THE IEICE TRANSACTIONS ON FUNDAMENTALS OF ELECTRONICS, COMMUNICATIONS AND COMPUTER SCIENCES (JAPANESE EDITION)

電子情報通信学会論文誌 A

基礎・境界

VOL. J103-A NO. 8
AUGUST 2020

基礎・境界ソサイエティ

一般社団法人 電子情報通信学会

THE ENGINEERING SCIENCES SOCIETY
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

論文

遅延結合した複素 Ginzburg-Landau モデルに生じる不安定性

テキ 博偉[†] 小西 啓治[†a)] 原 尚之[†]

Instability of Delay-Coupled Complex Ginzburg-Landau Models

Hakui TEKI[†], Keiji KONISHI[†a)], and Naoyuki HARA[†]

あらまし 振動的な反応項を有する反応拡散系の代表的なものとして，複素 Ginzburg-Landau (CGL) モデルがある．近年，2 個の CGL モデルを拡散結合/遅延結合させると，両モデルの振動は停止すること (振動停止現象) が，筆者らによって詳細に調べられている．しかし，筆者らは，この停止以外の現象に全く手を付けていない．本論文は，拡散結合/遅延結合させた CGL モデルの安定性/不安定性を詳細に調査した．遅延結合を施すと，Hopf 不安定，Wave 不安定，Robust 安定と呼ばれる現象が生じることを，数値シミュレーションで示した．更に，結合パラメータ空間上において，各安定性/不安定性が生じるパラメータ集合には，明確な関係性があることを解析的に導出した．

キーワード 遅延結合，反応拡散系，Complex Ginzburg-Landau モデル，振動停止現象，Wave 不安定

1. まえがき

我々の身の回りでは，自発的な振動を呈する複数個の「振動子」が，相互作用により多種多様な現象を生みだしている．例えば，多数のペースメーカ細胞の同期発火や，複数の蛍の同期点滅など，このような現象の例には，枚挙にいとまがない．そのような現象の一つとして，複数の振動子を相互作用させる（結合させる）とその振動は停止する「振動停止現象」が知られており，非線形科学分野で古くから精力的に調査されている [1]．この結合の方式としては，拡散結合 [2], [3]，遅延結合 [4], [5]，動的結合 [6], [7] などが提案されている [8], [9]．その中でも，最も単純な「拡散結合」と，振動子間の情報伝達の速度が考慮された「遅延結合」を扱う研究が多い．非線形科学分野では，この停止現象だけでなく,「遅延」を伴うフィードバック制御 [10]～[12] や同期現象 [13], [14] も精力的に調査されている．

上記の停止現象に関する先行研究のほとんどは，結合された複数の「振動子」を研究対象としている．最近，振動子の代わりに「反応拡散モデル」を結合させることでも振動停止現象は生じることが報告されている．Konishi と Hara は，反応拡散モデルの一種であり，チューリング不安定性をもつ「Brusselator モデル」に拡散結合を施すと，空間的に一様な平衡状態が安定化され，それに伴いチューリングパターンは消滅することを示した [15]．また，Teki らは，反応拡散モデルの一種であり，Hopf 分岐近傍の反応項をもつ「複素 Ginzburg-Landau (CGL) モデル」[16], [17] に，拡散結合または遅延結合を施すと，平衡状態は安定化され，振動停止現象が生じることを報告している [18]．更に，Van Gorder らは，2 個の CGL モデルに非対称な非線形結合を施すことでも，平衡状態の安定化が生じることを示している [19], [20]．

一方，結合された反応拡散モデルには，振動停止現象の他にも，興味深い現象が生じる．拡散結合されたチューリングモデルには，black eye や white eye [21]，対称パターンや非対称パターン [22]，square パターン [23] などが生じる．また，結合の方式として，遅延結合 [24]，動的結合 [25]，非線形結合 [26] も検討されている．CGL モデルには，拡散結合 [27], [28] や一方向結合 [29], [30] を施すと同期現象などが生じる．また，一方向遅延結合を施した CGL モデルに生じる予測同期現象も調査されている [31]．

上記のように，結合された反応拡散モデルに生じる現象は，非線形科学分野で強い興味がもたれており，

[†] 大阪府立大学大学院工学研究科，堺市
Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University, Sakai-shi, 599–8531 Japan
a) E-mail: konishi@eis.osakafu-u.ac.jp

多くの成果が発表されている．しかし，筆者らの知る限り，遅延結合により相互作用する CGL モデルに対する検討は，振動停止現象を扱った先行研究 [18] だけで行われており，これ以外の振舞の調査は手付かずであった．そこで，本論文では，拡散結合または遅延結合を施した 2 個の CGL モデルを研究対象とし，先行研究 [18] が扱わなかった「不安定性」を解析的に調査する．具体的には，空間的に一様な平衡状態の安定性/不安定性の定義を与え，それらを整理する．これにより，安定性/不安定性の関係性と，これらが生じる結合パラメータの集合を明らかにする．更に，解析的な結果を数値シミュレーションで検証する．

2. 不安定性の種類

1 次元空間上の反応拡散モデル

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{D}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2}, \tag{1}$$

について考える．$\boldsymbol{u}(t,x) \in \mathbb{R}^m$ は時刻 $t \geq 0$，位置 $x \in [0, L]$ における状態変数である．$L > 0$ は媒体の長さである(注1)．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は反応項であり，右辺第 2 項（拡散項）の $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は拡散の強さを表す．このモデルは空間的に一様な平衡状態

$$\boldsymbol{u}(t,x) = \boldsymbol{u}^*,\ \forall x \in [0, L], \tag{2}$$

をもつ．ここで，$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{0}$ を満足する反応項の平衡点である．平衡状態 (2) からの偏差 $\boldsymbol{w}(t,x) := \boldsymbol{u}(t,x) - \boldsymbol{u}^*$ のダイナミックスは

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{w}, \tag{3}$$

となる．$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{u}^*$ における $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列である．ここで，偏差の形を

$$\boldsymbol{w} = \left(e^{st+ikx} + e^{st-ikx}\right)\boldsymbol{\Gamma}_k, \tag{4}$$

とする．ただし，$k \geq 0$ は波数で，$s \in \mathbb{C}$，$\boldsymbol{\Gamma}_k \in \mathbb{R}^m$ である．(4) 式を (3) 式に代入すると，線形システム (3) の特性式

$$F(s,\gamma) := \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \gamma\boldsymbol{D}), \tag{5}$$

が得られる．ただし，$\gamma := k^2$ である(注2)．特性式 (5) の根 $s_l(\gamma)(l = 1, \ldots, m)$ のうち，実部が最も大きい根を代表根 $\hat{s}(\gamma)$ とする．文献 [32], [33] において，平衡状態 (2) の不安定性は，代表根 $\hat{s}(\gamma)$ の実部・虚部と γ の関係から,「Hopf 不安定」,「Wave 不安定」,「チューリング不安定」(注3)に分類されている(注4)．本章では，Hopf 不安定と Wave 不安定を以下のように定義する．

定義 1 (Hopf 不安定 [32], [33])． モデル (1) において，$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] > 0$ かつ $\mathrm{Im}[\hat{s}(0)] \neq 0$ ならば，平衡状態 (2) は Hopf 不安定であるという．

不安定渦状点となる平衡点 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*$ をもつ反応項に拡散項が導入された反応拡散モデル (1) では，一様な平衡状態 (2) が Hopf 不安定となる．

定義 2 (Wave 不安定 [32], [33])． モデル (1) において，$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0$ であり，更に $\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ and $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ for $\exists\gamma > 0$ であれば，平衡状態 (2) は Wave 不安定であるという．

Wave 不安定やチューリング不安定は，反応項の安定な平衡点が，拡散項の導入によって，不安定化したものである．更に，本論文で使用する「Robust 安定」(注5)を定義する．

定義 3 (Robust 安定 [18])． モデル (1) において，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] < 0$ for $\forall\gamma \geq 0$ であれば，平衡状態 (2) は空間的に Robust 安定であるという．

パラメータ γ は，境界条件と媒体の大きさ L によって決定される．すなわち，空間的に Robust 安定であれば，境界条件と媒体の大きさ L にかかわらず，平衡状態 (2) は線形近似が成立する範囲で安定となる．

3. 結合 CGL モデルとその振舞

本論文では，2 個の CGL モデル (図 1) [18]

(注1)：本論文では，境界条件を特定せずに議論を展開する．ただし，以降の数値例では「周期境界条件」を用いる．

(注2)：γ は，境界条件と L で定まる離散値をとる．本論文では，議論を簡単にするため，これを連続値として扱っている．したがって，以降で説明する各種の不安定性は，L と境界条件によっては発生しないこともある．一方，L が十分大きい場合は，離散値の間隔が狭くなるため，γ を近似的に連続値として扱ってもほとんど問題にならない．

(注3)：チューリング不安定については文献 [34] で詳しく調べられている．

(注4)：文献 [32] では，Hopf 不安定を Type III-o，Wave 不安定を Type I-o，チューリング不安定を Type I-s と呼んでいる．

(注5)：この安定性は次章で扱う結合 CGL モデルに対して定義されたものであるが [18]，ここでは一般的な形式で定義しておく．

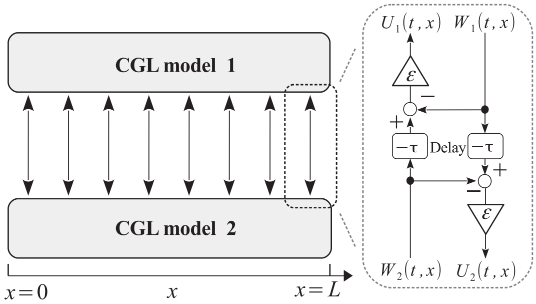


図 1　遅延結合した CGL モデル (6)(7)
Fig. 1　Delay-coupled CGL models (6)(7).

$$\frac{\partial W_{1,2}}{\partial t} = \left\{(1+i\omega_{1,2}) - (1+i\beta)\left|W_{1,2}\right|^2\right\} W_{1,2} + (1+i\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2}W_{1,2} + U_{1,2}, \quad (6)$$

について考える．$i := \sqrt{-1}$ は虚数単位，$W_{1,2}(t,x) \in \mathbb{C}$ は時刻 $t \geq 0$，位置 $x \in [0,L]$ での状態変数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ はパラメータであり，$\omega_1 := \omega_0 + \Delta\omega$ と $\omega_2 := \omega_0 - \Delta\omega$ は反応項の周波数，$\omega_0 > 0$ はノミナル周波数，$\Delta\omega \geq 0$ は周波数の差を表す．ただし，$\omega_0 > \Delta\omega$ である．結合信号 $U_{1,2}$ は，

$$U_{1,2}(t,x) = \varepsilon\{W_{2,1}(t-\tau,x) - W_{1,2}(t,x)\}, \quad (7)$$

である [18]．結合の強さ $\varepsilon \geq 0$ と遅延時間 $\tau \geq 0$ は結合パラメータである．ただし，結合が施されていない ($U_{1,2} \equiv 0$) CGL モデル (6) には，空間的に一様な平衡状態

$$W_{1,2}(t,x) = 0,\ \forall x \in [0,L], \quad (8)$$

が存在する．結合を施しても，この状態は存在する．

さて，拡散結合 ($\tau = 0$) または遅延結合 ($\tau > 0$) された CGL モデル (6)(7) の振舞を，数値シミュレーションで調査しよう．ここでは，$L = 64$ とした周期境界条件を，数値積分には，空間刻み数を 512 とした平均差分と時間刻み幅を 10^{-4} としたオイラー法を用いる．時刻 $t = 500$ でモデルを結合する．モデルのパラメータは

$$\alpha = 4.0,\ \beta = -1.2,\ \omega_0 = 6.0, \quad (9)$$

に固定した．これは Benjamin-Feir 不安定条件 ($1 + \alpha\beta < 0$) [16] を満足している(注6)．

(注6)：Benjamin-Feir 不安定条件下では,「振幅乱流」,「位相乱流」と，その二つの乱流状態が共存する「bi-chaos」と呼ばれる状態が存在する [35]．本論文で扱うパラメータ α, β では，振幅乱流が生じる [35]．

まず，拡散結合 ($\tau = 0$) された CGL モデル (6)(7) において，結合強度を $\varepsilon = 6.00$ に固定し，周波数の差を $\Delta\omega = 4.00$ とした $\mathrm{Re}[W_1]$ の振舞を図 2(a) に示す．結合前 ($t < 500$) の振幅乱流は結合後に消滅している．一方，$\Delta\omega = 0$ とした「同一の CGL モデル」では，振幅乱流は結合後も維持されている (図 2(b))．遅延結合 ($\tau = 0.23$) された同一の CGL モデルでは，結合直後に振幅は小さくなるが，その後，波が空間上を移動するスタンド波が生じている (図 2(c))．遅延時間を $\tau = 0.26$ に変更すると，振幅乱流は結合後に消滅した (図 2(d))．このように，モデル (6)(7) に生じる現象は，(ε, τ) や $\Delta\omega$ に依存している．次章以降で，この依存関係を明らかにする．

4. 安定性解析

本章では，モデル (6)(7) の平衡状態 (8) の特性式を導出し，それに基づき，遅延結合 Stuart-Landau (SL) 振動子との関係を示す [18]．更に，$\tau = 0$ での平衡状態 (8) の不安定性を議論する．

4.1 特性式の導出 [18]

平衡状態 (8) 近傍の線形近似ダイナミックスは

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1 \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}(\omega_1) - \varepsilon\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}(\omega_2) - \varepsilon\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1 \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_2\end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^{(\tau)} \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_2^{(\tau)}\end{bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1 \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_2\end{bmatrix}, \quad (10)$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{A}(\omega) := \begin{bmatrix}1 & -\omega \\ \omega & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H} := \begin{bmatrix}1 & -\alpha \\ \alpha & 1\end{bmatrix},$$

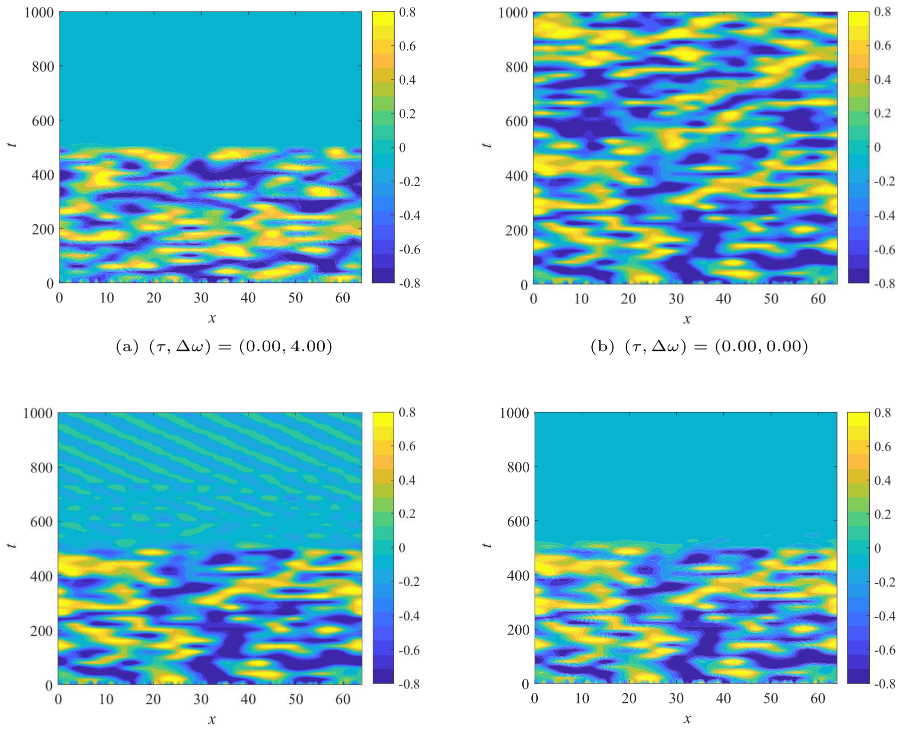
$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{1,2} := \begin{bmatrix}\mathrm{Re}[W_{1,2}] \\ \mathrm{Im}[W_{1,2}]\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{1,2}^{(\tau)} := \boldsymbol{\mathcal{X}}_{1,2}(t-\tau),$$

である．摂動の形を

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1^T & \boldsymbol{\mathcal{X}}_2^T\end{bmatrix}^T = \left(e^{st+ikx} + e^{st-ikx}\right)\boldsymbol{\Gamma}_k, \quad (11)$$

とする．ただし，$k \geq 0$ は波数で，$s \in \mathbb{C}$，$\boldsymbol{\Gamma}_k \in \mathbb{R}^4$ である．線形システムの安定性を表現する特性式 F

$$F(s,\Delta\omega,\tau,\gamma) := F_+(s,\Delta\omega,\tau,\gamma)F_-(s,\Delta\omega,\tau,\gamma),$$
$$F_\pm(s,\Delta\omega,\tau,\gamma) := s - i\omega_0 - 1 + (1+i\alpha)\gamma + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2s\tau} - \Delta\omega^2}, \quad (12)$$



(a) $(\tau, \Delta\omega) = (0.00, 4.00)$　(b) $(\tau, \Delta\omega) = (0.00, 0.00)$

(c) $(\tau, \Delta\omega) = (0.23, 0.00)$　(d) $(\tau, \Delta\omega) = (0.26, 0.00)$

図 2　結合前 $(t < 500)$ と結合後 $(t > 500)$ の時系列データ $\mathrm{Re}\,[W_1]$ $(\varepsilon = 6.00)$
Fig. 2　Spatiotemporal behavior of $\mathrm{Re}\,[W_1]$ in the coupled CGL models (6)(7) $(\varepsilon = 6.00)$. These models are coupled at $t = 500$.

が得られる (付録 1 参照)．ただし，$\gamma := k^2 \geq 0$ である．この特性式の代表根を $\hat{s}(\gamma)$ とする．

結合モデル (6)(7) は，拡散項を削除し (i.e., $1+i\alpha \to 0$) かつ $\beta = 0$ とすると，遅延結合 SL 振動子

$$\frac{\mathrm{d}W_{1,2}}{\mathrm{d}t} = \left\{(1 + i\omega_{1,2}) - |W_{1,2}|^2\right\} W_{1,2} + U_{1,2}, \tag{13}$$

と等しくなる(注7)．結合振動子 (13) の平衡点 $W_{1,2} \equiv 0$ の特性式は，$\gamma = 0$ とした $F_\pm(s, \Delta\omega, \tau, 0)$ である．

4.2　拡散結合 $(\tau = 0)$ された CGL モデル

本節では，$\tau = 0$ とした拡散結合モデル (6)(7) における平衡状態 (8) の不安定性を議論する．$\tau = 0$ とした特性式 $F_\pm(s, \Delta\omega, 0, \gamma)$ で以下の結果を得た．

(注7)：$\beta \neq 0$ でも遅延結合 SL 振動子と呼ばれる．CGL モデルと SL 振動子の関係は文献 [36] で詳しく示されている．

事実 1. CGL モデル (6) が，$\tau = 0$ とした (7) 式で拡散結合されている．ここで，

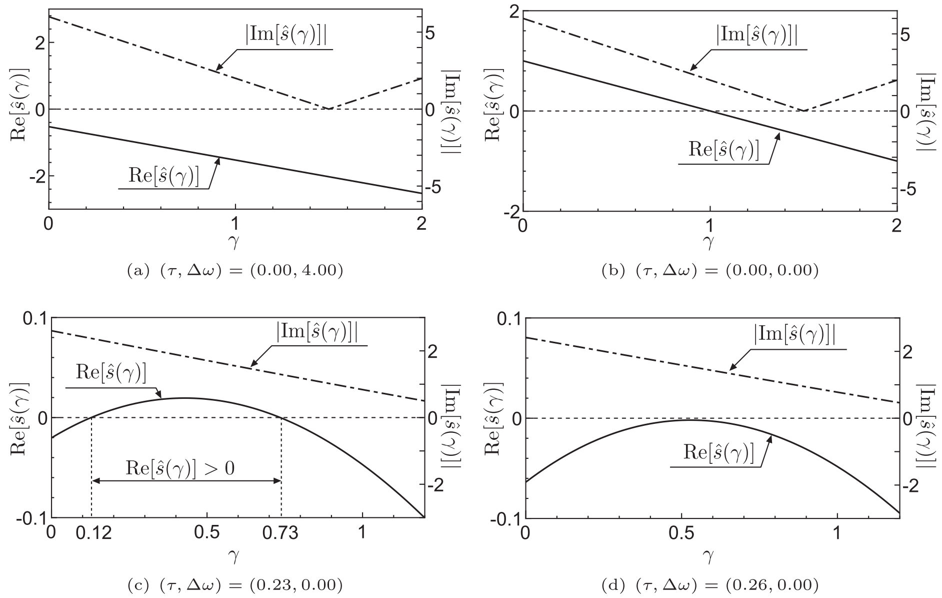
$$\varepsilon > 1 \text{ and } \Delta\omega > \sqrt{2\varepsilon - 1}, \tag{14}$$

が満足されていれば，平衡状態 (8) は空間的に Robust 安定である．一方，条件 (14) が満足されておらず，かつその境界条件 ($\varepsilon = 1$ or $\Delta\omega = \sqrt{2\varepsilon - 1}$) も満足されていなければ，平衡状態 (8) に Hopf 不安定が生じている．

この事実の根拠は付録 2 に記述した．

この事実は，拡散結合 $(\tau = 0)$ CGL モデルの平衡状態 (8) には，Robust 安定か Hopf 不安定しか存在せず，Wave 不安定は生じないことを意味している．

図 2 (a) で示した拡散結合 CGL モデルの特性式 (12) における γ と $\hat{s}(\gamma)$ の関係を算出した (図 3 (a))．代表根の実部は，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] < 0$ for $\forall\gamma \geq 0$ であり，平衡状態 (8) は Robust 安定である．一方，図 2 (b) における関係を図 3 (b) に示す．$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = 1.0 > 0$ かつ



(a) $(\tau, \Delta\omega) = (0.00, 4.00)$
(b) $(\tau, \Delta\omega) = (0.00, 0.00)$
(c) $(\tau, \Delta\omega) = (0.23, 0.00)$
(d) $(\tau, \Delta\omega) = (0.26, 0.00)$

図 3　波数 γ と代表根 $\hat{s}(\gamma)$ の関係 $(\varepsilon = 6.00)$
Fig. 3　Real part and imaginary part of $\hat{s}(\gamma)$ as a function of $\gamma \geq 0$ $(\varepsilon = 6.00)$.

$\mathrm{Im}[\hat{s}(0)] = 6.0 \neq 0$ であり，平衡状態 (8) は Hopf 不安定と分類できる．これらは，数値例 (図 2 (a)，2 (b)) の振舞と合致する．ちなみに，平衡状態 (8) が空間的に Robust 安定となる条件は，拡散結合 SL モデルの平衡点が安定となる条件と等価である [18]．

5.　遅延結合 $(\tau > 0)$ された CGL モデル

本章では，$\tau > 0$ かつ $\Delta\omega = 0$ とした遅延結合 CGL モデル (6)(7) が有する平衡状態 (8) に生じる安定性/不安定性を調査する．まず，準備として，$F_\pm$ の特性根の特徴を明らかにする．次に，結合パラメータ空間 $(\varepsilon, \tau) \in \mathbb{R}_+^2$ における安定性/不安定性の関係を示し，それを数値シミュレーションで検証する．

5. 1　準備 (特性根)

$\tau > 0$ かつ $\Delta\omega = 0$ とした遅延結合 CGL モデル (6)(7) の特性式 $F_\pm(s, 0, \tau, \gamma)$ の代表根には，次のような特徴がある．

事実 2. 特性式 $F_\pm(s, 0, \tau, \gamma)$ は $\gamma \neq \omega_0/\alpha$ であれば，実数の代表根をもたない．すなわち，$\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ for $\forall\gamma \neq \omega_0/\alpha$ が成立する．

この事実の根拠は付録 3 に記述した．

上記の特徴は，結合パラメータ (ε, τ) に依存しない．これは，(ε, τ) に関係なく，$\gamma \neq \omega_0/\alpha$ であれば，実数の代表根が存在しないことを意味する．

5. 2　パラメータ集合の定義

平衡状態 (8) の安定性は，$\Delta\omega = 0$ とした $F_\pm(s, 0, \tau, \gamma)$ に支配される(注8)．図 2 (c) で示した遅延結合 CGL モデルの γ と $\hat{s}(\gamma)$ の関係を図 3 (c) にプロットした．$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = -0.02 < 0$ であり，更に $\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ かつ $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ となる $\gamma \in [0.12, 0.73]$ が存在している．すなわち，平衡状態 (8) は Wave 不安定と分類できる．これにより，$\tau = 0.23$ とした遅延結合は Wave 不安定を誘発することがわかった．一方，図 2 (d) での γ と $\hat{s}(\gamma)$ の関係が図 3 (d) である．$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] < 0$ for $\forall\gamma \geq 0$ が成立し，平衡状態 (8) は Robust 安定である．

結合パラメータ空間 (ε, τ) 上で安定性/不安定性が生じる集合を定義する．平衡状態 (8) に「Hopf 不安定」,「Wave 不安定」,「Robust 安定」を誘発する (ε, τ) の集合をそれぞれ次のように与える:

$$\Omega_{\mathrm{Hopf}} := \big\{(\varepsilon, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] > 0 \text{ and } \mathrm{Im}[\hat{s}(0)] \neq 0\big\}, \quad (15)$$

(注8)：$\tau > 0$ としたこの特性式は超越関数となり，その根の数は無限個である．そのため，それらの代表根 $\hat{s}(\gamma)$ を数値的に算出することは容易でない．ただし，Lambert W 関数を用いると，比較的容易に代表根を算出できる．そこで，本論文では，Lambert W 関数 [37] の MATLAB ソルバ `lambertw` を代表根の算出に使用した．

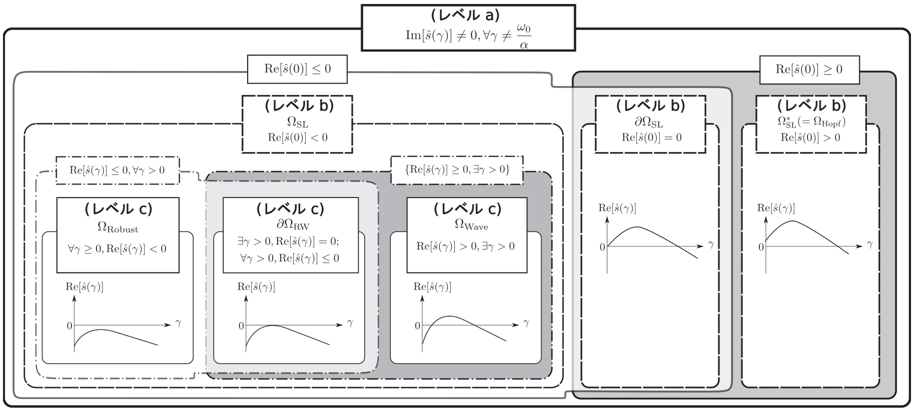


図 4　遅延結合 CGL モデル (6)(7) ($\tau > 0$) における各集合の包含関係
Fig. 4　Subsets relation in the delay-coupled CGL models (6)(7) ($\tau > 0$).

$$\Omega_{\mathrm{Wave}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0; \quad \mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0 \text{ and } \mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0 \text{ for } \exists\gamma > 0\big\}, \tag{16}$$

$$\Omega_{\mathrm{Robust}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \quad \mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] < 0 \text{ for } \forall\gamma \geq 0\big\}. \tag{17}$$

また，集合 Ω_{Robust} と集合 Ω_{Wave} との境界を

$$\partial\Omega_{\mathrm{RW}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0; \quad \mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] = 0 \text{ for } \exists\gamma > 0; \mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] \leq 0 \text{ for } \forall\gamma > 0\big\}, \tag{18}$$

と定義する．また，遅延結合 SL 振動子 (13) の平衡点 $W_{1,2} \equiv 0$ が漸近安定となる集合とその境界を

$$\Omega_{\mathrm{SL}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0\big\}, \tag{19}$$

$$\partial\Omega_{\mathrm{SL}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = 0\big\}, \tag{20}$$

とする．更に，平衡点 $W_{1,2} \equiv 0$ が不安定な集合を

$$\Omega^*_{\mathrm{SL}} := \big\{(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathrm{Re}[\hat{s}(0)] > 0\big\}, \tag{21}$$

と表現しておく．

5. 3　各パラメータ集合の包含関係

上記の集合の条件を整理し，包含関係を図 4 にまとめた．その関係性は三つのレベルで説明できる．

(レベル a)　条件 $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0 \quad \text{for} \quad \forall\gamma \neq \omega_0/\alpha$ は，結合パラメータ $(\varepsilon,\tau) \in \mathbb{R}^2_+$ の値に関係なく成立している (事実 2)．したがって，最も外側の条件として与える．

(レベル b)　$\gamma = 0$ での代表根 $\mathrm{Re}[\hat{s}(0)]$ の正負で分類する．$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0$ であれば Ω_{SL} の条件 (19) が，$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] > 0$ であれば Ω^*_{SL} の条件 (21) が，また，これらの境界 $\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = 0$ であれば $\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$ の条件 (20) がそれぞれ成立する．

(レベル c)　$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)]$ を正とする γ が存在するか否かで分類する．$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)]$ が正またはゼロとなる γ が存在しなければ Ω_{Robust} の条件 (17) が成立する．$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)]$ が正となる γ が存在すれば Ω_{Wave} の条件 (16) が成立する．また，これらの境界となる $\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)]$ がゼロとなる γ が存在し，それ以外の γ では負であれば $\partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ の条件 (18) が成立する．

上記の関係を数値例で確認する．モデルパラメータを (9) 式に固定する．結合パラメータを $\varepsilon \in [0, 11]$，$\tau \in [0.2, 0.3]$ と設定し，図 3 (c)，3 (d) と同じ方法で γ と $\hat{s}(\gamma)$ の関係を算出した．その関係から安定性/不安定性を判定し，パラメータ空間上に描いたものが図 5 である(注9)．黒線は $\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$ であり，これの内側の領域は Ω_{SL} である．また，その外側の領域は，上記の集合の関係から，Ω^*_{SL} となる．図中の (c) 点での時系列データと代表根の特性はそれぞれ図 2 (c)，3 (c) である(注10)．同様に，図中の (d) 点でのデータと特性は図 2 (d)，3 (d) である．

この数値例から，以下のような事実が推測される．

(注9)：$\gamma \in [0, 200]$ を 0.01 刻みで変化させ，$\hat{s}(\gamma)$ の実部・虚部を算出して判定している．この判定は，ε を 0.1 刻み，τ を 0.01 刻みで分割した各パラメータ値で実施した．ただし，$\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$ は，先行研究 [4], [38] に基づき解析的に導出している．

(注10)：結合後の振幅が小さいため，両モデルの状態は平衡状態近傍内に留まり，Wave 不安定である平衡状態から誘発されたスタンド波が観測されたと考えられる．

事実 3. $\Delta\omega = 0$ とした遅延結合 CGL モデル (6)(7) の平衡状態 (8) に各安定性/不安定性を誘発する結合パラメータ (ε, τ) の集合は，空間 $(\varepsilon, \tau) \in \mathbb{R}^2_+$ 上において

(A) $\Omega_{\mathrm{Robust}} \subset \Omega_{\mathrm{SL}}$,

(B) $\Omega^*_{\mathrm{SL}} = \Omega_{\mathrm{Hopf}}$,

(C) $\Omega_{\mathrm{Wave}} = \Omega_{\mathrm{SL}} \setminus (\Omega_{\mathrm{Robust}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{RW}})$,

の関係を有している．

これらの事実は，モデルパラメータに関係なく成り立つ．その根拠は付録 4 に記述した．

5.4 数 値 例

前節の (事実 3) は，システムパラメータ α，β，ω_0 に依存しない．本節では，パラメータ α を変化させても，図 5 と同様に，(事実 3) が成立していることを数値的に確認する．

$\alpha = 3.00$ とした各集合を図 6 (a) に示す．黒線 $\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$ で囲まれた Ω_{SL} は Ω_{Robust} と等しく，Ω_{Wave} が見当たらない．更に，$\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$ の外側の集合 Ω^*_{SL} は Ω_{Hopf} となった．これらは，Ω_{Wave} と $\partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ が共に空集合とした場合の (事実 3) と一致する．次に，α を 3.50,

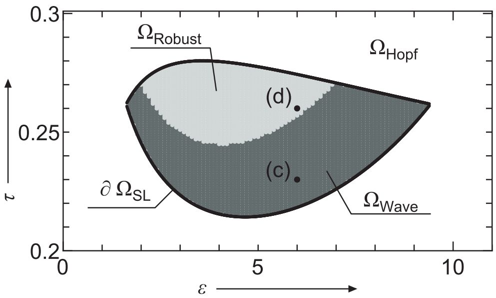


図 5 結合パラメータ空間における各集合 (Ω_{Robust}: 灰色，Ω_{Wave}: 黒色，Ω_{Hopf}: 白色，$\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$: 黒線，$\Omega_{\mathrm{SL}}$: 黒線で囲まれた領域) ($\alpha = 4.0$)

Fig. 5 Subsets in ε-τ plane ($\alpha = 4.0$). The gray region, black region, white region, black line and region covered by black line represent Ω_{Robust}, Ω_{Wave}, Ω_{Hopf}, $\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$, Ω_{SL}, respectively.

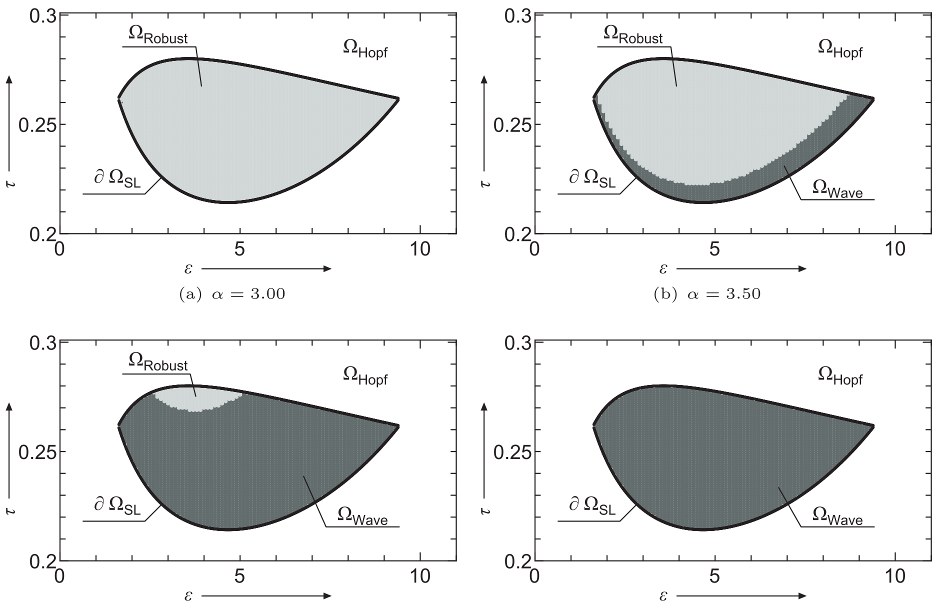


図 6 システムパラメータ α に依存する各集合 (Ω_{Robust}: 灰色，Ω_{Wave}: 黒色，Ω_{Hopf}: 白色，$\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$: 黒線，$\Omega_{\mathrm{SL}}$: 黒線で囲まれた領域) ((a) $\alpha = 3.0$，(b) $\alpha = 3.5$，(c) $\alpha = 4.3$，(d) $\alpha = 5.0$)

Fig. 6 Subsets in ε-τ plane with (a) $\alpha = 3.0$, (b) $\alpha = 3.5$, (c) $\alpha = 4.3$, and (d) $\alpha = 5.0$. Gray region, black region, white region, and black line and region covered by black lines represent Ω_{Robust}, Ω_{Wave}, Ω_{Hopf}, $\partial\Omega_{\mathrm{SL}}$, and Ω_{SL}, respectively.

4.00，4.30 と増加させた．それぞれの集合を図 6 (b)，5，6 (c) に示す．α の増加に伴い，$\partial\Omega_{\rm SL}$ で囲まれた領域内で，$\Omega_{\rm Robust}$ が縮小し，$\Omega_{\rm Wave}$ は拡大する．これらの結果から，(事実 3) が確認できる．最後に，$\alpha = 5.00$ とした図 6 (d) では，$\partial\Omega_{\rm SL}$ で囲まれた $\Omega_{\rm SL}$ は $\Omega_{\rm Wave}$ と等しく，$\Omega_{\rm Robust}$ が見当たらない．図 6 (a) と反対のパターンに相当し，これらは，$\Omega_{\rm Robust}$ と $\partial\Omega_{\rm RW}$ が共に空集合とした場合の (事実 3) と一致する．これらの数値例は，前節の結果が成立していることを裏付けている．

6. 関連研究との比較と今後の展開

本章では，Wave 不安定を扱っている先行研究を紹介し，本論文との関係を議論する．更に，本論文の位置づけと今後の展開について，筆者らの考えを記述したい．

単体の反応拡散モデルでは，Wave 不安定を誘発するための必要条件として，状態変数の次元 m は $m \geq 3$ であることが示唆されている [39](注11)．また，$m = 3$ では，Wave 不安定性を誘発するための十分条件も導出されている [42], [43]．本論文で扱った遅延結合 CGL モデル (6)(7) の状態は $m = 4$(注12) であるため，上記の必要条件は満足されている．しかし，事実 1 より，$\tau = 0$ の場合，このモデルに Wave 不安定が誘発されないことは保証されている．すなわち，拡散結合 ($\tau = 0$) という結合スタイルでは，上記の必要条件が満足され，反応項が振動的な CGL モデルであっても，Wave 不安定は誘発できないことがわかる．

Otto らは，$m = 1$ 次元の状態をもつ反応拡散モデルを詳細に調べている [44]．上記の必要条件は満たされていない．しかし，「複数の遅延」または「時間変化する遅延」を伴う反応項に設定すると，Wave 不安定は生じることが示されている．この不安定化は，遅延を伴う安定な反応項に，空間的な拡散を与えることで誘発されたものである．本論文の結果を，先行研究 [44] の視点で解釈すると以下のとおりとなる．2 個の同一 CGL モデル (6) において，各モデル内の拡散項を削除すると，各モデルには反応項の SL 振動子が残る．この状態で遅延結合 (7) を施すと，集合 $\Omega_{\rm SL}$ において，各モデルの SL 振動子には振動停止現象が発生する．この安定化された SL 振動子に，削除していた各モデル内の拡散項を復活させることで，空間的な拡散を与える．集合 $\Omega_{\rm Robust}$ では振動停止が維持されたままであるが，集合 $\Omega_{\rm Wave}$ では，この空間的な拡散によって Wave 不安定が誘発された，と解釈できる．Otto らの研究 [44] と本論文で扱っている対象が異なるため，正確な比較は難しいが，Wave 不安定が生じる基本的なメカニズムは，Otto らのものと矛盾していないことがわかる．ただし，Otto らの研究 [44] では，複数の遅延または時間変化する遅延が，Wave 不安定の誘発に必要であった．一方，本論文では，最も単純である「単体かつ時不変な遅延」で Wave 不安定が誘発できる．

筆者らの長期的な目標は，複数の反応拡散モデルに生じる時空パターンを「消去する」「所望の状態に移行させる」ことができる「結合 (制御) 方法」を提案し，結合（制御）パラメータの設計方針を与えることにある．先行研究 [18] では，時空パターンを「消去する」結合方法として「遅延結合」が有効であることを示している．一方，本論文では,「遅延結合」が時空パターンを「消去する」だけでなく,「所望の状態に移行させる」ことに有用なのか否かを解析的に調査することを目標とし,「遅延結合」の結合パラメータと結合 CGL モデルの平衡状態の各種不安定性の関係を明確にした．この関係性から，時空パターンを「消去する」「所望の状態（各種不安定性）に移行させる」ことを実現する方法として，遅延結合が有用な候補となりえることがわかった．

複数の振動子に「振動停止現象」を誘発する結合の様式には,「拡散結合」や「遅延結合」以外にも様々な結合方式が提案されている．一方，反応拡散モデルには，CGL モデルが属する振動系の他に，Turing 系，双安定系，興奮系と呼ばれるモデルも存在する．これら各種の反応拡散モデルに生じる時空パターンに対して,「消去する」「所望の状態に移行させる」ことに適した結合方式を検討・選別することが今後の課題となるだろう．

7. む す び

本論文では，拡散結合 ($\tau = 0$) または遅延結合 ($\tau > 0$) を施した 2 個の CGL モデルがもつ空間的に

(注11)：この特性は，反応項がネットワーク上で拡散した「反応拡散ネットワーク」でも成立している [40]．更に，1 変数の反応項をもつ反応拡散ネットワークでは，拡散項に遅延が伴うと，スタンド波が観測されている [41]．この文献 [41] では，Wave 不安定とは陽に記載されてないが，特性式の代表根に関する記述から，Wave 不安定に伴うスタンド波と推測される．

(注12)：$m = 2$ の複素変数のモデル (6)(7) を実部・虚部に分けると，$m = 4$ の実数変数の反応拡散モデルとなる．

一様な平衡状態の安定性/不安定性を調査した．拡散結合を施した場合，結合強度と周波数差が，ある条件を満足していれば，空間的に Robust 安定となり，そうでなければ Hopf 不安定となることが明らかとなった．周波数誤差が存在しない状況で遅延結合を施すと，Hopf 不安定，Wave 不安定，Robust 安定が生じることを数値シミュレーションで示した．更に，結合パラメータ空間上において，各安定性/不安定性が生じるパラメータ集合には，明確な関係性があることを解析的に与えた．また，これらの結果を数値例で確認した．

謝辞　本研究の一部は JSPS 科研費 18H03306 の助成を受けたものです．

文　　献

[1] D.G. Aronson, G.B. Ermentrout, and N. Kopell, “Amplitude response of coupled oscillators,” Physica D, April 1990. DOI:10.1016/0167-2789(90)90007-C

[2] K. Bar-Eli, “On the stability of coupled chemical oscillators,” Physica D, Jan. 1985. DOI:10.1016/0167-2789(85)90182-4

[3] R.E. Mirollo and S.H. Strogatz, “Amplitude death in an array of limit-cycle oscillators,” J. Statistical Physics, July 1990. DOI:10.1007/BF01013676

[4] D.V. Ramana Reddy, A. Sen, and G.L. Johnston, “Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators,” Phys. Rev. Lett., June 1998. DOI:10.1103/PhysRevLett.80.5109

[5] 小西啓治，杉谷栄規，“遅延フィードバック・遅延結合による非線形システムの安定化,” 計測制御，April 2016. DOI:10.11499/sicejl.55.326

[6] K. Konishi and N. Hara, “Topology-free stability of a steady state in network systems with dynamic connections,” Phys. Rev. E, March 2011. DOI:10.1103/PhysRevE.83.036204

[7] A. Sharma, P.R. Sharma, and M.D. Shrimali, “Amplitude death in nonlinear oscillators with indirect coupling,” Phys. Lett. A, April 2012. DOI:10.1016/j.physleta.2012.03.033

[8] G. Saxena, A. Prasad, and R. Ramaswamy, “Amplitude death: The emergence of stationarity in coupled nonlinear systems,” Physics Reports, Dec. 2012. DOI:10.1016/j.physrep.2012.09.003

[9] A. Koseska, E. Volkov, and J. Kurths, “Oscillation quenching mechanisms: Amplitude vs. oscillation death,” Physics Reports, Oct. 2013. DOI:10.1016/j.physrep.2013.06.001

[10] K. Pyragas, “Delayed feedback control of chaos,” Philosophical Trans. of the Royal Society A, July 2006. DOI:10.1098/rsta.2006.1827

[11] 山本　茂，“遅延フィードバック制御：むだ時間を利用する新しいカオス制御,” システム/制御/情報，July 2002. DOI:10.11509/isciesci.46.7_377

[12] 宮崎倫子，内藤敏機，申　正善，“遅延フィードバック制御法の数理解析,” システム/制御/情報，Nov. 2012. DOI:10.11509/isciesci.56.11_563

[13] V. Flunkert, I. Fischer, and E. Schöll, “Dynamics, control and information in delay-coupled systems: an overview,” Philosophical Trans. of the Royal Society A, Sept. 2013. DOI:10.1098/rsta.2012.0465

[14] 小口俊樹，“ネットワークシステムの同期問題と安定性,” 計測制御，April 2016. DOI:10.11499/sicejl.55.318

[15] K. Konishi and N. Hara, “Stabilization of a spatially uniform steady state in two systems exhibiting Turing patterns,” Phys. Rev. E, May 2018. DOI:10.1103/PhysRevE.97.052201

[16] I.S. Aranson and L. Kramer, “The world of the complex Ginzburg-Landau equation,” Reviews of Modern Physics, Feb. 2002. DOI:10.1103/RevModPhys.74.99

[17] M. Cross and H. Greenside, “Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems,” Cambridge University Press, 2009. DOI:10.1017/CBO9780511627200

[18] H. Teki, K. Konishi, and N. Hara, “Amplitude death in a pair of one-dimensional complex Ginzburg-Landau systems coupled by diffusive connections,” Phys. Rev. E, June 2017. DOI:10.1103/PhysRevE.95.062220

[19] R.A. Van Gorder, A.L. Krause, F.B. Planella, and A.M. Burton, “Coupled complex Ginzburg-Landau systems with saturable nonlinearity and asymmetric cross-phase modulation,” Annals of Physics, Sept. 2018. DOI:10.1016/j.aop.2018.07.003

[20] R.A. Van Gorder, A.L. Krause, and J.A. Kwiecinski, “Amplitude death criteria for coupled complex Ginzburg-Landau systems,” Nonlinear Dynamics, July 2019. DOI:10.1007/s11071-019-04961-3

[21] L. Ji and Q.S. Li, “Turing pattern formation in coupled reaction-diffusion systems: Effects of sub-environment and external influence,” Chemical Physics Letters, June 2006. DOI:10.1016/j.cplett.2006.04.014

[22] L. Yang and I.R. Epstein, “Symmetric, asymmetric, and antiphase Turing patterns in a model system with two identical coupled layers,” Phys. Rev. E, Feb. 2004. DOI:10.1103/PhysRevE.69.026211

[23] J. Li, H. Wang, and Q. Ouyang, “Square Turing patterns in reaction-diffusion systems with coupled layers,” Chaos, May 2014. DOI:10.1063/1.4875262

[24] L. Ji and Q.S. Li, “Turing pattern formation in coupled reaction-diffusion system with distributed delays,” J. Chemical Physics, Sept. 2005. DOI:10.1063/1.2041427

[25] L. Yang and I.R. Epstein, “Oscillatory Turing patterns in reaction-diffusion systems with two coupled layers,” Phys. Rev. Lett., May 2003. DOI:10.1103/PhysRevLett.90.178303

[26] K. Kyttä, K. Kaski, and R.A. Barrio, “Complex turing patterns in non-linearly coupled systems,” Phys-

ica A, Nov. 2007. DOI:10.1016/j.physa.2007.06.034

[27] S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi, and H. Mancini, "Synchronization in nonidentical extended systems," Phys. Rev. Lett., July 1999. DOI:10.1103/PhysRevLett.83.536

[28] J. Gao, L. Xie, H. Nie, and M. Zhan, "Novel type of amplitude spiral wave in a two-layer system," Chaos, Dec. 2010. DOI:10.1063/1.3526965

[29] L. Junge and U. Parlitz, "Phase synchronization of coupled Ginzburg-Landau equations," Phys. Rev. E, July 2000. DOI:10.1103/physreve.62.438

[30] L. Junge and U. Parlitz, "Synchronization and control of coupled Ginzburg-Landau equations using local coupling," Phys. Rev. E, April 2000. DOI:10.1103/PhysRevE.61.3736

[31] M. Ciszak, C. Mayol, C.R. Mirasso, and R. Toral, "Anticipated synchronization in coupled complex Ginzburg-Landau systems," Phys. Rev. E, Sept. 2015. DOI:10.1103/PhysRevE.92.032911

[32] M.C. Cross and P.C. Hohenberg, "Pattern formation outside of equilibrium," Reviews of Modern Physics, July 1993. DOI:10.1103/RevModPhys.65.851

[33] V.K. Vanag and I.R. Epstein, "Out-of-phase oscillatory Turing patterns in a bistable reaction-diffusion system," Phys. Rev. E, June 2005. DOI:10.1103/PhysRevE.71.066212

[34] 宮廻裕樹，堀　豊，原　辰次，"単一拡散因子による反応拡散系の Turing 不安定性解析，" 計測自動制御学会論文集，Dec. 2013. DOI:10.9746/sicetr.49.1164

[35] P.C. Hohenberg and A.P. Krekhovb, "An introduction to the Ginzburg-Landau theroty of phase transitions and nonequilibrium patterns," Physics Reports, Jan. 2015. DOI:10.1016/j.physrep.2015.01.001

[36] 中尾裕也，"ネットワーク結合複素 Ginzburg-Landau 方程式の拡散誘起不安定性と非一様ダイナミクス，" 数理解析研究所講究録，no.1713, pp.88–108, Sept. 2010.

[37] S. Yi, P.W. Nelson, and A.G. Ulsoy, "Time-delay systems: analysis and control using the Lambert W function," World Scientific, June 2010. DOI:10.1142/7759

[38] D.V. Ramana Reddy, A. Sen, and G.L. Johnston, "Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation," Physica D, May 1999. DOI:10.1016/S0167-2789(99)00004-4

[39] A.M. Turing, "The chemical basis of morphogenesis," Philosophical Transactions of the Royal Society B, Aug. 1952. DOI:10.1098/rstb.1952.0012

[40] 中尾裕也，秦　重史，"複雑ネットワーク上の反応拡散系における Turing 不安定性とパターン形成，" 日本流体力学会誌，vol.33, no.1, pp.29–36, Feb. 2014.

[41] J. Petit, T. Carletti, M. Asllani, and D. Fanelli, "Delay induced Turing-like waves for one-species reaction-diffusion model on a network," Europhys. Lett., Sept. 2015. DOI:10.1209/0295-5075/111/58002

[42] S. Hata, H. Nakao, and A.S. Mikhailov, "Sufficient conditions for wave instability in three-component reaction-diffusion systems," Progress of Theoretical and Experimental Physics, Jan. 2014. DOI:10.1093/ptep/ptt102

[43] A. Anma, K. Sakamoto, and T. Yoneda, "Unstable subsystems cause Turing instability," Kodai Mathematical Journal, July 2012. DOI:10.2996/kmj/1341401049

[44] A. Otto, J. Wang, and G. Radons, "Delay-induced wave instabilities in single-species reaction-diffusion systems," Phys. Rev. E, Nov. 2017. DOI:10.1103/PhysRevE.96.052202

付　　録

1. 特性式 (12) の導出

(11) 式を (10) 式に代入すると，線形システムの特性式

$$\tilde{F}(s, \Delta\omega, \tau, \gamma) := F_+ \bar{F}_+ F_- \bar{F}_-, \qquad \text{(A·1)}$$

が得られる．ただし，F_+ と $\bar{F}_+$，F_- と $\bar{F}_-$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} F_\pm(s, \Delta\omega, \tau, \gamma) &:= s - i\omega_0 - 1 + (1 + i\alpha)\gamma \\ &\quad + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2s\tau} - \Delta\omega^2}, \quad \text{(A·2)} \\ \bar{F}_\pm(s, \Delta\omega, \tau, \gamma) &:= s + i\omega_0 - 1 + (1 - i\alpha)\gamma \\ &\quad + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 e^{-2s\tau} - \Delta\omega^2}, \quad \text{(A·3)} \end{aligned}$$

であり，お互いに共役な根をもつ．本論文では，代表根の「実部の正負」と「虚部が 0 であるかどうか」にのみ注目しているため，$F_\pm$ だけを考えれば十分である．そこで，$F(s, \Delta\omega, \tau, \gamma) = F_+ F_-$ として議論を展開する．

2. 事実 1 の説明

先行研究 [18] において，定義 3 の $\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] < 0$ for $\forall\gamma \geq 0$ の必要十分条件は，$\gamma = 0$ での代表根が安定 ($\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0$) であること，更に，これは (14) 式で表現されることが証明されている．すなわち，(14) 式が満足されていなければ，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] \geq 0$ for $\exists\gamma \geq 0$ が成り立つ．更に，ε と $\Delta\omega$ が (14) 式の境界 ($\varepsilon = 1$ or $\Delta\omega = \sqrt{2\varepsilon - 1}$) でなければ，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ for $\exists\gamma \geq 0$ が成り立ち，平衡状態 (8) は不安定である．この不安定性の種類を，(i) $\varepsilon > \Delta\omega$ と (ii) $\varepsilon \leq \Delta\omega$ に分けて考える．(i) $\varepsilon > \Delta\omega$ における特性式 $F_\pm(s, \Delta\omega, 0, 0)$ の代表根の虚部が $\mathrm{Im}[\hat{s}(0)] = \omega_0 > 0$ となることは，(12) 式より明らかである．また，その実部 $\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = 1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta\omega^2}$ は，必要十分条件 (14) とその境界を満足していないため，正とな

る．(ii) $\varepsilon \leq \Delta\omega$ における特性式 $F_{\pm}(s, \Delta\omega, 0, 0)$ の代表根の虚部は，$\omega_{1,2}$ の定義より $\omega_0 > \Delta\omega$ であるので，$\mathrm{Im}[\hat{s}(0)] = \omega_0 \mp \sqrt{\Delta\omega^2 - \varepsilon^2} > 0$ となる．また，その実部は，必要十分条件 (14) とその境界を満足していないため，$\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] = 1 - \varepsilon > 0$ となる．まとめると，(i), (ii) とも，波数 $\gamma = 0$ での代表根の実部と虚部はともに正である．すなわち，条件 (14) とその境界が満足されていなければ，平衡状態は定義 1 を満足する Hopf 不安定である．

3.　事実 2 の説明

$F_{\pm}(s, 0, \tau, \gamma)$ が実根 $s = a$ $(a \in \mathbb{R})$ をもっていれば，

$$\mathrm{Re}\left[F_{\pm}(a, 0, \tau, \gamma)\right] = \mathrm{Im}[F_{\pm}(a, 0, \tau, \gamma)] = 0, \tag{A·4}$$

が成立するはずである．しかし，(12) 式より，$\mathrm{Im}[F_{\pm}(a, 0, \tau, \gamma)] = -\omega_0 + \alpha\gamma$ は，$\gamma \neq \omega_0/\alpha$ であれば，ゼロとならないため，(A·4) 式が成立しない．したがって，$\gamma \neq \omega_0/\alpha$ であれば $F_{\pm}(s, 0, \tau, \gamma)$ は実根をもたない．当然ながら，代表根 $\hat{s}(\gamma)$ も実根でなく，$\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ for $\forall\gamma \neq \omega_0/\alpha$ が成立する．

4.　事実 3 の説明

(事実 3-A) は，Ω_{Robust} が Ω_{SL} の部分集合になっていることを意味する．この事実が成立していることは，図 5 や各集合の定義式 (17)，(19) より明らかである．

(事実 3-B) は Ω_{SL}^{*} が Ω_{Hopf} と等しいことを意味する．Ω_{Hopf} の定義式 (15) にある $\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] > 0$ は，Ω_{SL}^{*} であれば満足している．また，定義式のもう一つの条件 $\mathrm{Im}[\hat{s}(0)] \neq 0$ は，レベル (a) にある事実 2 より，(ε, τ) に依存せず，常に成立している．よって，(事実 3-B) が成立つ．

(事実 3-C) は，Ω_{Wave} が，Ω_{SL} に対して，$\Omega_{\mathrm{Robust}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ の補集合になっていることを意味する(注13)．この事実が成立していることの根拠は以下のとおりである．図 4 や各集合の定義式 (17)，(18) から，Ω_{Robust} と $\partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ の和集合は，Ω_{SL} の部分集合であることは明らかである．したがって，Ω_{SL} に対する $\Omega_{\mathrm{Robust}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ の補集合 $\Omega_{\mathrm{SL}} \setminus (\Omega_{\mathrm{Robust}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{RW}})$ が定義できる．この補集合の条件は，(i) $\mathrm{Re}[\hat{s}(0)] < 0$ かつ (ii) $\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ となる $\gamma > 0$ が存在することである．一方，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)]$ と $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)]$ は，$F_{\pm}(s, 0, \tau, \gamma)$ の代表根の実部と虚部であるため，γ に対して連続である．この連続性は，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ となる $\gamma > 0$ が存在したとき，この γ の存在領域は点でなく，狭いかもしれないが区間になることを意味している．事実 2 によると，点 $\gamma = \omega_0/\alpha$ でのみ $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ が保証されていなかった．ただし，γ が存在するのは区間であるため，もし，この区間内に点 $\gamma = \omega_0/\alpha$ が含まれたとしていても，$\mathrm{Re}[\hat{s}(\gamma)] > 0$ と $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ を両方とも満足する $\gamma > 0$ は必ず存在することになる．これは，補集合の条件 (ii) が成立していれば，(ii) を満足する γ で (iii) $\mathrm{Im}[\hat{s}(\gamma)] \neq 0$ が成立することを示している．これらの条件 (i)(ii)(iii) は，Ω_{Wave} の定義 (16) の条件と合致する．したがって，$\Omega_{\mathrm{Wave}} = \Omega_{\mathrm{SL}} \setminus (\Omega_{\mathrm{Robust}} \cup \partial\Omega_{\mathrm{RW}})$ が成り立つ．

（2019 年 12 月 5 日受付，2020 年 3 月 13 日再受付）

(注13)：数値的に $\partial\Omega_{\mathrm{RW}}$ を算出することは難しいため，図 5 には記載されていないが，Ω_{Robust} と Ω_{Wave} の境界が，それに相当する．

テキ　博偉　（学生員）

2015 大阪府立大学工学部卒．2017 同大学大学院工学研究科博士前期課程了．同年同大学博士後期課程入学，現在に至る．電子情報通信学会 2018 年度学術奨励賞．

小西　啓治　（正員）

1991 大阪府立大学工学部卒．1993 同大学大学院工学研究科博士前期課程了．同年国立奈良工業高等専門学校助手．1995 大阪府立大学工学部助手．2002 公立はこだて未来大学システム情報科学部助教授．2006 大阪府立大学大学院工学研究科助教授 (准教授)．2009 同教授，現在に至る．複雑系科学とシステム制御の研究に従事．米国物理学会，日本物理学会，IEEE，システム制御情報学会，計測自動制御学会正会員．2014 電子情報通信学会非線形問題研究専門委員会委員長．2019 システム制御情報学会編集委員長．博士 (工学)．

原　　尚之　（正員）

2003 東京都立科学技術大学電子システム工学科卒．2008 首都大学東京大学院工学研究科博士後期課程了．同年大阪府立大学大学院工学研究科助教．2014 同准教授，現在に至る．制約を有する系に対する制御，風力発電システムの制御，スイッチドシステムの制御，移動ロボットの制御などの研究に従事．システム制御情報学会，計測自動制御学会，ロボット学会，日本風力エネルギー学会，IEEE 正会員．博士 (工学)．