構造式モデルによる多重指標モデルの分析原理とモデルの検討方法

構造式モデルによる多重指標モデルの分析原理とモデルの検討方法

井　手　　　亘

1．構造式モデル

1－1．はじめに

調査によるデータから現象の要因間の関係を導き出すためにはパス解析などの回帰分析をもとにした方法が利用されてきた。これに対して10年ほど前から、データに含まれる変数間の関係の情報をより生かした分析として構造式モデル(structural equation model）による分析が用いられるようになってきた（cf. 狩野, 1997; Loehlin, 1998; 豊田, 1992, 1998)。ここでは、構造式モデルによる分析の基本的な原理とモデル検討の方法について、調査における仮説構成によく用いられる多重指標モデル(multiple indicator model)を例にして考えてみる。

構造式モデルによる分析は変数間の関係を検討する点ではパス解析などと同じ発想に立っているが、変数として測定された観測変数(measurement variable)に加えて潜在変数(latent variable)も用いることができることが特徴の一つである。また、データから変数間の関係を推定するのではなく変数間の関係について仮説モデルをたて、それをデータによって検証するという考え方に基づいている。

構造式モデルによる分析の原理は単純である。調査や研究の仮説をもとに変数間の関係についてのモデルをパス図の形で作り、これを１次式の組み合わせである構造式の形式で表現する。この構造式から推定される各変数の関係を分

散共分散行列の値として計算する。これと実際に調査や実験で得られたデータの分散共分散行列の値を比較して両者が似ていればモデルは適切、似ていなければ不適切と判断するのである。なお、構造式モデルは以前には共分散構造分析と呼ばれていた。これはモデルを分散共分散行列で表現していたことに由来する。

構造式モデルによる分析のプログラムとして当初はLISRELが多く用いられていた。しかしLISRELは考え方が分かりやすい反面、制約が多く行列要素を表記することでモデルを記述しなければならないという複雑さが難点であった。これに対してEQS(Bentler, 1995)や統計パッケージSASに含まれるCALISは構造式を書くことでモデルの記述ができるという使いやすさがある。また、モデルへの変数やパスの選択を支援するLMテスト(Bentler, 1985)やWaldテスト(Bentler, 1985)が利用できるなどの利点があるので多く使われている。ここではこれらのプログラムを利用することを前提に論をすすめていく。

1－2．構造式

まず基礎となる構造式モデルについて、最も典型的な完全潜在変数モデル(complete latent variable model)をLISRELの考え方を用いて説明する(cf. Hayduk, 1987; Loehlin, 1998)。観測変数と潜在変数の関係の例としては調査データの分析によく用いられる多重指標モデルを取り上げる。このモデルでは独立変数と従属変数が共に潜在変数であり仮説はこの潜在変数間の関係として立てられる。各観測変数は潜在変数の測定指標として扱われる。図１の例では５つの観測変数のうち３つが潜在独立変数の指標、２つが潜在従属変数の指標

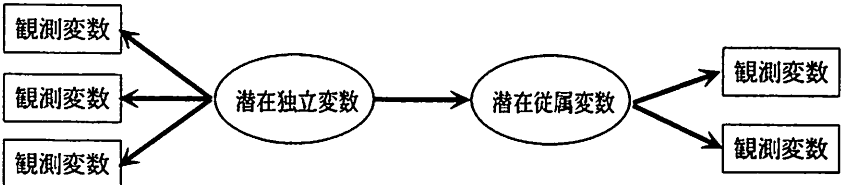
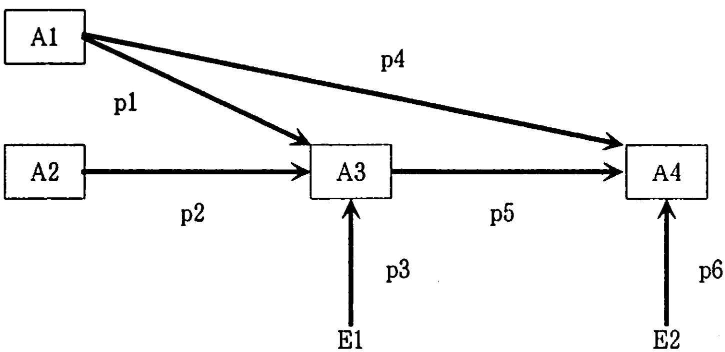


図１　多重指標モデル

となっている。

構造式モデルではパス図に表される変数間の関係を構造式(structural equation)によってあらわす。構造式ではパスの矢印の向かう先に位置している変数それぞれについて、パスの矢印の根元に位置している各変数による一次式を示すことで関係を表現する。ただし構造式では変数の分散や相関(共分散)は表現されない。図２には２つの独立変数Ａ１、Ａ２と媒介変数Ａ３、従属変数Ａ４からなる変数関係の例とその構造式による表現を示した。Ｅ１、Ｅ２は誤差変数である。



構造式

Ａ３＝p１Ａ１＋p２Ａ２＋p３Ｅ１

Ａ４＝p４Ａ１＋p５Ａ３＋p６Ｅ２

図２　構造式の例

１－３．変数

ある現象について分析する場合、重回帰分析やパス解析では説明変数(独立変数)も目的変数(従属変数)も共に実際に観測された変数であり、検討される関係は観測変数間の関係である。しかし、測定には誤差が含まれているので観測変数間の関係には誤差が大きな影響を与える。これは希薄化として知られている現象である。この誤差の影響を回避するには潜在変数を使う必要がある。

潜在変数を扱う分析としては因子分析が知られている。因子は直接観測のできない潜在変数である。しかし因子分析は潜在変数間の関係を扱う分析ではない。

変数間の関係の分析と潜在変数の利用というこの2つの考え方が構造式モデルによる分析には含まれている。構造式モデルではある現象についての仮説モデルを作る場合に観測変数と潜在変数の両方を含めることができる。構造式モデルを用いた多重指標モデルによる分析では実際の調査等で測定された変数を観測変数として扱い、これを直接には測定できない潜在変数(概念)の指標とする。これは因子分析において、測定された変数を因子負荷量に応じて潜在変数である因子の指標とするのと同じ考え方である。その上で観測変数ではなく潜在変数間の関係として仮説を立てて分析するのである。

構造式モデルでは、モデルに外から投入されモデル内では他の変数からの影響を受けない変数である外生変数と、モデルの中で他の変数からの影響を受ける変数である内生変数を区別している(図3)。この名称は経済学などでよく用いられているが、ここではそれぞれ独立変数と従属変数とみなしてよい。また、誤差変数以外の変数を一括して構造変数と呼ぶこともある。

内生変数 (endogenous variable) ……	観測変数、潜在従属変数、潜在媒介変数
外生変数 (exogenous variable)………	潜在独立変数、観測変数の誤差(error) 潜在変数の誤差(disturbance)

図3 構造式モデルの変数

構造式モデルによる分析がパス解析などより優れている点として、観測変数間の関係に比べて潜在変数間の関係の方が安定していることがあげられる。調査によって調べようとする一つの概念や現象について測定する指標は多数ある。例えばサラリーマンの収入について調べる場合でも測定する指標は年収、月収、税込み給料、手取り給料など様々である。このように指標がいろいろとある場

合にはどの指標を用いるかによって分析結果に大きな差が生じる。これはその指標独自の効果が影響するからである。

多数の指標から推定される潜在変数を用いてモデルを構成すれば、個々の観測変数による影響は受けにくくなる。構造式モデルでは潜在変数を用いることで指標に依存しない安定したモデルの検討をすることが可能になるのである。

1－4．測定モデル

LISRELでは、構造式を測定モデル(measurement model)と構造モデル（概念モデル）(structural model)に分けて考える(cf. Hayduk, 1987)。測定された変数と潜在変数の関係を表したモデルである測定モデルは次の式1、式2であらわされる。式の中の文字はそれぞれ行列またはベクトルを表している。

$$Y = \overset{\text{ラムダ}}{\Lambda} y \ \overset{\text{イータ}}{\eta} + \overset{\text{イプシロン}}{\varepsilon} \qquad \text{(式1)}$$

内生潜在変数の観測変数＝ f (内生潜在変数)＋誤差　　(式1')

$$X = \overset{\text{ラムダ}}{\Lambda} x \ \overset{\text{クサイ}}{\xi} + \overset{\text{デルタ}}{\delta} \qquad \text{(式2)}$$

外生潜在変数の観測変数＝ f (外生潜在変数)＋誤差　　(式2')

式1は観測変数Yが係数となる行列Λy（ラムダY）で示される影響を内生潜在変数η（イータ）から受けることを示している。ε（イプシロン）は誤差である。式1'はその考え方を示したものである。式2は観測変数Xが係数となる行列Λx（ラムダX）で示される影響を外生潜在変数ξ（クサイ）から受けることを示している。δ（デルタ）は誤差(error)である。式2'はその考え方を示したものである。

観測変数の値 ＝ 潜在変数の値 ＋ 誤差

と考えるとき、この誤差は観測変数の非信頼性（unreliability）にあたる(Hayduk, 1987)。これが0ならば観測変数の値は潜在変数の値と同じということになる。

1－5．構造モデル

潜在変数(概念)間の関係を示す構造式が構造モデル（概念モデル）である。構造式モデルによる分析では、調査や研究のテーマである仮説や因果関係は主に潜在変数(概念)間の関係として考えられる。次の式3が構造モデルをあらわす式である。

$$\overset{\text{イータ}}{\eta} = \overset{\text{ベータイータ}}{B\ \eta} + \overset{\text{ガンマクサイ}}{\Gamma\ \xi} + \overset{\text{ゼータ}}{\zeta} \qquad (\text{式}3\ )$$

内生潜在変数＝f(内生潜在変数)＋f(外生潜在変数)＋誤差　(式3')

式3は内生潜在変数η（イータ）が内生潜在変数η（イータ）同士による効果と外生潜在変数ξ（クサイ）の効果を受けることを示し、それぞれの影響の強さは係数となる行列B（ベータ)、行列Γ（ガンマ）に示される。ζ（ゼータ）は内生潜在変数の誤差(disturbance)である。式3'はその考え方を示したものである。このように構造式モデルでは観測変数ではなく潜在変数によって仮説を構成するので、測定の際の変動や観測変数の違いに影響されにくい一般的なモデルを立てることができるのである。

なお、CALISの手法の一つであるLINEQSでは、次のEQSモデル(Bentler-Weeks model)(Bentler & Weeks, 1980)を用いている。

$$\overset{\text{イータ}}{\eta} = \overset{\text{ベータイータ}}{\beta\ \eta} + \overset{\text{ガンマクサイ}}{\gamma\ \xi} \qquad (\text{式}4\ )$$

内生変数＝β(内生変数)＋γ(外生変数)　(式4')

β…… 内生変数間の関係を示すパスで構成される係数

γ…… 内生変数と外生変数の間の関係を示すパスで構成される係数

このモデルでは内生変数、外生変数について観測変数、潜在変数の区別は付けていない。ただし、数学的には式1～3と式4は互いにどちらからも導くことができるのでほぼ同じと考えてよい。EQSやCALISのLINEQSでは観測変数と潜在変数のどちらも式4の形式でモデルを記述する（cf. SAS, 1990）。

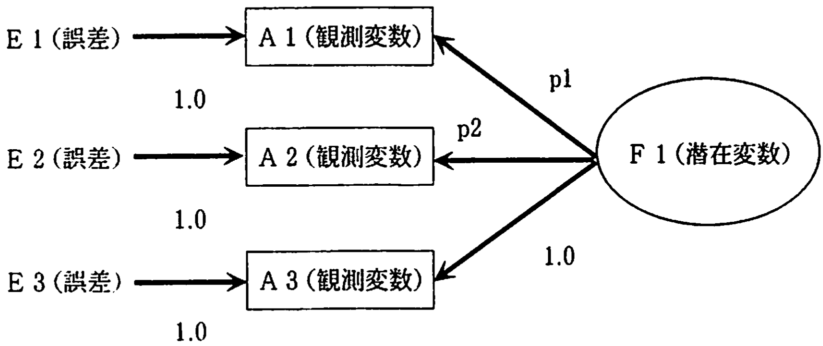
2．構造式モデルの作成

2－1．測定モデルの作成

調査データなどをもとに構造式モデルによって仮説を検討する場合は、測定モデルと構造モデルを記述することで仮説を変数間の関係のモデルとして表す。モデルは潜在変数と観測変数間のパス、および潜在変数間のパスを組み立てて作られる。

まず、ある概念を示す潜在変数を測定する際に指標としたいくつかの観測変数とその潜在変数の間にパスを設ける。これが測定モデルにあたる部分である。この場合、測定された値は概念を反映する指標と考えるのでモデルでは潜在変数が観測変数に影響を与えているとする。また、測定値には各種の誤差が含まれるがこれをモデルに表すために各観測変数がそれぞれ誤差(error)という変数の影響を受けていると考える。

なお、潜在変数の指標となる観測変数の少なくとも一つについてはその潜在変数からのパスを1.0に固定(fixed)する。また、誤差から観測変数へのパスは通常1.0に固定する。これらは後述する識別性を高めるためである。なお、モデルによっては誤差同士の間に共分散(相関)を設けることもある。図4は測定モデルの例であり、これに対応する構造式も示した。



測定モデルの構造式

A 1　＝　p 1 F 1 ＋ E 1
A 2　＝　p 2 F 1 ＋ E 2
A 3　＝　　F 1 ＋ E 3　……　パス値を1.0に固定
E 1　＝　s e 1　………　誤差E 1の分散
E 2　＝　s e 2　………　誤差E 2の分散
E 3　＝　s e 3　………　誤差E 3の分散

（p 1やs e 1はパラメータを示す。）

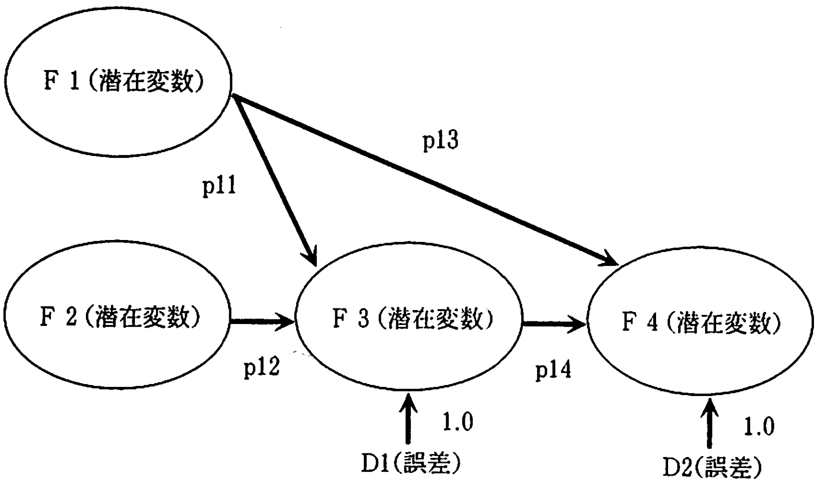
図4　測定モデルの例

2－2．構造モデルの作成

次に理論的に考えられる因果関係や相互の関係によって潜在変数間にパスを設ける。これが仮説そのものを示す部分であり構造モデル（概念モデル）にあたる。多くの場合、仮説における独立変数は外生潜在変数、従属変数や媒介変数は内生潜在変数としてモデルに入れられる。仮説は多くの場合潜在変数間の関係で示されるが、時には観測変数がそのまま仮説モデルに入れられることもある。例えば年令がモデルにおける独立変数となる場合には、観測変数である年令がその他の潜在変数に直接影響する形で仮説が組み立てられる。

また、内生潜在変数には他の変数によって説明されない部分つまり誤差が含まれるが、これをモデルに表すために内生潜在変数が誤差（disturbance）と

いう変数の影響を受けていると考える。この誤差からのパスは通常1.0に固定する。その他、外生潜在変数には必ず分散を設けてこれを1.0に固定する。これらは識別性を高めるためである。モデルによっては内生潜在変数の誤差間に共分散(相関)を設けることもある。図５は構造モデルの例であり、これに対応する構造式も示した。なお、図に表すときは外生潜在変数の分散を省略することが多い。



構造モデルの構造式

F 3 ＝ p11 F 1 ＋ p12 F 2 ＋ D 1
F 4 ＝ p13 F 1 ＋ p14 F 3 ＋ D 2
D 1 ＝ s d 1 ……… 誤差D 1 (disturbance)の分散
D 2 ＝ s d 2 ……… 誤差D 2 (disturbance)の分散
F 1 ＝ v f 1 ……… F 1 の分散(普通は1.0に固定する。)
F 2 ＝ v f 2 ……… F 2 の分散(普通は1.0に固定する。)

(p11やｓｄ１はパラメータを示す。)

図５　構造モデルの例

２－３．構造式モデルの制約

この２つのモデルを組み合わせたものが構造式モデルの全体であるが、現在

の構造式モデルではいくつか制約がある。構造式モデルでは内生変数(他の変数からパスを受けている変数)と外生変数(他の変数から全くパスを受けていない変数)をはっきりと区別するので、内生変数は他の内生変数と共分散(相関)を持てない。したがって、内生潜在変数間の相互の関係をモデル化する場合は内生潜在変数間を往復する2つのパスを設けることでモデル化する。

内生潜在変数間に関係がある場合でも、そのモデルでは測定も検討もしなかった別の変数が影響して内生潜在変数間に相関関係が生じている場合は、内生潜在変数間に共分散(相関)を設けるのではなく内生潜在変数の誤差 (disturbance) 間に共分散(相関)を設けることでこれをモデル化する。内生潜在変数の誤差は外生変数なので共分散を設けることができる。

また、外生潜在変数の観測変数と内生潜在変数の観測変数とははっきりと分けられているので、一つの観測変数は同時に外生潜在変数と内生潜在変数の両方の指標とはなれない。つまり内生潜在変数と外生潜在変数の両方からパスを受けることはできない。これも制約の一つである。調査や研究の仮説は、このような条件にしたがって作られた構造式で表現され、この構造式を検討することが仮説を検討することになるのである。

2－4．構造式モデルの図示

多くの場合、構造式モデルの図示は次の原則にしたがって行われる。モデルの図において観測変数は四角で囲い、潜在変数は楕円で囲う。誤差は囲まない。外生変数から内生変数、および内生変数同士の関係は矢印で示す。変数間の共分散(標準化されている場合は相関係数にあたる)を示す場合は双方向の矢印を用いる。ただしモデルにおいて共分散は外生変数同士の間にしか設けることはできない。

各変数の間の関係は標準化されたパス係数の値で示す。各変数名の表記についてアルファベットを用いる場合は各観測変数の誤差変数をＥ、各潜在変数の誤差変数をＤで示すのが一般的である。モデルの主要な潜在変数にＦで始まる

変数名をつけ、主要な観測変数にXで始まる変数名をつけることも多い。潜在変数の分散はVで示し、潜在変数自身との共分散なので、どちらの矢印もその潜在変数に向かうU字型の双方向矢印を付ける。しかし、モデルの数値を平均0、分散1にした「標準化されたモデル」の場合は分散が1になるので省略することが多い。

3．構造式モデルの検討の原理

3－1．最尤推定法

研究や調査の仮説を表現した構造式モデルを検討する方法はさまざま提案されているが、ここではデータが多変量正規分布している場合に有効な最尤推定法とそれによるパラメータの推定結果のχ^2値による適合度検定を取り上げて説明する。最尤推定法では、まず構造式で表現された仮説モデル上で、変数間のパスなどのパラメータに或る値を入れてみる。次に、それを母数と仮定した場合、実際に測定されたデータがそこからのランダムサンプリングによる標本として得られる尤度(確率)を計算する。もし尤度があまり高くなかった場合はパラメータを変えて尤度の計算を繰り返す。もし尤度の高いパラメータが得られたならば仮説モデルは正しかったと考える。このようにしてモデルの適切さを判断していくのが最尤推定法である。

計算には次のような観測変数間の分散共分散行列を用いる。完全潜在変数モデルの場合、式中のXは外生潜在変数の観測変数、Yは内生潜在変数の観測変数、COV(Y,Y)等は観測変数データの分散共分散の値、下線付きの$\underline{\mathrm{COV(Y,Y)}}$等はモデルから計算された分散共分散の値である。

$$\underset{(\text{データ}S)}{\text{分散共分散行列}}\quad S=\begin{pmatrix}\mathrm{COV(Y,Y)} & \mathrm{COV(Y,X)}\\ \mathrm{COV(X,Y)} & \mathrm{COV(X,X)}\end{pmatrix}$$

$$\underset{(\text{データ}\Sigma)}{\text{分散共分散行列}}\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{COV(Y,Y)}} & \underline{\mathrm{COV(Y,X)}}\\ \underline{\mathrm{COV(X,Y)}} & \underline{\mathrm{COV(X,X)}}\end{pmatrix}$$

計算ではまず、仮説モデルから観測変数間の分散共分散行列Σを求める。このΣを母数として多変量正規分布する母集団を仮定し、実際のデータである観測変数データ間の分散共分散行列Sがその母集団からのランダムサンプリングによって得られる可能性(尤度)を計算する。この尤度が最も大きくなるモデルを真のモデルの良い推定モデルとする。

この場合仮説モデルは変数間の関係をパスなどを示しているだけなので、パスの値や誤差の大きさなどのパラメータの値は自由に推定できる。そこでなるべく尤度が大きくなるように値をいろいろと試して最適なΣを推定する。実際にはSとΣが近いほど尤度が大きくなるので、S－Σの値である「残差」が最小になるようにΣの値を推定していく。

3－2．モデル推定の計算

多変量の正規分布をし、その分散共分散行列がΣである母集団からN個のサンプルデータをとったとき、そのデータの分散共分散行列がSとなる確率はWishart分布することが知られている。したがって、ある仮説モデルに基づく分散共分散行列がΣである母集団から、分散共分散行列がSであるようなデータが得られる尤度は次のように表される。

$W(S\,;\,\Sigma,\ n)$　ただし、$n=N-1$、Nはサンプル数。

この尤度が十分に大きいかどうかは次のようにして調べる。今、ある仮説モデルに基づく母集団の分散共分散行列ΣがSと等しい($\Sigma=S$)なら、このようなモデルから分散共分散行列Sのデータが得られる尤度は、

$$W(S\,;\,\Sigma,\ n)=W(S\,;\,S,\ n)$$

このモデルはSから見ると最適モデルであり、分散共分散行列Sが得られる

尤度は母集団がこのモデル($\Sigma = S$)の時に最大となる。したがってどのようなモデルΣに対しても次のようになる。

$$W(S\,;\,S,\ n) \geqq W(S\,;\,\Sigma,\ n)$$

この式に示される２つの尤度の比の対数をとると、

$$\log(\text{尤度比}) = \log \frac{W(S\,;\,\Sigma,\ n)}{W(S\,;\,S,\ n)}$$

この尤度比の対数はΣとSが等しいときに、$\log 1 = 0$となるが、それ以外の時は分母の方が大きいから尤度比は負の値、そして尤度比の対数も負の値となる。最尤法を用いた場合の尤度比の対数の式は次のようになる。（pは観測変数の数。trは行列のトレースつまり対角要素の和。)

$$\log(\text{尤度比}) = -\frac{1}{2}n\{\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) + \log|\Sigma| - \log|S| - p\}$$

この式の先頭の$-\frac{1}{2}n$をとったものがLISRELの適合性の指標 F（Fit criterion）である。

$$F = \mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) + \log|\Sigma| - \log|S| - p$$

先頭の$-\frac{1}{2}n$をとっているのでFの値は$\Sigma = S$の最適モデルの時に０、そのほかの時はプラスとなる。したがって、Fは０に近いほどデータSがモデルΣから得られる尤度が大きいという指標となる。また、この尤度比の対数に－２を掛けた値はχ^2分布するので、χ^2分布を使ってモデルを検定することが

できる。－２を掛けているので、このχ^2の値も$\Sigma = S$の最適モデルの時に０、そのほかの時は正の値となる。

$$\chi^2 = -2\left(-\frac{1}{2}n\{\mathrm{tr}(S\Sigma^{-1}) + \log|\Sigma| - \log|S| - p\}\right)$$
$$= nF$$

自由度$=\frac{1}{2}p(p+1)-$(推定するパラメータの数)………pは観測変数の数

３－３．χ^2検定によるモデルの検討

モデルが得られれば、その適合性の検討をχ^2検定で行う。クロス表や頻度データについてχ^2値を検定に用いるときはχ^2値が大きいと帰無仮説が棄却されることを利用することが多い。しかしモデルの適合性の検討では、χ^2値が小さいと仮説が棄却できないことを利用する。

χ^2値が小さい場合は実際のデータである分散共分散行列ＳがモデルΣに基づく母集団からのデータであるということを否定できない。つまり、Ｓというデータからはその仮説モデルが真のモデルであるということを棄却できない。したがって、この仮説モデルが真のモデルに近い可能性が高い、すなわち適合性が高いと考えられる。χ^2値が大きい場合はＳがモデルΣに基づく母集団からのデータではないといえるので、そのモデルが真のモデルであると言うことを棄却できる、すなわち適合性が低いといえる。なお、χ^2の自由度は式からもわかるように推定する自由なパラメータが少ないほど大きくなる。

χ^2検定は仮説モデルが棄却できないことを示すだけであり、そのモデルが最適であることを意味しないし、他に同じかそれ以上にデータＳに適合するモデルがある可能性も否定しない。χ^2値が小さいことは、データＳがモデルΣから確率的にえられる可能性が高いことを示しているだけである。このχ^2検定は、第２種の誤り（モデルがデータに適合しないことに気づかない誤り）に陥

る危険性が高いので積極的にモデルを採択するには危険率は少なくとも$p=.10$からp=.20程度以上あることが望ましいといわれている(Hayduk, 1987)。

3－4．χ^2値の問題点

χ^2の式ではnが掛けられているから、分散共分散行列Sを計算するためのデータの数が多いとχ^2値はすぐに大きくなりモデルを過敏に否定するようになる。したがってχ^2検定を用いるのであれば、データ数はχ^2の自由度の2～5倍、あるいは50～500位がよいと経験的に言われている(Hayduk, 1987)。データ数が1000以上であれば次章であげるRMSEA, GFIなどの方がよい(狩野, 1997)。

また数学的には、χ^2値は推定する自由なパラメータを増やすと（自由度が小さくなると）減少する。モデルを変える時に推定するパラメータを増やした場合はχ^2値が小さくなるが、その減少量がパラメータが増えたことによる数学的な減少量の期待値と同じ程度であれば、モデルを変えたことでモデルがよくなったとは一概には言えない。一般によいモデルとは少ないパラメータで説明できるモデルであるから、χ^2値を小さくするためにパラメータを増やすのは好ましくない。χ^2検定はパラメータ数が望ましいかどうかについての指標にはならないのである。

さらにχ^2値が検定に用いることができるのは、厳密には全ての変数が多変量正規分布し、データである分散共分散行列は標準化などの加工がされておらず、サンプル数もかなり多い、という場合に限られる。しかし実際にこの条件が満たされることは少ない。そのため、χ^2値は統計的な適合性の指標というよりもモデルの相対的なあてはまりを示すものと考え、モデルを選択する際の指標としてのみ使う人もある。

3－5．飽和モデルとnullモデル

構造式モデルによる分析の性質を理解するには、χ^2値が最小で適合性が最

も高いモデルとχ^2値が最大で適合性が最も低いモデルがどのようなモデルであるかを知ることが役立つ。あらゆる観測変数間にパスがあるというモデルを考えると、これは飽和モデル(saturated model)と呼ばれる。このモデルで尤度が大きくなるようにパスの値を最適化すると、最も尤度の大きくなるΣはSそのものとなる。この場合χ^2値は0になり、以下にあげる適合性指標も最高の適合度を示す。

多重指標モデルで普通に仮説として考えるモデルは飽和モデルからいくつかのパスを特定の値(多くの場合は0か1.0)に固定し、潜在変数を設けて潜在変数と観測変数の関係等を追加したモデルである。普通に仮説とするモデルでは推定する自由なパラメータは必ず飽和モデルよりも少ない。このような仮説モデルでは固定されていない自由なパラメータ値を変化させてSとΣとの差を小さくなるようにしても、パスのいくつかが固定されている限りΣはSと同じにはならない。したがって、このモデルでSの得られる尤度は飽和モデルよりも必ず小さくなりχ^2値は0より大きくなる。

しかし、飽和モデルはあらゆる変数の間に関係があるというものでありどのようなデータ(分散共分散行列)にでも適合する。飽和モデルは意味のあるモデルではない。研究によって求めるのは飽和モデルではなく推定するパラメータが少なく一般性の高いモデルである。

一方、観測変数間には全く関係がないというモデルを考えると、これはnullモデル(null model)または独立モデル(independence model)と呼ばれる。このモデルはSの得られる尤度が最も低いモデルでありχ^2値は最も大きな値となる。適合性指標は最低となる。普通に仮説として考えるモデルは、nullモデルにいくつか推定する自由なパラメータであるパスや誤差を加えたモデルである。このモデルでSの得られる尤度はnullモデルよりも必ず大きくなりχ^2値もnullモデルのχ^2値よりは小さくなる。

nullモデルは飽和モデルと同様に現実的には意味のないモデルであるが、飽和モデルが推定するパラメータ数が最大の最も複雑なモデルであるとすれば、

nullモデルは推定するパラメータ数が最小の最も単純なモデルであるといえる。この2つのモデルを両極端としてすべての仮説モデルはこの中間に位置するのである。

4．モデルの適合性

4－1．適合性の考え方

仮説モデルの統計的な適合性の検討にはχ^2検定が使われ、モデル間の比較にはχ^2値を用いたχ^2差の検定が用いられる。また、χ^2値がサンプル数の影響を強く受けることからχ^2検定以外にモデルの適合性を判定する記述的な指標がいくつか考案されている。χ^2検定とχ^2差の検定以外の指標は記述的なものであり数理統計的な意味はないが、モデルの適合性のよさを相対的に示す指標としてよく使われている。一般に指標としてよく用いられるのは、χ^2値、GFI、AGFI、RMSR、NFI、RMSEAなどである。

このように多くの指標が考案されているが、指標の違いには適合性に関するいくつかの考え方が反映されている(Loehlin, 1998)。統計プログラムでのモデルの計算は適合性の指標Fを最小にすることを目的としている。Fから計算されるχ^2値は仮説モデルにもとづく分散共分散行列Σと実際のサンプルデータSの類似性を反映する値である。適合性をこの類似性と考えてχ^2値を直接利用した指標は、χ^2検定、GFI、AGFIである。ΣとSの直接的な差である残差の大きさを適合性の指標としているのがRMSRである。nullモデルといった最低のモデルに比べて仮説モデルの適合性がどの程度高いかという相対的評価を適合性の高さとする指標は、NFI、NNFIである。

モデルを検討する際には推定する自由なパラメータが少ないほうが一般的で望ましい。これを考慮してモデルとデータの適合性を示す指標にパラメータ数の少なさを反映させる修正(parsimony adjustment)を加えて作られたのが、χ^2／df、AGFI、AIC、CIC、SBC、NNFI、PFIである。

Loehlin(1998)や狩野(1997)によれば、最近注目されている適合性の考え方

は、母集団に対する適合性(population-based fitness)である。従来の適合性の考え方はいずれも、サンプルデータであるＳに対して仮説モデルにもとづく分散共分散行列Σがどの程度近いかを考えている。この前提となっているのは、サンプルデータには変数間の真の関係が反映されているのでサンプルに適合するモデルは真のモデルに近いという考え方である。したがって、適合性といっても実際にはサンプルに対する適合性(sample-based fitness)である。例えばχ^2値はΣとＳの差を反映するものであり、これを利用する指標はすべてこのグループに属している。

これに対して母集団に対する適合性の考え方では、仮説モデルは母集団における変数間の関係についての真のモデルの近似の一つであると考える。適合性とは仮説モデルと真のモデルの差を示す概念であると考える。従来のχ^2値が反映しているΣとＳの差は、仮説モデルと真のモデルとの差とサンプルデータＳが母集団から抽出された際のサンプリング誤差の２つで構成されていると考える。したがって、この２種の差が混在しているχ^2値を利用した指標では仮説モデルと真のモデルとの差は検討できないと考える。

母集団に対する適合性では、仮説モデルと真のモデルの間の差の大きさを反映する数値として下記のｄに注目している(cf. Loehlin, 1998)。

$$d = \frac{\chi^2 - df}{N-1} \quad \cdots\cdots \ N\text{はサンプル数、}df\text{は}\chi^2\text{の自由度}$$

このｄを利用して作られているRMSEAは、母集団に対する適合性の指標と考えられている。

４－２．適合性指標

適合性の検討に使われる代表的な指標には以下のものがある。

χ^2検定(an overall χ^2 statistics)

モデルからの分散共分散行列の推定値Σと真のモデルの不偏推定値である実際に測定されたデータの分散共分散行列Sの違いについてχ^2値を用いて調べる検定。得られたモデルの適合性の検討に用いる。χ^2値が小さいとは、現在のデータSがモデルΣから導ける確率が高い、すなわち現在のデータSからはモデルΣを棄却できないということを示す。

χ^2値はデータ数が多いと大きくなりサンプルサイズの影響を受けやすい欠点がある。経験的にはχ^2値を用いるならば、50～500くらいのサンプル数がよいといわれる(cf. Bentler & Chou, 1987; Hayduk, 1987; Judd, Jessor, & Donovan, 1986)。

以下の指標は適合性の相対的な大きさを示す記述的なモデルの適合性の指標である。

χ^2／d f

χ^2値に比べて、χ^2値とχ^2の自由度の比は推定する自由なパラメータ数を考慮した指標となっており、モデルの相対的な適合性の比較に用いられる(Joreskog & Sorbom, 1989; Lomax, 1982)。χ^2の自由度が大きいことは推定する自由なパラメータの数が少ないことを示している。したがってこの指標の値が小さいモデルほど適合性が高く一般的なモデルということになる。

GFI(a goodness-of-fit index)

$$GFI = 1 - \frac{(S-\Sigma)'\ W\ (S-\Sigma)}{S'\ W\ S}$$ (Tanaka & Huba(1985)による式)

データの分散共分散行列Sの平方和のうち、モデルΣによって説明される割

合を示す指標である。値の大きいほど適合性の高いモデルといえる。GFI＞.90であればモデルが適合しているといわれる。GFIはサンプルサイズに対して敏感でないから、χ^2値よりもモデルの検討に有効である。

AGFI (an adjusted goodness-of-fit index)

$$AGFI = 1 - \frac{P(P+1)}{2df}(1-GFI)$$ ………dfはχ^2の自由度、Pは観測変数の数

推定する自由なパラメータが少ないほどモデルとしては一般性があって望ましいという考え方から、GFIに加えて推定する自由なパラメータの多さを考慮した指標である。モデルがより少ないパラメータで構成された一般的なものであることの指標として用いられる(Loehlin, 1998)。AGFIはモデルΣによって説明される割合が同じでもパスなどの推定する自由なパラメータが少ない（自由度が大きい）ほど大きい値となる。値の大きいほど適合性の高いモデルといえる。ただし、最終的に採用されたモデルが推定するパラメータの多いモデルであった場合には、GFIが高くてもパラメータ数の少なさを反映するAGFIは高くないというケースも当然生じる。サンプルサイズに対して敏感でないからモデルの検討に有効である。モデルが適合しているといわれるのはAGFI＞.90である。

RMSR、またはRMR (the root-mean-square residual)

データ行列SとモデルΣの差(S－Σ)の2乗の平均値の平方根。これは行列SとΣの各要素の差の平均値、つまりモデルで説明できない残差にあたるから直観的なモデルの適合性の指標といえる。値の小さいほど適合性の高いモデルといえる。飽和モデルではRMSR＝0となる。残差を示すこの値は小さいほど適合性が高いといえる。分散共分散行列間の差の指標なのでχ^2検定とは異な

りサンプルサイズによる影響は受けない。ただし推定する自由なパラメータ数が多いと（自由度が小さいと）値が小さくなる欠点がある。モデルが適合しているといわれるのはRMSR＜.10である。

NFI (the normed fit index) (Bentler & Bonett, 1980)

$$\mathrm{NFI} = \frac{\text{null モデルの}\chi^2\text{値} - \text{仮説モデルの}\chi^2\text{値}}{\text{null モデルの}\chi^2\text{値}}$$

NFIはnullモデル(独立モデル)と仮説モデルの相対的比較に基づく指標である。nullモデルとは観測変数間には関係がなく推定するパラメータは観測変数の分散のみ、という最小のモデルでありχ^2値は最大となる。仮説モデルのχ^2値はnullモデルのχ^2値より必ず小さくなるので、両者の差がどの程度大きいかによって適合性を測る。NFIは０～１の値をとり飽和モデルの時にはNFI＝１となる。値の高いほど適合性の高いモデルといえる。χ^2値間の比較であるからサンプルサイズの影響もやや受ける。モデルが適合しているといわれるのはNFI＞.90である。

NNFI (the non-normed fit index) (Bentler & Bonett, 1980)
またはTLI (the Tucker-Lewis Index)

NFIに加えて推定する自由なパラメータの多さを考慮した指標である。nullモデルのχ^2値をnull モデルのχ^2の自由度で割ったものと、仮説モデルのχ^2値を仮説モデルのχ^2の自由度で割ったものを用いて計算したNFIにあたる。NNFIは０～１の値をとる。飽和モデルの時にはNNFIは1.0となる。値の高いほど適合性の高いモデルといえる。サンプルサイズの影響はNFIよりもさらに受けにくい特徴を持っている。モデルが適合しているといわれるのはNNFI＞.90である。

PＦＩ，またはPＮＦＩ(the parsimonious fit index)

(James, Mulaik & Brett, 1982)

$$\mathrm{PFI} = \frac{\text{仮説モデルの}\chi^2\text{の自由度}}{\text{nullモデルの}\chi^2\text{の自由度}}\ \mathrm{NFI}$$

これも、NFIに加えて推定する自由なパラメータの多さを考慮した指標である。モデルがより少ないパラメータで構成された一般的なものであるかどうかの指標として用いられる(Loehlin, 1998)。NFIに仮説モデルのχ^2の自由度とnullモデルのχ^2の自由度との比を掛けているのでパスなどの推定する自由なパラメータが少ない（自由度が大きい）ほど値が大きくなるという特徴を持つ。値の大きいほど適合性の高いモデルといえる。これもサンプルサイズの影響はNFIよりも受けにくい。

AＩＣ(Akaike's information criterion)

$$\mathrm{AIC} = \chi^2 + 2\,(\text{推定するパラメータ数})$$

モデルに含める推定する自由なパラメータの最適な数を調べるのに使う。AICは値が最小のときにパラメータ数が最適であると考えられる。χ^2値は推定する自由なパラメータが多いほど小さくなるので、AICはパラメータ数が増加すると小さくなるχ^2値とパラメータ数のバランスを取った指標である。値が小さいほどパラメータ数の点で適合性の高いモデルといえる。同じサンプル内での複数のモデル間の比較には有効である。しかし、サンプル数の影響を受けやすいχ^2値を利用しているAICは、サンプル数が多いとパラメータ数に関わらず大きくなる欠点がありサンプル数の異なるデータ間の比較には使う場合は注意が必要である。

CIC(consistent information criterion)

$CIC = \chi^2 - (\log N + 1)\ df$ …… Nはサンプル数、dfはχ^2の自由度

SBC(Schwarz's Bayesian criterion)

$SBC = \chi^2 - (\log N)\ df$ …… Nはサンプル数、dfはχ^2の自由度

CICとSBCはAICと同じくモデルに含めるパラメータの最適な数を調べる指標であり、AICを改良してサンプル数Nの影響を考慮した指標である。サンプル数が多いときはAICより適切と言われる。CICもSBCも値が最小の時パラメータの数が最もよいと考えられるので、値が小さいほどパラメータ数の点で適合性の高いモデルといえる。

RMSEA(Steiger's root mean square error of approximation)

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi^2 - df}{N-1} \times \frac{1}{df}}$$ ……… Nはサンプル数、dfはχ^2の自由度

仮説モデルと真のモデルの近さを適合性と見なす母集団に対する適合性(population-based fitness)の考え方による指標。RMSEAは値が小さく0に近いほど適合性の高いモデルといえる。RMSEA≦.05であれば適合しているといわれる。 RMSEA≧.10の場合はモデルを修正すべきであるといわれる。式に自由度が含まれているのでモデルのパラメータ数の考慮が含まれており、推定すべき自由なパラメータの数が少ない（自由度が大きい）モデルほど値が小さくなる。サンプル数の影響は受けにくいとされている。

RMSEAが注目される最大の特徴は、モデルが適合しないという仮説を帰無仮説とした検討を行うことで仮説モデルが適合することを示すことができることである。その方法はRMSEAの90%の信頼区間を求めることである。信頼区

間はたとえば、0.0≦RMSEA≦.04といった値になる。この値の上限が.05より小さければ、RMSEAが.05より大きい、すなわちモデルが適合しないという帰無仮説を棄却することができる。つまりモデルが適合するという結論を導くことができるのである(cf. Loehlin, 1998)。

4－3．モデルのパスの値の検定

モデルの検討ではパスの推定値が0でないことも重要な手がかりである。もし推定値が0であればモデルの修正も考えなければならない。多くの計算プログラムでは、モデルのパスを示す構造式のパラメータの推定値に誤差とZ値も表示される。これを用いてパスの値が0であるという帰無仮説の検討ができる。Z値は以下の式で求められている。

$$Z = \frac{(\text{パラメータ推定値}) - (\text{null仮説のパラメータの値})}{(\text{パラメータの誤差})}$$

ただし、null仮説のパラメータの値は0である。

このZ値は、tの表で$df=\infty$の値で検定できる。厳密には自由度の値は、

自由度＝(サンプル数)－(推定するパラメータ数)

であるが、構造式モデルで検討するデータのサンプル数は100以上の場合がほとんどであるのでZをtと見なして$df=\infty$のtの表を使うことができる。この検定結果が有意であればパラメータは0ではないといえる。通常の両側検定ではZの値が1.96以上であれば5％水準で有意である。もしも有意でない場合にはこのパスを省略したモデルを検討することも考えられる。

4－4．決定係数

モデルの適合性は誤差も含めたモデル全体についての評価であるが、研究や調査の対象となった現象がそのモデルでうまく説明できることを示すものではない。多重指標モデルにおいてモデルが実際に有効であると主張するためには、モデルが適合しているだけではなく、モデルの潜在従属変数が誤差(disturbance)以外の変数によって十分に説明されることを示さなければならない。これは決定係数で判断することができる。一般に内生変数の分散は以下のとおりである。

内生変数の分散＝誤差以外の変数の効果による分散＋誤差分散

したがって内生変数の分散の何%が誤差以外の変数によって説明されているかを求めることができる。これが決定係数である。決定係数は内生変数である観測変数と内生潜在変数について求める事ができる。観測変数の決定係数はCALISでは観測変数の結果の項にあるR-squaredの値である。内生潜在変数は多くの場合モデルの目的変数（潜在従属変数）となっているので、その決定係数はモデルの説明力を示すことになる。内生潜在変数の決定係数は次の式で求められる。

内生潜在変数の決定係数＝１－内生潜在変数の誤差(disturbance)の２乗

この値が小さい場合には、モデルの適合性が高くてもそれは誤差によるところが大きいわけであり、モデルとして現象を説明する力は小さいことになる。

適合性が高くても従属変数の決定係数が低ければ有効なモデルではないし、適合性が低い場合は決定係数が高くても意味はない。決定係数は適合度と並ぶ重要なモデルの評価基準である。

4－5．識別性の問題

構造式モデルによる分析とは、測定モデルと構造モデルといった式で示される変数間の関係に基づいてパラメータの値を求めることである。このように複数の式からパラメータの値を求める際には識別性の問題(identification problem)が生じる(cf. Hayduk, 1987; 狩野, 1997; SAS, 1990; 豊田, 1998)。

識別性の問題とは単純な方程式を例にすると次のような問題である。今、以下の方程式のように２つの変数(パラメータ)について２つ式（データ）がある場合、変数の値を求めると a=6、b=4と決まる。

$$a + b = 10$$
$$a - b = 2$$

この状態を丁度識別(just identified` または saturated)という。これは推定する自由なパラメータ数（aとbの２個）とデータの個数（10と2の２個）が等しい場合である。算数の問題に出てくる方程式はこの形式になっているので解を求めることができる。

次のように２つの変数(パラメータ)に対して３つの式（データ）がある場合には式を完全に満たすaとbの値は決まらない（不能)。しかし近似的な値を推定することは可能である。この状態を識別(overidentification)という。これは推定する自由なパラメータ数（aとbの２個）に比べてデータの個数（10と2と20の３個）が多い場合である。この例で近似的な値を求めると、どの式も±２の違いでおさまる a=6、b=6がよい推定値となる。

$$a + b = 10$$
$$a - b = 2$$
$$a + 2b = 20$$

構造式モデルによる分析も基本は複数の式に基づくパラメータの推定である。計算においては、この識別の状態を利用してモデルΣがデータSに近くなるようにパラメータの最尤推定を行なっているのである。構造式モデルにおけるデータは観測変数間の分散共分散行列である。この分散共分散行列でのデータ数(データポイントの数)は次の通りである。対角要素を含んだ下三角行列の要素数と考えてもよい。

$$\text{データポイントの数} = \frac{1}{2}P(P+1) \cdots\cdots\cdots P\text{は観測変数の数}$$

したがって構造式モデルでは推定する自由なパラメータの数はこのデータポイントの数未満でなければならない。モデルの適合性を検討する際のχ^2検定の自由度は、このデータポイントの数と推定する自由なパラメータの数の差である。

一方、次の式のように3つの変数(パラメータ)に対して2つの式（データ）しかない場合には式を満たすa, b, cの値は色々な値をとりうるので決まらない（不定)。これは推定する自由なパラメータ数（a, b, cの3個）に比べてデータの個数（10と8の2個）が少ない場合である。

$$a + b = 10$$
$$a + c = 8$$

このようなケースを識別不定(underidentification)という。これは識別の状態と異なり、式を満たすa,b,cの組み合わせは無限にありしかも同じくらい確からしいので近似的な値を推定することもできない。識別性の問題とはこの状態を指している。

4－6．モデルにおける識別性

構造式モデルでデータポイント数が推定する自由なパラメータ数を下回るケースでは、モデル全体として識別不定(underidentification)となりパラメータを推定することができない。このような識別性の問題が生じた場合は、モデルを修正して自由なパラメータのいくつかを0や1.0または特定の値に固定して識別不定の状態を解消しなければならない。

最も単純な識別性の問題は指標となる観測変数が1つしかない潜在変数というモデルで生じる。この場合、観測変数の誤差の分散と潜在変数から観測変数へのパスという2つの自由なパラメータがある。しかし、データポイントは観測変数の分散の1つだけであり識別不定となる。この対策としては、潜在変数から観測変数へのパスを1.0または他で求めた値（例えば因子負荷量の値）に固定して丁度識別(just identified)とする方法がある。さらに誤差分散も0にする、つまり観測変数と潜在変数を等しいとすれば識別(overidentification)の状態となりいずれも識別性の問題は回避できる。

観測変数が2つの潜在変数のモデルでも識別性が問題となる。ここでは推定する自由なパラメータは観測変数の誤差の分散2つ、潜在変数から各観測変数へのパス2つの4つ、データポイントは各観測変数の分散2つと両者の共分散の計3つであり識別不定となる(Bentler & Chou, 1987)。対策としては潜在変数から各観測変数へのパスを他で求めた値（例えば因子負荷量の値）に固定する、または主要な方の観測変数へのパスを1.0に固定するなどの方法がある。一般に測定モデルで識別性の問題を回避するためには1つの潜在変数に対する観測変数を3つ以上にする必要がある。

さらに観測変数の数に関わらず、潜在変数は直接にデータからの制約を受けないため尺度(値の単位の大きさ)が識別不定となり定まらなくなる。これについては習慣として、独立変数となる外生潜在変数についてはその分散を1.0に固定し、従属変数や媒介変数となる内生潜在変数についてはその指標である観測変数へのパスのうち少なくとも1つを1.0または従来の研究で分かっている

値に固定するという方法で解決されることが多い (Hayduk, 1987; Joreskog & Sorbom, 1982)。

識別性の問題の有無はモデルがほぼ適合した後で別の初期値を使って再計算をするとわかる。もしこの場合にχ^2値は同じでも推定値が異なった値となるパラメータがあれば、その部分で識別性の問題が発生していると考えられる (Hayduk, 1987)。

5. モデルの修正

5－1. 修正の指標

モデルの適合度や解を求める計算が収束しない、収束はしたが解が得られない、パスや分散の推定値が非常識な値になるという事態は構造式モデルの分析では珍しくない。その原因がデータの分散共分散が0に近いという根本的なものであれば観測変数を変えてデータを取り直すことになるが、多くの場合は構造式モデルの内容に原因がある。

構造式モデルにおいては、パスや誤差といった推定する自由なパラメータの数がデータポイントの数よりも多いという識別性の問題の発生が適合性を低くする原因であることはかなり多い。この場合はモデルの構造式を点検して仮説が構造式で正確に表現できているか、分散、誤差、共分散などの設定漏れや変数名の誤記がないかどうかを調べ、ミスによって識別性の問題が発生していないかを調べる。ミスがない場合は、そもそもパラメータが多すぎて識別のできない無理なモデルではなかったかを調べる。もしこのようなモデルの欠陥が原因でなければ測定モデルや構造モデルの内容に原因があるということになるので、測定モデルにおける観測変数の見直しや仮説を示す構造モデルの内容の修正などが必要になる。

構造式モデルの計算はあるモデルΣにおける推定値とデータSを比較することであるから、モデルΣがよくない場合はどのような推定値を持ってきてもあ

る程度以上データSに近い値にはならない。このようにモデルの適合性が低い場合、理論的な説明が可能であれば0に固定していたパスを自由なパラメータにしたり、自由なパラメータを0に固定したりすることでモデルを修正することになる。修正する場合は、1つの修正によって適合性の高いモデルがえられた場合でも、さらに修正を加えてよりよいモデルが得られるかどうかを検討する必要がある。

モデルを修正する際にパスやパラメータの変更の手がかりとなる指標には以下のものがある。ただしこれらの指標が理論的説明のつかないパスの設定を示唆したり、潜在変数の誤差分散同士の相関、観測変数の誤差同士の相関、観測変数から複数の潜在変数へのパスといった特殊なパラメータの追加を示唆しても、合理的で論理的な根拠がなければ従うべきでないのは言うまでもないことである。

χ^2差の検定(χ^2 difference tests)

もし、比較する2つのモデルAとBがnestedの関係（モデルAは、モデルBに推定する自由なパラメータであるパス等をいくつか追加したものという関係）にあるならば、モデルBのχ^2値からモデルAのχ^2値を引いた値をχ^2値、モデルBのχ^2の自由度からモデルAのχ^2の自由度を引いた値を自由度としてχ^2検定を行なうことができる。ただし、ここでのモデルAは固定されていたパス等を推定する自由なパラメータにしたもの（モデルの図上では矢印などを追加したもの)、モデルBは固定されたパスが多い（モデルの図上では矢印の数などが少ない）モデルをさす。

このχ^2検定が有意であれば、新しいモデルにしたことで有意にモデルの適合性が高くなったといえる。パスなどを追加することに意味があり新しいモデルのほうが良いことになる。χ^2検定が有意でなければ、新しいモデルにしてもモデルの適合性は高くならないといえる。パスなどの追加に意味はなく元のモデルで良いことになる。これはLM検定、Wald検定の原理でもあり、モデル

を修正する際に最も有効な方法である。

階層的（hierarchical）χ^2検定

階層的χ^2検定とはχ^2差検定の原理を用いて互いにnestedの関係にあるモデル間の統計的な比較を行う手法である。現在のモデルから出発して１つずつまたは２～３のパラメータを増減してはχ^2差の検定を行なうという手続きを繰り返すことで、理論的に裏付けをすることのできるモデルの中で最も適合性の高いモデルを求めていく。測定モデルを確定した後で構造モデルを検討する際によく用いられる。

Wald 検定（Bentler, 1985）

現在のモデルにある推定する自由なパラメータをモデルから省いて(パラメータの値を０などに固定して)新しいモデルを作った場合に生じるχ^2値の増加量に基づく検定。推定する自由なパラメータを減らすと数学的にはχ^2値が少し増える。このχ^2値の増加量をχ^2値とし、減らしたパラメータの数をχ^2の自由度としてχ^2検定を行なうのがWald検定である。

パスを１つ減らした場合ならχ^2値の増加量を自由度１で検定する。これが有意でない(p が.05より大きい)ならば、そのパスは固定してもχ^2値はほとんど増えないということになる。一般にモデルは単純なほうがすぐれている事から考えると、この検定結果はこのパラメータを０などに固定したほうがよいという示唆を与える事になる。もし、この検定が有意（$p < .05$）ならそのパラメータを０などに固定するとχ^2値が大きくなる、すなわちモデルの適合性が低くなる事を示すので、このパラメータは固定しないで自由なパラメータとしておいたほうがよいという示唆を与える事になる。構造式の図で言えば、Wald検定は既存のパスを削除するかどうかの検討に使われるといえる。

LM検定（Bentler, 1985）

現在のモデルで0などに固定しているパスなどのパラメータを推定する自由なパラメータとしてモデルに加えた新しいモデルを作った場合に生じるχ^2値の減少量に基づく検定。推定する自由なパラメータをモデルに加えると数学的にはχ^2値は少し減る。このχ^2値の減少量をχ^2値とし、増やしたパラメータの数をχ^2の自由度としてχ^2検定を行なうのがLMテストである。

パスを1つ増やした場合はχ^2値の減少量を自由度1で検定する。これが有意（$p<.05$）ならパラメータを増やしたことで適合性が高くなることを示すのでそのパスを加えたほうがよいという示唆を与える。有意でないならばパラメータを増やしてもχ^2値は減少しないということになる。モデルは単純なほうがすぐれている事から考えると、この検定結果はこのパラメータを加えない（固定しておく）ほうがよいという示唆を与える。CALISのLM検定ではパスなどのパラメータをモデルに追加した場合のパラメータの推定値(parameter change)も計算される。構造式の図で言えば、LM検定はパスを新たに追加するかどうかの検討に使われる。

残差の分布（Bentler, 1985）

χ^2値ではなくSとΣの残差を利用した指標。モデルの適合性が高い場合はSとΣの各行列要素の残差は誤差によると考えられるので、その大きさはほとんど－2から＋2の範囲に入り0のまわりに固まって分布すると期待される。したがって、残差が大きく0から離れた値をとる行列要素があれば、その要素に関わる変数がモデルの中で不適当に位置づけられている可能性がある。測定モデルの修正では特にこれが重要な手がかりとなる。

5－2．測定モデルの検討

モデルが適合しない場合には、構造モデルすなわち仮説に問題がある場合と測定モデルが不十分なため潜在変数が仮説における概念を反映していない場合

がある。したがって、モデルを修正する場合にはモデル全体を一度に検討する1段階法ではなく、測定モデルの部分をまず検討し、そこに問題がなければ構造モデルを検討するという2段階法が望ましいとされている(Anderson & Gerbing, 1988)。

適合性を高めるための測定モデルの検討では、潜在変数から観測変数へのパスの推定値が十分に大きいことをまず確認する。パスの値が小さい観測変数は潜在変数の十分な指標でないばかりか、潜在変数の内容が仮説における概念と相違する危険ももたらす。さらに、以下に示す疑似χ^2検定や観測変数間の残差の分析をはじめ、観測変数と潜在変数の関係についてのLM検定、Wald検定を用いることで、観測変数の適切さや観測変数を誤った潜在変数に関係づけていないかを調べることができる。

これらを手がかりにすることで観測変数を削除する、観測変数を別の潜在変数に関係づける、観測変数の誤差間に相関をつけるなどの修正を行ってモデルの適合性を改善することができる。ただし、修正によって適合性を高めることができても理論的な根拠がない限り修正するべきではない。また、安易に誤差間に相関を付けるとモデルの意味が失われることもある(Bagozzi, 1983; Fornell, 1983; Gerbing & Anderson, 1984)。なお、測定モデルについては、例えχ^2の値が高く有意であってもNFIが高くRMSRが小さいならば適合していると考えてよいといわれる(Anderson & Gerbing, 1988)。

適合性のほかに、各観測変数と潜在変数の間の識別性の問題も検討する必要がある。適合性が高いモデルでも識別性の問題があるケースがかなりある。測定モデルでは1つの潜在変数の指標となる観測変数が3つ以上なら問題はないが、3未満の場合は必要な数だけパラメータを固定していることを確認しなければならない。

疑似χ^2検定(a pseudo chi-square statistic) (Bentler & Bonett, 1980)

疑似χ^2検定は適合性が低い場合に測定モデルを検討するために行なう。あ

る測定モデルのもとですべての潜在変数間にパスがあるという構造モデルを作ると、これは飽和構造モデル(saturated structural model)と呼ばれる。これは、その測定モデルのもとで最もχ^2値が小さいモデルである。このモデルのχ^2値と最も自由度の大きいnullモデルのχ^2の自由度を用いて擬似的にχ^2検定をおこなうのが疑似χ^2検定である。

飽和構造モデルはその測定モデルのもとで最も適合性の高いモデルであるから、疑似χ^2検定が有意であればどのような構造モデルも適合しないことになる。つまり測定モデルに重大な問題があるということになるので、観測変数と潜在変数の関係を見直さなければならない。疑似χ^2検定が有意でないならば、測定モデルにはあまり大きな問題がなく構造モデルの方にかなり問題があることを示すので、測定モデルよりも構造モデルの検討が優先されることになる。

正規化残差(normalized residuals)、標準化残差(standardized residuals)
(Anderson & Gerbing, 1988)

測定モデルの修正ではSとΣの行列要素の残差を正規化した正規化残差(normalized residuals)や標準化した標準化残差(standardized residuals)の大きさが判断材料となる。同じ潜在変数に関係づけられている観測変数aとbの間の残差が小さいならば、これらの観測変数はその潜在変数の妥当な指標であるといえる。しかし、残差が大きな負の値(例えば正規化残差が−2以下)であれば両者は同じ潜在変数に関係づけるべきでない。また、別々の潜在変数に関係づけられている観測変数aとbの間の残差が大きな正の値(例えば正規化残差が2以上)であれば両者を同じ潜在変数に関係づけることも考えられる。

例えばモデルで観測変数a, b, cが潜在変数Aに結び付けられていても、観測変数cが観測変数a, bとの間で大きな負の残差を持つなら観測変数cは潜在変数Aの指標としては不適切でありモデルから省くべきである。しかし別の潜在変数Dの観測変数dと、この観測変数cとの間に大きな正の残差があるならば観測変数cを潜在変数Dの指標として関係づけることができる。また、潜

在変数Aの指標である観測変数 a が潜在変数Eの指標である観測変数 e に対して大きな正の残差を持つならば、観測変数 a は潜在変数Aだけでなく潜在変数Eの指標としても関係づけることができる。

5－3．構造モデルの検討

測定モデルを修正しても適合性が高くならない場合や測定モデルには問題がない場合は、仮説を表す構造モデルを修正することになる。構造モデルを修正することは仮説を修正することであるから、修正に際しては理論的な裏付けには特に注意が必要である。

構造モデルの検討の考え方を理解するには、最も複雑な構造モデルと最も単純な構造モデルを知ることが役立つ。多重指標モデルで仮説を作る場合、すべての潜在変数間に互いにパスがあるというモデルは飽和構造モデル(saturated structural model) と呼ばれる。これは仮説を構成する変数間すべてに関係があるという最も複雑な構造モデルである。このモデルでは、尤度は最も高くなりχ^2値は最小となる。

一方、観測変数と潜在変数間のパス(測定モデル)はあるが潜在変数間のパス(構造モデル) がすべて 0 に固定されているモデルはnull構造モデル(null structural model)と呼ばれる。これは仮説を構成するはずの主要な変数間にまったく関係がないというもっとも単純な構造モデルである。このモデルでは、尤度は最も低くなりχ^2値は最大となる。

普通に仮説として考えるすべての構造モデルは一部のパスが 0 に固定され、残りのパスが推定する自由なパスになっているのでnull構造モデルと飽和構造モデルの間に位置する。χ^2値も両者の間になる。このnull構造モデルと仮説モデル、仮説モデルと飽和構造モデルは互いにnestedの関係にある。構造モデルを検討する場合にはこの性質を利用して、仮説モデルを修正しながらχ^2差の検定によって比較していく階層的χ^2検定を用いて適合性の高いモデルを求めていく。実際には同じχ^2差の検定に基づくLM検定やWald検定を用いて順

番に構造モデルを改良していくことが多い。

ただし時には適合性が低い原因として、未知のまたは今回そのモデルでは導入しなかった別の変数(例えば年令)がモデル全体に影響している場合がある。この可能性があるときは影響を受けている可能性のあるすべての外生変数間に互いに共分散を設ける。具体的には観測変数の誤差間、および内生潜在変数の誤差（disturbance）間に互いに共分散を設けることで、この変数の影響をモデルに織り込むことができる(Anderson & Gerbing, 1988)。

構造モデルでも適合性のほかに識別性の問題を検討する必要がある。構造モデルでは、独立変数となる外生潜在変数の分散を1.0に固定し、従属変数や媒介変数となる内生潜在変数から観測変数へのパスのうち少なくとも１つを1.0などに固定することが識別性の問題を回避するために最低限必要である。

適合性が高い場合でも、別の初期値を使ってモデルを再計算した場合にχ^2値は同じでパラメータの推定値が異なっていれば、モデルのその部分で識別性の問題が発生している可能性が高い。識別性の問題が生じた場合は、いくつかのパスを０などに固定して構造モデルを簡単なものにする必要がある。構造モデルをそのままにして識別性の問題を解決したいのであれば、観測変数を増やしてデータポイントの数を増やすという根本的な解決方法もある。

構造モデルの修正を繰り返している際に、潜在変数に対する複数のパスの値がシーソーのように相補的に変動する場合も識別性の問題が発生している。２つの潜在変数が相互に直接影響し合うパスを持つモデルはこのような識別性の問題が発生しやすい例である。この場合は片方の変数のみに影響する別の変数、パス、共分散などを導入して対称的な関係を崩す必要がある（Hayduk, 1987)。

構造モデルの修正は上記の指標などを用いて行なうのが一般的であるが、一定以上の適合度がえられた場合に、モデルが本当に適合しているかどうかを確認する最も基本的な方法は独立した別のサンプルで検討することである。ただし別サンプルを得ることは困難であるので現実に最もよい確認方法はサンプルを２分割して１つのサンプルで検討して支持されたモデルをもう１つのサンプ

ルで再検討することである(Anderson & Gerbing, 1988; Moreland & Scott, 1992)。これによって、モデルが妥当なものであるかどうかを知ることができる。

構造モデルに修正を繰り返してもモデルのあてはまりが一定以上にならない場合には、もう一度測定モデルについて各観測変数が潜在変数の適切な指標になっているのかを検討する必要がある。疑似χ^2検定や残差の大きさは必ずしも測定モデルが正しいことを証明するものではないからである。特に指標となる観測変数の少ないモデルの場合は潜在変数の内容が仮説上の概念と異なっている可能性があるので、観測変数を増やして再検討するほうが良い場合もある。

測定モデルと構造モデルを十分に検討しても適合性が低いかまたはパラメータの推定値が現実に対応していない場合は、調査や研究の出発点に帰って仮説が妥当であるかどうかを理論的に再検討することも重要である。

6. さいごに

構造式モデルによるモデルの構成、評価、修正についての方法と問題点を示してきたが、調査データの分析などでは構造式モデルによる分析は非常に有用である。構造式モデルを用いれば変数間の関係を概念間の関係に一般化できる。観測変数の誤差の影響を回避できる。仮説の確かさを決定係数と適合性の両面から評価できる。このような特性のおかげで仮説モデルを今まで以上に深く検討することができるのである。

しかし、他の数学的手法と同じく構造式モデルによる分析だけではモデルに実際にどの程度意味があるのかはわからない。この手法はあるモデルが数学的にデータの共分散行列にあてはまりがよいかどうかを調べているだけである。しかも、あてはまりがよい事を判定する指標が非常に多く、何が適切な指標かについての結論はない。厳密にいえば構造式モデルによる分析はモデルがデータによって支持されることを示すのではなく、モデルがデータによって棄却さ

れないことを示すだけである。

あるデータについて数学的にあてはまりのよいモデルは一つとは限らない。χ^2値や他の指標の値が仮説のモデルと同じくらい高い別のモデルを作ることはいつでも可能である。したがってこの手法を用いる場合は、モデル検討において最も重要な判断基準はそれらが理論的に妥当であるかどうかであり、各種の適合性や修正の指標ではないことを常に考えておかねばならない。

参考文献

Anderson, J. C., & Gerbing, D. W. (1988). Structural equation model in practice: A review and recommended two-step approach. *Psychological Bulletin*, 103, 3, 411-423.

Bagozzi, R. P.(1983). Issues in the application of covariance structure analysis: A further comment. *Journal of Consumer Research*, 9, 449-450.

Bentler, P.M.(1985). *Theory and Implementation of EQS, A Structural Equations Program, Manual for program version 2.0 with addition for version 2.1.* Los Angeles, CA: BMDP Statistical Software, Inc.

Bentler, P.M.(1995). *EQS Structural Equations Program Manual.* CA: Multivariate Software, Inc.

Bentler, P.M., & Bonett, D. G. (1980). Significance tests and goodness of fit in the analysis of covariance structures. *Psychological Bulletin*, 88, 588-606.

Bentler, P.M., & Chou, C. P. (1987). Practical issues in structural modeling. *Sociological Methods and Research*, 16, 78-117.

Bentler, P.M., & Weeks, D. G. (1980). Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, 45, 289-308.

Fornell, C.(1983). Issues in the application of covariance structure analysis: A comment. *Journal of Consumer Research*, 9, 443-448.

Gerbing, D. W. & Anderson, J. C.(1984). On the meaning of within-factor correlated measurement errors. *Journal of Consumer Research*, 11, 572-580.

Hayduk, L. A.(1987). *Structural equation modeling with LISREL*. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press.

James, L. R., Mulaik, S. S., & Brett, J. M. (1982). *Causal analysis*. Beverly Hills, CA: Sage.

Joreskog, K.G. & Sorbom, D.(1982). Recent developments in structural equation modeling. *Journal of Marketing Research*, 19, 404-416.

Joreskog, K.G. & Sorbom, D.(1989). *LISREL-VII User's Reference Guide*. Mooresville, IN: Scientific Software.

Judd, C. M., Jessor, R., & Donovan, J. E. (1986). Structural equation models and personality research. *Journal of Personality*, 54, 149-198.

狩野　裕(1997). グラフィカル多変量解析. 現代数学社.

Loehlin, J. C. (1998). *Latent variable models: An introduction to factor, path, and structural analysis*. 3rd edition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lomax, R.G.(1982). A guide to LISREL-type structural equation modeling. *Behavior Research Methods and Instrumentation*, 14, 1-8.

Moreland, R. L., & Scott, R. B. (1992). Exposure effects in the classroom: The development of affinity among students. *Journal of Experimental Social Psychology*, 28, 255-276.

SAS (1990). *SAS Technical Report P-200, SAS/STAT Software: CALIS and LOGISTIC Procedures, Release 6.04*. Cary, NC: SAS Institute Inc.

Tanaka, J. S., & Huba, G. J. (1985). A fit index for covariance structure models under arbitrary GLS estimation. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 38, 197-201.

豊田秀樹(1992). SASによる共分散構造分析. 東京大学出版会.

豊田秀樹(1998). 構造方程式モデル ー共分散構造分析入門編. エーアンドエー株式会社.

The basics and model examination methods of a multiple indicator model in structural equation model.

Wataru Ide

In this article, the practical guidance for researchers on the construction and evaluation of a multiple indicator model, one of the models in structural equation modeling (SEM), is provided. Using this method for survey data, it is useful for assessing and modifying theoretical models. In structural equation modeling, the hypotheses are described as a system of linear structural equations with latent variables. The differences between covariance matrix of observed variables and corresponding covariance matrix calculated from structural equations are minimized by seeking values for the unknown parameters in the equations using maximum likelihood criterion. An approximate chi square and other goodness-of-fit criteria are used to search for the best fitting solution. The best fitting model represents the explanation of the observed data. The comparative advantages and disadvantages of several descriptive fit indices, including recently developed RMSEA, are discussed. As to identification problem, simple tests for locating the sources of underidentification and adjustment methods are introduced. Considerations in model specification, assessment of fit, and respecification of models by a two-step model approach are reviewed.