悪化する、つまりより多くの需要を享受しうる確率が時間をへるごとに小さくなる市場を考えている．この条件の下での複占市場における退出ゲームが、多意的なサブゲームパーフェクト均衡の可能性があることを示した点で最も評価できる．

X_tをt期の需要水準とし、その需要水準に見合って$\pi(X_t)$の報酬を当該企業は受け取るものと仮定する．この関数$\pi(X_t)$は需要の増加関数と仮定する．需要水準の時系列$\{X_t; t=1,\ 2, \cdots\}$はマルコフプロセスにしたがうものとする．さらに確率変数X_tは次のような条件付確率測度をもっているものとする．

(1)　$P_t^X(X_t) \equiv P_t\{X_t \mid X_{t-1}=x\}.$

また、任意の$t \geq 0$と$x,\ y > 0$に対して、市場が衰退しているという条件はこの確率測度を用いて次のように表現される．

(2)　$\int_{z \geq y} dP_t^x(z) \geq \int_{z \geq y} dP_{t+1}^x(z).$

つまり需要水準yよりも高い水準を市場が示す確率が時間をおうごとに小さく

なることを表現している．また今期相対的に高い需要水準であれば、そうでないときに比べて来期より高い水準をとる確率は大きいと考えるのが自然であるからこのことも仮定される．すなわち、任意の $t \geq 0$ と $x,\ y > 0$ 、$x \geq x'$ に対して、

$$(3)\quad \int_{z \geq y} dP_{t+1}^{x}(z) \geq \int_{z \geq y} dP_{t+1}^{x'}(z)$$

を仮定する．

複占企業の退出ゲームを考える前に、単独の企業の退出時刻の決定を考えてみよう．この企業は離散的な確率変数である退出時刻 T を、次の目的関数(4)を最大化すべく決定しなければならない．

$$(4)\quad max\, E\left[\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \pi(X_t) \mid X_0\right]$$

ここで $t^* \equiv inf\{t : \pi(X_t) < 0\}$ と定義すると、衰退産業の定義から，$s \geq t^*$ について、$\pi(X_s) < 0$ となる．$0 < t^* < \infty$ と定義すれば次の命題をえる．

命題　（単一企業の場合）

1　（最適停止問題の解）．

問題(4)に対する最適停止時刻は、

$$(5)\quad N \equiv inf\{t \geq 0 : X_t \in B_t\}$$

によって与えられる．ただし

$$B_t \equiv \{x : u_t(x) < 0\},$$

$$u_t(x)=\pi(x)+\delta w_{t+1}(x),$$

$$w_{t+1}(x)=E[u_{t+1}(X_{t+1})^+ | X_t=x],$$

$$t \geq t^* \text{ について } w_t(x)=0$$

である.

2．$t \geq 0$について、

$$w_t(x) \geq w_{t+1}(x),\ u_t(t) \geq u_{t+1}(x)$$

である．また、$y_t \equiv inf\{x : u_t(x) \geq 0\}$とすると、$y_t$はtに関して増加関数で、しかも上で定義した集合$B_t$は

$$B_t=\{x : x < y_t\}$$

と表わすことができ、$B_t \subseteq B_{t+1}$なる性質をもつ.

3　(比較静学).

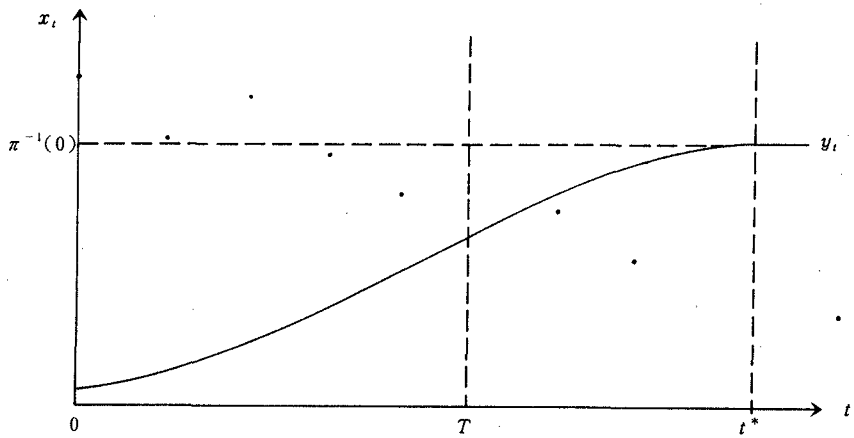
$\pi^1(X) \geq \pi^2(X)$あるいは$\delta^1 \geq \delta^2$とする．このとき$t \geq 0$について

$$w_t^1 \geq w_t^2,\quad u_t^1 \geq u_t^2,\ y_t^1 \leq y_t^2,\quad T^1 \geq T^2$$

が成立する.

この問題は典型的な最適停止問題である[1]．命題の1で定義されている関数$u_t(x)$はもう1期間市場に留まることによってえられるであろう期待報酬を表わしており、したがってこの値が負になるはじめての時刻が退出すべき時点であることがわかる．命題1．2．の主張をグラフ化し、その概形を示したものが

(1)　Shiryayev（1978）を参照.



図IV－3.1　一企業の場合の退出時刻の決定

図IV-3.1 である．図IV-3.1 中の曲線 y_t は退出すべき需要の観測値と市場に留まるべき需要の観測値との境界を表わしている．したがってこの境界を需要の時系列がはじめて上方から下方に越えた点がこの企業が退出すべき時刻であるといえる．

次に、この単独企業の退出決定モデルを利用して複占の場合を考える．まず、$\pi_{ij}(X_t)$ は需要水準が X_t のときに、j 個の企業が市場に存在している場合の第 i 企業の利潤を表わすものとする．もしこの企業が独占企業となってしまったときには市場をすべて支配してしまうから次の不等式が成立すると考えることができるであろう．

(6)　$\pi_{i2}(z) < \pi_{i1}(z)$.

また企業 i のペイオフは次のように表わすことができる．

(7)　$\pi_t^i(X_t,\ T_{-i}) \equiv \pi_{i2}(X_t)\chi_{T_{-i}>t} + \pi_{i1}(X_t)\chi_{T_{-i}\leq t}$.

ただし

$$\chi_{x>y}=\begin{cases}1 & \cdots x>y \\ 0 & \cdots x\le y\end{cases}$$

であり、また T_{-i} は i のライバル企業の退出時刻をそれぞれ表わしているとする.

第 i 企業の戦略は退出時刻 T_i で、ライバル企業の退出時刻を T_{-i} を所与として、企業は需要の歴史 $\{X_s; s\le t\}$ を観測しながら、(7)式を割り引いた割引現在価値を最大にすべく退出時刻を決定しなければならない. さらに、決定された退出時刻の組の中からサブゲーム・パーフェクトな均衡を見つけださなくてはならない.

ここで $T_i^1(t)$ を時間 t に企業 j が市場に存在していることを所与としたときの企業 i の退出時間とし、また $T_i^O(t)$ を時間 t に企業 j が市場に存在していないことを所与としたときの企業 i の退出時間とすると、企業 i の戦略は具体的に次の二つとなる.

もし第 j 企業が市場に存在している場合には　$T_i(t)=T_i^1(t)$.
それ以外の場合　$T_i(t)=T_i^O(t)$.

単一企業の場合と同じような意味をもつ記号を次のように定義する. ただし市場に企業が二つ存在する場合と、一つしか存在しない場合のふたとおりがあるから記号はいささか複雑ではある.

(8)　$u_t^{ij}(x)=\pi_{ij}(x)+\delta_i w_{t+1}^{ij}(x)$

(9)　$w_{t+1}^{ij}(x)=E[u_{t+1}^{ij}(X_{t+1})^+ | X_t=x]$

(10) $T_{ij}(s) \equiv inf\{t \geq s : X_t < y_t^{ij}\}$

(11) $y^{ij} \equiv inf\{z : u_t^{ij}(z) \geq 0\}$

単独企業のケースの命題を利用すれば次のような新たな結果をえる.

命題　(2企業の場合)

$\pi_{1j}(z) > \pi_{2j}(z)$ あるいは $\delta_1 > \delta_2$ であるとき次のことが言える.

$i=1, 2, t \geq 0$ について, $w_{t+1}^{i1} \geq w_{t+1}^{i2}$、$y_t^{i1} \leq y_t^{i2}$、$T_{i1}(t) \geq T_{i2}(t)$.

$j=1, 2, t \geq 0$ について, $w_{t+1}^{1j} \geq w_{t+1}^{2j}$、$y_t^{1j} \leq y_t^{2j}$、$T_{1j}(t) \geq T_{2j}(t)$.

この命題を用いて、複数のサブゲーム・パーフェクト均衡(2)が存在可能となるメカニズムをグラフによって理解することにしよう. 図IV-3.2において需要は例によって離散的にしかもランダムに減少してくる. 図中の領域 R_1 は両方の企業とも正の報酬が期待できる領域である. したがってこの領域に需要水準があるかぎり両方の企業とも退出する必要はない. 領域 R_1 の直下の領域 R_2 は、利潤の割引現在価値の相対的に小さい第2企業がもはや市場には留まれない需要の範囲である. したがって、もしランダムに変化する需要水準が領域 R_1

---

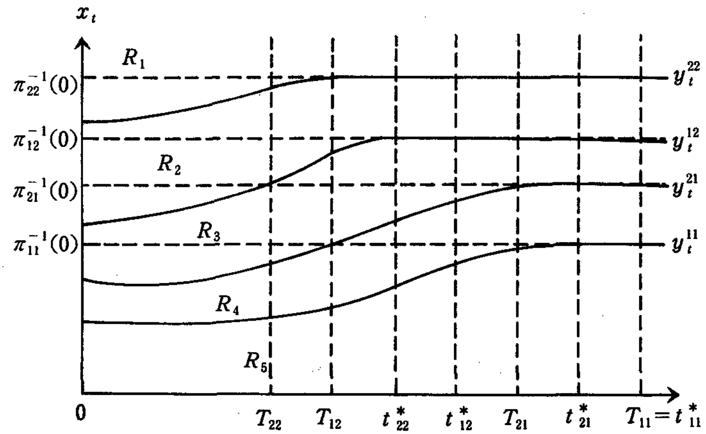
(2) サブゲームパーフェクト均衡とは周知のように、任意のサブゲームに対してナッシュ均衡になるような均衡のことであるが、ここでは次のように定義される.

定義 (サブゲーム・パーフェクト)

任意の時間 $t \geq 0$ および 任意の停止時間 $S(t)$ について,

$$E\left[\sum_{s=t}^{T_i^1-1}\delta_i^s\pi_s^i(X_s, T_{-i}^1)|\mathscr{F}_t\right] \geq E\left[\sum_{s=t}^{S(t)-1}\delta_i^s\pi_s^i(X_s, T_{-i}^1)|\mathscr{F}_t\right], a.S.$$

がなり立つとき、(T_1, T_2) はサブゲーム・パーフェクト均衡である. ただし t 時点で i 企業しか市場に存在していないときには $T_i^0(t)$ が最適でなければならない. また $\mathscr{F}_t \equiv \sigma$ (X ; $s \leq t$) で、σ-field を表わしている.



図Ⅳ－3.2　二企業の場合の退出時刻の決定

から続いて領域 R_2 に入ったならば第2企業は、需要量がはじめてこの領域に突入する時刻 T_{22} に退出すべきである．一方領域 R_3 はどうであろうか．この領域は二つの企業が市場に同時に存在すると、両方の企業が損失をこうむってしまう需要水準の範囲である．需要は離散的な確率変数であるから、パラメータの値によっては領域 R_1 から領域 R_2 を経ず、直接この領域 R_3 に落ち込むことが考えられる．このときにはどちらの企業が先に退出するかは無差別であるから．もし純粋戦略の範囲で考えるならばこのケースでは、第1企業が退出して第2企業が市場に留まるという均衡と、第1企業が市場に留まり第2企業が退出するという均衡の二つの均衡が存在する．これはちょうど両性の戦いゲーム (battle of sexes)[3] に対応する状況である．状態変数である需要水準が連続的に変化するならば明かにこのような複数の均衡の存在の可能性はない．

(3)　Rasmusen（1989）参照.

§-4　拡散確率過程上での退出ゲーム

Fine and Li (1989) は需要の確率分布の特性を巧妙に用いながら、離散時間ゲームでの均衡を論じた．それでは連続モデルの場合にはどうであろうか．この疑問に答えるには、Ⅲで分析した単一企業モデルを2企業モデルに拡張した停止ゲームを考察すれば一つの答えをえることができよう．これが本節以降§-6までの目的である．

ゲームのルールを理解するために、連続時間を極く短い期間として考えてみよう．実際にはこの期間が極限まで縮められていることになる．まず、各期首に、確率的に変動する逆需要曲線を両企業ともに正確に観測する．この変動は消費者の選好の変化に起因するものと考えることができる．この情報だけをもとにして企業はクールノーゲームを行なう．次の期以降も両方の企業が依然として同様のゲームを行なうことが共有知識となっているとする．推測的変化を0とすれば、通常のクールノー・ナッシュ均衡生産量が得られる．従って、このようにして得られる均衡経路は、需要曲線の確率的変化に反応した各期毎のクールノー・ナッシュ均衡を連ねたものとなる．このような企業の戦略は近視眼的戦略と呼ばれる．近視眼的戦略を取る企業は、各期の終わりに得られるクールノー利潤をもとに、将来得られるであろう期待企業価値を予想することができる．そこで、次のステップとして、企業は当期末にこの期待企業価値をできるだけ大きくするように退出時間を決定する．従って、事実上退出時間がダイナミックゲームの戦略変数となる．その際、たとえ当期に退出しないとしても、将来の適当な時刻に退出し、その時点で受け取るであろうスクラップバリューも期待企業価値の最大化の中に考慮されていなければならない．

X_i を第 i 企業の供給量として、両企業が直面する市場価格が総供給量の関数であるとして、市場逆需要関数を、

(1)　$P = a(t) - X_i - X_j$

と仮定する．$a(t)$は確率変数で、拡散確率過程

(2)　$da = \alpha a dt + \sigma a dW$

に従うものとする．ただしこの方程式のパラメーターである期待変化率α、不確実性の程度を表すσに関して、Ⅲと同じく次の仮定をおく．

仮定 1

(3)　$-1 < \alpha < 0,$

(4)　$0 < 2\sigma < -\alpha.$

(2)によって需要曲線の切片aは確率 1 で正の値をとる．一方、仮定 1 の(3)から、需要曲線は平均して原点の方向へシフトする、つまり需要が縮小してゆくことになる．ただしそのスピードはそれほど大きくはないが、(4)からわかるように、その速度は確率的攪乱によって需要の縮小傾向が見失われるほどに小さくはないことになる[1].

費用関数を二次関数と仮定すれば、第i企業の利潤関数は

(5)　$\Pi_i(t) = (a(t) - X_i - X_j)X_i - c_i X_i^2$

となる．前述のように近視眼戦略を採用する両企業は、観測される需要曲線のもとで(5)式を最大化すべく生産量を瞬時的に決定し続ける．従って最大化の一階の条件よりクールノー生産量は次のようになる．

(6)　$X_i^* = \dfrac{1+2c_j}{4(1+c_i)(1+c_j)-1}a,\ \ i \neq j.$

(1)　直感的には、検定問題でなじみ深い「5%有意水準」に類似したものである．

パラメータ a の時系列に対応して均衡生産量の列も決まる.

均衡供給量に対応するクールノー均衡利潤を Π_i^* 、さらに市場全体の均衡利潤を $\Pi=\Pi_i^*+\Pi_2^*$ として、若干の計算によって次の関係を得る.

(7) $\Pi=\dfrac{a(t)^2}{A^2}B,$

(8) $A=4(1+c_i)(1+c_j)-1,$

(9) $B=(1+c_i)(1+c_j)^2+(1+c_j)(1+c_i)^2,$

(10) $\Pi_i^*=m_i\Pi,$

(11) $m_i=\dfrac{(1+c_i)(1+2c_j)^2}{B}.$

(10)は各企業のクールノー利潤が、両企業に共通の市場全体の利潤で表現できたことを意味する. そこで伊藤の微分則を用いて、拡散方程式を次のように変換しておく.

(12) $d\Pi=(2\alpha+\sigma^2)\Pi dt+2\sigma\Pi dW.$

(12)に従う利潤 Π も需要曲線の切片 a と同様に確率 1 で正の値を取る.

さて、市場に企業が二つ存在するときに、一方の企業が退出するときの当該企業の評価であるスクラップバリューを、

(13) $\theta_i\Pi(t)+S_i$

のように仮定する. ただし、$\theta\geq 0$, $S>0$. また時刻 t にライバル企業が退出してしまって、当該企業が独占企業となってから、この企業が退出するまでのネットキャッシュフローの期待値（ライバル企業が先に退出してしまった時点

から始まる、単独企業に関する通常の最適停止問題の value function[2] に等しい）を、

(14)　$M_i(\Pi(t)) \in H^2$.

と仮定し、ここで次の仮定2をおく.

仮定2

すべての $\Pi(t)$ について、次の不等式が成立する.

(15)　$\theta_i \Pi + S_i \leq M_i(\Pi)$.

この仮定はライバル企業よりも長く市場に残ることも十分考慮に値する行動であることを保証するものである．この仮定によって、暫時市場に留まり市場需要を観測することに対する誘因が存在することになる.

さて、退出時間を τ_i、割引率は両企業に共通であるとすれば、近視眼的戦略均衡経路上での企業の期待利潤（企業価値）の割引現在価値は、

(16)
$$J_\pi^i(\tau_i,\ \tau_j) = E\left[\int_0^{\tau_i \wedge \tau_j} e^{-rs} m_i \Pi(s) ds + \chi_{\tau_i \leq \tau_j}(\theta_i \Pi(\tau_i) + S_i) e^{-r\tau_i} + \chi_{\tau_i > \tau_j} M_i(\Pi(\tau_j)) e^{-r\tau_j} \,\middle|\, \Pi(0) = \pi\right] \quad (j \neq i)$$

となる．ただし、

$$\chi_{\tau_i \leq \tau_j} = \begin{cases} 1 \cdots & \tau_i \leq \tau_j \\ 0 \cdots & \tau_i > \tau_j \end{cases}$$

(2)　例えば既に議論した本稿のⅢや荒木（1992）を参照.

である.

以上から、共通の拡散過程(12)上で、それぞれの目的関数(16)をできるだけ大きくすべく退出時刻τ_iを決定するゲームとして定式化することができた. 需要の不確実性に加えて、ライバル企業の退出時間に部分的に依存して、当該企業が独占企業となるか複占企業となるかが決まることになる.

ダイナミックゲームの均衡は、前節のようにナッシュ均衡の一種で任意の部分ゲームにおいて完全性を求めるサブゲーム完全均衡を用いる場合が多いが、この均衡を見つけだすのは次の課題として、ここでは退出ゲームの均衡としてナッシュ均衡を考え、次の節において対応する均衡戦略戦略を見つけだすことだけを考えることにする.

定義（ナッシュ均衡）

$\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$が退出ゲームのナッシュ均衡であるとは、任意のτ_1, τ_2について次の不等式が成り立つとき、そしてそのときのみである.

(17)　$J^1_\pi(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) \geq J^1_\pi(\tau_1, \hat{\tau}_2)$, $J^2_\pi(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) \geq J^2_\pi(\hat{\tau}_1, \tau_2)$

しかしながら、拡散過程(12)が時間に関して斉時[3]あること、割引率が両企業に共通であることから、以下で得られるナッシュ均衡は完全均衡であると予想されることを付け加えておく.

---

(3)　(12)式に関して言えば、$2a+\sigma^2$ や 2σ が時間に直接依存しないことを言う. 詳しくは、Karatzas and Shreve（1991）などを参照.

§ - 5　均衡戦略

Bensoussan and Friedman (1977) によると仮定1、仮定2のもとで次のような性質をもつ連続で有界な関数 u_i が存在することがわかっている．

(18)　$u_i \in H^1(R)$.

(19)　$u_i(\pi) \geq \theta_i \pi + S_i$.

(20)　もし $j \neq i$、ある π について $u_j = \theta_j \pi + S_j$ なら、

$u_i(\pi) = M_i(\pi)$

である．

(21)　もし $\Sigma_i = \{\pi \in R\ ; u_j(\pi) > \theta_j \pi + S_j\}(j \neq i)$ ならば、

$Au_i \in L^2(\Sigma_i)$,

$Au_i(\pi) \geq m_i \pi$,

$\{u_i(\pi) - (\theta_i \pi + S_i)\}(Au_i(\pi) - m_i \pi) = 0 \quad a.e.\ in\ \Sigma_i$

である．ただし、

$$Au = -\frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 \frac{d^2 u}{d\pi^2} - a\pi \frac{du}{d\pi} + ru$$

である．

このとき停止ゲームに関して次のことが言える[1]．

(22)　$\hat{\tau}_i = inf\{t > 0\ ; \Pi(t) \notin C_i\}$,

ただし $C_i = \{\pi \in R\ ; u_i(\pi) > \theta_i \pi + S_i\}$ ならば、$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ はペイオフ(16)に対するナッシュ均衡となる．

---

(1)　(18)～(21)式の十分条件の一つに、Bensoussan and Friedman (1977) の不等式 (2.5) があるが、仮定1はこの不等式のために十分であることを特に注意しておく．

さらに、

(23) $u_i(\pi)=J^i_\pi(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$.

(22)で集合 C は市場に留まるべき総利潤の集合であり、この集合を継続領域と呼ぶことにする．従って、集合 C の補集合を停止領域と呼ぶ．

さて、第2企業がまだ退出していない状況を想定しよう．これまでどおり ξ を停止領域と継続領域の閾値とする．ただしここでは ξ は需要水準ではなく $\hat{\tau}$ に対応する総利潤である．$\xi\in\partial C$ と定義しておく．このときに第1企業について(21)の二階の微分方程式を次の二つの式を境界条件として解く．

(24) $u(\xi)=\theta\xi+S$.

(25) $u'(\xi)=\theta$.

ここで、(24)は value matching 条件で、(25)は smooth passing 条件である．

実際に(21)を解くと次のようになる．

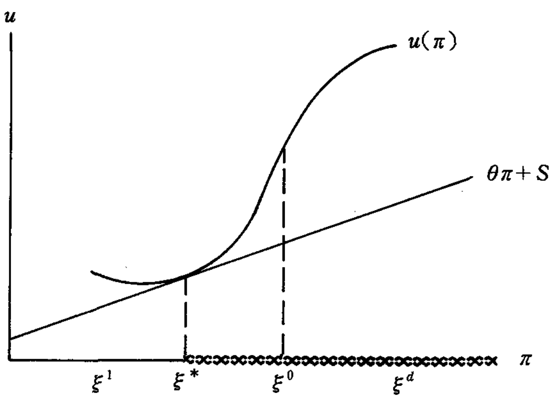
(26)
$$u(\pi)=\frac{1}{\lambda-\gamma}\left[\left\{\left((1-\gamma)\theta-\frac{1-\gamma}{r-2\alpha-\sigma^2}m\right)\xi^{1-\lambda}-\gamma S\xi^{-\lambda}\right\}\pi^\lambda\right.$$
$$\left.+\left\{\left((\lambda-1)\theta-\frac{\lambda-1}{r-2\alpha-\sigma^2}m\right)\xi^{1-\gamma}+\lambda S\xi^{-\gamma}\right\}\pi^\gamma\right]+\frac{m}{r-2\alpha-\sigma^2}\pi$$

ただし、

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{-\left(\dfrac{2\alpha+\sigma^2}{2\sigma^2}-1\right)-\sqrt{\left(\dfrac{2\alpha+\sigma^2}{2\sigma^2}-1\right)^2+\dfrac{2r}{\sigma^2}}}{2}, \\ \gamma=\dfrac{-\left(\dfrac{2\alpha+\sigma^2}{2\sigma^2}-1\right)+\sqrt{\left(\dfrac{2\alpha+\sigma^2}{2\sigma^2}-1\right)^2+\dfrac{2r}{\sigma^2}}}{2}\end{cases}$$

である．

一方、解(26)は実際には最適退出時刻（最適停止時刻）に対応する利潤である ξ と、任意の利潤 π との関数であるが、特に、ξ^* を最適な退出時刻に対応する利潤とし、さらにその値をとりあえず一定として(25)の概観をグラフにすると図IV-5.1 のようになる．図IV-5.1 の ξ^* より大きい利潤、例えば ξ^0 の値で退出したときの企業の期待割引現在価値 $u(\pi)$ は、ξ^* でそのようにしたときのものよりも大きい．このことは、利潤は平均して減少しているから、ξ^0 で退出せずに ξ^* まで退出をのばした間にいくばくかの正の利潤を、市場に滞留することで得られるということを意味している．つまり図IV-5.1 のグラフの傾きが左下がりである間は退出せずに市場に残り需要あるいは利潤の変化を観測すべきであるということが言える．そうして $\pi=\xi^*$ のときに(24)及び(25)が満たされ、これまでの議論からわかるように、この値を観測したときに退出すればよいことになる．value matching 条件や smooth passing 条件の意味については、既にIIIで詳しく述べたのでここでは詳説しない．



図IV－5.1

さて、上の説明ではξ^*を与えられたものとして議論したが、この値を実際に決定することにしよう．つまり、具体的に退出時間を見つけるために、退出を決定する戦略を特定化するわけである．ここではⅢと同じ方法で行なう．まず、次の二つの集合を定義する．

$$(27)\quad \begin{cases} \xi^0 = \left\{ \pi \mid \left. \dfrac{\partial^2 U(\pi)}{\partial \pi^2} \right|_{\pi=\xi} = 0 \right\} \\ \xi^1 = \left\{ \pi \mid \left. \dfrac{\partial^3 U(\pi)}{\partial \pi^3} \right|_{\pi=\xi} = 0 \right\} \end{cases}.$$

実際にこれらを計算すると、集合はそれぞれ次のような一意的な値に退化する．

$$(28)\quad \xi^1 = \frac{rS}{m-\theta(r-2\alpha-\sigma^2)} \cdot \frac{5\sigma^2+2\alpha}{3\sigma^2+2\alpha},$$

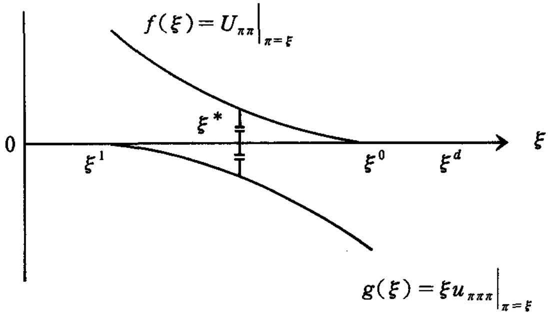
$$(29)\quad \xi^0 = \frac{rS}{m-\theta(r-2\alpha-\sigma^2)}.$$

ここでは$m-\theta(r-2\alpha-\sigma^2)>0$の場合だけを考えれば十分である．というのもこの不等式がなりたたなければ、(12)において利潤が確率1で正の値をとることに矛盾するからである．このとき、仮定1のもとでは$\xi^1 < \xi^0$であることに注意すれば、いささか骨の折れる計算を経て次の関係を得る．

$$(30)\quad \begin{cases} f(\xi^0) \equiv \left. \dfrac{\partial^2 U(\pi)}{\partial \pi^2} \right|_{\pi=\xi^0} < 0 \\ g(\xi^1) \equiv \xi^1 \cdot \left. \dfrac{\partial^3 U(\pi)}{\partial \pi^3} \right|_{\pi=\xi^1} > 0 \end{cases}.$$

以上の関係を $\xi^1 < \xi < \xi^0$ の範囲で図示したものが図IV-5.2である．関数 $f(\xi)$ は、平均して利潤が減少するとき、退出時点の利潤で評価した期待企業価値の減少加速度である．図IV-5.1ではこれが正の値をとっているから、減少スピードを押さえる力として作用していることがわかる．一方関数 $g(\xi)$ はその加速度に内在する力で、図IV-5.1によると負の値をとっているから、企業の期待値の減少を促進するように作用する力である．従って、期待値の減少速度は、これら相反するこれら二つの力が作用し合って決まっていると考えられる．これら相反する二つの力 $f(\xi)$ と $g(\xi)$ とがちょうどバランスするところで、図IV-5.1のように企業の期待価値をスクラップバリュー方程式(13)にスムースに着地させるのが自然であると考えられるので、退出を決定する戦略として両企業について次の関係を仮定する．

(31)
$$\left.\frac{\partial^2 u(\pi)}{\partial \pi^2}\right|_{\pi=\xi} + \xi \left.\frac{\partial^3 u(\pi)}{\partial \pi^3}\right|_{\pi=\xi} = 0$$



$$\xi^d = \frac{rS}{m-\theta r+2\alpha} \quad \xi^0 = \frac{rS}{m-\theta r+2\alpha+\sigma^2} \quad \xi^* = \xi^0 \cdot \frac{2\alpha+3\sigma^2}{2\alpha+\sigma^2} \quad \xi^1 = \xi^0 \cdot \frac{5\sigma^2+2\alpha}{3\sigma^2+2\alpha}$$

図IV－5.2　均衡戦略の決定ルール

したがって(26)及び(31)より、最適退出時間に対応する利潤の閾値ξ^*は、

(32) $\xi^*=\xi^0\cdot\dfrac{2\alpha+3\sigma^2}{2\alpha+\sigma^2}$

となる．一方、同様に両企業がまだ退出していないときに(12)において、$\sigma=0$として、当該企業のペイオフ(16)を退出時間に関して最大化したときの利潤、つまり確実性下の問題の解は、

(33) $\xi^d=\dfrac{rS}{m-\theta(r-2\alpha)}$

であり、よって仮定1のもとでは退出の閾値に関して次の関係がわかる．

(34) $\xi^*<\xi^d$.

利潤が平均して減少していることを考え合わせると、(34)は不確実性が平均して退出時間を遅らせることを意味する．念のため(32)で$\sigma=0$とすれば、確かに(33)となる．

企業2についても同様である．ところで、(9)及び(11)よりコストパラメーターcが大きい企業のほうが市場利潤のシェアーmが小さいことがわかるから、何ら一般性を失うことなく$c_1>c_2$と仮定すれば、$\xi_1^*>\xi_2^*$を得る．コストの大きい企業の方が退出の閾値が大きいということであるから、平均すればコストの大きい第1企業の方が先に退出するという結果を得たことになる．したがって、Bensoussan and Friedman（1977）の結果から、次のことが言える．

仮定1および仮定2のもとで、すべての企業が戦略（31）を用いる確率的退出ゲームのナッシュ均衡は、平均すればコストの大きい企業のほうが先に退出するというものである．また、不確実性は平均退出時刻を遅らせる

効果をもっている.

この定理による均衡は一意的であることは保証されていないことに注意を要する.

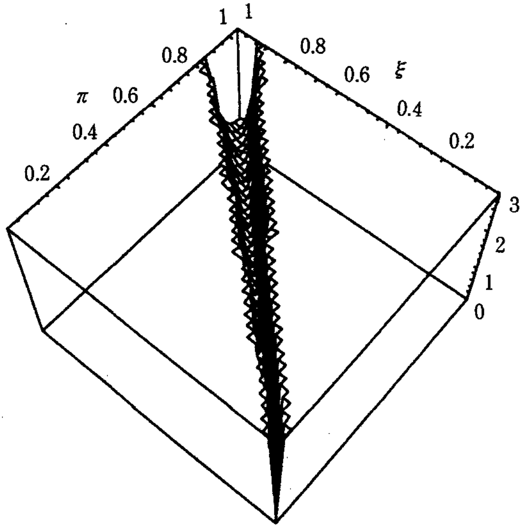
前述のように Reynolds（1988）は単一のプラントをもつ企業の退出ゲームの均衡において、コストが大きい企業の方が早く退出するという結論を得ている. 彼は費用構造ならびに需要について確実なケースを取り扱っているが、本稿の結論は不確実性が存在するケースに関して補完するものである.

§-6　数値例

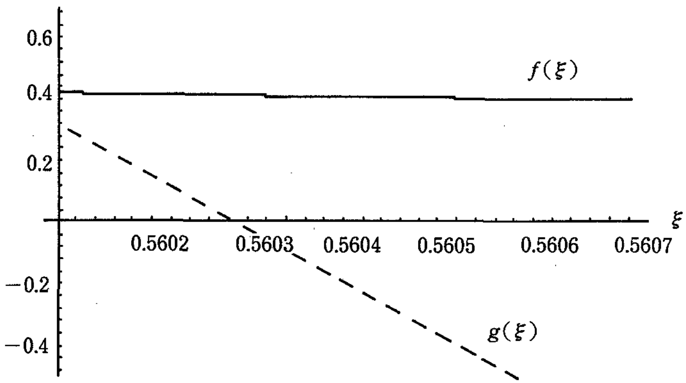
先に退出するであろう企業1について、退出時刻の決定を数値例で確認しておこう. 紹介する数値例は、$r=0.1$、$\alpha=-0.08$、$\sigma=0.039999$、$m=0.19$、$\theta=0.6$, $S=0.2$ で、これは仮定1及び不等式 $m-\theta(r-2\alpha-\sigma^2)>0$ を満たす. 計算結果はグラフィカルに理解することにしよう.

まず、解(26)が π と ξ との関数であることを3次元で示すのが図IV-6.1である. 直線 $\pi=\xi$ に沿ってU字型の曲面が続く. (26)は退出時間の決定戦略は考慮されていないから、図IV-6.1の ξ の値すべてが最適な閾値の候補となる. この候補中から ξ^* を特定化しなければならない. そのルールが(31)であった. 図IV-6.2がその様子を示している. この数値例では $\xi^*=0.560527$ が最適な閾値となる. この値で図IV-6.1を輪切りにして、スクラップバリュー方程式(13)も合わせてグラフにしたものが図IV－6.3である. 二つの曲線が接するところで退出が行なわれる. これは前節の解析的なイメージ図IV-5.2に対応するものである. (24)及び(25)が満足されていることを見て取ることができる.

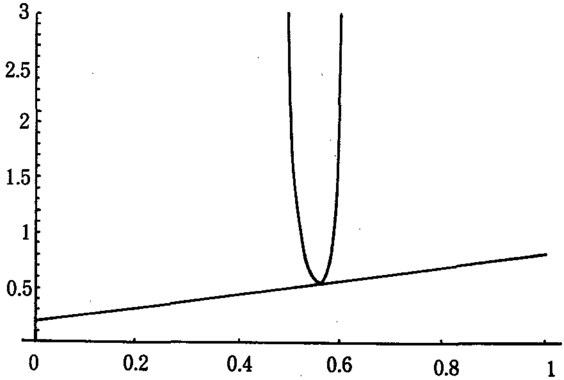
さてこの数値例のもとではゲームは次のように進む. 費用が大きい企業1はその利潤に関するシェアーが19％である. 平均して需要が縮小する中で、企業1の意思決定者は利潤が0.560527単位になったときに当該市場から退出す



図IV－6.1　$r=0.1$、$\alpha=-0.08$、$\sigma=0.039999$、$m=0.19$、$\theta=0.6$, $S=0.2$ のときの関数 $u(\Pi, \xi)$ の形状



図IV－6.2　退出決定ルール（$\xi^{1}=0.560288$, $\xi^{*}=0.560527$, $\xi^{0}=0.572083$）



図Ⅳ－6.3　図Ⅳ－5.1 に対応する退出時間の決定

る．そのときの企業 1 のスクラップバリューは 0.5363162 単位である．一方、第 1 企業よりも先に退出しなかった企業 2 は、独占企業として市場に残る．その後も市場需要関数の構造に変化がなければ、単独の企業の最適停止問題を解いて、企業 2 の退出時刻も決定される[1]．

(1) Bensoussan and Friedman (1977) においては、どちらか一方のプレーヤーは必ずしも停止する必要はない．しかし、本稿のゲームの場合、市場が平均して縮小しているので、やがてすべてのプレーヤーが停止してしまう状況が起こりうる．

数学付録

§-1　確実性下のダイナミック・プログラミング

ダイナミックプログラミングは、動学的な最適化問題を解くための有力な方法の一つである．不確実性が存在しない状況ではポントリャーギンの最大値原理がよく用いられるが、不確実な状況での動学的最適化問題を解く場合には、ダイナミックプログラミングを用いることが一般的である．

ダイナミックプログラミングの方法は Richard Bellman によって考案されたもので、いわゆる最適性の原理がその基本的な概念になっている．つまり、初期条件がどのようなものであっても、またその初期条件から出発した制御変数がどのようなものであっても、残された計画期間にわたって、この制御変数は対応する問題に対して最適でなければならない．というものである．

まず、状態変数を X、制御変数を u として、次のような確定的な割引のある問題を想定する．

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&\underset{u}{Max}\int_0^T e^{-rs}(s,\ X,\ u)ds+\Theta(X(T),\ T)\\
&s.t.\ \frac{dX}{ds}=g(s,\ X,\ u),\ X(0)=x_0
\end{aligned}
$$

関数 $f(s,\ x,\ u)$、$g(s, x,\ v)$、$\Theta(X(s),\ s)$ は連続で微分可能とする．この積分の最大値を、初期値と対応する時間の関数として次のように定義する．

$$
(2)\quad J(0,\ x_0)=\underset{u}{Max}\int_0^T e^{-rs}f(s,\ X,\ u)ds+\Theta(X(T),\ T)
$$

さらに、ある正の定数 t に対して $X(t)=x$ と定義して、(2)の初期時間を t だけ

進めれば、

$$(3)\quad J(t,\ x)=\underset{u}{Max}\int_t^T e^{-r(s-t)}fds+\Theta(X(T),\ T)$$

となる．終点においては次式が成立する．これはいわゆる境界条件である．

$$(4)\quad J(T,\ X(T))=\Theta(X(T),\ T).$$

ここで $\triangle t$ という極めて短い時間を考える．$\triangle t$ の間は最適に制御されているとすれば、

$$(5)\quad J(t,\ x)=\underset{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}{Max}\left[\int_t^{t+\triangle t} e^{-(s-t)}fds+\underset{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}{Max}\ e^{-r\triangle t}\int_{t+\triangle t}^{T} e^{-(s-t-\triangle t)}fds+\Theta\right]$$

であり、$X(t+\triangle t)=x+\triangle x$ とすれば(5)式は、

$$(6)\quad J(t,\ x)=\underset{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}{Max}\left[\int_t^{t+\triangle t} e^{-r(s-t)}fds+e^{-r\triangle t}J(t+\triangle t,\ x+\triangle x)\right]$$

となる．(5)は $t+\triangle t$ から出発する経路は必ず最適にコントロールされるべきであるという、前述の最適性の原理の数学的表現である．ここで次の(7)のような近似を行なえば、(6)式は(8)となる．

$$(7)\quad \int_t^{t+\triangle t} e^{-r(s-t)}fds \approx e^{-r\triangle t}f\triangle t$$

$$(8)\quad J(t,\ x)=\underset{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}{Max}\left[e^{-r\triangle t}f\triangle t+e^{-r\triangle t}J(t+\triangle t,\ x+\triangle x)\right]$$

J は連続に 2 階微分可能と仮定して、(8)式の右辺を Taylor 展開し、$\triangle t$ で両辺を割れば、次のようなプロセスを経ることになる．

$$J(t,\ x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}\left[e^{-r\triangle t}f\triangle t\ +\ e^{-r\triangle t}(J+J_x\triangle x+J_t\triangle t)\right]+\vartheta(\triangle t)$$

$$(9)\quad (1-e^{-r\triangle t})J(t,\ x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}\left[e^{-r\triangle t}f\triangle t+e^{-r\triangle t}(J_x\triangle x+J_t\triangle t)\right]+\vartheta(\triangle t)$$

$$\frac{e^{-r0}-e^{-r(0+\triangle t)}}{\triangle t}J(t,\ x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}\left[e^{-r\triangle t}f+e^{-r\triangle t}\left(J_x\frac{\triangle x}{\triangle t}+J_t\right)\right]+\vartheta(\triangle t)$$

関数Jがuには依存しないことに注意して、(9)の最後の式に関して、$\triangle t\to 0$とすれば次式を得る.

$$(10)\quad rJ(t,\ x)=\underset{u}{Max}\,[\,f(t,\ x,\ u)+J_t(t,\ x)+g(t,\ x,\ u)J_x(t,\ x)]$$

(10)式が Hamilton-Jacobi-Bellman の方程式（HJB 方程式）と呼ばれるものである. Jを求めるための実際の計算では、(10)の右辺を最大化するuを求め、その値を(10)に代入して得られる偏微分方程式を境界条件(4)のもとに解くことになる. 得られた結果を、すでに求めた(10)の右辺を最大化する制御変数に代入してやれば、最適制御量が求められる.

最後にポントリャーギンの最大値原理との関係について述べておくことも意味がある. 問題(1)に関する最大値原理による最適化の必要条件は、

$$(11)\quad \begin{aligned} &H(x,\ u,\ \varphi)=f(x,\ u)+\varphi g(x,\ u)\\ &\frac{\partial H}{\partial u}=0\\ &\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}\\ &\varphi(x(T),\ T)=\frac{\partial\Theta(X(T),\ T)}{\partial X} \end{aligned}$$

H は Hamiltonian、φ は随伴変数と呼ばれる．このとき、

(12) $\varphi(t)=J_x(t, x)$

なる関係が存在する．

§-2　不確実性下のダイナミック・プログラミング

次のような状態変数に不確実性が存在する、割引のある問題を想定する．

(1)
$$\sup E\int_0^T e^{-rs}f(s, X, u)ds+\Theta(X(T), T)$$
$$s.t.\ \ dX=g(s, X, u)ds+\sigma(X, u)dW,\ X(0)=x_0$$

ただし、$\sigma>0$．W は標準ウィナー過程で、$dW=W(t+dt)-W(t)$, $E(dW)=0$, $Var(dW)=dt$ を満たすものである．この方程式に従う確率変数 X は拡散確率過程に従うと言う．この積分の最大値を、初期値と対応する時間の関数として次のように定義する．

(2) $J(0, x_0)=\sup E\int_0^T e^{-rs}f(s, X, u)ds+\Theta(X(T), T)$

さらに、ある正の定数 t に対して $X(t)=x$ と定義して、(2)の初期時間を t だけ進めれば、

(3) $J(t, x)=\sup E\int_t^T e^{-r(s-t)}f ds+\Theta(X(T), T)$

となる．よって、

(4) $J(T, X(T))=\Theta(X(T), T)$.

となる．ここで $\triangle t$ という極めて短い時間を考える．$\triangle t$ の間は最適に制御されているとすれば、

$$(5)\quad J(t,x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}} E\left[\int_t^{t+\triangle t} e^{-r(s-t)}fds+\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}} e^{-r\triangle t}E\int_{t+\triangle t}^{T} e^{-(s-t-\triangle t)}fds+\Theta\right]$$

となる．ここで $X(t+\triangle t)=x+\triangle x$ とすれば(5)式は、

$$(6)\quad J(t,x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}} E\left[\int_t^{t+\triangle t} e^{-r(s-t)}fds+e^{-r\triangle t}J(t+\triangle t,\ x+\triangle x)\right]$$

ここで前節同様次のような近似を行なえば(6)式は(8)となる．

$$(7)\quad \int_t^{t+\triangle t} e^{-r(s-t)}fds \approx e^{-r\triangle t}f\triangle t$$

$$(8)\quad J(t,x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}} E\,[\,e^{-r\triangle t}f\triangle t+e^{-r\triangle t}J(t+\triangle t,\ x+\triangle x)]$$

J は連続に 2 階微分可能と仮定して、(8)式の右辺をそれぞれの変数について 2 階の Taylor 展開を行なえば次式を得る．

$$(9)\quad J(t,x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}} E\left[e^{-r\triangle t}\left\{f\triangle t+J+J_x\triangle x+J_t\triangle t+\frac{1}{2}J_{xx}(\triangle x)^2+\frac{1}{2}J_{tt}(\triangle t)^2\right\}\right]+\vartheta(\triangle t)$$

一方、(1)より、

$$(10)\quad E(\triangle x)^2=E\,[\,g^2(\triangle t)^2+2g\sigma\triangle t\triangle W+\sigma^2(\triangle W)^2]$$
$$=g^2(\triangle t)^2+\sigma^2\triangle t$$

したがって、(1)、(9)及び(10)より、

$$(11)\quad J(t,\ x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}\left[e^{-r\triangle t}\left\{f\triangle t+J+gJ_x\triangle t+J_t\triangle t\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}J_{xx}(g^2(\triangle t)^2+\sigma^2\triangle t)+\frac{1}{2}J_{tt}(\triangle t)^2\right\}\right]+\vartheta(\triangle t)$$

となる．(11)について確実性下の場合と同様に整理して、$\triangle t\to 0$ とすれば次式を得る．

$$(12)\quad rJ(t,\ x)=\sup_{\substack{u\\ t\leq s\leq t+\triangle x}}\left[f(t,\ x,\ u)+J_t(t,\ x)\right.$$
$$\left.+g(t,\ x)J_x(t,\ x)+\frac{1}{2}J_{xx}\sigma(x,\ u)^2\right]$$

(12)式が不確実性下の HJB 方程式である．以下同様にして最適制御量を求めることができる．

§-3　最適停止問題

最適停止問題は統計的決定理論の重要な分野の一つであり、秘書選択問題、結婚問題、美人コンテスト問題などは、すべて最適停止問題の一部である．不確実な状況の中でいつ観測（何らかの活動）を止めるのが最適かを決める問題である．

§-2 で解説したのは、はコントロール変数に関する最大化問題であったが、最適停止にあっては、計画期間の終点時間に関する目的関数の最大化となる．

§-2 と同様、状態変数は次の様な拡散確率過程にしたがうものとする．

$$(1)\quad dX=g(X,\ s)ds+\sigma(X,\ s)dW,\ X(t)=x$$

ここでは変分不等式による解法のエッセンスだけを解説するが計画期間が有限のもの（たとえば Bensoussan and Lions（1982））と、無限のもの（Friedman（1976））とがある．まず前者からみることにする．

目的関数は、

$$(2)\quad V_{xt}(\theta)=E\left[\int_t^{\theta\wedge t} e^{-r(s-t)}f(s,\ X(s))ds+e^{-r(\theta-t)}\Theta(X(\theta),\ \theta)\chi_{\theta<\tau}\right.$$
$$\left.+e^{-r(T-t)}h(X(\tau),\ \tau)\chi_{\tau\leq\theta,\ \tau<T}+e^{-r(T-t)}J(X(T),\ T)\chi_{T=\theta\wedge\tau}\right]$$

と仮定する．ただし、τ は、ある領域 $\vartheta\in R$ から初めて X が離れる時間で次のように定義される．

$$(3)\quad \tau=inf\{t\geq 0\mid X(t)\notin\vartheta\}$$

また、(2)式において、

$$\chi_{\theta<\tau}=\begin{cases}1 & if\,\theta<\tau\\ 0 & if\,\theta\geq\tau\end{cases}$$

である．

ここで、次のように定義する．

$$(4)\quad J(x,\ t)=\sup_{\theta} V_{xt}(\theta)\,.$$

したがって、§-2 の(12)式の HJB 方程式は次の様な形で成立する．

$$(5)\quad rJ(t,\ x)=\sup_{\theta}\left[f(t,\ x)+J_t(t,\ x)+g(t,\ x)J_x(t,\ x)+\frac{1}{2}J_{xx}\sigma(x)^2\right]$$

よって、(4)から、

$$rJ(t,\ x) \geq f(t,\ x) + J_t(t,\ x) + g(t,\ x) J_x(t,\ x) + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma(x)^2$$

であるので、結局、

(6) $$-\frac{1}{2} J_{xx} \sigma(x)^2 - g(t,\ x) J_x(t,\ x) - J_t(t,\ x) + rJ(t,\ x) \geq f(t,\ x)$$

となる.

A を次の(7)の様な作用素と定義すれば(6)は(8)のように、簡便に表現できる.

(7) $$A = -\frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g(t,\ x)\frac{\partial}{\partial x} + r.$$

(8) $$-\frac{\partial J}{\partial t} + AJ \geq f.$$

一方、J の定義(4)から、

$$J(x,\ t) \geq V_{xt}(t)$$

であり、さらに、もし $x \in \partial\vartheta = \Gamma$ かつ、$t < T$ なら $V_{xt}(t) = \Theta(x,\ t)$ であるから、

(9) $$J(x,\ t) \geq \Theta(x,\ t),\ x \in \vartheta,\ t < T$$

となる.

最適な停止時間は、$x \in \vartheta,\ t < T$ なる任意の時間 t に即時停止する場合と、その後、無限期間も含めて状態が継続する場合とに分けて考えることができる. 前者の場合、(9)式が等号で成立するし、後者の場合には(8)式が等号で成立

する．したがって、これらを一つにまとめると、次の式をえる．

(10) $(J-\Theta)\left(-\frac{\partial J}{\partial r}+AJ-f\right)=0.$

以上から明かのように、最適停止時間 $\hat{\theta}_{xt}$ は、

(11) $\hat{\theta}_{xt}=inf\{s\in[t,\ T]|J(X(t),\ s)=\Theta(X(s),\ s)\}$

とすることができる．また、停止せず観測を続けるべき継続領域 C は、

(12) $C=\{x,\ t\,|\,\chi\in\vartheta,\ t\in[0,\ T]|J(x,\ t)>\Theta(x,\ t)\}$

となる．Bensoussan & Lions (1982) は、(8)、(10)の一意的な解の存在、そしてその解が最適停止時間を決定することを証明している．

次に無限期間の問題である．目的関数を次のように仮定する．

(13) $V_{xt}(\theta)E\left[\int_t^\theta e^{-r(s-t)}f(s,\ X(s))ds+e^{-r(\theta-t)}\Theta(X(\theta),\ \theta)\right].$

ここで停止時刻は確率 1 で $0\leq\theta<\infty$ であるという仮定をおけば、残りは有限期間の問題と同様にして解くことができる．

§-4　最適停止ゲーム

最適停止を行なう複数の個人が参加するゲームが問題となる．誰かが観測を停止した時点でゲームは終了し、それぞれの報酬を受け取ることになる．基本的には、時間を制御する確率微分ゲームである．この種のゲームはゼロサムゲームについては、Friedman (1975)、Bensoussan & Lions (1982) が参考になる．また非ゼロサムゲームについては、Bensoussan & Friedman (1977) がナッシュ均衡の存在について論じている．ここでは、後者の非ゼロサム 2 人

ゲームについて説明する．

i と j の二人のプレイヤーが存在するとしよう．プレイヤー i は次の様な目的関数をもっているものとする．

$$(1)\quad V_x^i(\tau_1,\ \tau_2)=E\left[\int_0^{\tau_i\wedge\tau_j}e^{-rs}f_i(X_x(s))ds+e^{-r\tau_i}\Phi_i(X_x(\tau_i))\chi_{\tau_i<\tau_j}\right.$$

$$\left.+e^{-r\tau_i}\varphi_i(X_x(\tau_i))\chi_{\tau_i\geq\tau_j}\right](j\neq i)$$

この場合、$X_x(s)=X_{x_0}(t)\in R^n$ を意味する．また状態変数ベクトルは次の拡散過程であるとする．

$$(2)\quad dX_x(s)=g(x_x(s))ds+\sigma(X_x(s))dW,\ X_x(0)=x.$$

次を仮定する．

$$(3)\quad Au=-\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_0u$$

$$(4)\quad \begin{cases}a_{ij}(x),\ a_j(x)\in L^\infty(R^n)\\ a_0(x)\geq r>0\ ;\ a_{ij}=a_{ji}\end{cases}$$

$$(5)\quad a_j(x)=\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}-g_j(x),\ a_0(x)=r$$

$$(6)\quad \sum_{i,\ j}a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\gamma\sum_i\xi_i^{\ 2},\ \forall\xi_i>0,\ \forall\gamma_i>0$$

(7) a_j は微分可能で、$a_0(x)-\frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\geq\beta>0$、$\beta$ は定数.

(8) $f\in L^2(R^n)$、$\phi_i\in H^1(R^n)$，$\varphi_i\in H^2(R^n)$、$\varphi_i\geq\phi_i$、$A\varphi_i\geq f_i$

(9) $\Sigma_i=\{x\in R^n;\ u_j(x)>\phi_j(x)\}$ $(j\neq i)$ と定義し、Σ_i は滑らかな境界を

もつ．さらにΣ_iの補集合は測度ゼロではない．

このとき、次のような連続で有界な関数$u_i \in H^1(R^n)$が存在する．

(10) $u_i \geq \phi_i$ $(X \in R^n)$

(11) もしあるxと$j \neq i$について、$u_i(x)=\phi_j(x)$ならば、

$u_i(x)=\phi_i(x)$ もし$\Sigma_i=\{x \in R^n ; u_j(x) > \phi_j(x)\}$ $(j \neq i)$ならば、

(12) $Au_i \in L^2(\Sigma_i)$、$Au_i \geq f_i \, a.e. \, in \, \Sigma_i$,

$(u_i-\phi_i)(Au_i-f_i)=0 \, a.e. \, in \, \Sigma_i$.

ただし、

$$Au=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}-\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+ru$$

で、(a_{ij})は$\sigma\sigma^*$の行列である．ここで継続領域を、

(13) $C_i=\{x \in R^n ; u_i(x) > \phi_i(x)\}$

として、最適停止時間を、

(14) $\hat{\tau}_i=inf\{s > 0 \mid X_x(s) \notin C_i\}$

で定義すれば、$(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$は、ペイオフ(1)に対するナッシュ均衡点、すなわち、

(15) $$\begin{cases} V_x^1(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) \geq V_x^1(\tau_1, \hat{\tau}_2) \\ V_x^2(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) \geq V_x^2(\hat{\tau}_1, \tau_2) \end{cases}$$

を満たす停止時間の組 となり、さらに、$u_i(x)=V_x^i(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$となることが証明されている．

参考文献

（邦文）

赤壁弘康（1988）「資本設備の最適 lifetime」、『神戸学院経済学論集』、20、2、223-239.

赤壁弘康・荒木長照（1990）、「「事業部の整理」研究のための理論的準備」、『神戸学院経済学論集』、22、3、93-105.

荒木長照（1992）「企業売却の最適タイミングとそのリスク」、経営分析学会西部部会報告要旨.

吉川洋（1984）、『マクロ経済学研究』、東京大学出版会.

吉川洋（1992）、『日本経済とマクロ経済学』、東洋経済新報社.

（欧文）

Bensoussan,A. (1982), *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, North-Holland.

Bensoussan,A. and A.Friedman (1974),"Non linear variational inequalities and differential game with stopping times," *Journal of Functional Analysis*,16,305-352.

Bensoussan,A. and A.Friedman (1977),"Nonzero-sum Stochastic Differential Games with Stopping Times and Free Boundary Problems", *Transactions of the American Mathematical Society*,Vol.231, No.2,pp.275-327.

Bensoussan,A. , E. Gerald Hurst,Jr. and B. Naslund (1974), *Management Applications Modern Control Theory*,North-Holland.

Bensoussan,A. and J.Lions (1982), *Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control*, North-Holland.

Dixit,A. (1991),"A simplified treatment of the theory of optimal regulation of Brownian motion,"*Journal of Economic Dynamics & Control*, 15, 657-673.

Dumas,B. (1991),"Super contact and related optimality conditions," *Journal of Economic Dynamics & Control*,15,675-685.

Dynkin,E.B. (1965), *Markov Processes vol. I* , Springer-Verlag.

Fine,C.H. and L. Li (1989),"Equilibrium Exit in Stochastically Declining Industries," *Games and Economic Behavior* ,1,40-59.

Friedman,A. (1976), *Stochastic Differential Equations and Applications Volume 2*, Academic Press.

Froot,K.A. and M.Obstfeld, (1991),"Exchange-rate dynamics under stochastic regime shifts," *Journal of International Economics*,31,203-229.

Fudenberg,D. and J.Tirole (1986),"A Theory of Exit in Duopoly," *Econometrica* ,54,943-960.

Fudenberg,D. and J.Tirole (1992), *Game Theory*, MIT Press.

Ghemawat,P. and B.Nalebuff (1985),"Exit," *Rand Journal of Economics*, 16,184-194.

Ghemawat,P. and B.Nalebuff (1990),"The Devolution of Declining Industries," *Quarterly Journal of Economics*, 105,167-186.

Huang,C. and L.Li (1990),"Continuous Time Stopping Games With Monotone Reward Structures," *Mathematics of Operations Research*, 15, 496-507.

Harrison,J.M. and M.Taksar (1983),"Instantaneous Control of Brownian Motion," *Mathematics of Operations Research*, 8,439-453

Harrison J.M. ,Sellke,T. and Taylor, A.J. (1983),"Impulse Control of Brownian Motion," *Mathematics of Operations Research*,8,454-466.

Hayashi,F. (1982),"Tobin's Marginal q and Average q : A Neoclassical Interpretation," *Econometrica* ,50,213-224.

Jorgenson,D.W. (1963),"Capital Theory and Investment Behavior," *American Economic Review*,52,247-259.

Karatzas,I. and S.E.Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer-Verlag.

Karlin,S. and H.M.Taylor (1975), *A First Course in Stochastic Processes 2nd edition*,Academic Press.

Krugman,P. (1989), *Exchange-Rate Instability*, MIT Press.

Krugman,P. (1991),"Target zones and Exchange Rate Dynamics," *Quarterly Journal of Economics*,106,669-682.

Krugman,P. and M.Miller (ed.) (1991), *Exchange rate targets and currency bands*, Cambridge University Press.

Lieberman,M.B. (1990),"Exit from declining industries: "shakeout" or " stakeout"?", *Rand Journal of Economics* ,21,538-554.

Londregan,J. (1990),"Entry and Exit over the Industry Life Cycle," *Rand Journal of Economics*, 21,446-458.

Merton,R.C. (1990), *Continuous-Time Finance* ,Basil Blackwell.

Porter,M.E. (1980), *Competitive Strategy*, Macmillan . (土岐他訳 (1988)「競争の戦略」ダイヤモンド社)

Rasmusen,E. (1989), *Game and Information : An Introduction to Game Theory*,Basil Blackwell. (細江守紀他訳 (1990)「ゲームと情報の経済分析」九州大学出版会)

Reinganum,J.F. (1983),"Technology Adoptation under Imperfect Information," *The Bell Journal of Economics*, 14 , 57-69.

Reynolds,S.S. (1988), "Plant Closings and Exit Behaviour," *Economica* ,55, 493-503.

Scarf, H. (1960), The Optimality of (S,s)Policies in the dynamic Inventory Problem, *Mathematical Methods in the Social Sciences.* Arrow,K.J. and P. Suppes (ed.),Stanford University Press.

Schary,M. (1991),"The Probability of exit," *Rand Journal of Economics* , Vol.22,No.3.

Shiryayev,A.N. (1978), *Optimal Stopping Rules*, Springer-Verlag.

Svensson,L.E.O. (1991),"Target zones and interest rate variability," *Journal of International Economics*,31,27-54.

Tapiero,C.S. (1988), *Applied Stochastic Models and Control in Management*, North-Holland.

Tobin,J. (1969),"A General Equilibrium Apploach to Monetary Theory," *Journal of Money ,Credit and Banking* ,1,15-29.

Thompson,G.L. (1968),"Optimal Maintenance Policy and Sale Date of a Machine," *Management Science*,14,543-550.

Whinston,M.D. (1988), "Exit with Multiplant Firms, "*Rand Journal of Economics* ,19,74-94.

Wong,E. (1971), *Stochastic Processes in Information and Dynamiccal Systems*, McGraw-Hill.

著者略歴

荒木長照

1983年　滋賀大学経済学部卒業
1989年　大阪府立大学大学院経済学
　　　　研究科博士後期課程
　　　　単位取得退学
現在　　大阪府立大学経済学部
　　　　講師

平成5年3月24日　印刷
平成5年3月31日　発行

著者　荒木長照
　堺市学園町1－1
発行所　大阪府立大学経済学部

大阪府立大学経済研究叢書

第1冊	西村孝夫著	イギリス東インド会社史論	＜昭　35＞
第2冊	福原行三著	J.S. ミルの経済政策論研究	＜昭　35＞
第3冊	和田貞雄著	点集合と経済分析	＜昭　35＞
第4冊	内田勝敏著	ブリティシュ・トロピカル・アフリカの研究	＜昭　36＞
第5冊	永島　清著	国際経済と経済変動	＜昭　36＞
第6冊	大野吉輝著 山谷恵俊著 岡本武之著	成長理論の研究	＜昭　36＞
第7冊	竹安繁治著	近世土地政策の研究	＜昭　37＞
第8冊	谷山新良著	保険の性格と構造	＜昭　37＞
第9冊	佐藤浩一著	現代賃金論序説	＜昭　37＞
第10冊	藤井定義著	幕末の経済思想	＜昭　38＞
第11冊	渡瀬　浩著	経営の社会理論	＜昭　38＞
第12冊	今川　正著	線型計画と地域開発	＜昭　38＞
第13冊	馬淵　透著	国際金融と国民所得	＜昭　39＞
第14冊	鍬田邦夫著	金融理論と金融政策	＜昭　39＞
第15冊	村上義弘著	行政法および行政行為の本質	＜昭　39＞
第16冊	鈴本和蔵著	減価償却政策と維持計慮	＜昭　40＞
第17冊	岡本武之著	ケインズ主義経済理論序説	＜昭　40＞
第18冊	片山　明著	イギリス「社会改良」時代の研究	＜昭　41＞
第19冊	風間鶴寿著	相続法の総論的課題 －相続開始・代襲相続・放棄－	＜昭　41＞
第20冊	前田英昭著	企業行動の理論	＜昭　41＞
第21冊	盛　秀雄著	日本国憲法の主原則	＜昭　42＞
第22冊	石田喜久夫著	自然債務の研究	＜昭　42＞
第23冊	稲葉四郎著	経済学の根抵	＜昭　42＞
第24冊	武部善人著	産業構造分析	＜昭　43＞
第25冊	山谷恵俊著	技術進歩と均衡成長	＜昭　43＞
第26冊	立半雄彦著	L. ワルラスの社会経済学	＜昭　43＞
第27冊	市橋英世著	マーケティング・システムの行動理論	＜昭　44＞
第28冊	横山益治著	不確実性と決定理論 －ベイジャン接近－	＜昭　44＞
第29冊	大野吉輝著	財政政策と所得分配	＜昭　44＞
第30冊	馬淵　透著	国際収支理論のグラフ的分析	＜昭　45＞
第31冊	石川常雄著	通貨変動理論の研究	＜昭　45＞
第32冊	今井　宏著	議決権代理行使の勧誘	＜昭　45＞
第33冊	右近健男著	離婚扶養の研究 －財産分与論　その1－	＜昭　46＞
第34冊	森田　劭著	労働市場分析による労働経済の研究	＜昭　46＞
第35冊	前田英昭著	企業の最適な投資政策，研究・開発政策および宣伝・広告政策について	＜昭　46＞
第36冊	服部容教著	新ケインズ派基礎理論研究	＜昭　47＞

第37冊	井上和雄著	ユーゴスラヴィアの市場社会主義	＜昭　47＞
第38冊	門田安弘著	計算価格による分権的システム	＜昭　48＞
第39冊	森淳二朗著	配当制限基準と法的資本制度 －アメリカ法の資産分配規制の史的展開－	＜昭　49＞
第40冊	長野祐弘著	垂直市場システムの研究 －市場システムの基礎理論－	＜昭　49＞
第41冊	谷山新良著	産業連関分析	＜昭　50＞
第42冊	唄野　隆著	利子率の期間別構造と国債管理	＜昭　50＞
第43冊	藤井定義著	懐徳堂と経済思想	＜昭　51＞
第44冊	宮本勝浩著	分権的経済計画と社会主義経済の理論	＜昭　51＞
第45冊	西村孝夫著	フランス東インド会社小史	＜昭　52＞
第46冊	森田　劭著	西ドイツにおける外国人労働力雇用の経済的側面	＜昭　52＞
第47冊	福島孝夫著	会計収益認識論	＜昭　53＞
第48冊	市橋英世著	組織サイバネティクス研究 －組織行動の一般理論－	＜昭　53＞
第49冊	長尾周也著	組織体における権力と権威	＜昭　54＞
第50冊	洲浜源一著	観測不可能な変数を含む経済モデルの推定	＜昭　54＞
第51冊	山下和久著	外部性と公共部門	＜昭　55＞
第52冊	加登　豊著	コスト・ビヘイビアの分析技法	＜昭　55＞
第53冊	高木洋子著	開放経済の成長に関する諸問題	＜昭　56＞
第54冊	津戸正広著	価格と生産価格 －転化論争の展開－	＜昭　56＞
第55冊	中田善啓著	流通システムと取引行動	＜昭　57＞
第56冊	渡辺　茂著	医療をめぐる公共政策	＜昭　57＞
第57冊	牛丸与志夫著	役員報酬規制の現代的課題	＜昭　57＞
第58冊	長野祐弘著	広告宣伝とブランド競争	＜昭　58＞
第59冊	綿貫伸一郎著	所得不平等と地域格差	＜昭　59＞
第60冊	南川諦弘著	条例制定権に関する研究	＜昭　59＞
第61冊	駿河輝和著	消費の数量経済分析	＜昭　60＞
第62冊	田中　治著	アメリカ財政法研究序説	＜昭　60＞
第63冊	大島俊之著	債権者取消権の研究	＜昭　61＞
第64冊	永田　誠著	フレーゼと立憲的工場制度	＜昭　61＞
第65冊	柴　健次著	外貨換算会計論	＜昭　62＞
第66冊	西村裕三著	アメリカにおけるアファーマティヴ・アクションをめぐる法的諸問題	＜昭　62＞
第67冊	渋谷秀樹著	憲法訴訟における主張の利益	＜昭　63＞
第68冊	平敷慶武著	動的低価基準観の史的展開	＜昭　63＞
第69冊	冨田安信著	「失業統計をめぐる諸問題」	＜平　元＞
第70冊	大竹文雄著	租税・社会保険制度の経済分析	＜平　元＞
第71冊	本沢巳代子著	破綻主義の採用と離婚給付 －西ドイツ法との比較を中心として－	＜平　2＞

第72冊	伊藤正一著	CGE 分析の応用 －台湾及びフィリピン経済の場合－	＜平　2＞
第73冊	佐藤浩一著	現代の経済政策	＜平　3＞
第74冊	西沢真三著	現代企業組織の成立と課題 －組織原理と情報をめぐって－	＜平　3＞
第75冊	浅羽良昌著	アメリカ植民地貨幣史論	＜平　3＞
第76冊	山本浩二著	ファジィ管理会計システム論	＜平　4＞
第77冊	荒木長照著	退出－戦略とタイミングのモデル分析－	＜平　5＞