



小型化・高電力密度化を実現する車載用電力変換器の制御系設計に関する研究

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2022-07-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 川上, 太知 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00017764

大阪府立大学博士論文

小型化・高電力密度化を実現する
車載用電力変換器の制御系設計に関する研究

2022年2月

川上 太知

目次

第1章	緒論.....	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	4
1.3	本論文の概要	5
	参考文献	7
第2章	DC-DC コンバータの制御系	9
2.1	緒言	9
2.2	状態平均化法による DC-DC コンバータの動作解析	9
2.2.1	各状態における昇圧型 DC-DC コンバータの回路方程式.....	10
(1)	Mode.1 : $Q_1 = \text{ON}$	11
(2)	Mode.2 : $Q_2 = \text{OFF}$	11
(3)	各状態方程式及び出力方程式のまとめ	12
2.2.2	デューティ比を用いた状態方程式及び出力方程式の平均化	12
2.2.3	静特性 (定常解析)	13
2.2.4	動特性 (小信号解析)	15
2.2.5	ラプラス変換による周波数領域への変換	15
2.2.6	伝達関数の導出	19
(1)	伝達関数 $\frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)}$ の導出	19
(2)	伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)}$ の導出	21
(3)	伝達関数 $\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)}$ の導出	23
(4)	伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)}$ の導出	24
2.2.7	導出した伝達関数のまとめ	27
2.3	スイッチング電源の制御系	32

2.3.1	電圧モード制御	32
(1)	PWM 変調ゲイン F_m	33
(2)	一巡伝達関数 $T(s)$	34
(3)	出力インピーダンス $Z_o(s)$	35
(4)	入出力特性 $A_u(s)$	37
2.3.2	電流モード制御	38
(1)	一巡伝達関数 $T(s)$	39
(2)	出力インピーダンス $Z_o(s)$	41
(3)	入出力特性 $A_u(s)$	43
	参考文献	46
第3章	低次元化モデリング手法.....	47
3.1	緒言.....	47
3.2	従来のマルチフェーズ方式における伝達関数の導出.....	48
3.3	提案手法による数学モデルの低次元化.....	49
3.3.1	提案手法の説明.....	49
3.3.2	提案手法の数学的考察.....	51
3.3.3	提案手法の一般化.....	53
3.4	シミュレーションによる動作確認.....	53
3.4.1	周波数特性の比較.....	53
3.4.2	過渡特性の比較.....	59
3.5	結言.....	59
	参考文献.....	62
第4章	電力平衡モード制御.....	63
4.1	緒言	63
4.2	電力平衡モード制御	63
4.3	電力平衡モード制御の構成	66
4.4	動作原理	67
(1)	$I_L^* > I_L$ の場合.....	68
(2)	$I_L^* < I_L$ の場合.....	68

(3) $I_L^* = I_L$ の場合.....	68
4.5 デジタル方式電力平衡モード制御の設計	69
4.5.1 電圧補償器 $G_c(s)$ の設計	70
4.5.2 インダクタ電流の検出点.....	71
4.5.3 制御アルゴリズムの注意事項.....	73
4.6 PBMC と従来制御方式との比較	73
4.6.1 制御ループの周波数特性.....	73
4.6.2 出力インピーダンスの周波数特性.....	75
4.6.3 負荷過渡応答特性.....	77
4.6.4 制御帯域の変化に伴う速応性の比較.....	79
4.7 結言	80
参考文献	81
第5章 結論.....	82
参考文献一覧.....	84
謝辞.....	89

第1章 緒論

1.1 研究背景

近年、エネルギー資源の枯渇化や地球温暖化といった地球環境問題が大きく取り上げられている。このような背景により、2015年には第21回国連気候変動枠組条約締約国会議(COP21)において、京都議定書に代わる2020年以降の温室効果ガス削減等のための新たな国際枠組みとして、パリ協定が採択された⁽¹⁾。また、同年の国連総会においても「持続可能な開発のための2030アジェンダ」に記述された2030年までの17の世界的目標であるSDGs (Sustainable Development Goals) が採択された。そのうち、「7：すべての人々の、安価かつ信頼できる持続可能な近代的エネルギーへのアクセスを確保する」及び「13：気候変動及びその影響を軽減するための緊急対策を講じる」が達成すべき目標として掲げられている。日本においてもこれらの目標を達成すべく、様々な検討がされている⁽²⁾。

温暖化対策のための取り組みとして、2020年10月26日に菅総理大臣は所信表明演説において、2050年までに温室効果ガスの排出をゼロにするカーボンニュートラルの実現を宣言し、さらに2021年4月22-23日に開催された米国主催気候サミットにおいて、温室効果ガスを2013年度比で46%削減を目指すとともに、さらに50%の高みに向けて挑戦を続けていく決意を表明した。この目標値は他の主要排出国と比較しても高い目標値である⁽³⁾。

日本のCO₂排出量を部門別で表したものを図1.1に示す⁽⁴⁾。2019年において、国内のCO₂総排出量の内、約2割を運輸部門が占めている。運輸部門には自動車、鉄道、航空機、船舶が含まれるが、その大部分を自動車が占める。そのため、CO₂排出量削減に向けて自動車の燃費規制が厳しさを増しており、環境性能に優れたハイブリッドカーや電気自動車といった次世代自動車へ多様なニーズが強くなってきている^{(5),(6)}。

温室効果ガスの排出を抑制し持続可能な社会を形成する上で省エネ化の追求は様々な分野において共通の認識となっており、その省エネ化を支えるコア技術となるのがパワーエレクトロニクスである。パワーエレクトロニクスはパワー半導体を用いて電気を所望の状態に効率的に変換するための電力工学、電気工学、制御工学の融合技術であり、その技術はパワー半導体デバイスの発展に伴い、身近な家電機器をはじめ、情報・通信機器、電気自動車や新幹線といった輸送機器、さらには太陽光発電や風力発電といった新エネルギー発電機器まで電気を取り扱う幅広い分野で応用されている⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾。パワーエレクトロニクス技術が用いら

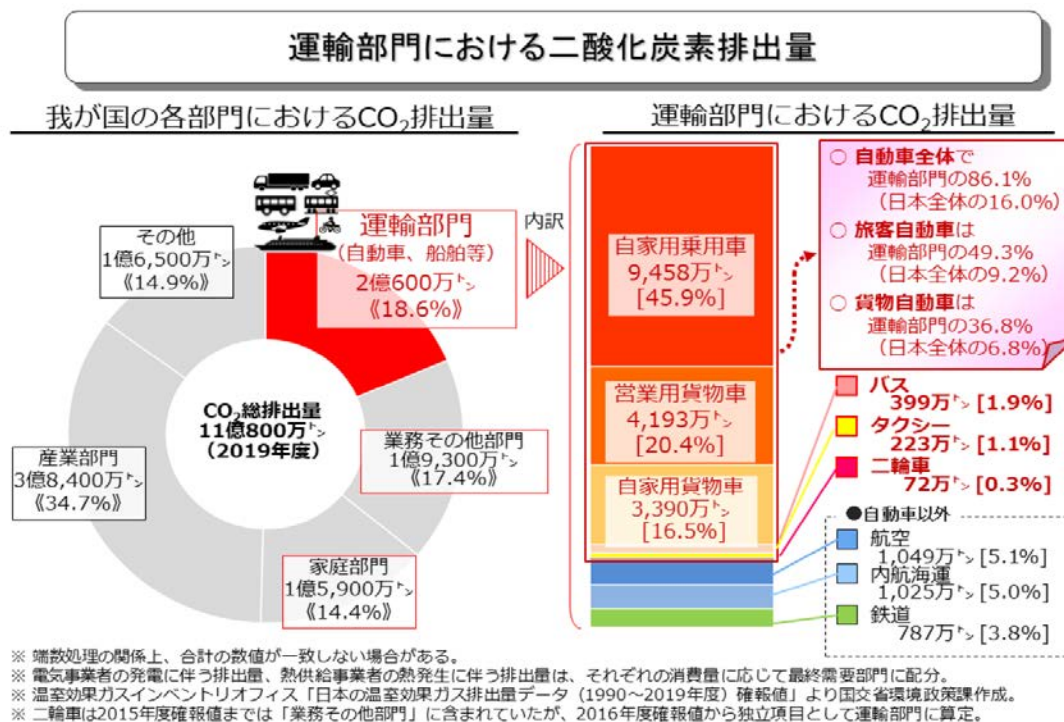


図 1.1 日本の部門別二酸化炭素排出割合(2019年)

※環境省ホームページより引用

れる電力変換器は大きく分けて、直流を交流に変換するDC-ACインバータ、直流を別の直流に変換するDC-DCコンバータ、交流を直流に変換するAC-DCコンバータ、交流を別の交流に変換するAC-ACコンバータがあり、用途に応じて必要とされる電圧や周波数に変換するために利用される。環境問題への本格的な対応が重視される社会情勢の中で、今後パワーエレクトロニクス市場は着実に拡大していくことが予想される。そして同時にパワーエレクトロニクス技術を発展させ、電力変換器の一層の小型化、高効率化、高信頼性等、高度な技術要求をクリアしていく必要がある。

その中で、国内自動車メーカーの最大手であるトヨタ自動車は各種エコカー開発に必要な要素技術を含み、様々な燃料と組み合わせることができるハイブリッド技術を「21世紀の環境コア技術」と位置付け、エコカーの更なるラインナップの拡充に努め、環境への貢献を進めていくとしている⁽¹⁰⁾。HEVは電気モータと内燃機関の双方の長所を組み合わせたような自動車である。しかし、HEVには内燃機関が搭載されているため、EVとは違い走行時のCO₂の発生を防ぐことは出来ない。そのため、CO₂の排出量削減に対しては、燃費を向上させることで対応していくことになる。図1.2にHEVのパワートレインシステムを示す⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾。

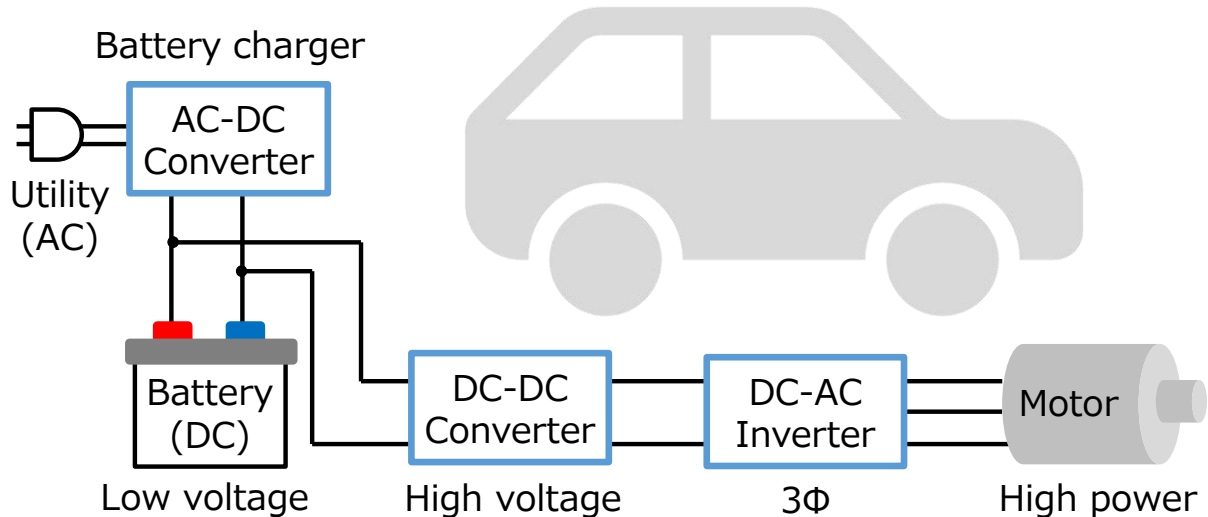


図 1.2 ハイブリッドカーのパワートレインシステム

基本的にはメインのバッテリーからインバータを介して AC モータを駆動させる。一方で、走行性能を上げるためのモータの高出力化の要望に対し、図 1.2 のようにインバータの前段にバッテリー電圧を昇圧するためのコンバータ（昇圧型 DC-DC コンバータ）を用いてモータの印加電圧を高電圧化させたシステムの採用事例が増えきている。特に、新たに加えられた昇圧型 DC-DC コンバータは車内の居住スペースと燃費性能の観点から小型化、高効率化、高電力密度化が強く求められる。

本要求に対して、車載用電力変換器は大電力駆動のため、マルチフェーズ方式が採用されることが多い。この方式は単相 DC-DC コンバータを並列に多段接続し、スイッチングの位相をシフトさせるインターリーブ動作を行っている^{(14)・(17)}。これにより、スイッチング周波数を上げること無くキャパシタの充放電に伴う電荷変動が低減できる。従って、静電容量の低いキャパシタでの設計が可能となるため、回路の容積増加の主要因の一つであるキャパシタの小型化が実現できる。さらに、インダクタ電流が各相に均等に分流するため、1相あたりの導通損が低減できるだけでなく、パワー半導体デバイスに流れる電流も相数分低くなる。そのため、従来よりも定格電流の低いパワー半導体デバイスを使うことが可能となる。さらに、電力を単相から各相に分割することもできるため、設計可能な電力レンジを単相時から相数倍にすることも可能となる。

しかし、回路トポロジを改良することは電力変換器の小型化・高効率化・高電力密度化について有効だが、電源の制御系において二つの問題点を有している。一つは制御系のモデリングが非常に複雑になってしまうことである。駆動相数の増加に伴い、制御モデルが複雑化

してしまうため、電源の解析をするにあたって障壁となってしまいます。もう一つは昇圧型 DC-DC コンバータ自身の制御系に不安定要素を含んでいるということである。この不安定要素は重負荷であるほど不安定になるため、車載用電力変換器のような大電流アプリケーションにおいては非常に問題となる。

そこで、本論文では車載用電力変換器に用いられる昇圧型 DC-DC コンバータの小型化・高電力密度化を実現するための制御系を研究の対象とする。

1.2 研究目的

本研究の目的は、電気自動車やハイブリッドカーのパワートレインシステムに搭載されている昇圧型 DC-DC コンバータの更なる小型化・高電力密度化を実現するための制御系のアプローチである。

そこで、本論文では車載用電力変換器に用いられる昇圧型 DC-DC コンバータの小型化・高電力密度化を実現するための制御系を研究の対象とする。

まず、マルチフェーズ方式における制御モデリングに関する研究である。DC-DC コンバータの制御系モデリング手法として用いられている「状態平均化法（状態空間平均化法）」は回路方程式（微分方程式）を状態方程式と出力方程式に変形し、回路の動作モードの割合で加重平均をするという手法である。そのため、単相では ON と OFF の 2 パターンで加重平均を行うが、2 相の場合は ON/ON, ON/OFF, OFF/ON, OFF/OFF の 4 パターンで加重平均を行わなければならない。さらに、状態方程式及び出力方程式の次数も増加してしまうため、導出した伝達関数モデルが 3 次系を有することになる。相数が増加するとこの次数は更に増加してしまい、シミュレータの演算コストを増加させるだけでなく、本来生じるはずのない高次要素が現れてしまい、制御系設計にも影響を及ぼしてしまう。そこで、本研究では相数の増加に依存しない低次元化モデリング手法を提案する。本手法は、出力平滑キャパシタを等価回路変換し、1 つだった出力平滑キャパシタを各相に配置することで、「 n 相 DC-DC コンバータのモデリング」から「単相 DC-DC コンバータ $\times n$ 段のモデリング」に置き換えることが可能となる。これにより、相数の増加に依存しなくなるため、演算コストを抑えつつ、高次要素を除去する低次元化モデリングを実現している。

次に、昇圧型 DC-DC コンバータの応答性の改善に関する研究である。昇圧型 DC-DC コンバータは制御系の伝達関数の中に「右半平面の零点」と呼ばれる不安定要素を有している。こ

の右半平面の零点は変曲点においてゲインを増大させつつ、位相を遅れさせる成分を有している。そのため、制御系の安定性の指標であるゲイン余裕と位相余裕の両方に影響を及ぼしてしまう。従って、ゲイン余裕と位相余裕の両方を確保するためにはゲインクロスオーバー周波数を低下させなければならない。このゲインクロスオーバー周波数は制御系の速応性を決定する要因であり、昇圧型DC-DCコンバータは右半平面の零点の影響で高周波に設定することができない。すなわち、出力電圧の変動に対応できなくなるため、キャパシタの容量の増加、ひいては回路の小型化・高電力密度化を妨げてしまう。さらに、極零相殺を行う場合、右半平面の極を用いなければならない。右半平面の極は制御系に存在するだけで発振してしまう不安定要素なため、適用することができない。その上、重負荷になるほど変曲点が低周波側にシフトするため、さらにゲイン余裕と位相余裕が悪化してしまう。そのため、通常の電源の制御に用いられるフィードバック制御系では制御性能が抑制されてしまう。そこで、本研究では制御系の速応性とロバスト性を改善する電力平衡モード制御を提案する。本手法は、従来の制御手法である電流モード制御に入出力電力を一致させる制御を組み込んだ新たな制御手法である。そのため、入出力電力が大きく異なる場合に、両者を一致させる制御はフィードフォワード制御、定常状態において出力電圧を一定に保つ制御はフィードバック制御となっており、それらを組み合わせた2自由度制御系が構成される。これにより、速応性を向上させるゲインクロスオーバー周波数を高周波に設定することなく従来制御手法よりも応答性を大幅に改善することが可能となったため、速応性とロバスト性の両方の改善を実現している。

1.3 本論文の概要

本論文では、車載用電力変換器において、小型化・高電力密度化を実現するための制御系設計に関する研究をまとめたものである。本論文は、緒論、結論を含め全5章で構成される。

第2章では、単相昇圧型DC-DCコンバータの制御系について詳細に説明する。本章ではまず、状態平均化法による各種伝達関数の導出過程について説明する。次に、最も基本的な電源の制御手法である電圧モード制御について説明する。最後に、電圧モード制御に電流制御ループを追加した電流モード制御について説明する。

第3章では、制御系のモデリングの複雑化を改善する低次元化モデリング手法を提案する。このモデリング手法により、電力変換器の駆動相数が増加しても単相と同様に解析する

ことができるため、モデルの生成コストやシステムの複雑化を解消することが可能となる。本章ではまず、提案手法による数学モデルの低次元化を数式で示し、相数の増加に依存せずに伝達関数を導出できることを明らかにする。次に、2 相及び 10 相における伝達関数の周波数特性を高次元モデルと提案手法で導出した低次元化モデルで比較し、両者が一致することを確認する。最後に、両者のモデルでステップ応答特性も比較し、こちらも両者が一致することを確認し、提案するモデリング手法の有効性を確認する。

第 4 章では、簡単な仕組みで制御性能を大幅に改善する電力平衡モード制御を提案する。この制御手法により制御系の速応性とロバスト性を改善することが可能となる。さらに、制御系の仕組みは簡単なため、その他の電力変換器にも適用が可能となる。本章ではまず、電力平衡モード制御の動作原理及び設計手法について説明する。次に、電力平衡モード制御のベースとなる電流モード制御と周波数特性の比較を行い、定常状態において両者が一致することを確認する。さらに、電圧モード制御も含めた上で負荷過渡応答特性を比較し、電力平衡モード制御の有効性を確認する。

最後に、第 5 章では、結論として本論文についての総括をしている。

参考文献

- (1) 外務省 ウェブページ「2020年以降の枠組み：パリ協定」
https://www.mofa.go.jp/mofaj/ic/ch/page1w_000119.html (2020)
- (2) 環境省 ウェブページ「持続可能な開発のための2030アジェンダ/SDGs」
<https://www.env.go.jp/earth/sdgs/> (2020)
- (3) 環境省, 「日本の排出削減目標」
https://www.mofa.go.jp/mofaj/ic/ch/page1w_000121.html (2022年1月11日)
- (4) 国土交通省 ウェブページ, 「運輸部門における二酸化炭素排出量」
http://www.mlit.go.jp/sogoseisaku/environment/sosei_environment_tk_000007.html
(2021年4月)
- (5) 水谷良治, 立花武, 森本雅之, 赤津観, 星伸一: 「自動車の低燃費化に貢献する電動化技術」, 電気学会部門誌 D, Vol. 135, No. 9, pp. 884-891 (2015)
- (6) 森田賢治, 桑田雅敏: 「電動車両の開発動向」, JARI Research Journal
JRJ20140903 (2014)
- (7) 財団法人エネルギー総合工学研究所, 「新エネルギーの展望 パワーエレクトロニクス」 (2008年3月)
- (8) 河村篤男: 「現代パワーエレクトロニクス」, 数理工学社 (2005)
- (9) 伊東淳一, 伊東洋一: 「パワーエレクトロニクス技術教科書」, トランジスタ技術
SPECIAL, CQ 出版社, No. 12 (2014)
- (10) トヨタ自動車ホームページ, 20th PRIUS, 「受け継がれるハイブリッド技術」
<https://newsroom.toyota.co.jp/jp/prius20th/innovation/tech/> (2017年8月4日)
- (11) 小林徹也: 「デンソーにおけるHV/EV向け製品開発」, デンソーテクニカル
レビュー, Vol. 16, pp. 16-22 (2007)
- (12) 中島優, 菊池隆二, 北澤成, 富田芳樹, 小杉肇, 金子高久: 「小型車用パワーコントロールユニットの開発」, 自動車技術会 2016年春季大会学術講演会講演予稿集,
20165433, pp.2320-2325 (2016)
- (13) 山本真義: 「4代目プリウスのPCU分解から紐解く車載パワーデバイスの技術動向
予測」, 車載テクノロジー (4月号), 技術情報協会, pp.125-131 (2017)

-
- (14) 中納啓介, 石倉啓太:「DC/DC コンバータのマルチフェーズ化による小型・高効率化の検討」, 信学技報, Vol. 116, No. 133, pp. 1-6 (2016)
- (15) 北村達也・山田正樹・原田茂樹・小山正人:「SiC を用いた高パワー密度を用いた高パワー密度インターリーブ DC/DC コンバータの開発」, 電気学会部門誌 D, Vol. 134, No. 11, pp. 956-961 (2014)
- (16) M. T. Zhang, M. M. Jovanovic, and F. C. Lee, “Analysis and evaluation of interleaving technique in forward converters,” IEEE Trans. on Power Electronics, Vol. 13, No. 4, pp. 690–698 (1998).
- (17) 望月賢人, 富永麗司, 湊純司, 中井久史:「小型高出力車載充電器の開発」, パナソニック技報, Vol. 61, No. 1, pp.47-51 (2015)

第2章 DC-DC コンバータの制御系

2.1 緒言

本章では、パワーエレクトロニクスにおける基本回路である DC-DC コンバータの制御系設計について述べる。制御対象回路は後述の章でも取り扱う昇圧型 DC-DC コンバータとする。図 2-1 に単相昇圧型 DC-DC コンバータの回路図を示す。

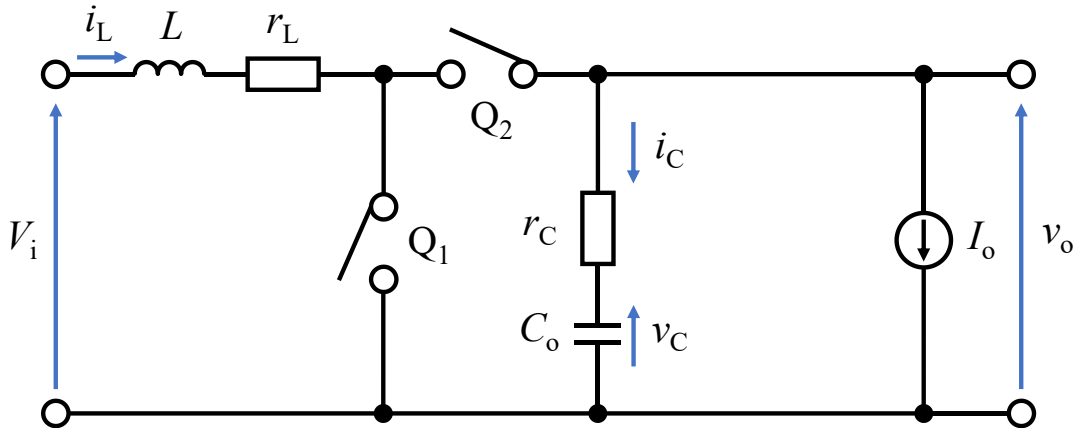


図 2.1 単相昇圧型 DC-DC コンバータ

2.2 状態平均化法による DC-DC コンバータの動作解析

DC-DC コンバータはパワー半導体スイッチの ON/OFF を繰り返して動作するため、その動作は非線形となり動作解析は一般的に複雑となる。通常、LC フィルタや RLC 回路などの過渡現象が現れる回路は時間的変化を含んでいるため、回路方程式内に線形微分方程式が現れる。回路が線形微分方程式モデルで表現可能な場合、ラプラス変換(Laplace transformation)による伝達関数モデリングが可能となる。即ち、線形時不変(LTI: Linear Time Invariant)システムであることが要求される。

しかし、スイッチング電源は回路の動作がスイッチの ON/OFF 時で異なる時変回路であるため、線形微分方程式モデルで表すことができない。その問題を解決する手法として、状態平均化法(state-space averaging method)と呼ばれる手法がある⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。

状態平均化法が適用されるためには、DC-DC コンバータのスイッチング周波数 f_s が DC-DC コンバータに内在的に存在する LC フィルタの共振周波数 f_0 に対し、次式の関係が成り立つことが必要となる。

$$f_s \gg f_n \dots\dots\dots (2-1)$$

スイッチング周波数が回路の共振周波数に比べて十分に高い場合、スイッチング周期 T_s あたりのインダクタ電流 $i_L(t)$ 及びキャパシタ電圧 $v_C(t)$ の変化は線形近似することができる。この場合、電流または電圧の1周期あたりの平均値を変数とすることによって、非線形動作となる回路に対しても通常の線形回路理論が適用可能となる。

2.2.1 各状態における昇圧型 DC-DC コンバータの回路方程式

DC-DC コンバータはスイッチの状態に応じて回路方程式が変化する時変回路であるため、スイッチの状態ごとに状態方程式及び出力方程式を導出する必要がある。図 2-2(a)に Mode.1 : $Q_1 = \text{ON}$ 、図 2-2(b)に Mode.2 : $Q_1 = \text{OFF}$ の単相昇圧型 DC-DC コンバータの等価回路を示す。各モードに回路に流れる電流の経路を赤線で示す。

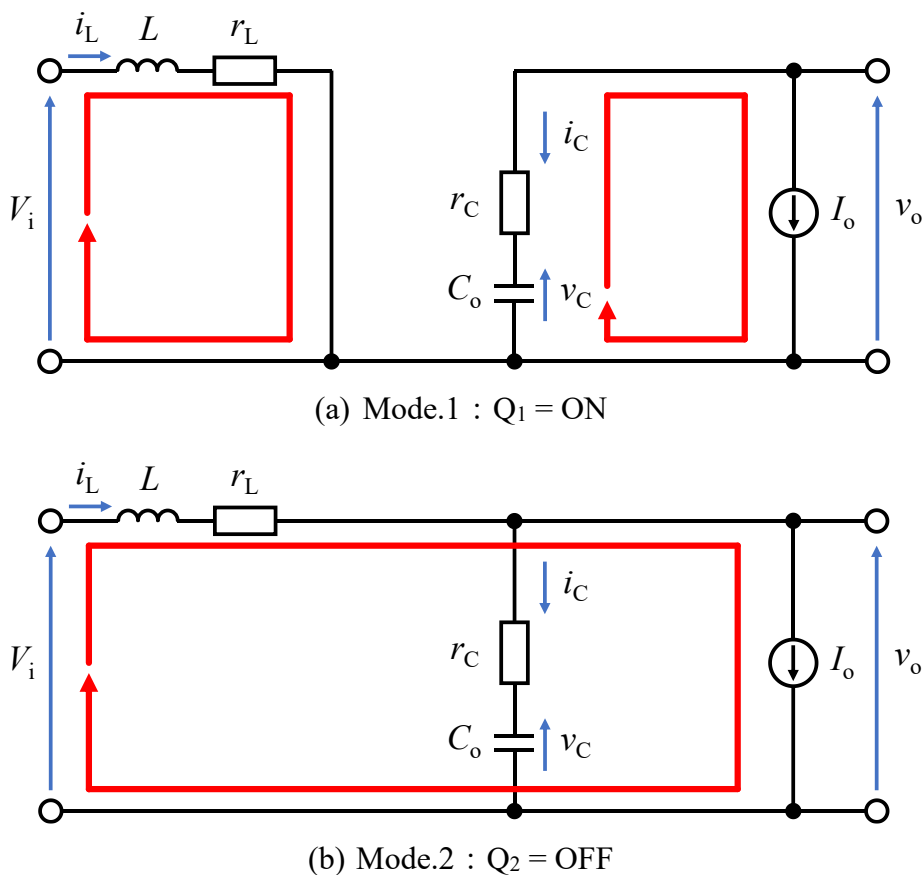


図 2-2 各モードにおける等価回路

(1) Mode.1 : $Q_1 = \text{ON}$

スイッチ Q_1 の ON 期間における回路方程式を式(2-2)に示す。

$$\begin{cases} V_i(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + r_L i_L(t) \\ I_o(t) = -i_c(t) \\ i_c(t) = C_o \frac{dv_c(t)}{dt} \\ v_o(t) = v_c(t) + r_c i_c(t) \end{cases} \dots\dots\dots (2-2)$$

式(2-2)を整理すると、Mode.1 における状態方程式及び出力方程式は式(2-3)となる。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \\ v_o(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -r_c] \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots\dots (2-3)$$

(2) Mode.2 : $Q_1 = \text{OFF}$

スイッチ Q_1 の OFF 期間における回路方程式を式(2-4)に示す。

$$\begin{cases} V_i(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + r_L i_L(t) + v_c(t) + r_c i_c(t) \\ i_L(t) = i_c(t) + I_o(t) \\ i_c(t) = C_o \frac{dv_c(t)}{dt} \\ v_o(t) = v_c(t) + r_c i_c(t) \end{cases} \dots\dots\dots (2-4)$$

式(2-4)を整理すると、Mode.2 における状態方程式及び出力方程式は式(2-5)となる。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L + r_c}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{r_c}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \\ v_o(t) = [r_c \quad 1] \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -r_c] \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots\dots (2-5)$$

(3) 各状態方程式及び出力方程式のまとめ

前述の状態方程式及び出力方程式をまとめる。Mode.1 の状態方程式，出力方程式ならびに各種係数行列を式(2-6)に示す。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + b_1 u(t) \\ v_o(t) = c_1 x(t) + d_1 u(t) \end{cases} \dots\dots\dots (2-6)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \quad c_1 = [0 \quad 1] \quad d_1 = [0 \quad -r_C]$$

同様に，Mode.2 の状態方程式，出力方程式ならびに各種係数行列を式(2-7)に示す。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + b_2 u(t) \\ v_o(t) = c_2 x(t) + d_2 u(t) \end{cases} \dots\dots\dots (2-7)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L + r_C}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{r_C}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \quad c_2 = [r_C \quad 1] \quad d_2 = [0 \quad -r_C]$$

2.2.2 デューティ比を用いた状態方程式及び出力方程式の平均化

1 周期内の回路の状態をデューティ比 D で平均化すると，状態平均化方程式及び出力平均化方程式は次式で表される。デューティ比とは，スイッチング周期における ON 期間が占める比率であり，時比率とも呼ばれる。

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + b\bar{u}(t) \\ \bar{v}_o(t) = c\bar{x}(t) + d\bar{u}(t) \end{cases} \dots\dots\dots (2-8)$$

また，上式のデューティ比の重み付けによって平均化された係数行列は次式で表される。

$$\begin{cases} A = DA_1 + D'A_2 \\ b = Db_1 + D'b_2 \\ c = Dc_1 + D'c_2 \\ d = Dd_1 + D'd_2 \\ D' = 1 - D \end{cases} \dots\dots\dots (2-9)$$

さらに，式(2-9)を展開すると次式で表される。

$$\begin{cases}
 \mathbf{A} = D\mathbf{A}_1 + D'\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{Dr_L}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{D'(r_L+r_C)}{L} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L+D'r_C}{L} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b} = D\mathbf{b}_1 + D'\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{D}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{D}{C_o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{D'}{L} & \frac{D'r_C}{L} \\ 0 & -\frac{D'}{C_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D'r_C}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{c} = D\mathbf{c}_1 + D'\mathbf{c}_2 = [0 \quad D] + [D'r_C \quad D'] = [D'r_C \quad 1] \\
 \mathbf{d} = D\mathbf{d}_1 + D'\mathbf{d}_2 = [0 \quad -Dr_C] + [0 \quad -D'r_C] = [0 \quad -r_C]
 \end{cases} \dots\dots\dots (2-10)$$

式(2-10)を式(2-8)に代入すると下式で表される。

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{i}_L(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L+D'r_C}{L} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_L(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D'r_C}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_i(t) \\ \bar{I}_o(t) \end{bmatrix} \\
 \bar{v}_o(t) = [D'r_C \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_L(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -r_C] \begin{bmatrix} \bar{V}_i(t) \\ \bar{I}_o(t) \end{bmatrix}
 \end{cases} \dots\dots\dots (2-11)$$

式(2-11)は状態平均化方程式及び出力平均化方程式を表す。

2.2.3 静特性（定常解析）

定常状態では、状態ベクトルに変化が無いとすると、状態平均化方程式及び出力平均化方程式は式(2-12)のように表される。

$$\begin{cases}
 \frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}\bar{\mathbf{u}}(t) = 0 \\
 \bar{v}_o(t) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}}(t)
 \end{cases} \dots\dots\dots (2-12)$$

ここで、状態平均化ベクトル $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 、入力平均化ベクトル $\bar{\mathbf{u}}(t)$ 及び出力平均化ベクトル $\bar{v}_o(t)$ は線形近似されているため、直流値として表される。また、以降の過程においてはこの直流値に微小変動を加えて解析を行うため、差別化として各平均化ベクトルを大文字で表記する ($\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}$, $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{U}$, $\bar{v}_o(t) = V_o$)。

式(2-12)を変形し、状態平均化ベクトル及び出力平均化ベクトルを導出すると式(2-13)となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{i}_L(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{V}_i(t) \\ \bar{I}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ I_o \end{bmatrix} \\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{U} = -\frac{LC_o}{D'^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{D'}{L} \\ -\frac{D'}{C_o} & -\frac{r_L + D'r_c}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D'r_c}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_o \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-13) \\ \bar{v}_o(t) = V_o = \mathbf{c}\mathbf{X} + \mathbf{d}\mathbf{U} = [D'r_c \quad 1] \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + [0 \quad -r_c] \begin{bmatrix} V_i \\ I_o \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

さらに、式(2-13)を展開すると式(2-14)となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = -\frac{LC_o}{D'^2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{D'}{LC_o} \\ -\frac{D'}{LC_o} & -\frac{D'^2 r_c}{LC_o} + \frac{r_L + D'r_c}{LC_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) I_o \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-14) \\ V_o = r_c I_o + \frac{V_i}{D'} + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) I_o - r_c I_o = \frac{V_i}{D'} + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) I_o = V_C \end{array} \right.$$

ここで、 V_o の第 2 項が第 1 項と比べて非常に小さいと仮定すると、式(2-14)は式(2-15)に近似できる。この静特性（直流値）は定常状態の値であり、DC-DC コンバータの設計値でもある。この仮定が成立するのは、出力キャパシタの等価直列抵抗 r_c (ESR) が非常に小さいか、 r_c で生じる電圧降下がキャパシタの電圧 V_C に対して非常に小さい場合である。一般的に、出力キャパシタに用いられる電解コンデンサは ESR が他のフィルムコンデンサやセラミックコンデンサと比較して大きいとされているが、 $m\Omega$ オーダーであり、第 1 項と比較しても非常に小さくなる。なお、 V_o の第 2 項の中にインダクタの直流抵抗 r_L (DCR) が含まれているが、ESR と同様に $m\Omega$ オーダーが一般的であり、式(2-15)の近似が可能となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} - \frac{r_L + DD'r_c}{D'^2} I_o \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-15) \\ V_o = \frac{V_i}{D'} = V_C \end{array} \right.$$

2.2.4 動特性（小信号解析）

静特性であるデューティ比 D ，入力平均化ベクトル $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{U}$ に微小変動 $\Delta D(t)$ ， $\Delta \mathbf{U}(t)$ を与えた場合，状態平均化ベクトル $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}$ に微小変動 $\Delta \mathbf{X}(t)$ が生じ，出力平均化ベクトル $\bar{v}_o(t) = V_o$ に微小変動 $\Delta V_o(t)$ が生じるとする。 $D \rightarrow D + \Delta D(t)$ ， $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}(t)$ ， $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}(t)$ ， $V_o \rightarrow V_o + \Delta V_o(t)$ とすると状態平均化方程式及び出力平均化方程式に微小変動を与えた式は下式で表される。

$$\begin{cases} \frac{d(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}(t))}{dt} = \left(\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \Delta D(t) \right) (\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}(t)) + \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \Delta D(t) \right) (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}(t)) \\ V_o + \Delta V_o(t) = \left(\mathbf{c} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} \Delta D(t) \right) (\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}(t)) + \left(\mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial D} \Delta D(t) \right) (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}(t)) \end{cases} \quad (2-16)$$

式(2-16)を展開して2次の微小項を無視すると，下式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\Delta \mathbf{X}(t)}{dt} = (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}\mathbf{U}) + \left(\mathbf{A}\Delta \mathbf{X}(t) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X}\Delta D(t) + \mathbf{b}\Delta \mathbf{U}(t) + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U}\Delta D(t) \right) \\ V_o + \Delta V_o(t) = (\mathbf{c}\mathbf{X} + \mathbf{d}\mathbf{U}) + \left(\mathbf{c}\Delta \mathbf{X}(t) + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} \mathbf{X}\Delta D(t) + \mathbf{d}\Delta \mathbf{U}(t) + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial D} \mathbf{U}\Delta D(t) \right) \end{cases} \quad (2-17)$$

ここで，式(2-17)において，静特性（直流値）を除去して動特性を抜き出すと次式となる。

$$\begin{cases} \frac{d\Delta \mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{X}(t) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \Delta D(t) + \mathbf{b}\Delta \mathbf{U}(t) \\ \Delta V_o(t) = \mathbf{c}\Delta \mathbf{X}(t) + \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \Delta D(t) + \mathbf{d}\Delta \mathbf{U}(t) \end{cases} \quad (2-18)$$

2.2.5 ラプラス変換による周波数領域への変換

式(2-18)は時間領域(time domain)による表現のため，ラプラス変換を用いて周波数領域(frequency domain)へ変換する。上式をラプラス変換すると下式で表現される。

$$\begin{cases} s\Delta \mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\Delta \mathbf{X}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \Delta D(s) + \mathbf{b}\Delta \mathbf{U}(s) \\ \Delta V_o(s) = \mathbf{c}\Delta \mathbf{X}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \Delta D(s) + \mathbf{d}\Delta \mathbf{U}(s) \end{cases} \quad (2-19)$$

式(2-19)の第1式を変形して伝達関数表現にすると式(2-20)で表される。

$$\Delta \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \Delta D(s) + \mathbf{b}\Delta \mathbf{U}(s) \right\} \quad (2-20)$$

ここで，式(2-19)の第2式の解を導出するためには，式(2-20)の解を先に導出する必要がある。式(2-20)の解を導出するために，逆行列 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ を解く。逆行列を解く前に括弧内の演

算式 $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ を解くと式(2-21)で表される。

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s + \frac{r_L + D'r_C}{L} & \frac{D'}{L} \\ -\frac{D'}{C_o} & s \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-21)$$

従って、式(2-21)の逆行列は式(2-22)で表される。

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \begin{bmatrix} s & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C_o} & s + \frac{r_L + D'r_C}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-22)$$

ここで、式(2-22)に含まれる行列式 $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ は式(2-23)で表される。

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = s^2 + \left(\frac{r_L + D'r_C}{L}\right)s + \frac{D'^2}{LC_o} \dots\dots\dots (2-23)$$

式(2-23)を式(2-22)に代入すると、式(2-24)が得られる。

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{r_L + D'r_C}{L}\right)s + \frac{D'^2}{LC_o}} \begin{bmatrix} s & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C_o} & s + \frac{r_L + D'r_C}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-24)$$

ここで、二次遅れ系の標準形が現れるように式(2-24)を変形すると式(2-25)となる。

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\frac{D'^2}{LC_o}}{s^2 + \left(\frac{r_L + D'r_C}{L}\right)s + \frac{D'^2}{LC_o}} \begin{bmatrix} \frac{LC_o}{D'^2}s & -\frac{C_o}{D'} \\ \frac{L}{D'} & \frac{LC_o}{D'^2} \left(s + \frac{r_L + D'r_C}{L}\right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-25)$$

式(2-25)の要素を二次遅れ系の標準形 $\frac{1}{P(s)}$ でまとめると式(2-26)となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{D'^2}{LC_o}}{s^2 + \left(\frac{r_L + D'r_c}{L}\right)s + \frac{D'^2}{LC_o}} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{r_L + D'r_c}{L} \dots\dots\dots (2-26) \\ \omega_n = \frac{D'}{\sqrt{LC_o}} \\ \zeta = \frac{r_L + D'r_c}{2L} \cdot \frac{\sqrt{LC_o}}{D'} = \frac{r_L + D'r_c}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{L}} \end{array} \right.$$

ここで、 ω_n は回路内の LC フィルタによる共振周波数、 ζ は減衰の大きさを表す減衰係数 (damping factor) である。

続いて、各係数行列の偏微分を解くと次式で表される。ここで、偏微分要素は D であるため、式(2-27)では D' を $1-D$ に戻している。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \begin{bmatrix} -\frac{r_L + (1-D)r_c}{L} & -\frac{(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C_o} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_c}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{(1-D)r_c}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_c}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-27) \\ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} [(1-D)r_c \quad 1] = [-r_c \quad 0] \\ \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} [0 \quad -r_c] = [0 \quad 0] \end{array} \right.$$

以上より、導出した各行列を式(2-20)に代入して伝達関数を導出する。しかし、式 1 つに対して伝達関数が 2 つ存在するため、すべてを代入した状態で伝達関数を導出することはできない。そこで、簡単化のために各入力要素に伴う伝達関数はそれぞれ独立して生じるものとする。これらを踏まえると各種入力に伴う状態及び出力の伝達関数は次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} = \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = (sI - A)^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial D} X + \frac{\partial b}{\partial D} U \right) \\ \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} \right|_{\Delta D(s)=0} = \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = (sI - A)^{-1} b \end{array} \right. \dots\dots\dots (2-28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = \left\{ c(sI - A)^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial D} X + \frac{\partial b}{\partial D} U \right) + \left(\frac{\partial c}{\partial D} X + \frac{\partial d}{\partial D} U \right) \right\} \\ = c \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} + \left(\frac{\partial c}{\partial D} X + \frac{\partial d}{\partial D} U \right) \\ = c \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} + \frac{\partial c}{\partial D} X \end{array} \right. \dots\dots (2-29)$$

$$\left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)} \right|_{\Delta D(s)=0} = c(sI - A)^{-1} b + d = c \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} + d$$

ここで、状態平均化ベクトルの微小変動 $\Delta X(t)$ 及び入力平均化ベクトルの微小変動 $\Delta U(t)$ を展開し、それぞれの伝達関数が現れるように式を変形すると次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} = \left[\begin{array}{l} \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \end{array} \right] = (sI - A)^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial D} X + \frac{\partial b}{\partial D} U \right) \\ \left. \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} \right|_{\Delta D(s)=0} = \left[\begin{array}{l} \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} \end{array} \right] = (sI - A)^{-1} b \end{array} \right. \dots\dots\dots (2-30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = c \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} + \frac{\partial c}{\partial D} X \\ \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)} \right|_{\Delta D(s)=0} = \left[\begin{array}{l} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \end{array} \right] = c \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} + d \end{array} \right. \dots\dots\dots (2-31)$$

2.2.6 伝達関数の導出

 (1) 伝達関数 $\frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)}$ の導出

$\frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)}$ について導出する。逆行列 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ は既出のため、残りの部分を計算する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \frac{r_c}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} - \frac{r_L + DD'r_c}{D'^2} I_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{r_c}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ I_o \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{I_o r_c}{D'L} + \frac{1}{L} \left(\frac{V_i}{D'} - \frac{r_L + DD'r_c}{D'^2} I_o \right) - \frac{r_c}{L} I_o \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{r_c}{D'L} I_o + \frac{1}{D'L} V_i - \frac{r_L}{D'^2 L} I_o - \frac{Dr_c}{D'L} I_o - \frac{r_c}{L} I_o \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} V_i + \frac{r_c(1-D)}{D'L} I_o - \frac{r_L}{D'^2 L} I_o - \frac{r_c}{L} I_o \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} V_i - \frac{r_L}{D'^2 L} I_o \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} \left(V_i - \frac{I_o r_L}{D'} \right) \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} (V_i - I_L r_L) \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

..... (2-32)

なお、1行1列目の括弧内は説明のため、式(2-15)の直流解 I_L を用いて変形している。ここで、1行1列目の括弧内の第2項が第1項に比べて非常に小さいと仮定すると、式(2-32)は式(2-33)に近似できる。この仮定が成立するのは、インダクタの直流抵抗 r_L (DCR) が非常に小さいか、 r_L で生じる電圧降下が入力電圧 V_i に対して非常に小さい場合である。前述の通り、 r_L が一般的に $\text{m}\Omega$ オーダーであり、 V_i と比較して十分小さいため成立する。ただし、大電力駆動の場合、 r_L で生じる電圧降下が無視できなくなるため、この仮定は成立しなくなる。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} \left(V_i - \frac{I_o r_L}{D'} \right) \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{V_i}{D'L} \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-33)$$

式(2-25)及び式(2-33)を式(2-30)の第1式に代入すると、式(2-34)が得られる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta \mathbf{U}(s)=0} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \end{bmatrix} = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial D} \mathbf{U} \right) \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{LC_o}{D'^2} s & -\frac{C_o}{D'} \\ \frac{L}{D'} & \frac{LC_o}{D'^2} \left(s + \frac{r_L + D'r_c}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{D'L} \left(V_i - \frac{I_o r_L}{D'} \right) \\ -\frac{I_o}{D'C_o} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{C_o}{D'^3} s \left(V_i - \frac{I_o r_L}{D'} \right) + \frac{I_o}{D'^2} \\ \frac{1}{D'^2} \left(V_i - \frac{I_o r_L}{D'} \right) - \frac{LI_o}{D'^3} \left(s + \frac{r_L + D'r_c}{L} \right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{C_o V_i}{D'^3} s - \frac{C_o I_o r_L}{D'^4} s + \frac{I_o}{D'^2} \\ \frac{V_i}{D'^2} - \frac{2I_o r_L}{D'^3} - \frac{LI_o}{D'^3} s - \frac{I_o r_c}{D'^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'^2} \left\{ 1 + \left(\frac{C_o V_i}{D'I_o} - \frac{C_o r_L}{D'^2} \right) s \right\} \\ \frac{V_i}{D'^2} \left\{ 1 - \left(\frac{2I_o r_L}{D'} + I_o r_c \right) - \frac{LI_o}{D'V_i} s \right\} \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (2-34) \end{aligned}$$

ここで、式(2-35)の関係式が成り立つと仮定すると、式(2-34)は式(2-36)に近似できる。この仮定は前述のように寄生抵抗 r_L 及び r_c が一般的に $m\Omega$ オーダーと非常に小さいため成立する。

$$\begin{cases} \frac{C_o V_i}{D'I_o} \gg \frac{C_o r_L}{D'^2} \\ 1 \gg \frac{2I_o r_L}{D'} + I_o r_c \end{cases} \dots\dots\dots (2-35)$$

$$\left. \frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \end{bmatrix} = \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'^2} \left(1 + \frac{C_o V_i}{D' I_o} s \right) \\ \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s \right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2-36)$$

さらに、各要素をまとめると式(2-37)となる。

$$\begin{cases} \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta D(s)} = \frac{K_{dc_id}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_o} \right) \\ \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta D(s)} = \frac{K_{dc_vd}}{P(s)} \left(1 - \frac{s}{\omega_{rhp}} \right) \end{cases} \dots\dots\dots (2-37)$$

$$K_{dc_id} = \frac{I_o}{D'^2} \quad K_{dc_vd} = \frac{V_i}{D'^2} \quad \omega_o = \frac{D' I_o}{C_o V_i} \quad \omega_{rhp} = \frac{D' V_i}{L I_o}$$

(2) 伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)}$ の導出

$\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)}$ について導出する。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} &= \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = \mathbf{c} \frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta D(s)} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial D} \mathbf{X} \\ &= \frac{1}{P(s)} [D' r_c \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'^2} \left(1 + \frac{C_o V_i}{D' I_o} s \right) \\ \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s \right) \end{bmatrix} + [-r_c \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{I_o}{D'} \\ \frac{V_i}{D'} - \frac{r_L + D D' r_c}{D'^2} I_o \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{P(s)} \left\{ \frac{I_o r_c}{D'} \left(1 + \frac{C_o V_i}{D' I_o} s \right) + \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s \right) \right\} - \frac{I_o r_c}{D'} \\ &= \frac{1}{P(s)} \left\{ \frac{I_o r_c}{D'} + \frac{C_o V_i r_c}{D'^2} s + \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s \right) \right\} - \frac{I_o r_c}{D'} \\ &= \frac{1}{P(s)} \left\{ \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s + C_o r_c s + \frac{D' I_o r_c}{V_i} \right) \right\} - \frac{I_o r_c}{D'} \\ &= \frac{1}{P(s)} \frac{V_i}{D'^2} \left(1 - \frac{L I_o}{D' V_i} s \right) (1 + C_o r_c s) + \frac{1}{P(s)} \frac{V_i}{D'^2} \left(\frac{D' I_o r_c}{V_i} + \frac{L I_o}{D' V_i} C_o r_c s^2 \right) - \frac{I_o r_c}{D'} \end{aligned} \dots\dots\dots (2-38)$$

ここで、第2項に着目して式を変形すると式(2-39)となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(s)} \frac{V_i}{D'^2} \left(\frac{D'I_o r_C}{V_i} + \frac{LI_o}{D'V_i} C_o r_C s^2 \right) &= \frac{1}{P(s)} \frac{I_o r_C}{D'} \left(1 + \frac{LC_o}{D'^2} s^2 \right) \\ &= \frac{1}{P(s)} \frac{I_o r_C}{D'} \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right) \dots\dots\dots (2-39) \\ &= \frac{I_o r_C}{D'} \frac{s^2 + \omega_n^2}{P(s)} \end{aligned}$$

式(2-39)より，二次遅れ系 $\frac{1}{P(s)}$ に対して，二次進み系 $\frac{s^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ が分子に現れている。この

二次進み系 $\frac{s^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ は二次遅れ系 $\frac{1}{P(s)}$ の式の中の減衰係数 ζ を 0 とした場合の逆数に等しい。

即ち，共振周波数 ω_n 近傍でのゲインのピークや位相の遅れ方は若干異なるが，それ以外は二次進み系 $\frac{s^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ と二次遅れ系 $\frac{1}{P(s)}$ で極零相殺した状態となる。さらに，共振周波数 ω_n

近傍の二次進み系 $\frac{s^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ のゲインは反共振によって非常に小さくなるため，ゲインに変化を及ぼさなくなる。従って，式(2-38)の第 2 項と第 3 項は式(2-40)のようにまとめることができる。

$$\frac{I_o r_C}{D'} \frac{s^2 + \omega_n^2}{P(s)} - \frac{I_o r_C}{D'} \approx \frac{I_o r_C}{D'} - \frac{I_o r_C}{D'} = 0 \dots\dots\dots (2-40)$$

即ち，式(2-38)の第 2 項と第 3 項が互いに打ち消しあうため，第 1 項に影響を及ぼさないことがわかる。以上より，式(2-38)は式(2-41)に近似することができる。

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\Delta U(s)=0} &= \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} \right|_{\substack{\Delta I_o(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} = \frac{K_{dc_vd}}{P(s)} \left(1 - \frac{s}{\omega_{rhp}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \dots\dots\dots (2-41) \\ K_{dc_vd} &= \frac{V_i}{D'^2} \quad \omega_{rhp} = \frac{D'V_i}{LI_o} \quad \omega_{esr} = \frac{1}{C_o r_C} \end{aligned} \right.$$

図 2.3 に式(2-38)～(2-41)への式の変遷を表すブロック線図を示す。

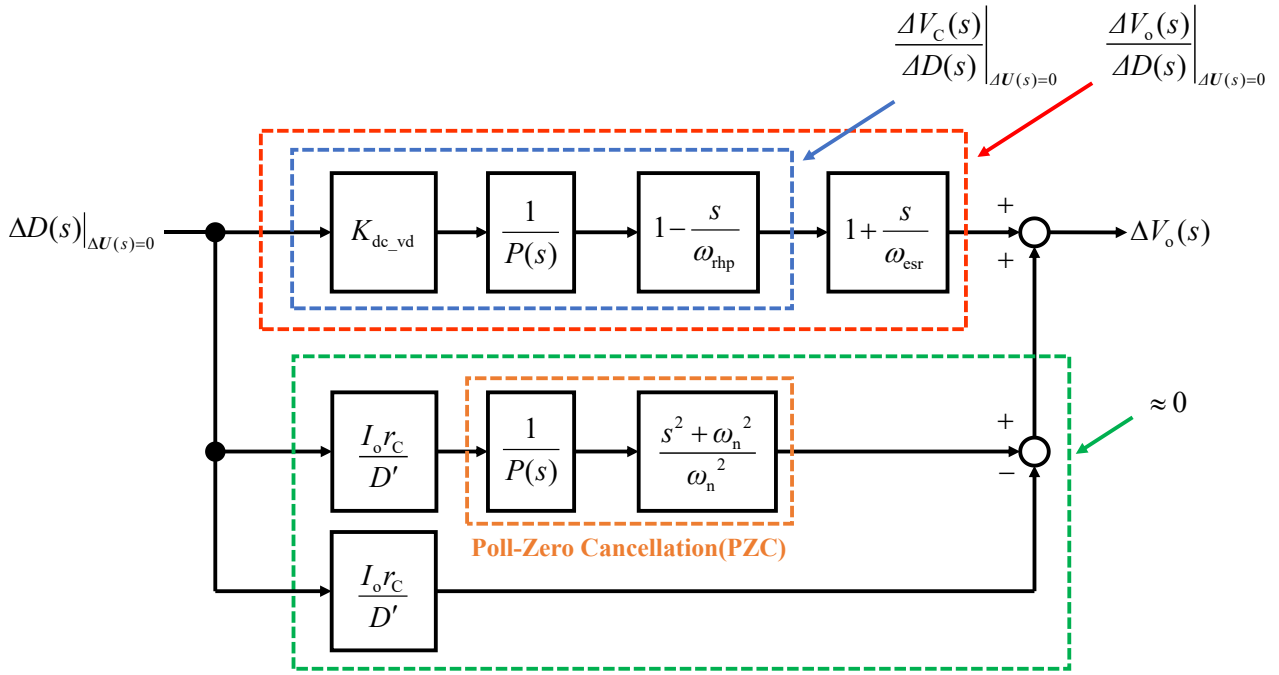


図 2.3 伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)}$ の詳細なブロック線図

(3) 伝達関数 $\frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta U(s)}$ の導出

$\frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta U(s)}$ について導出する。逆行列 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ は既出のため、残りの部分を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta U(s)} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} & \left. \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \\ \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} & \left. \frac{\Delta V_C(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \end{bmatrix} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{LC_o}{D'^2} s & -\frac{C_o}{D'} \\ \frac{L}{D'} & \frac{LC_o}{D'^2} \left(s + \frac{r_L + D'r_c}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D'r_c}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2-42) \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} \frac{C_o}{D'^2} s & \frac{1}{D'} (1 + C_o r_c s) \\ \frac{1}{D'} & -\frac{L}{D'^2} s + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)}$ の導出

$\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)}$ について導出する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)} &= \left[\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \Bigg|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} \quad \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \Bigg|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \right] = \mathbf{c} \frac{\Delta \mathbf{X}(s)}{\Delta U(s)} + \mathbf{d} \\
 &= \frac{1}{P(s)} [D'r_c \quad 1] \left[\begin{array}{cc} \frac{C_o}{D'^2} s & \frac{1}{D'} (1 + C_o r_c s) \\ \frac{1}{D'} & -\frac{L}{D'^2} s + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) \end{array} \right] + [0 \quad -r_c] \quad \dots\dots\dots (2-43) \\
 &= \frac{1}{P(s)} \left[\frac{C_o r_c}{D'} s + \frac{1}{D'} r_c (1 + C_o r_c s) - \frac{L}{D'^2} s + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) - r_c P(s) \right] \\
 &= \frac{1}{P(s)} \left[\frac{1}{D'} (1 + C_o r_c s) r_c (1 + C_o r_c s) - \frac{L}{D'^2} s + \left(r_c - \frac{r_L + D'r_c}{D'^2} \right) - r_c P(s) \right]
 \end{aligned}$$

ここで、行列内における $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)}$ に関する要素を展開して整理すると式(2-44)となる。

$$\begin{aligned}
 & r_c(1+C_o r_c s) - \frac{L}{D^2} s + \left(r_c - \frac{r_L + D' r_c}{D^2} \right) - r_c P(s) \\
 &= r_c + C_o r_c^2 s - \frac{L}{D^2} s + r_c - \frac{r_L + D' r_c}{D^2} - r_c \frac{LC_o}{D^2} \left\{ s^2 + \left(\frac{r_L + D' r_c}{L} \right) s + \frac{D^2}{LC_o} \right\} \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} s^2 + \left\{ C_o r_c^2 - \frac{L}{D^2} - \frac{LC_o r_c}{D^2} \left(\frac{r_L + D' r_c}{L} \right) \right\} s + r_c - \frac{r_L + D' r_c}{D^2} \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left[s^2 - \frac{D^2}{LC_o r_c} \left\{ C_o r_c^2 - \frac{L}{D^2} - \frac{LC_o r_c}{D^2} \left(\frac{r_L + D' r_c}{L} \right) \right\} s - \frac{D^2}{LC_o r_c} \left(r_c - \frac{r_L + D' r_c}{D^2} \right) \right] \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left\{ s^2 + \left(-\frac{D^2 r_c}{L} + \frac{1}{C_o r_c} + \frac{r_L + D' r_c}{L} \right) s - \frac{D^2}{LC_o} + \frac{r_L + D' r_c}{LC_o r_c} \right\} \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left[s^2 + \left\{ \frac{r_L + (D' - D^2) r_c}{L} + \frac{1}{C_o r_c} \right\} s + \frac{r_L + (D' - D^2) r_c}{LC_o r_c} \right] \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left[s^2 + \left\{ \frac{r_L + D'(1 - D') r_c}{L} + \frac{1}{C_o r_c} \right\} s + \frac{r_L + D'(1 - D') r_c}{LC_o r_c} \right] \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left\{ s^2 + \left(\frac{r_L + DD' r_c}{L} + \frac{1}{C_o r_c} \right) s + \frac{r_L + DD' r_c}{LC_o r_c} \right\} \\
 &= -\frac{LC_o r_c}{D^2} \left(s + \frac{r_L + DD' r_c}{L} \right) \left(s + \frac{1}{C_o r_c} \right) \\
 &= -\frac{r_L + DD' r_c}{D^2} \left(1 + \frac{L}{r_L + DD' r_c} s \right) (1 + C_o r_c s)
 \end{aligned} \tag{2-44}$$

ここで、式(2-44)を式(2-43)に代入すると、式(2-45)となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)} &= \left[\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \Bigg|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta I_o(s)=0}} \quad \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \Bigg|_{\substack{\Delta D(s)=0 \\ \Delta V_i(s)=0}} \right] \dots \tag{2-45} \\
 &= \frac{1}{P(s)} \left[\frac{1}{D'} (1 + C_o r_c s) - \frac{r_L + DD' r_c}{D^2} \left(1 + \frac{L}{r_L + DD' r_c} s \right) (1 + C_o r_c s) \right]
 \end{aligned}$$

さらに、各要素をまとめると式(2-46)となる。

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\Delta I_o(s)=0} &= \frac{K_{dc_vv}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \\ \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\Delta V_i(s)=0} &= \frac{K_{dc_zp}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_{dcr}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \dots\dots\dots (2-46) \\ K_{dc_vv} &= \frac{1}{D'} \quad K_{dc_zp} = -\frac{r_L + DD'r_C}{D'^2} \approx -\frac{r_L}{D'^2} \\ \omega_{dcr} &= \frac{r_L + DD'r_C}{L} \approx \frac{r_L}{L} \quad \omega_{esr} = \frac{1}{C_o r_C} \end{aligned} \right.$$

図 2.4 に式(2-46)を説明する詳細なブロック線図を示す。

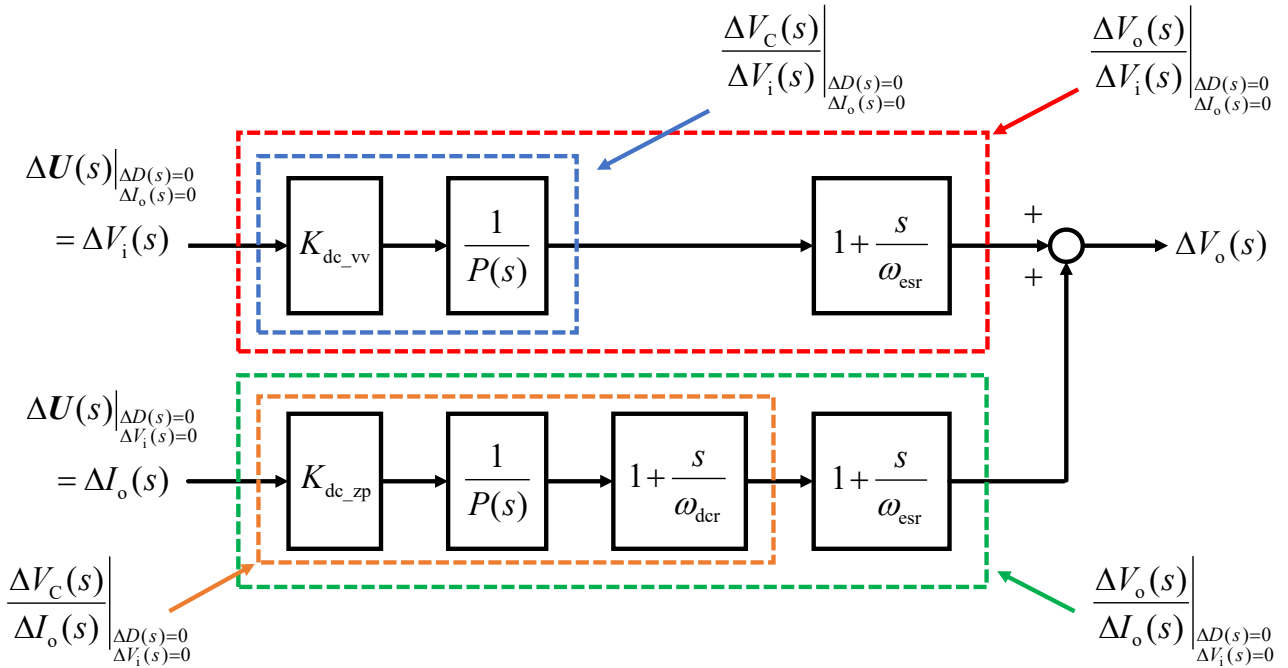


図 2.4 伝達関数 $\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta U(s)}$ の詳細なブロック線図

2.2.7 導出した伝達関数のまとめ

式(2.47)に、導出した各伝達関数をまとめる。また、図 2.5 に導出した伝達関数をまとめたブロック線図を示す。なお、キャパシタ電圧の微小変動 $\Delta V_C(s)$ に関する伝達関数は出力電圧の微小変動に関する伝達関数 $\Delta V_o(s)$ にまとめることが可能なため省略した。

$$\left\{ \begin{array}{l}
 G_{id}(s) = \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta D(s)} = \frac{K_{dc_id}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_o} \right) \\
 G_{vd}(s) = \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} = \frac{K_{dc_vd}}{P(s)} \left(1 - \frac{s}{\omega_{rhp}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \\
 G_{ii}(s) = \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta I_o(s)} = \frac{K_{dc_ii}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \\
 Z_p(s) = \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} = \frac{K_{dc_zp}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_{dcr}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \\
 G_{iv}(s) = \frac{\Delta I_L(s)}{\Delta V_i(s)} = \frac{K_{dc_iv}}{P(s)} s \\
 G_{vv}(s) = \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} = \frac{K_{dc_vv}}{P(s)} \left(1 + \frac{s}{\omega_{esr}} \right) \\
 \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
 K_{dc_id} = \frac{I_o}{D'^2} \quad K_{dc_vd} = \frac{V_i}{D'^2} \\
 K_{dc_vv} = \frac{1}{D'} \quad K_{dc_zp} = -\frac{r_L + DD'r_C}{D'^2} \approx -\frac{r_L}{D'^2} \\
 K_{dc_iv} = \frac{C_o}{D'^2} \quad K_{dc_ii} = \frac{1}{D'} \\
 \omega_n = \frac{D'}{\sqrt{LC_o}} \quad \zeta = \frac{r_L + D'r_C}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{L}} \\
 \omega_o = \frac{D'I_o}{C_o V_i} \quad \omega_{rhp} = \frac{D'V_i}{LI_o} \quad \omega_{esr} = \frac{1}{C_o r_C} \quad \omega_{dcr} = \frac{r_L + DD'r_C}{L} \approx \frac{r_L}{L}
 \end{array} \right. \quad (2-47)$$

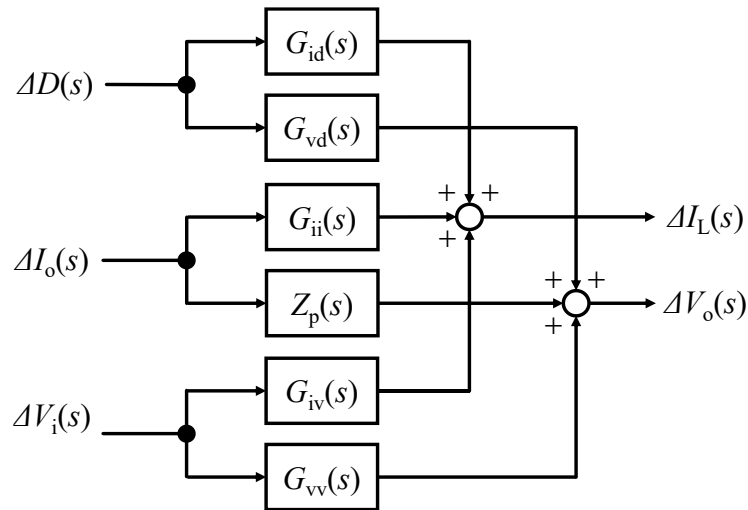


図 2.5 昇圧型 DC-DC コンバータの伝達関数のブロック線図まとめ

ここで、各要素について整理する。各要素の名称を以下にまとめる。

- $G_{id}(s)$: デューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対するインダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$
- $G_{vd}(s)$: デューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対する出力電圧の微小変動 $\Delta V_o(s)$
- $G_{ii}(s)$: 出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ に対するインダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$
- $Z_p(s)$: 出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ に対する出力電圧の微小変動 $\Delta V_o(s)$
- $G_{iv}(s)$: 入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ に対するインダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$
- $G_{vv}(s)$: 入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ に対する出力電圧の微小変動 $\Delta V_o(s)$
- $1/P(s)$: 二次遅れ系の標準形
- K_{dc_id} : 直流ゲイン ($\Delta D(s)$ to $\Delta I_L(s)$)
- K_{dc_vd} : 直流ゲイン ($\Delta D(s)$ to $\Delta V_o(s)$)
- K_{dc_ii} : 直流ゲイン ($\Delta I_o(s)$ to $\Delta I_L(s)$)
- K_{dc_zp} : 直流ゲイン ($\Delta I_o(s)$ to $\Delta V_o(s)$)
- K_{dc_iv} : 直流ゲイン ($\Delta V_i(s)$ to $\Delta I_L(s)$)
- K_{dc_vv} : 直流ゲイン ($\Delta V_i(s)$ to $\Delta V_o(s)$)
- ζ : 減衰係数
- ω_n : LC 共振周波数
- ω_o : 負荷零点周波数
- ω_{esr} : ESR 零点周波数 (ESR : 出力キャパシタの等価直列抵抗)
- ω_{rhp} : 右半平面の零点周波数
- ω_{dcr} : DCR 零点周波数 (DCR : インダクタの直流抵抗)

次に、導出した各伝達関数の周波数特性を示す。ここで、制御対象の回路パラメータを表 2.1 に示す。この回路パラメータは後述の第 4 章でも用いるものとする。表 2.1 の回路パラメータを用いた各伝達関数の周波数特性を図 2.6~2.8 に示す。なお、 $G_{iv}(s)$, $G_{vv}(s)$, $G_{ii}(s)$, $Z_p(s)$ は制御性能の指標に用いるが、制御系の安定性には使用しない。そのため、位相成分は考慮しないものとして、ゲインのみ示す。

表 2.1 回路パラメータ（単相昇圧型 DC-DC コンバータ）

Parameters	Symbol	Values
Input Voltage	V_i [V]	12 V
Output Voltage	V_o [V]	48 V
Output Power	P_o [W]	50 / 100 W
Output Current	I_o [A]	1.04 / 2.08 A
Inductance	L [μ H]	120 μ H
Inductor DC Resistor (DCR)	r_L [m Ω]	140 m Ω
Output Capacitor	C_o [μ F]	440 μ F
Output Capacitor ESR	r_C [m Ω]	20 m Ω
Switching Frequency	f_s [kHz]	50 kHz
Duty Ratio (Design)	D	0.75

図 2.6 にデューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対する伝達関数 $G_{id}(s)$, $G_{vd}(s)$ の周波数特性を示す。プラントの各伝達関数のすべてに二次遅れ系 $1/P(s)$ を有しているため、LC 共振周波数 f_n ($\omega_n/2\pi$) 近傍でゲインに共振のピーク、位相に急激な遅れが生じているが、 $G_{id}(s)$ は負荷零点を有しているため、位相が負荷零点周波数 ω_o の前後で上昇している。一方で、 $G_{vd}(s)$ は右半平面の零点周波数を有しているため、ゲインが緩やかになるだけでなく、位相も遅れさせるため、180deg 以上の位相の遅れが生じている。また、減衰係数 ζ の大きさによって共振のピークの大きさ及び位相の遅れ度合いは変化する。

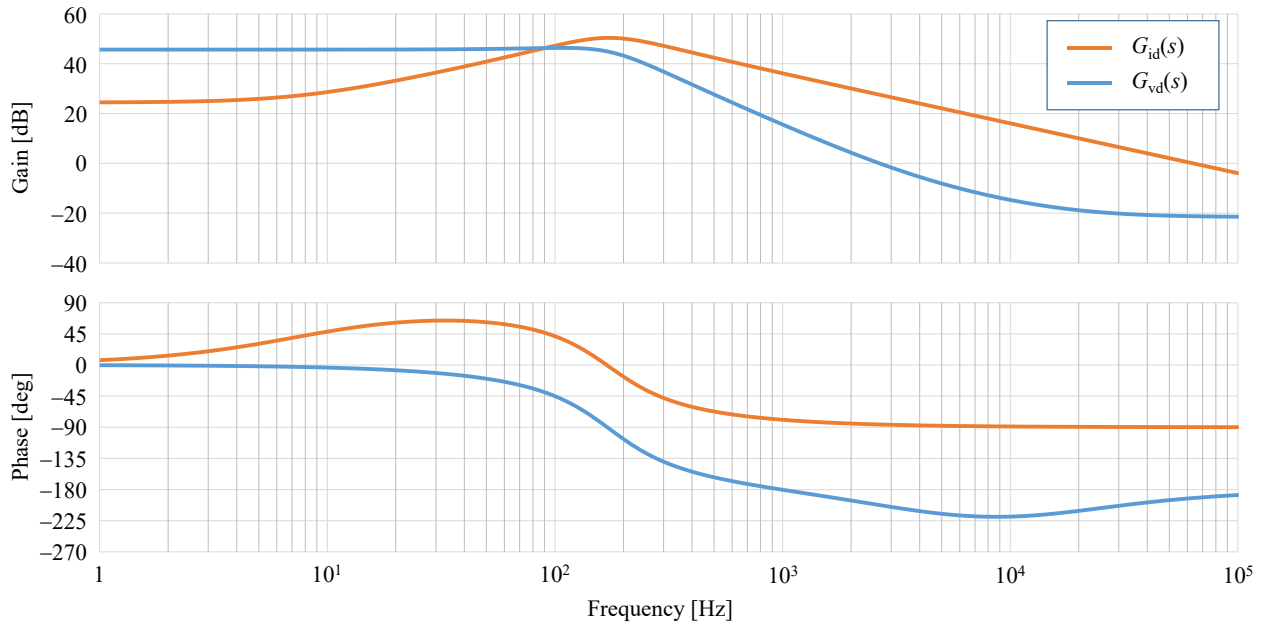


図 2.6 デューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対する伝達関数 $G_{id}(s)$, $G_{vd}(s)$ の周波数特性

図 2.7 に出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ に対する伝達関数 $G_{ii}(s)$, $Z_p(s)$ の周波数特性を示す。 $G_{ii}(s)$ は共振周波数以降はゲインが -40dB/dec の傾きで下降している。これは、インダクタが電流の急激な変化を抑制するためである。そのため、高周波であるほどインダクタのインピーダンスは増大し、インダクタ電流の傾きは緩やかになる。 $Z_p(s)$ は開ループ時の出力インピーダンスを表しており、低周波領域ではインダクタの直流抵抗 $r_L(\text{DCR})$ が、高周波領域では出力キャパシタの等価直列抵抗 $r_c(\text{ESR})$ が現れる。これは、インダクタは低周波領域では短絡、キャパシタは高周波領域では短絡と見なせるため、それぞれに直列接続された抵抗のみ確認できるためである。一方で、インダクタは高周波領域では開放、キャパシタは低周波領域では開放と見なせるため、電流が流れず、抵抗成分は無視される。

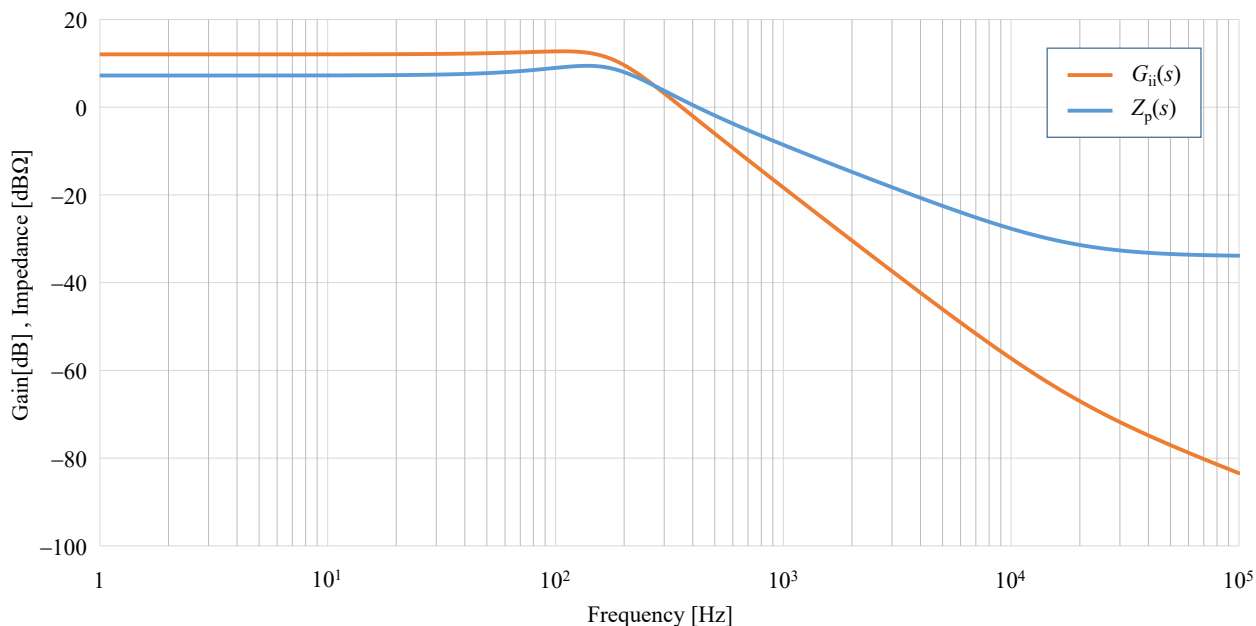


図 2.7 出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ に対する伝達関数 $G_{ii}(s)$, $Z_p(s)$ の周波数特性

図 2.8 に入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ に対する伝達関数 $G_{iv}(s)$, $G_{vv}(s)$ の周波数特性を示す。 $G_{iv}(s)$ は微分器を有しているため、低周波領域から共振周波数近傍までゲインが上昇している。 $G_{vv}(s)$ は開ループ時の入出力特性を表しており、共振周波数以降はゲインが -40dB/dec の傾きで下降している。これは、インダクタが電流の急激な変化を抑制するためである。

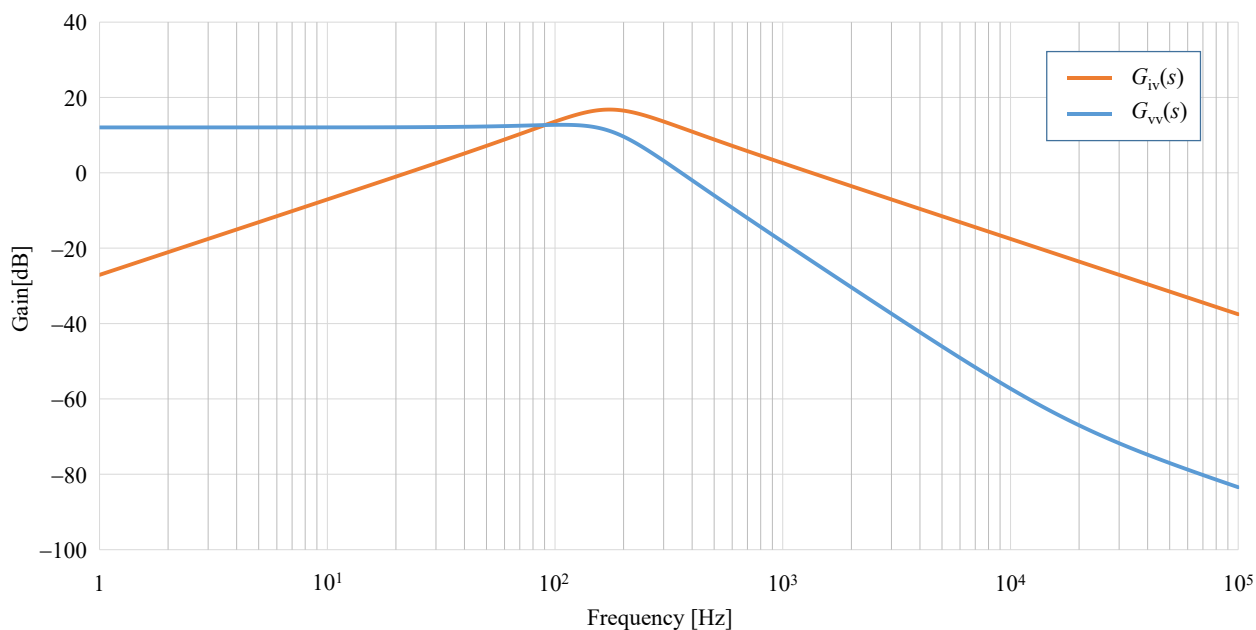


図 2.8 入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ に対する伝達関数 $G_{iv}(s)$, $G_{vv}(s)$ の周波数特性

2.3 スイッチング電源の制御系

スイッチング電源の制御系について述べる。スイッチング電源の代表的な制御手法として電圧モード制御 (VMC : Voltage Mode Control) 及び電流モード制御 (CMC : Current Mode Control) がある⁽⁵⁾⁻⁽⁸⁾。

2.3.1 電圧モード制御

図 2.9 に VMC の全体のブロック線図を示す。図 2.9 に示した VMC のブロック線図は出力電圧を一定に制御するフィードバックループに加え，出力インピーダンス $Z_o(s)$ 及び入出力特性 $A_u(s)$ をまとめたものとなっている。ここで，フィードバックループの一巡伝達関数を $T(s)$ とする。また，入出力特性 $A_u(s)$ はオーディオ・サセプタビリティ (Audio Susceptibility) とも呼ばれる。VMC はインダクタ電流をフィードバックループに含まない単一のフィードバックループで構成されている。

また， K_v は電圧センサゲイン， $G_c(s)$ は補償器 (制御器)， F_m は PWM 変調ゲインを表す。ここで，ここで，簡単化の為に電圧センサゲイン K_v および PWM 変調ゲインは F_m は 1 とする。PWM 変調ゲインの簡略化に関しては後述する。

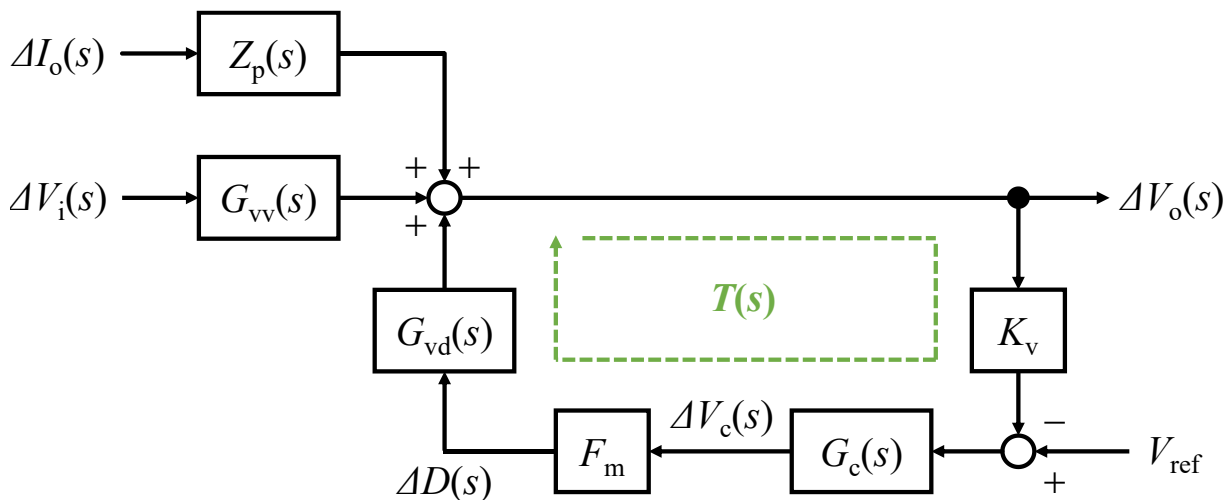


図 2.9 電圧モード制御のブロック線図

(1) PWM 変調ゲイン F_m

図 2.10 に PWM 変調の動作を示す。電圧補償器からの出力信号を PWM 信号に変換するため、コンパレータを用いる。コンパレータには電圧補償器からの出力信号 $V_c + \Delta V_c(s)$ とランプ信号（三角波，鋸波） V_{ramp} を入力する。その両者を比較することで、PWM 信号を出力する。

ここで、 V_c が設計値、 $\Delta V_c(s)$ が微小変動値である。また、ランプ信号 V_{ramp} の波高値(peak-to-peak)を V_{p-p} とする。1 周期におけるデューティ比は式(2-48)で表される。

$$D = \frac{V_c}{V_{p-p}} \dots\dots\dots (2-48)$$

ここで、 D 及び V_c に微小変動 $\Delta D(s)$ 、 $\Delta V_c(s)$ が生じたとしても、ランプ信号が線形性を有しているため、式(2-49)が成立する。

$$\Delta D(s) = \frac{\Delta V_c(s)}{V_{p-p}} \dots\dots\dots (2-49)$$

従って、PWM 変調ゲイン F_m は式(2-50)で表される。

$$F_m = \frac{\Delta D(s)}{\Delta V_c(s)} = \frac{1}{V_{p-p}} \dots\dots\dots (2-50)$$

そのため、ランプ信号の V_{p-p} を 1V にすることで、 F_m のゲインを 1 とすることが可能となる。

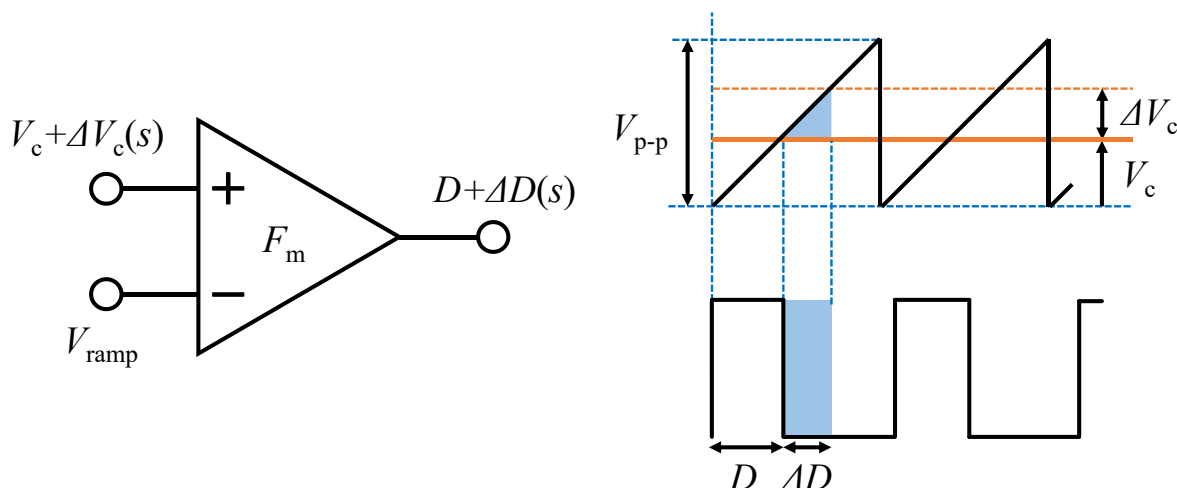


図 2.10 PWM 変調ゲインの動作

(2) 一巡伝達関数 $T(s)$

図 2.11 に VMC における一巡伝達関数のブロック線図を示す。VMC の一巡伝達関数 $T(s)$ を式(2-51)に示す。なお、後述の CMC の電圧制御ループにも用いるため、 $T(s)$ と区別するために $T_v(s)$ を用いる。また、電圧補償器 $G_c(s)$ で制御する対象をすべてまとめて $G_p(s)$ とする。

$$T(s) = G_c(s)F_m G_{vd}(s)K_v = G_c(s)G_p(s) = T_v(s) \dots\dots\dots (2-51)$$

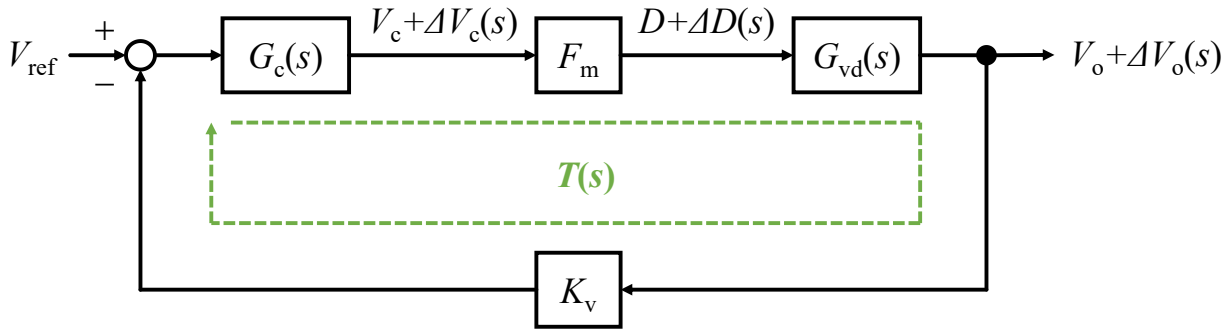


図 2.11 電圧モード制御における一巡伝達関数 $T(s)$ のブロック線図

図 2.12 に VMC の一巡伝達関数 $T(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が制御対象 $G_p(s)$ ，青色が電圧補償器 $G_c(s)$ ，緑色が一巡伝達関数 $T(s)$ を表す。ここで、 $G_c(s)$ は Type-3 補償器を用いるものとする⁽⁹⁾⁻⁽¹⁰⁾。 $G_c(s)$ の伝達関数を式(2-52)で示す。極を 3 つ，零点を 2 つ有しているため、3pole-2zero 補償器とも呼ばれる。表 2.2 に Type-3 補償器の各パラメータを示す。

$$G_c(s) = \frac{\omega_i}{s} \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)} \dots\dots\dots (2-52)$$

$G_c(s)$ の各パラメータは $G_p(s)$ のゲインが変化する周波数に合わせて設定している。そのため、極零相殺(Pole-Zero Cancellation : PZC)を積分周波数 ω_i 以外で行うことで、ゲイン曲線が積分器のように-20dB/dec の傾きで下降する非常にシンプルなものに変形させることができる。そのため、ゲインクロスオーバー周波数 ω_c を調整するパラメータは ω_i のみとなる。このように周波数特性をボード線図上で適切に変化させる設計法の事をループ整形法(loop shaping)と呼ぶ。ここでゲインクロスオーバー周波数 $f_c(\omega_c/2\pi)$ は 100Hz に設定した。この値は CMC でも同様である。

表 2.2 制御パラメータ (Type-3 補償器)

Parameters	Symbol	Values
Integral Frequency	ω_i [rad/s]	2.5 rad/s
1 st Zero Frequency	ω_{z1} [rad/s]	1100 rad/s
2 nd Zero Frequency	ω_{z2} [rad/s]	1350 rad/s
1 st Pole Frequency	ω_{p1} [rad/s]	22800 rad/s
2 nd Pole Frequency	ω_{p2} [rad/s]	151000 rad/s

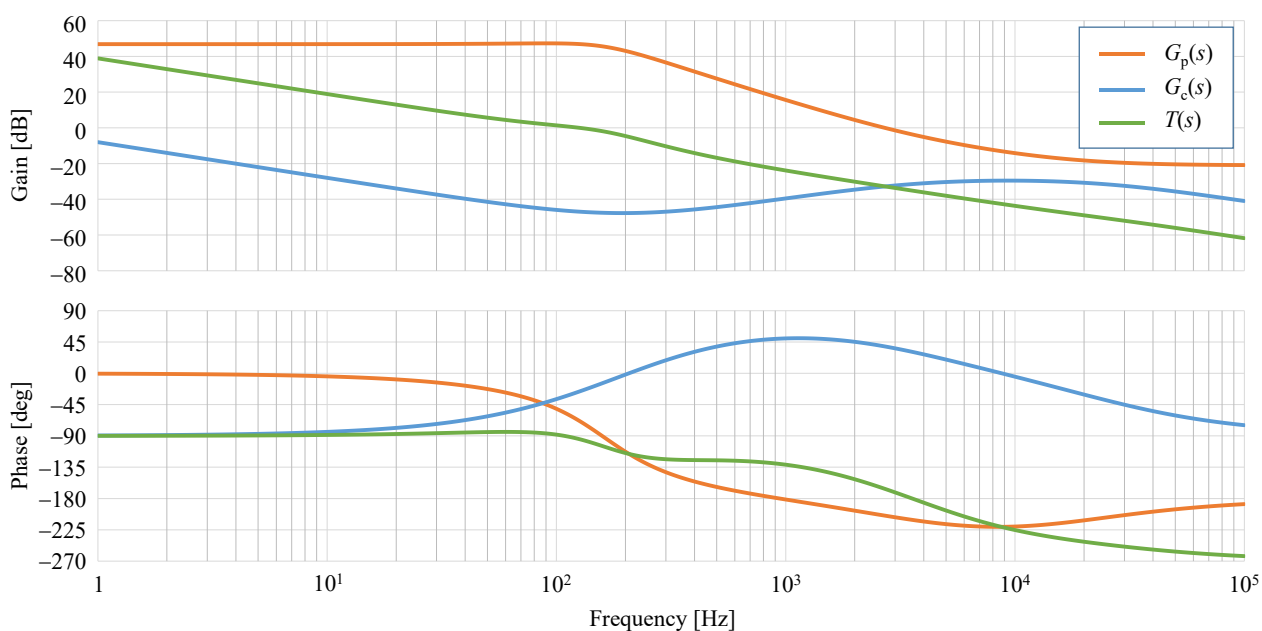


図 2.12 電圧モード制御における一巡伝達関数 $T(s)$ の周波数特性

(3) 出力インピーダンス $Z_o(s)$

図 2.13 に VMC における出力インピーダンスのブロック線図を示す。VMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ を式(2-53)に示す。なお, 入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ は出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ と同時には生じないと仮定して, 式(2-53)及び図 2.13 では除外している。

$$Z_o(s) = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\text{closed}} = \frac{Z_p(s)}{1+T(s)} \dots\dots\dots (2-53)$$

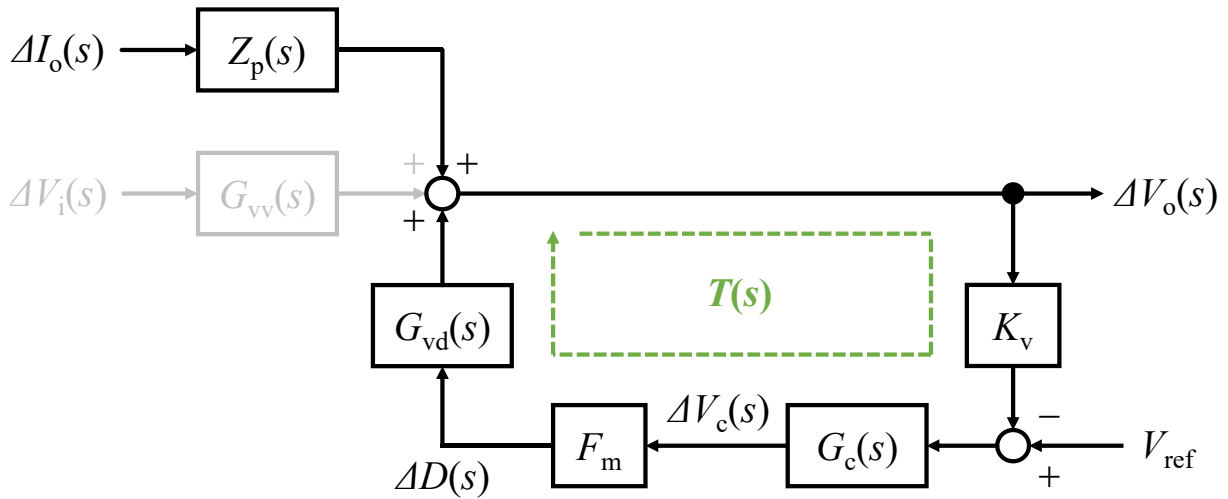


図 2.13 電圧モード制御における出力インピーダンス $Z_o(s)$ のブロック線図

図 2.14 に VMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が開ループ伝達関数における出力インピーダンス $Z_p(s)$ 、青色が閉ループ伝達関数の出力インピーダンス $Z_o(s)$ を表す。フィードバック制御により、 $Z_p(s)$ における低周波領域のインピーダンスが $Z_o(s)$ では大幅に低減されている。すなわち、 f_c 以下の低周波領域はフィードバック制御によって変動が抑制される。一方で、 f_c 以下の高周波領域ではフィードバック制御の影響が小さくなるため、開ループ制御と同様の周波数特性となる。

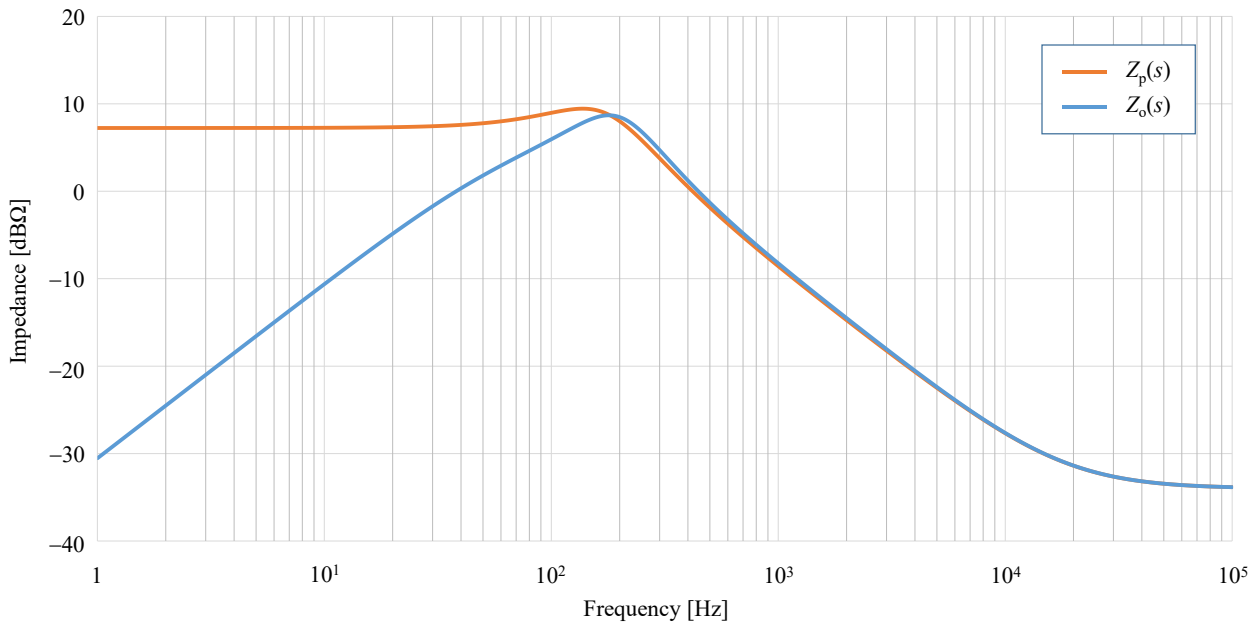


図 2.14 電圧モード制御における出力インピーダンス $Z_o(s)$ の周波数特性

(4) 入出力特性 $A_u(s)$

図 2.15 に VMC におけるブロック線図を示す。VMC の入出力特性 $A_u(s)$ を式(2-54)に示す。なお、出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ は入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ と同時には生じないと仮定して、式(2-54)及び図 2.15 では除外している。

$$A_u(s) = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\text{closed}} = \frac{G_{vv}(s)}{1+T(s)} \dots\dots\dots (2-54)$$

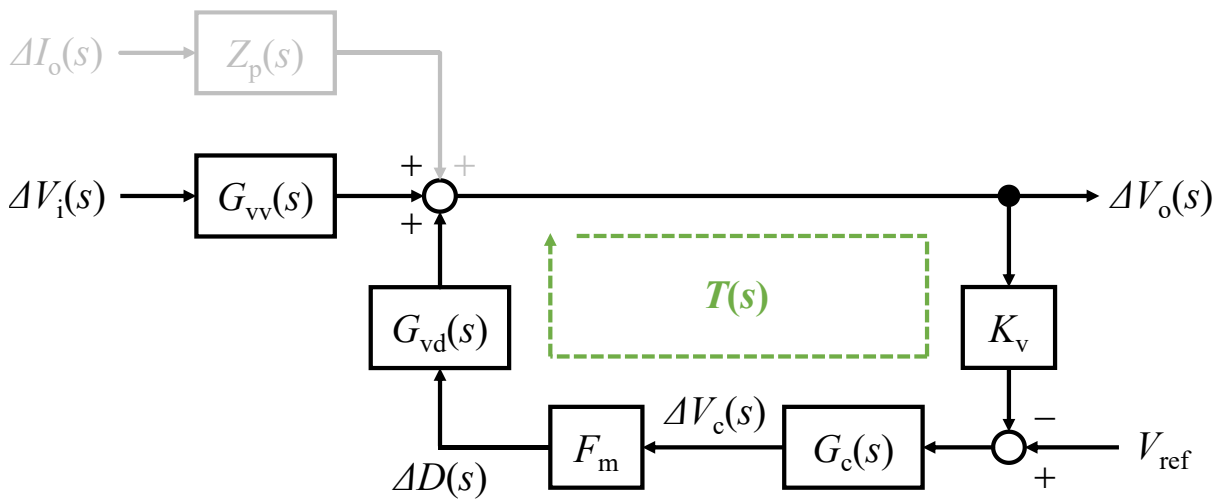


図 2.15 電圧モード制御における入出力特性 $A_u(s)$ のブロック線図

図 2.16 に VMC の入出力特性 $A_u(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が開ループ伝達関数における入出力特性 $G_{vv}(s)$ 、青色が開ループ伝達関数の入出力特性 $A_u(s)$ を表す。フィードバック制御により、 $G_{vv}(s)$ における低周波領域のインピーダンスが $A_u(s)$ では大幅に低減されている。すなわち、 f_c 以下の低周波領域はフィードバック制御によって変動が抑制される。一方で、 f_c 以下の高周波領域ではフィードバック制御の影響が小さくなるため、開ループ制御と同様の周波数特性となる。

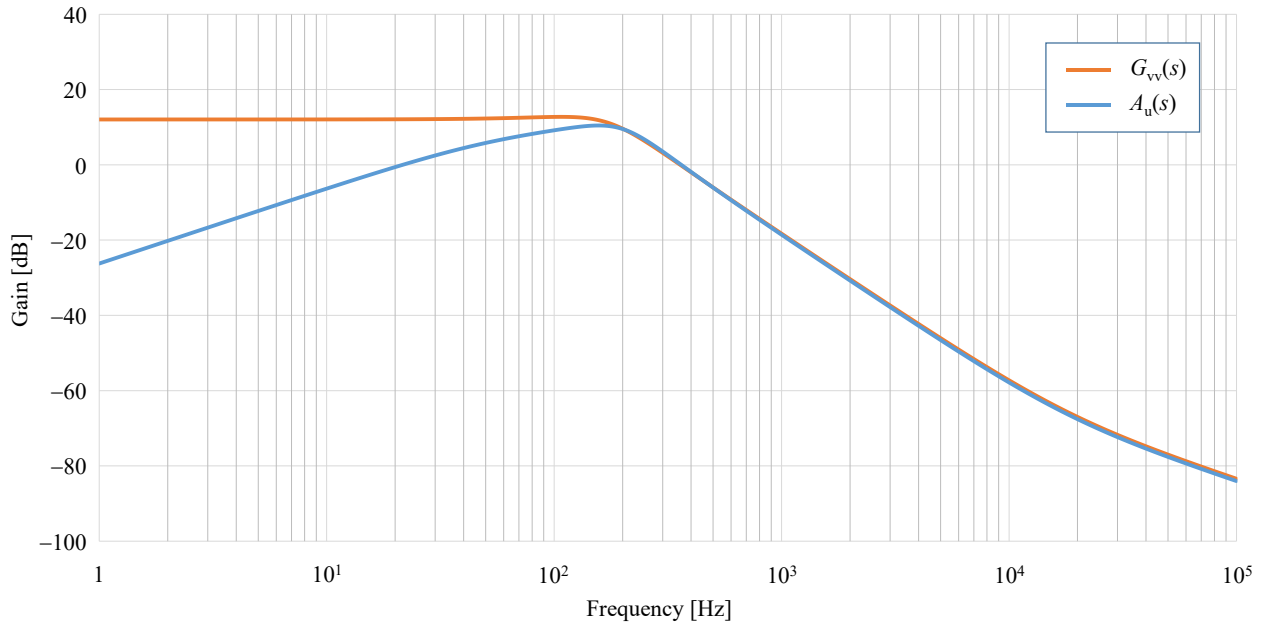


図 2.16 電圧モード制御における入出力特性 $A_u(s)$ の周波数特性

2.3.2 電流モード制御

図 2.17 に CMC のブロック線図を示す。図 2.17 に示した CMC のブロック線図は VMC で用いたフィードバック要素である出力電圧の微小変動 $\Delta V_o(s)$ に加え、インダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$ もフィードバック要素としている。そのため、電圧制御ループと電流制御ループの 2 重のフィードバックループで構成されており、各外乱 ($\Delta D(s)$, $\Delta I_o(s)$, $\Delta V_i(s)$) に対する $\Delta I_L(s)$ の伝達関数 ($G_{id}(s)$, $G_{ii}(s)$, $G_{iv}(s)$) も追加されている。

ここで、電流センサゲイン K_i は CMC の定常時におけるデューティ比の変動を抑制するため、 $K_i = 0.06$ 設定にしている、 K_v と F_m は前述の VMC と同様に 1 としている。

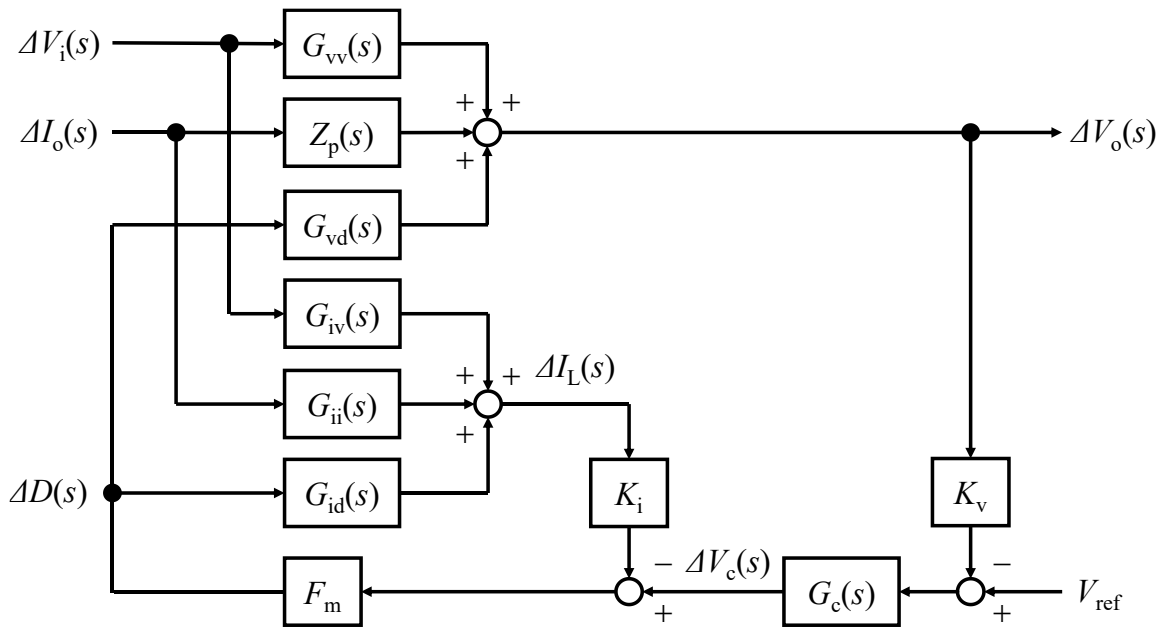


図 2.17 電流モード制御のブロック線図

(1) 一巡伝達関数 $T(s)$

図 2.18 に CMC における一巡伝達関数のブロック線図を示す。CMC の一巡伝達関数 $T(s)$ は式(2-55)で表される。

$$\begin{cases} T(s) = G_c(s) \frac{F_m}{1 + F_m G_{id}(s) K_i} G_{vd}(s) K_v = \frac{T_v(s)}{1 + T_i(s)} \\ T_i(s) = F_m G_{id}(s) K_i \\ T_v(s) = G_c(s) F_m G_{vd}(s) K_v \end{cases} \dots\dots\dots (2-55)$$

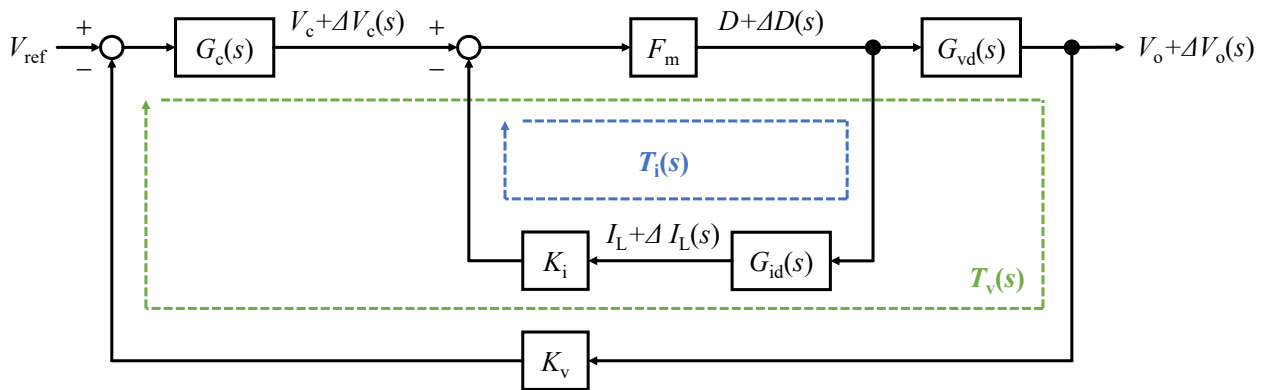


図 2.18 電流モード制御における一巡伝達関数 $T(s)$ のブロック線図

図 2.19 に CMC の一巡伝達関数 $T(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が制御対象 $G_p(s)$,

青色が電圧補償器 $G_c(s)$, 緑色が一巡伝達関数 $T(s)$ を表す。ここで, $G_c(s)$ は Type-2 補償器を用いるものとする。 $G_c(s)$ の伝達関数を式(2-56)で示す。極を 2 つ, 零点を 1 つ有しているため, 2pole-1zero 補償器とも呼ばれる。表 2.3 に Type-2 補償器の各パラメータを示す。

$$G_c(s) = \frac{\omega_i}{s} \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_z}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)} \dots\dots\dots (2-56)$$

$G_c(s)$ の各パラメータは $G_p(s)$ のゲインが変化する周波数に合わせて設定している。そのため, VMC と同様に極零相殺を積分周波数 ω_i 以外で行うことで, ゲイン曲線が積分器のように-20dB/dec の傾きで下降する非常にシンプルなものに変形させることができる。そのため, ゲインクロスオーバー周波数 ω_c を調整するパラメータは ω_i のみとなる。ここでゲインクロスオーバー周波数 $f_c(\omega_c/2\pi)$ は前述の VMC と同じ 100Hz に設定した。

表 2.3 制御パラメータ (Type-2 補償器)

Parameters	Symbol	Values
Integral Frequency	ω_i [rad/s]	15.5 rad/s
Zero Frequency	ω_z [rad/s]	232 rad/s
Pole Frequency	ω_p [rad/s]	19000 rad/s

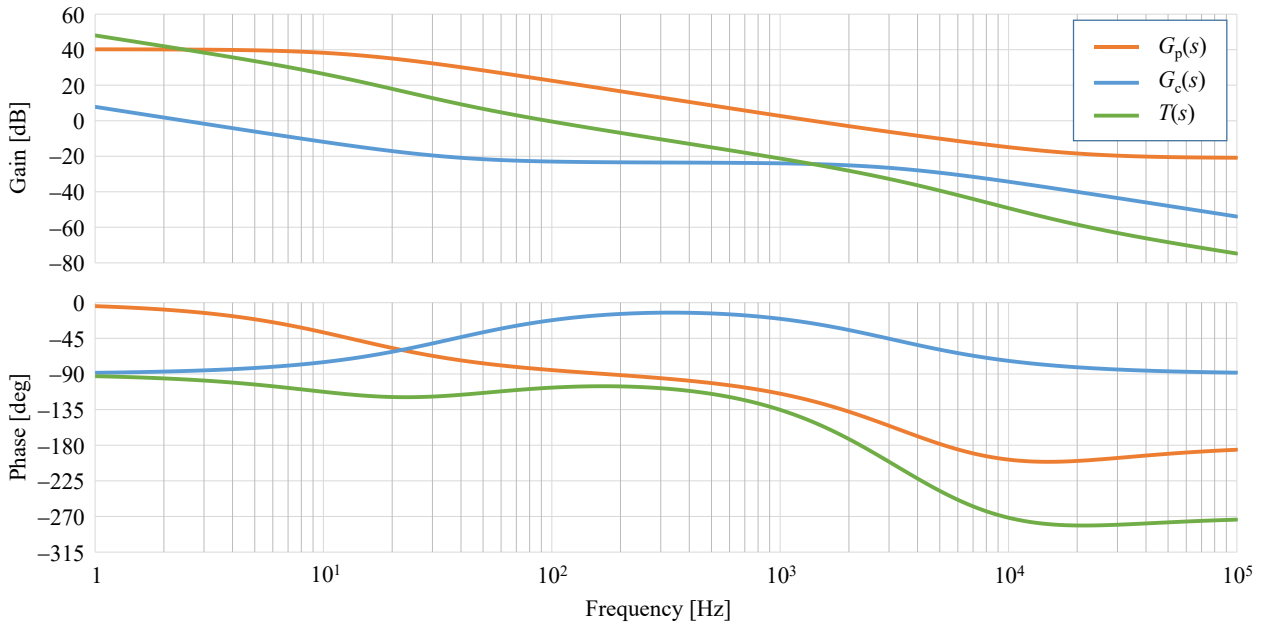


図 2.19 電流モード制御における一巡伝達関数 $T(s)$ の周波数特性

(2) 出力インピーダンス $Z_o(s)$

図 2.20 に CMC における出力インピーダンスのブロック線図を示す。CMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ は式(2-57)で表される。ここで、 $Z_{oi}(s)$ は $Z_o(s)$ における開ループ伝達関数を表す。なお、ブロック線図から式(2-57)を導出することも可能だが複雑なため、メイソンのゲイン公式(Mason's gain formula : MGF)を使用した。なお、入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ は出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ と同時には生じないと仮定して、式(2-57)及び図 2.20 では除外している。

$$\begin{cases} Z_o(s) = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \right|_{\text{closed}} = \frac{Z_{oi}(s)}{1 + T_i(s) + T_v(s)} & \dots\dots\dots (2-57) \\ Z_{oi}(s) = Z_p(s) \cdot (1 + T_i(s)) - K_i \cdot G_{ii}(s) \cdot F_m \cdot G_{vd}(s) \end{cases}$$

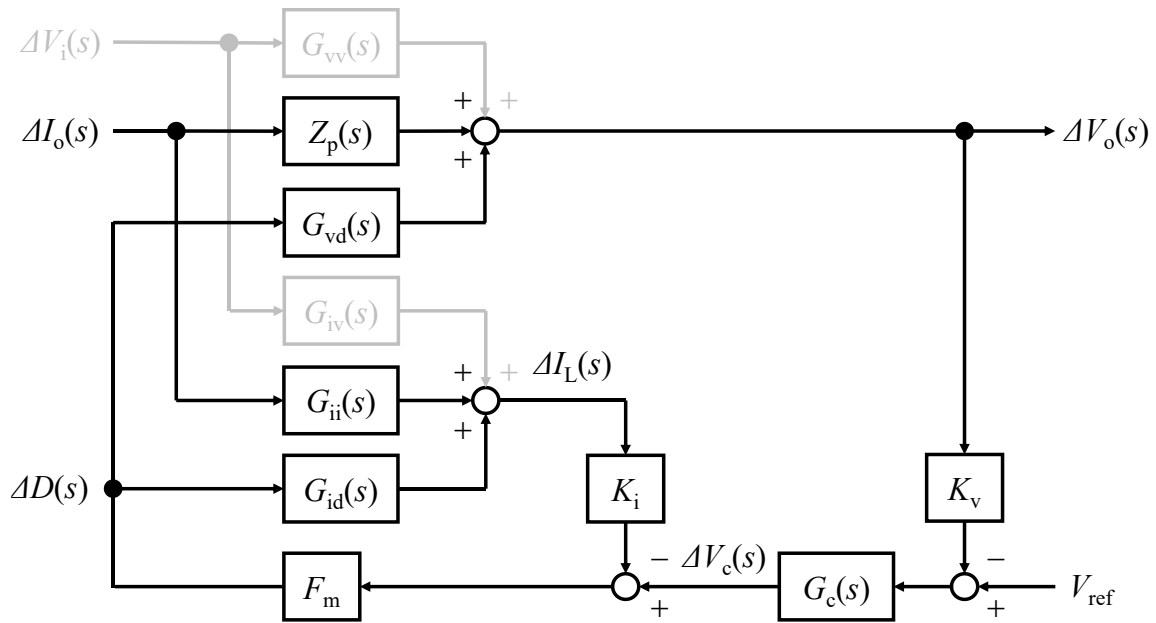


図 2.20 電流モード制御における出力インピーダンス $Z_o(s)$ のブロック線図

図 2.21 に CMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が開ループ伝達関数における出力インピーダンス $Z_p(s)$ 、青色が閉ループ伝達関数の出力インピーダンス $Z_o(s)$ を表す。フィードバック制御により、 $Z_p(s)$ における低周波領域のインピーダンスが $Z_o(s)$ では大幅に低減されている。すなわち、 f_c 以下の低周波領域はフィードバック制御によって変動が抑制される。一方で、 f_c 以下の高周波領域ではフィードバック制御の影響が小さくなるため、開ループ制御と同様の周波数特性となる。

そのため、VMC と同様の結果が得られているが、VMC よりも低周波領域におけるゲインの低減量は少ない。これは電流制御ループを有しており、定常時であってもインダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$ が出力電圧の微小変動に影響を与えていると考えられる。

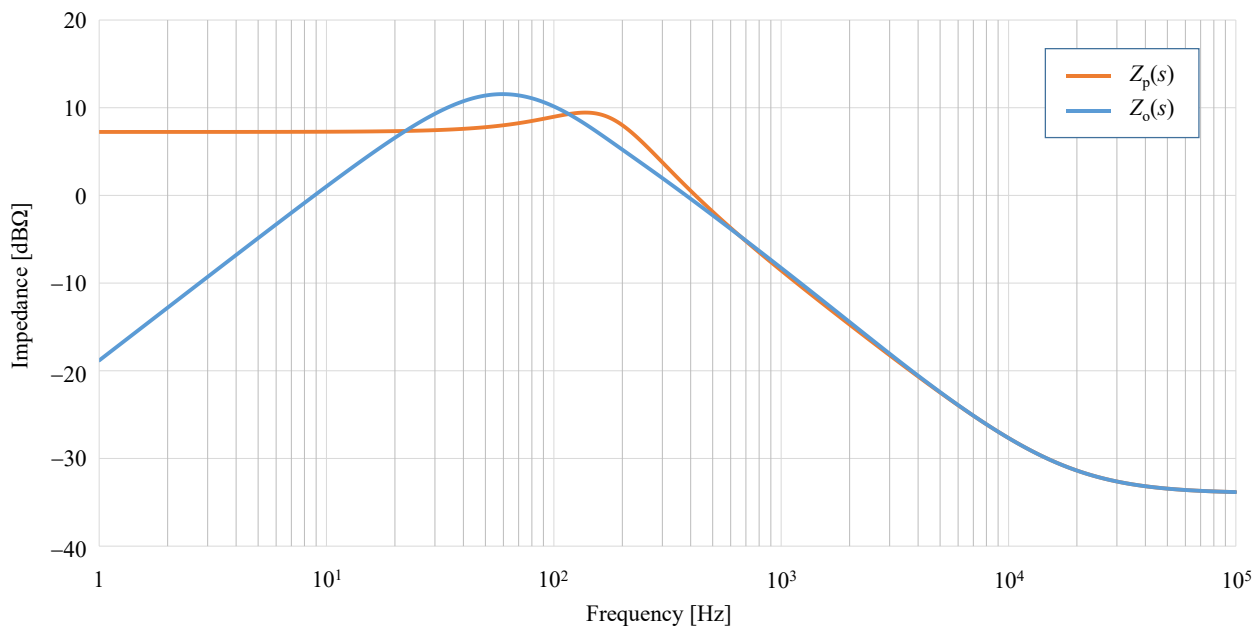


図 2.21 電流モード制御における出力インピーダンス $Z_o(s)$ の周波数特性

(3) 入出力特性 $A_u(s)$

図 2.22 に CMC におけるブロック線図を示す。CMC の入出力特性 $A_u(s)$ は式(2-58)で表される。ここで、 $A_{ui}(s)$ は $A_u(s)$ における開ループ伝達関数である。なお、ブロック線図から式(2-58)を導出することも可能だが複雑なため、出力インピーダンス $Z_o(s)$ と同様にメイソンのゲイン公式を使用した。なお、出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ は入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ と同時には生じないと仮定して、式(2-58)及び図 2.22 では除外している。

$$\begin{cases} A_u(s) = \left. \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} \right|_{\text{closed}} = \frac{A_{ui}(s)}{1 + T_i(s) + T_v(s)} & \dots\dots\dots (2-58) \\ A_{ui}(s) = G_{vv}(s) \cdot (1 + T_i(s)) - K_i \cdot G_{iv}(s) \cdot F_m \cdot G_{vd}(s) \end{cases}$$

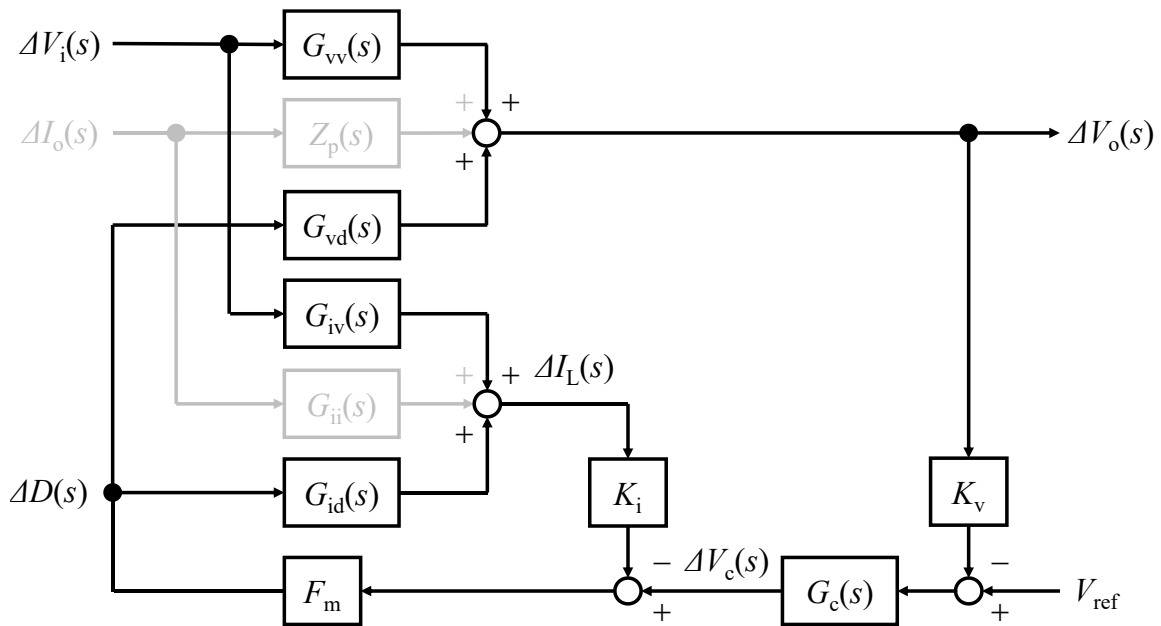
図 2.22 電流モード制御における入出力特性 $A_u(s)$ のブロック線図

図 2.23 に VMC の入出力特性 $A_u(s)$ に関する周波数特性を示す。橙色が開ループ伝達関数における入出力特性 $G_{vv}(s)$ 、青色が閉ループ伝達関数の入出力特性 $A_u(s)$ を表す。フィードバック制御により、 $G_{vv}(s)$ における低周波領域のインピーダンスが $A_u(s)$ では大幅に低減されている。すなわち、 f_c 以下の低周波領域はフィードバック制御によって変動が抑制される。一方で、 f_c 以下の高周波領域ではフィードバック制御の影響が小さくなるため、開ループ制御と同様の周波数特性となる。

そのため、VMC と同様の結果が得られているが、VMC よりも低周波領域におけるゲインの低減量は多く、高周波領域においてはゲインの低減量は少なくなっている。これは $G_{iv}(s)$ が微分器 s を有しており、低周波領域においてゲインを低減するが、高周波領域になるにつれてゲインを上昇する影響が表れたと考えられる。

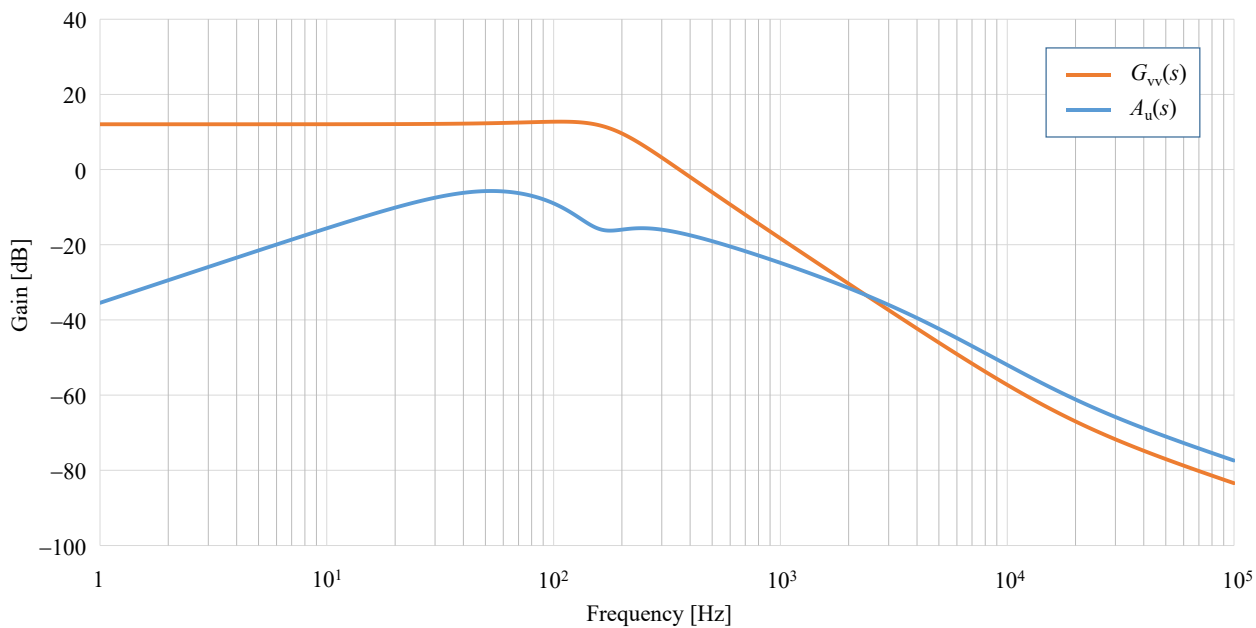


図 2.23 電流モード制御における入出力特性 $A_u(s)$ の周波数特性

参考文献

- (1) R. D. Middlebrook , S. Cuk, "A general unified approach to modelling switching converter power stages", IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC), pp. 18-34 (1976)
- (2) T. Ninomiya, M. Nakahara, T. Higashi and K. Harada, "A unified analysis of resonant converters," in IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 6, No. 2, pp. 260-270 (1991)
- (3) A.F. Witulski; R.W. Erickson : "Extension of state-space averaging to resonant switches and beyond", IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 5, No. 1, pp. 98-109 (1990)
- (4) 川上 太知, 山本 真義 : 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, 電気学会部門誌 D, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)
- (5) M. Truntič and M. Milanovič, "Voltage and Current-Mode Control for a Buck-Converter based on Measured Integral Values of Voltage and Current Implemented in FPGA," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 29, No. 12, pp. 6686-6699 (2014)
- (6) B. Bryant and M. K. Kazimierczuk, "Voltage loop of boost PWM DC-DC converters with peak current-mode control," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 53, no. 1, pp. 99-105 (2006)
- (7) S. Saggini, D. Trevisan, P. Mattavelli and M. Ghioni, "Synchronous–Asynchronous Digital Voltage-Mode Control for DC–DC Converters," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 22, No. 4, pp. 1261-1268 (2007)
- (8) G. Garcera, E. Figueres and A. Mocholi, "Novel three-controller average current mode control of DC-DC PWM converters with improved robustness and dynamic response," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 15, No. 3, pp. 516-528, (2000)
- (9) K. I. Hwu, W. Jiang and J. Shieh, "Analysis and design of type 3 compensator for the boost converter based on PSIM," 2018 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), pp. 1437-1442 (2018)
- (10) K. I. Hwu, J. Shieh and W. Jiang, "Analysis and design of type 3 compensator for the buck converter based on PSIM," 2018 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), pp. 1010-1015 (2018)

第3章 低次元化モデリング手法

3.1 緒言

本章では、マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの伝達関数導出に伴う数学モデルの低次元化モデリング手法を提案する。図 3.1 に対象回路であるマルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータの回路図を示す。図 3.1 は 2 章の図 2.1 で示した単相昇圧型 DC-DC コンバータを 2 段に増設し、並列接続させた構成となっている。ただし、出力キャパシタは 1 つにまとめている。なお、相数はマルチフェーズ方式において最小の 2 相としている。

マルチフェーズ方式は駆動相数の増加に対して入出力キャパシタの見かけの容量は比例して増加する上に、大電力駆動に伴う電力分散の自由度も高くなる。そのため、小型化・高電力密度化を実現させる手法として非常に有効である。しかし、駆動相数の増加に伴い、制御系のモデリングが複雑化するという問題がある。制御系モデリング手法として用いられている状態平均化法は回路方程式（微分方程式）を状態方程式と出力方程式に変形し、回路の動作モードの割合で加重平均をするという手法である。そのため、単相では ON と OFF の 2 パターンで加重平均を行うが、2 相の場合は ON/ON, ON/OFF, OFF/ON, OFF/OFF の 4 パターンで加重平均を行わなければならない。さらに、状態方程式及び出力方程式の次数も増加してしまうため、導出した伝達関数モデルが 3 次系を有することになる。

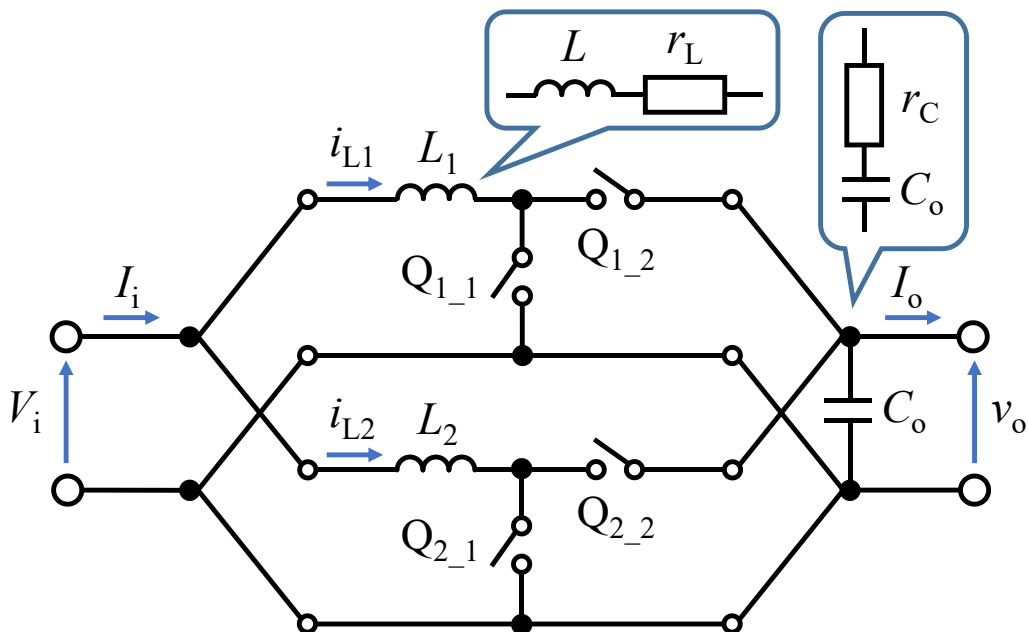


図 3.1 マルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータ (2 相)

本研究では、制御系のモデリングの複雑化を改善する低次元化モデリング手法を提案した。提案するモデリング手法と従来制御手法で周波数特性およびステップ応答特性にて各種比較を行い、その有効性を検証する。

3.2 従来のマルチフェーズ方式における伝達関数の導出

従来のマルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの伝達関数を導出する方法は基本的に単相時と同様である⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾。前述の通り、2相昇圧型 DC-DC コンバータを対象回路とする。第2章の導出手順と同様に、スイッチの各状態に応じた等価回路から状態方程式及び出力方程式を導出する。ここで、マルチフェーズ方式でスイッチングコンバータを駆動させる場合、各相のスイッチングの位相を 180deg シフトさせる。図 3.2 にマルチフェーズ方式におけるスイッチングパターンを示す。

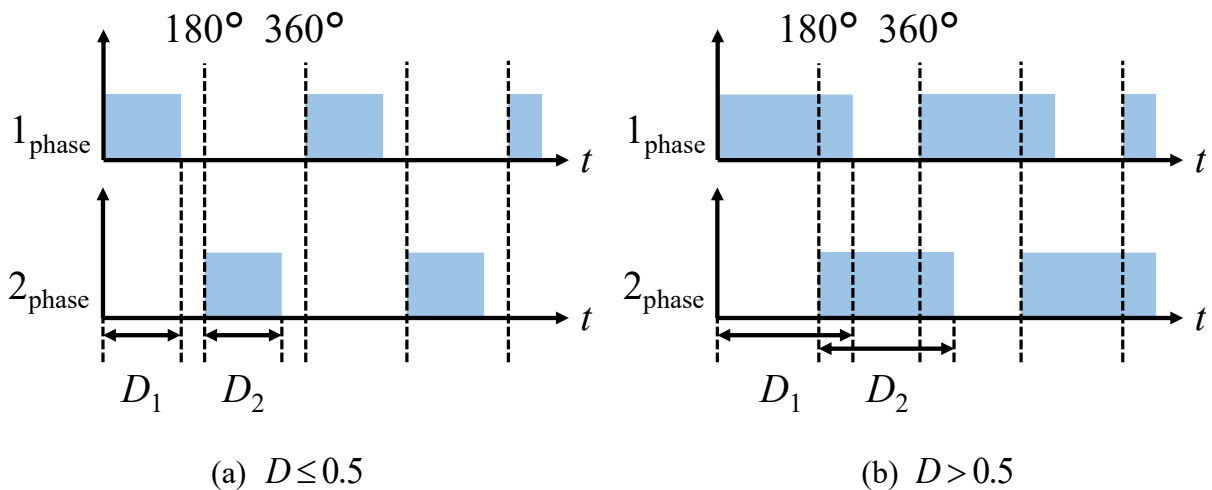


図 3.2 マルチフェーズ方式におけるスイッチングパターン

これにより、各相のスイッチングコンバータが交互に駆動され、キャパシタの充放電の周期はスイッチング周波数の2倍となる。即ち、各相のスイッチングコンバータが交互に動作しているため、全てのスイッチングパターンに応じた状態方程式及び出力方程式を導出する必要がある。さらに、回路に流れる電流が1相分増加しているため、状態ベクトル及び各係数行列の次元を増加させる必要がある。従って、マルチフェーズ方式における状態方程式及び出力方程式は式(3-1)で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \\ v_o(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3-1)$$

式(3-1)から分かれるとおり、回路が2相に増加しただけで係数行列の次元が増加するなど複雑化しており、モデリングが非常に困難になる。

また、スイッチングコンバータは基本的に各相が等しくなるように設計する。従って、各相のパラメータを全て等しく置くことで、計算式を簡略化することが可能となる。しかしながら、各相のパラメータが全て等しかったとしても、システムの次元は下がらない。また、各相のパラメータ、電流、電圧を全て等しいと仮定して低次元化した場合、インダクタンス値及びインダクタに流れる電流を等しいとした上で単相時の次元まで低次元化すると昇圧比が変化してしまい、モデリングが一致しなくなってしまう。そこで本論文ではシステムを簡易的に低次元化モデリングする手法を提案する⁽⁸⁾。

3.3 提案手法による数学モデルの低次元化

3.3.1 提案手法の説明

2相 DC-DC コンバータを独立した単相 DC-DC コンバータの多段並列システムとした回路を図 3.3 に示す。このような回路として考えるためには、図 3.1 に示した回路のキャパシタを等価的に各相に分割する必要がある。ここで、マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータは各相のパラメータが等しくなるように設計する。そのため、図 3.4 のように出力平滑キャパシタが各相に分割できるような等価回路を用いることで、図 3.5 のような多段並列システムとして考えることが可能となる。次に提案手法によって高次元モデルの低次元化が出来ることを数学的に示す。

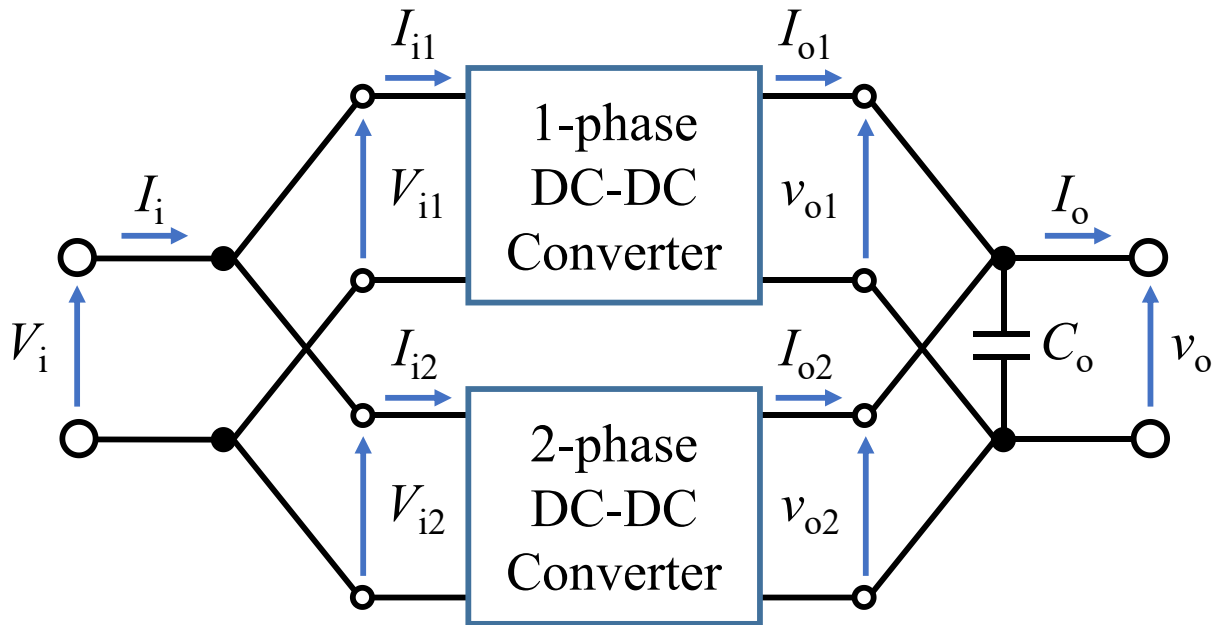


図 3.3 マルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータ (2 相)

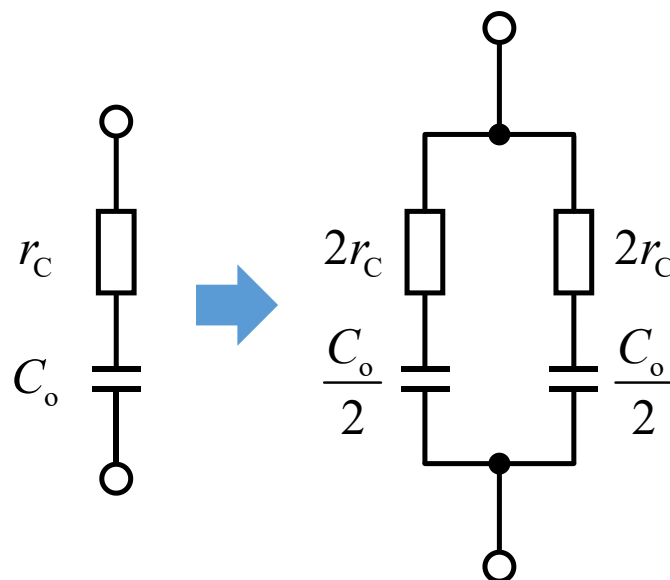


図 3.4 出力キャパシタの等価回路

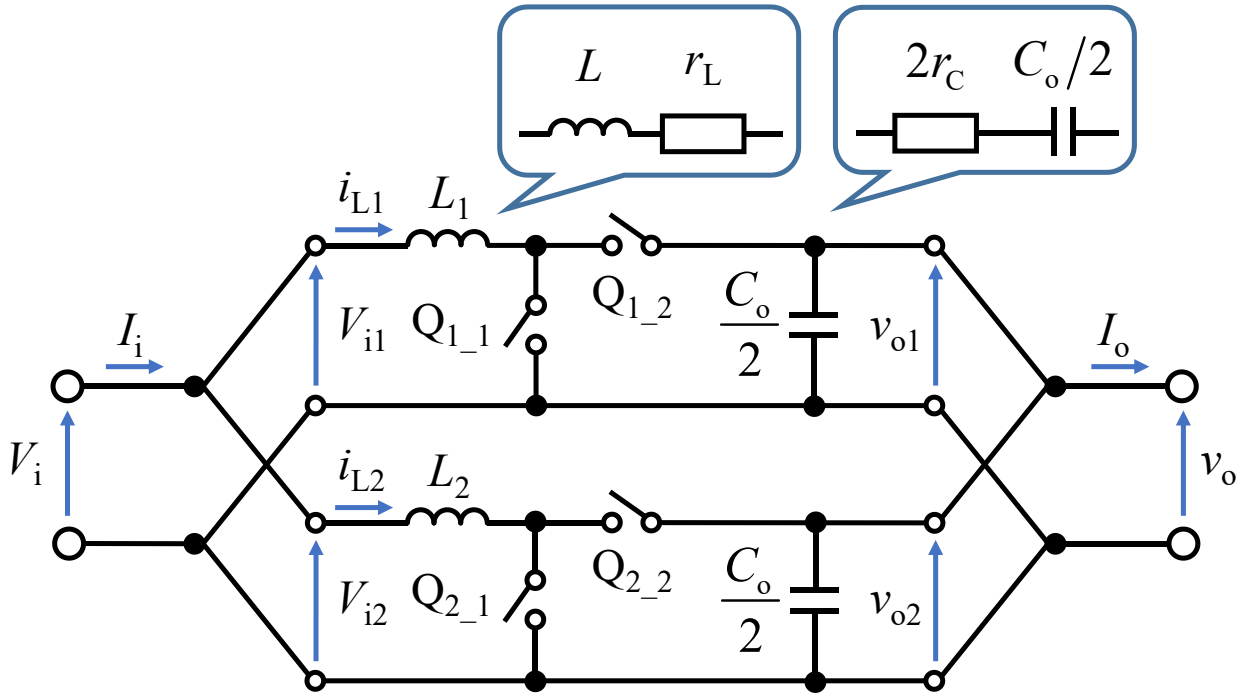


図 3.5 マルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータ（等価回路変換）

3.3.2 提案手法の数学的考察

図 3.5 に示した提案手法を用いて各相を独立させた DC-DC コンバータの数学的考察をする。まず、2 相昇圧型 DC-DC コンバータの基本的な状態方程式及び出力方程式を式(3-2)に示す。

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}\bar{\mathbf{u}}(t) \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1} + D'r_c}{L_1} & 0 & -\frac{D'}{L_1} \\ 0 & -\frac{r_{L2} + D'r_c}{L_2} & -\frac{D'}{L_2} \\ \frac{D'}{C_o} & \frac{D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \frac{D'r_c}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & \frac{D'r_c}{L_2} \\ 0 & -\frac{1}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-2) \\ & \bar{\mathbf{v}}_o(t) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}}(t) = [D'r_c \quad D'r_c \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_C(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -r_c] \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_o(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

ここで、上式の状態方程式及び出力方程式を図 3.5 の回路の形式に直すと、式(3-3)で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}+2D'r_c}{L_1} & 0 & -\frac{D'}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{r_{L2}+D'r_c}{L_2} & 0 & -\frac{D'}{L_2} \\ \frac{2D'}{C_o} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2D'}{C_o} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_{C1}(t) \\ \bar{v}_{C2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{D'r_c}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{D'r_c}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{C_o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i1}(t) \\ V_{i2}(t) \\ I_{o1}(t) \\ I_{o2}(t) \end{bmatrix} \cdots \cdots \\ \bar{v}_o(t) = [2D'r_c \quad 2D'r_c \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_{C1}(t) \\ \bar{v}_{C2}(t) \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad -2r_c \quad -2r_c] \begin{bmatrix} V_{i1}(t) \\ V_{i2}(t) \\ I_{o1}(t) \\ I_{o2}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3-3)$$

ここで、追加したパラメータは式(3-4)の対応関係とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_c(t) = \bar{v}_{c1}(t) = \bar{v}_{c2}(t) \\ V_i(t) = V_{i1}(t) = V_{i2}(t) \cdots \cdots \\ I_o(t) = 2I_{o1}(t) = 2I_{o2}(t) \end{array} \right. \quad (3-4)$$

式(3-3)の状態方程式及び出力方程式を2相で分割すると式(3-5)で表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \frac{d\bar{x}_1(t)}{dt} + \frac{d\bar{x}_2(t)}{dt} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}+2D'r_c}{L_1} & -\frac{D'}{L_1} \\ \frac{2D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{v}_{C1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \frac{D'r_c}{L_1} \\ 0 & -\frac{2}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i1}(t) \\ I_{o1}(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -\frac{r_{L2}+D'r_c}{L_2} & -\frac{D'}{L_2} \\ \frac{2D'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_{C2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2} & \frac{D'r_c}{L_2} \\ 0 & -\frac{2}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i2}(t) \\ I_{o2}(t) \end{bmatrix} \cdots \cdots \\ \bar{v}_{o1}(t) = [2D'r_c \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1}(t) \\ \bar{v}_{C1}(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -2r_c] \begin{bmatrix} V_{i1}(t) \\ I_{o1}(t) \end{bmatrix} \\ \bar{v}_{o2}(t) = [2D'r_c \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_{L2}(t) \\ \bar{v}_{C2}(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -2r_c] \begin{bmatrix} V_{i2}(t) \\ I_{o2}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3-5)$$

ここで、各相に分割した状態方程式及び出力方程式の各係数行列は単相昇圧型 DC-DC コンバータの係数行列と等しい。従って、マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータは単相 DC-DC コンバータとして等価的に分割が可能となる。

3.3.3 提案手法の一般化

式(3-5)に示した低次元化モデルに用いた式は最も相数が少ない2相昇圧型DC-DCコンバータである。この式をより相数が増加した場合でも扱えるよう、状態方程式及び出力方程式を一般化した式を式(3-6)に示す。ここで、 N は回路の最大駆動相数を表す。

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{d\bar{x}_n(t)}{dt} &= \sum_{n=1}^N (A_n \bar{x}_n(t) + b_n \bar{u}_n(t)) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\begin{bmatrix} -\frac{r_{Ln} + ND'r_C}{L_n} & -\frac{D'}{L_n} \\ \frac{ND'}{C_o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{Ln}(t) \\ \bar{v}_{Cn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_n} & \frac{D'r_C}{L_n} \\ 0 & -\frac{N}{C_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{on}(t) \end{bmatrix} \right) \dots\dots\dots (3-6) \\ \bar{v}_{on}(t) &= [ND'r_C \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{i}_{Ln}(t) \\ \bar{v}_{Cn}(t) \end{bmatrix} + [0 \quad -Nr_C] \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{on}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

さらに式(3-6)から伝達関数モデルを導出することで、マルチフェーズ方式DC-DCコンバータの伝達関数の一般式を把握することができる。単相DC-DCコンバータとマルチフェーズ方式DC-DCコンバータの伝達関数モデルの対応については後述する。

3.4 シミュレーションによる動作確認

3.4.1 周波数特性の比較

本提案手法の有効性を確認するため、ACスイープ解析(AC sweep analysis)で求めた周波数特性と提案手法による低次元化モデルの周波数特性を比較する。ここで、ACスイープ解析は回路に対して正弦波を注入し、その正弦波の周波数を変化させて信号のゲイン及び位相の変化を解析する手法である。そのため、提案手法のように演算を簡略化せずに回路内に含むパラメータを全て考慮して周波数特性が出力される。

本論文ではACスイープ解析による周波数特性を高次元モデルとして比較を行う。なお、高次元モデルは回路シミュレータであるPSIMのACスイープ機能による周波数特性、低次元化モデルはMATLABで構築した数学モデルから導出した周波数特性で比較を行う。本論文ではマルチフェーズ方式で最も相数が少ない2相及び、相数を大きく増加させた10相で比較する。

ここで、モデリングに用いた回路パラメータを表3.1に示す。なお、相数の増加に伴ってインダクタ電流 i_L が分流し、出力電圧までの昇圧が不足してしまうため、インダクタンス L

を単相時から相数倍している。それに伴い、インダクタの巻数が増加するため、寄生抵抗 r_L も同様に単相時から相数倍している。なお、簡単化のために、各相の L 及び r_L は等しくしている。また、マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの近似伝達関数モデルの各伝達関数要素は表 3.2 にまとめた式を用いる。また、表 3.2 にまとめた式に代入した伝達関数の各パラメータを表 3.3 に示す。なお、 L 及び r_L が各相で大きく異なった場合はインダクタ電流が各相で異なるため、提案手法のモデルと大きく異なる可能性がある。しかしながら、不平衡が大きく生じた場合は出力電圧リップルが上昇してしまい、マルチフェーズ方式の利点を活かせるため、本研究では検討していない。

表 3.1 回路パラメータ (単相, 2 相, 10 相)

Parameters	Symbol	Values (1-ph)	Values (2-ph)	Values (10-ph)
Input Voltage	V_i [V]		12 V	
Output Voltage	V_o [V]		48 V	
Output Power	P_o [W]		200 W	
Inductor Current	I_L [A]	16.67 A	8.33 μ H	1.67 μ H
Output Current	I_o [A]		4.17 A	
Inductance	L [μ H]	18 μ H	36 μ H	180 μ H
Inductor DC Resistor (DCR)	r_L [m Ω]	20 m Ω	40 m Ω	200 m Ω
Output Capacitor	C_o [μ F]		500 μ F	
Output Capacitor ESR	r_c [m Ω]		30 m Ω	
Switching Frequency	f_s [kHz]		100 kHz	
Duty Ratio (Design)	D		0.75	

表 3.2 伝達関数の各パラメータ（単相昇圧型 DC-DC コンバータ等価変換）

	Parameter	Single-Phase	Multi-Phase (N : Phase number)
DC-gain (Voltage)	K_{dc_v}	$\frac{V_i}{D'^2} = \frac{V_i}{(1-D)^2}$	$\frac{V_i}{D'^2}$
DC-gain (Current)	K_{dc_i}	$\frac{I_o}{D'^2} = \frac{I_o}{(1-D)^2}$	$\frac{(I_o/N)}{D'^2}$
2 nd -order system	$\frac{1}{P(s)}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
Damping factor	ζ	$\frac{r_L + D'r_c}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{L}}$	$\frac{r_L + D'Nr_c}{2D'} \sqrt{\frac{(C_o/N)}{L}}$
Resonance frequency	ω_n	$\frac{D'}{\sqrt{LC_o}}$	$\frac{D'}{\sqrt{L(C_o/N)}}$
Load zero frequency	ω_o	$\frac{D'I_o}{C_o V_i}$	$\frac{D'(I_o/N)}{(C_o/N)V_i} = \frac{D'I_o}{C_o V_i}$
ESR zero frequency	ω_{esr}	$\frac{1}{C_o r_c}$	$\frac{1}{(C_o/N)Nr_c} = \frac{1}{C_o r_c}$
RHP zero frequency	ω_{rhp}	$\frac{D'V_i}{LI_o}$	$\frac{D'V_i}{L(I_o/N)}$

表 3.3 伝達関数パラメータの代入結果一覧（2相，10相）

Symbol	Values (2-ph)	Values (10-ph)
$20\log_{10}K_{dc_v}$ [dB]		45.67 dB
$20\log_{10}K_{dc_i}$ [dB]	30 dB	16.49 dB
ζ		0.29
ω_n [rad/s]		2635.23 rad/s
ω_o [rad/s]		173.75 rad/s
ω_{esr} [rad/s]		66666.67 rad/s
ω_{rhp} [rad/s]		39968.03 rad/s

第2章で説明したとおり、 $G_{id}(s)$ はデューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対するインダクタ電流の微小変動 $\Delta i_L(s)$ の伝達関数、 $G_{vd}(s)$ はデューティ比の微小変動 $\Delta D(s)$ に対する出力電圧の微小変動 $\Delta V_o(s)$ の伝達関数を表す。図3.6～3.9に二つのモデリング手法による各伝達関数の周波数特性を示す。図より、低次元化モデルが高次元モデルとほぼ一致していることが確認できる。これにより、本提案手法の妥当性を確認することが出来た。なお、PSIMの周波数特性における高周波領域が歪んでいるのは、スイッチングノイズによる影響である。

表3.3で、 K_{dc_i} のみ相数の増加に伴って値が変化しているが、それ以外の伝達関数パラメータは変化していない。これは前述のように相数の増加に伴って L 及び r_L を相数倍したためである。従って、 L 及び r_L を含んだ伝達関数パラメータは式(3-7)のように変形することが可能となる。そのため、相数に応じて L 及び r_L を相数倍した場合、 K_{dc_i} 以外の伝達関数パラメータは単相時と全く同じ値となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{Nr_L + D'Nr_c}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{NL}} = \frac{N(r_L + D'r_c)}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{N^2L}} = \frac{r_L + D'r_c}{2D'} \sqrt{\frac{C_o}{L}} \\ \omega_n = \frac{D'}{\sqrt{NL \cdot \frac{C_o}{N}}} = \frac{D'}{\sqrt{LC_o}} \\ \omega_{rhp} = \frac{D'V_i}{NL \cdot \frac{I_o}{N}} = \frac{D'V_i}{LI_o} \end{array} \right. \dots\dots\dots (3-7)$$

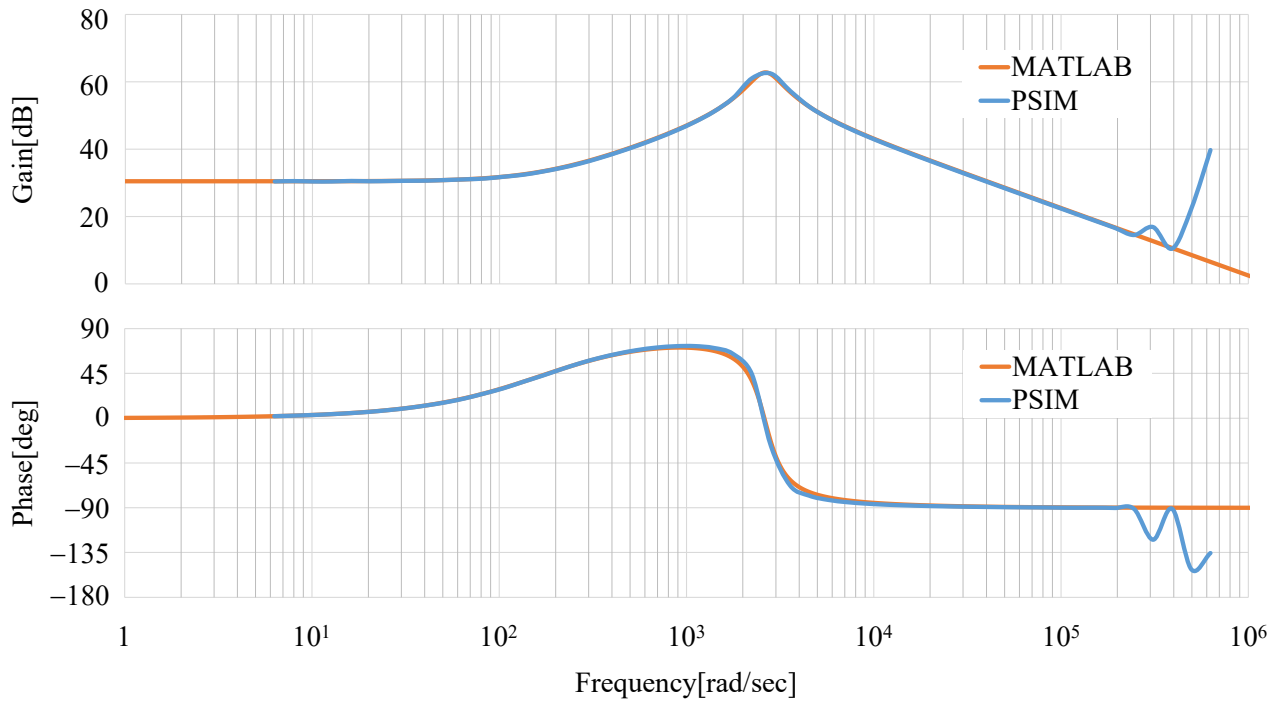


図 3.6 $G_{id}(s)$ の周波数特性：2相

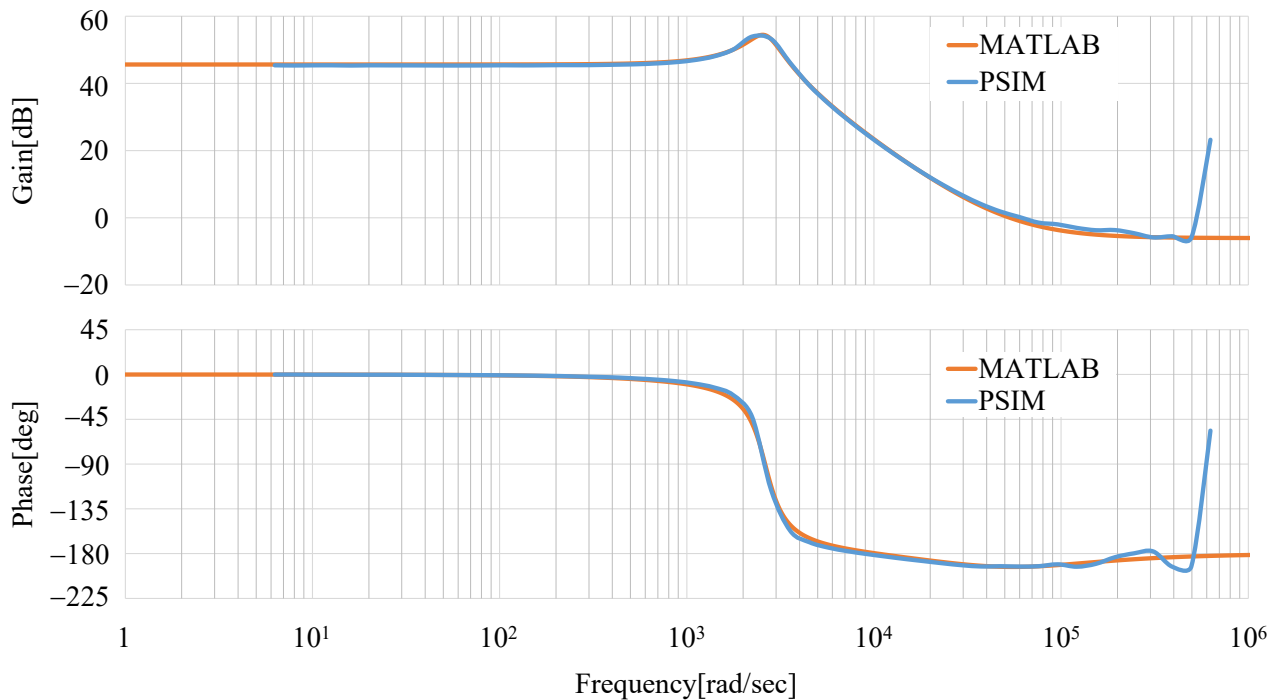


図 3.7 $G_{vd}(s)$ の周波数特性：2相

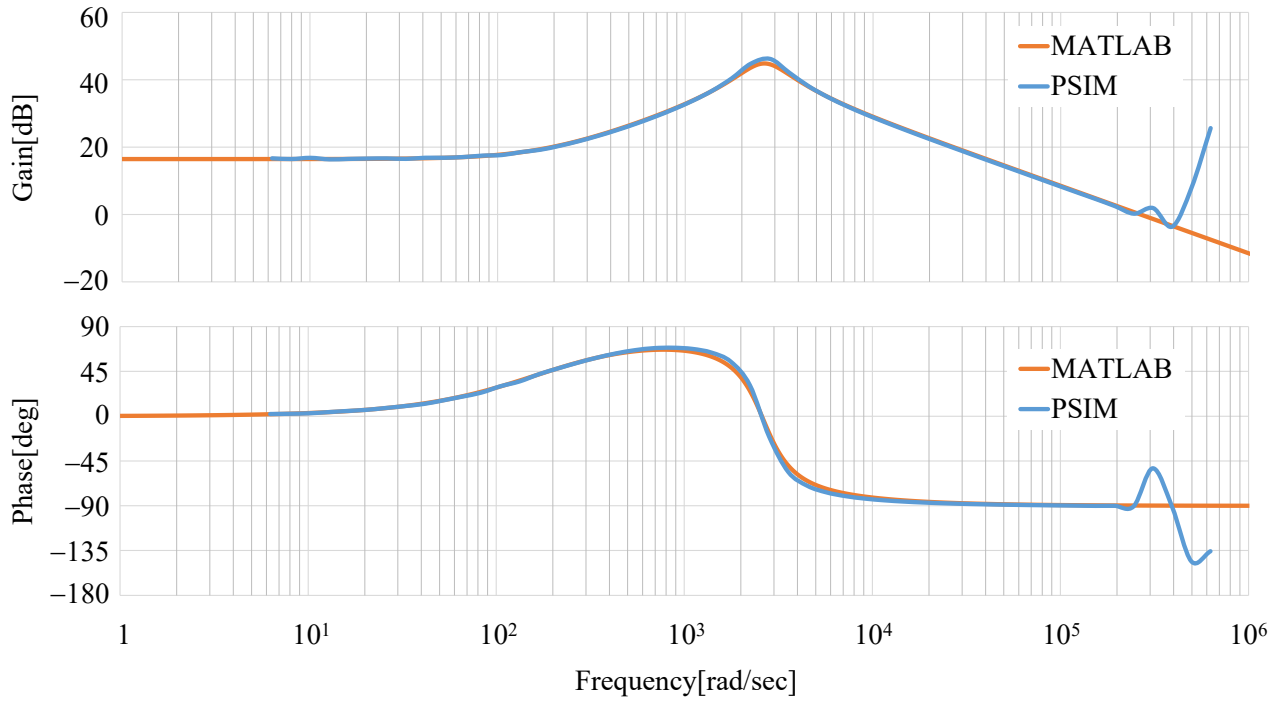


図 3.8 $G_{id}(s)$ の周波数特性：10相

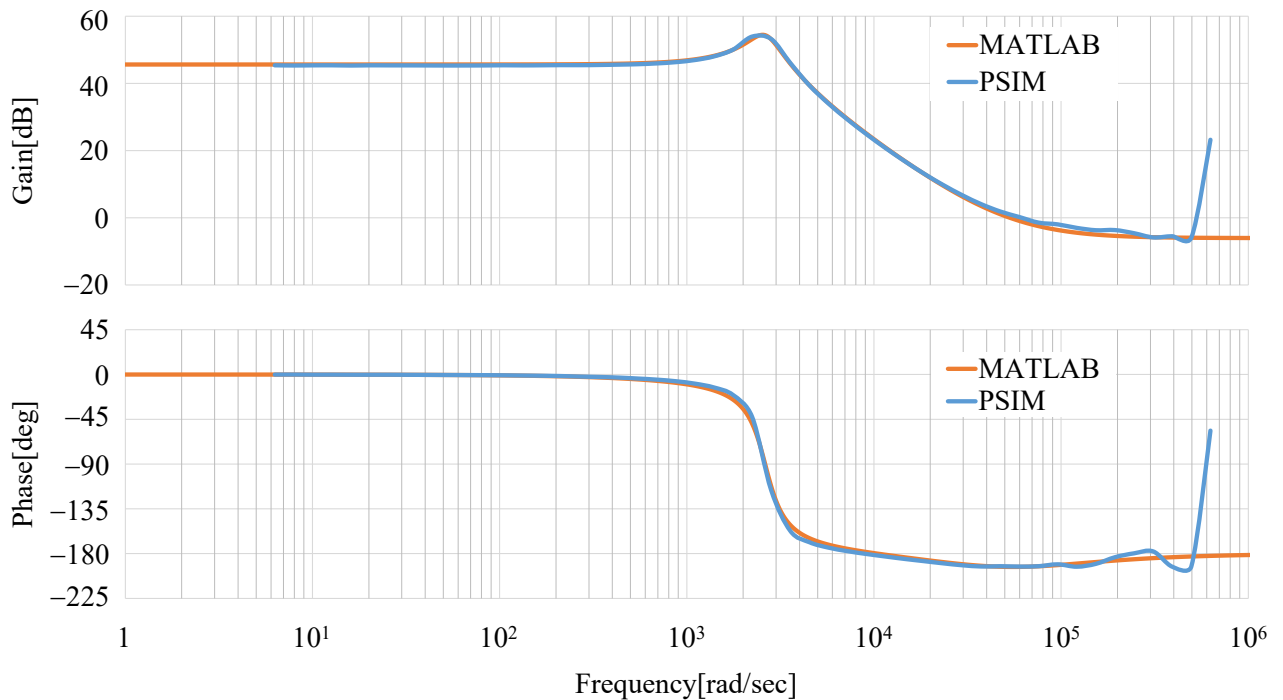


図 3.9 $G_{vd}(s)$ の周波数特性：10相

3.4.2 過渡特性の比較

続いて、過渡特性による比較を行う。比較手法として、デューティ比を微小変動させた際の各相のインダクタ電流及び出力電圧を図 3.10～図 3.13 に示す。なお、本検証は PSIM で回路モデル及び伝達関数モデルの 2 つを作成し、両者にデューティ比の微小変動を入力することで検証している。図より、提案モデルが高次元モデルの平均値とほぼ一致していることが分かる。これにより、提案手法の有効性を確認した。

3.5 結言

マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータにおいて、数学的モデリングの低次元化手法を提案した。従来のモデリング手法と比較して、提案手法は相数が増加しても単相 DC-DC コンバータの多段並列システムとして考えることが可能となる。

本提案手法は、キャパシタを各相に等価的に分割したモデルを考慮することで、一つのマルチフェーズ方式 DC-DC コンバータから複数の単相 DC-DC コンバータに分割することができる。本手法によって、従来のマルチフェーズ方式におけるパワーステージ（プラント）の伝達関数の導出法と比較して格段に導出が容易になる。更に、単相 DC-DC コンバータの伝達関数モデルは一般的に知られているため、提案手法を用いて導出した等価回路から伝達関数モデルを導出することができる。

提案手法を用いた低次元化伝達関数モデルと AC スイープによる高次元モデルの周波数特性を比較すると、ほぼ一致していることが確認できた。さらに、過渡特性の比較も行い、こちらも低次元化モデルと高次元モデルによる各出力波形が一致した。これにより、提案手法の有効性及び妥当性を確認した。

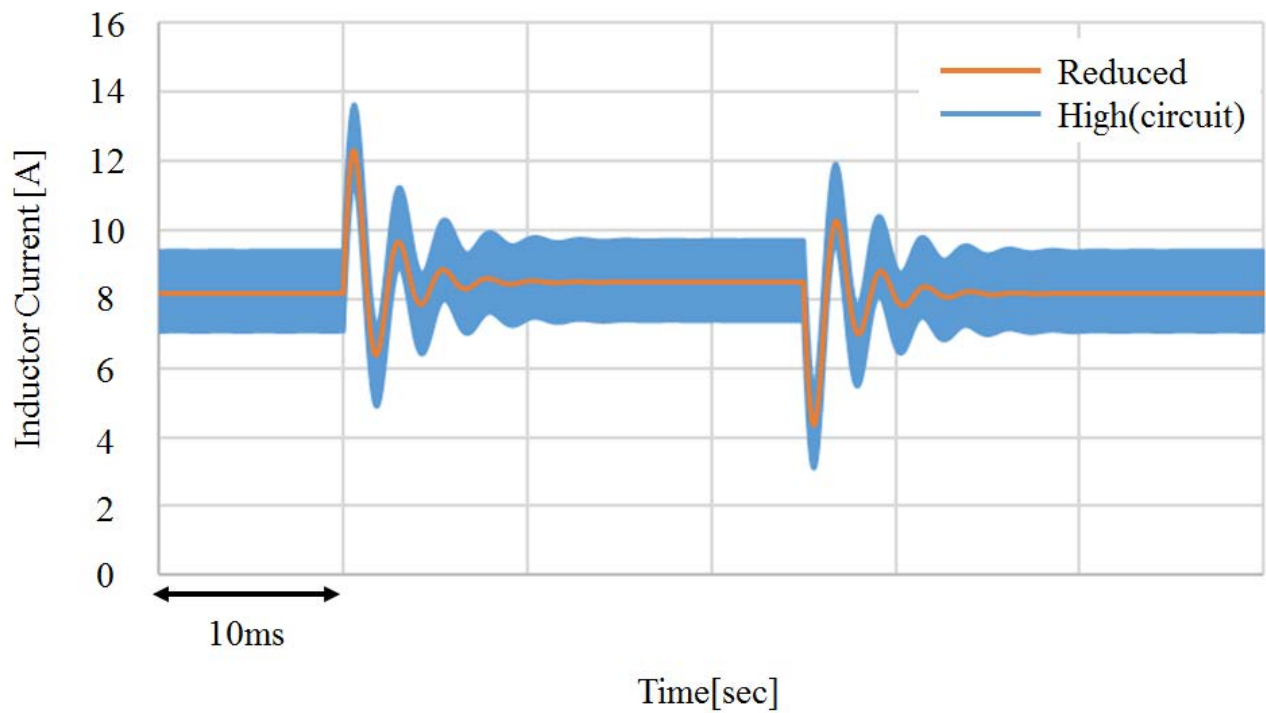


図 3.10 $G_{id}(s)$ のステップ応答特性：2相

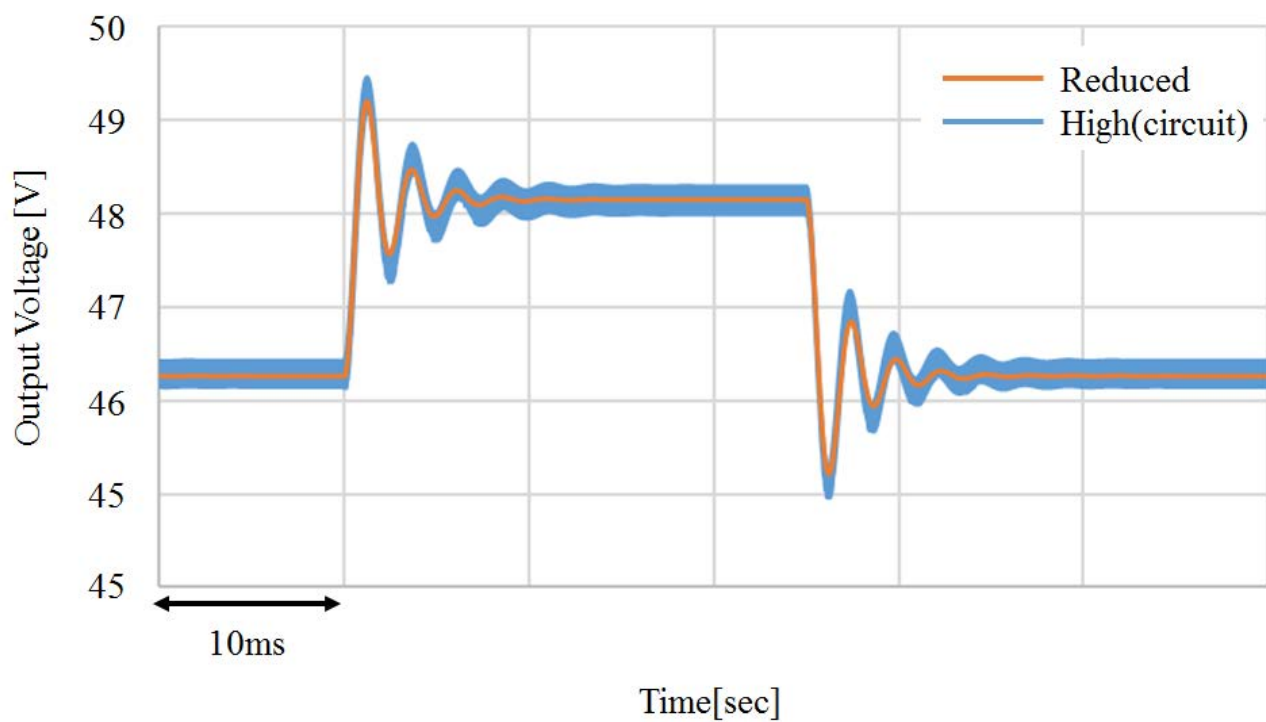


図 3.11 $G_{vd}(s)$ のステップ応答特性：2相

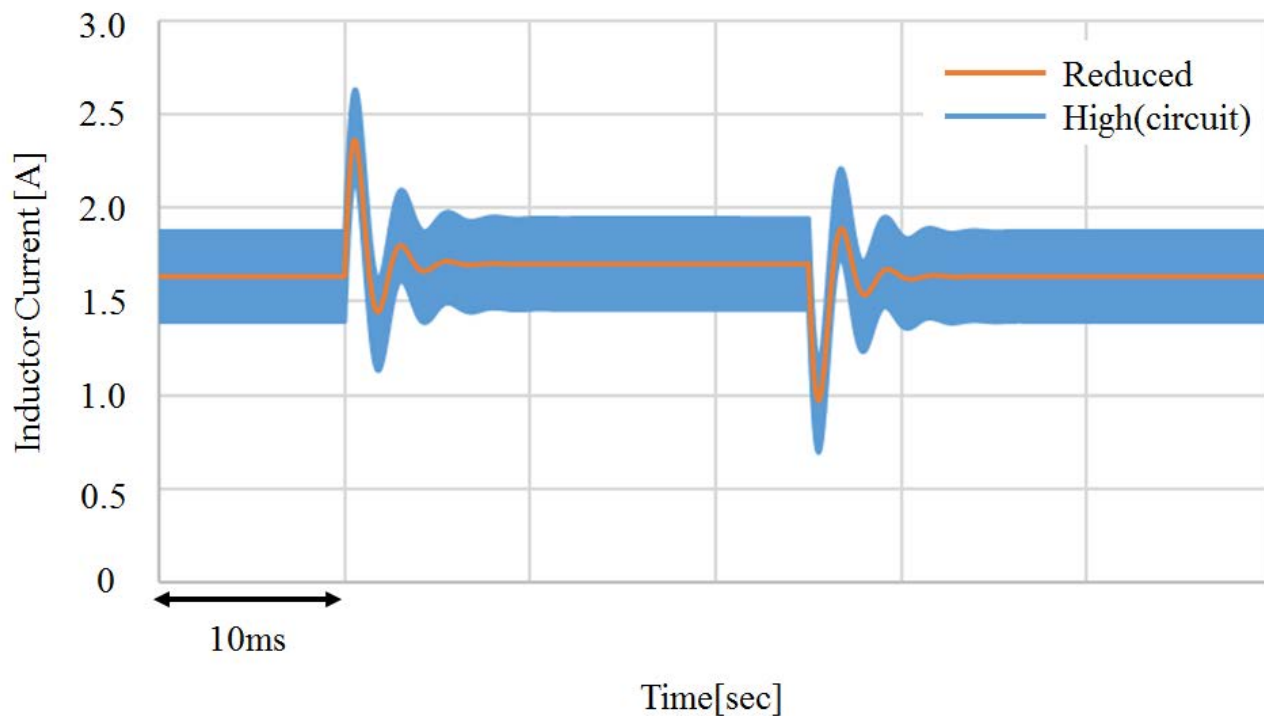


図 3.12 $G_{id}(s)$ のステップ応答特性：10相

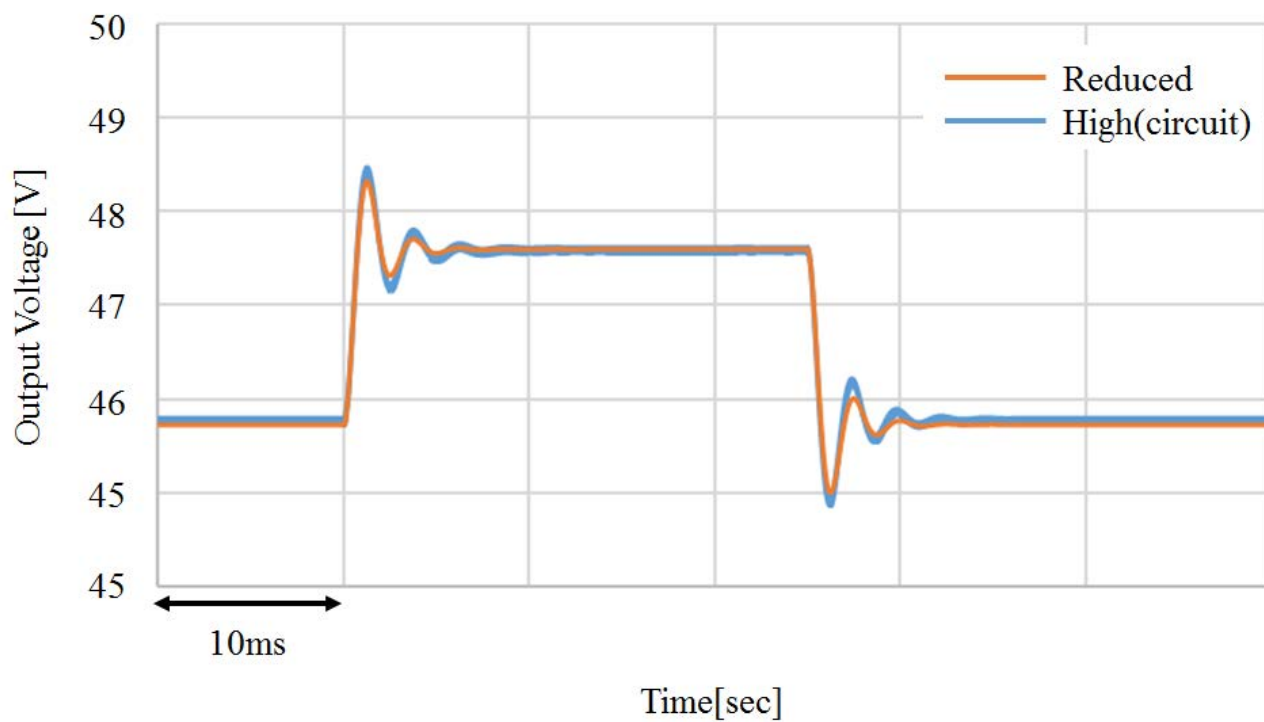


図 3.13 $G_{vd}(s)$ のステップ応答特性：10相

参考文献

- (1) A. Villarruel-Parra and A. J. Forsyth, "Enhanced Average-Value Modeling of Interleaved DC–DC Converters Using Sampler Decomposition," *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 32, No. 3, pp. 2290-2299 (2017)
- (2) O. F. Ruiz and I. Cervantes, "Averaged modeling of transformer-coupled interleaved boost converters," *IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 256-261 (2012)
- (3) P. Azer and A. Emadi, "Generalized State Space Average Model for Multi-Phase Interleaved Buck, Boost and Buck-Boost DC-DC Converters: Transient, Steady-State and Switching Dynamics," *IEEE Access*, Vol. 8, pp. 77735-77745 (2020)
- (4) F. H. Dupont, C. Rech, R. Gules and J. R. Pinheiro, "Reduced-Order Model and Control Approach for the Boost Converter With a Voltage Multiplier Cell," *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 28, No. 7, pp. 3395-3404 (2013)
- (5) H. Mao, L. Yao, C. Wang and I. Batarseh, "Analysis of Inductor Current Sharing in Nonisolated and Isolated Multiphase dc–dc Converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 54, No. 6, pp. 3379-3388 (2007)
- (6) J. A. Morales-Saldana, J. Leyva-Ramos, E. E. Carbajal-Gutierrez and M. G. Ortiz-Lopez, "Average Current-Mode Control Scheme for a Quadratic Buck Converter With a Single Switch," *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 23, No. 1, pp. 485-490 (2008)
- (7) N. Jantharamin, L. Zhang: "Analysis of multiphase interleaved converter by using state-space averaging technique", *Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology(ECTI-CON)*, pp.288-291 (2009)
- (8) 川上 太知, 山本 真義: 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, *電気学会部門誌 D*, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)

第4章 電力平衡モード制御

4.1 緒言

本章では、電力変換器の制御系における速応性及びロバスト性を改善する電力平衡モード制御を提案する。対象回路である昇圧型 DC-DC コンバータは制御系の伝達関数の中に「右半平面の零点」と呼ばれる不安定要素を有している。この右半平面の零点は変曲点においてゲインを増大させつつ、位相を遅れさせてしまう。そのため、制御系の安定性の指標であるゲイン余裕と位相余裕の両方に影響を及ぼしてしまう。さらに、極零相殺を行う場合、右半平面の極を用いなければならない。右半平面の極は制御系に存在するだけで発振してしまう不安定要素であり、適用することができない。その上、重負荷になるほど変曲点が低周波側にシフトするため、さらにゲイン余裕と位相余裕が悪化してしまう。そのため、通常の電源の制御に用いられるフィードバック制御系では制御性能が抑制されてしまう。

入出力キャパシタの容量を増大させることでこの不安定要素の影響は小さくなり、制御系は安定に向かうが、小型化・高電力密度化を目的とする設計思想と反してしまう。さらに、制御系の速応性の向上を阻害してしまうため、負荷や入力電圧の急激な変動時において大きな出力電圧の変動が生じる恐れもある。

本研究では、フィードバック制御である電流モード制御に、フィードフォワード制御を新たに組み込んだ電力平衡モード制御を提案した⁽¹⁾⁻⁽²⁾。電力平衡モード制御と従来制御手法で周波数特性や負荷過渡応答特性など各種比較を行い、その有効性を検証する。

4.2 電力平衡モード制御

電力平衡モード制御(Power Balance Mode Control : PBMC)のベースとなった降圧型 DC-DC コンバータにおけるスライディングモード制御(Sliding Mode Control : SMC)について説明する⁽³⁾⁻⁽⁴⁾。図 4.1 に降圧型 DC-DC コンバータのスライディングモード制御を示す。この制御は出力電圧を一定に制御する制御信号と出力平滑キャパシタの充放電電流 $i_c(t)$ を加算点で比較している。図 4.2 に降圧型 DC-DC コンバータの定常状態における各種電流を示す。

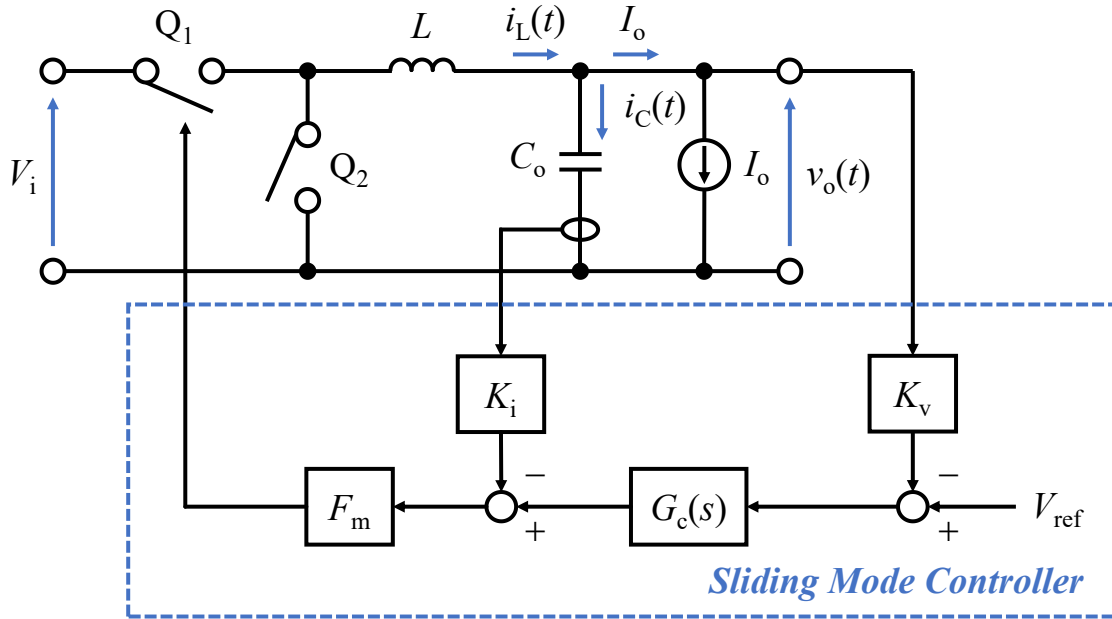


図 4.1 スライディングモード制御（降圧型 DC-DC コンバータ）

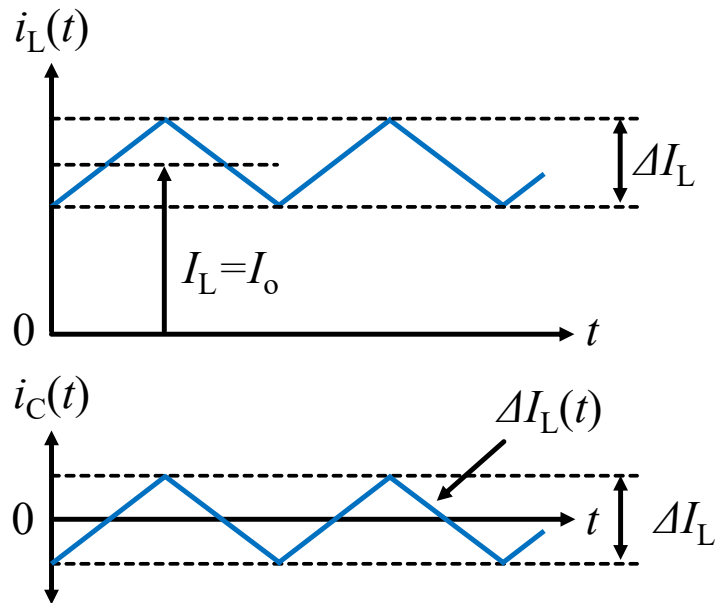


図 4.2 降圧型 DC-DC コンバータの各種電流 $i_L(t)$, I_o , $i_c(t)$: 定常状態

図 4.2 に示す出力キャパシタの充放電電流 $i_c(t)$ はキルヒホッフの電流則より、

$$i_c(t) = i_L(t) - I_o \dots\dots\dots (4-1)$$

となる。ここで、インダクタ電流 $i_L(t)$ は直流成分（インダクタ平均電流） I_L と交流成分 $\Delta I_L(t)$ に分けると次式となる。

$$i_L(t) = I_L + \Delta I_L(t) \dots\dots\dots (4-2)$$

定常状態においては,

$$\begin{cases} I_L = I_o \\ i_c(t) = \Delta I_L(t) \end{cases} \dots\dots\dots (4-3)$$

となる。そのため、 $i_c(t)$ は三角波であるインダクタ電流の交流成分 $\Delta I_L(t)$ と等しくなる。

電流モード制御(Current Mode Control : CMC)は電圧補償器 $G_c(s)$ の出力信号をインダクタ電流 $i_L(t)$ と加算点で比較する。一方で、SMC は前述の通り、出力平滑キャパシタの充放電電流 $i_c(t)$ と加算点で比較する。

CMC と SMC において、負荷が軽負荷から重負荷に急激に切り替わった場合（負荷過渡応答特性）について説明する。この時、 I_o と I_L の関係は次式となる。

$$I_L < I_o \dots\dots\dots (4-4)$$

出力電流の増加に伴い、出力平滑キャパシタに蓄積された電荷 $q(t)$ を負荷側に放出するため、電荷量は減少する。従って、次式より出力電圧は減少する。

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \dots\dots\dots (4-5)$$

放出された電荷を補うため、 $i_L(t)$ を増加させる必要がある。しかし、インダクタによって電流の急激な変化は不可能なため、CMC はデューティ比も急変させることができない。一方で、SMC ではキャパシタは電流の急激な変化は可能なため、デューティ比も急変させることができる。そのため、SMC ではCMC よりも応答性が良い。

しかし、SMC において、出力平滑キャパシタ C_o に電流センサ K_i を用いるため、電流センサに含まれる抵抗成分やインダクタンス成分が C_o に含まれている寄生抵抗成分や寄生インダクタンス成分と直列接続される。それにより、抵抗成分による電圧降下やインダクタンス成分によるノイズの増加が懸念される。そこで、 $i_L(t)$ と I_o を検出し、式(4-1)を計算することで間接的に $i_c(t)$ を検出する。間接的に $i_c(t)$ を検出する手法を昇圧型 DC-DC コンバータに応用する場合、式(4-3)が成り立たないため $i_L(t)$ と I_o で $i_c(t)$ を間接的に検出することができない。そこで、入力電力 P_i と出力電力 P_o に着目したのが電力平衡モード制御である。なお、Average Power Balance Control (APBC)という制御手法も存在する⁽⁵⁾⁻⁽⁶⁾。これは I_o の代わりに負荷抵抗 R の情報を用いて制御するが、電子負荷のような負荷の情報を制御要素として用いるような特殊な場合以外は行うことができない。一方で、 I_o の検出は一般的な電源でも負荷の状態を把握するために用いられるため、APBC よりも PBMC は汎用性が高いといえる。

4.4 動作原理

PBMCの動作原理について説明する。簡単化のため、各センサゲインはすべて1として考える。また、出力電流の微小変動 $\Delta I_o(s)$ 及び入力電圧の微小変動 $\Delta V_i(s)$ も定常状態の場合は生じないものとする。PBMCは制御のベースであるCMCに対し、入出力の電力を等しくさせる電力平衡制御部が組み合わさった制御手法である。

電力平衡制御部の動作について説明する。まず、出力電圧 V_o と出力電流 I_o を乗算器に入力することで、式(4-6)が成り立つ。

$$V_o \cdot I_o = P_o^* \dots\dots\dots (4-6)$$

ここで、 P_o^* を出力電力指令値とする。なお、図4.3では基準電圧 V_{ref} を出力電圧 V_o と等価としているが、 V_{ref} ではなく V_o を直接乗算器に入力しても同様に制御系は動作する。

次に、この出力電流指令値 P_o^* と入力電圧 V_i を除算器に入力することで、式(4-7)が成り立つ。

$$\frac{P_o^*}{V_i} = \frac{P_i^*}{V_i} = I_i^* = I_L^* \dots\dots\dots (4-7)$$

ここで、電力変換器は理想的には入力電力 P_i と出力電力 P_o は等しいとしているため、式(4-7)が成立するが、実際には効率 η が100%ではないため異なる。そのため、式(4-7)に対して η を考慮したほうが良いが、非考慮であっても問題なく動作する。

これにより、入力電流指令値 I_i^* を算出することが出来る。なお、昇圧型DC-DCコンバータの入力電流はインダクタ電流と等価であるため、インダクタ電流指令値を I_L^* と表記している。最後に、インダクタ電流指令値 I_L^* と検出したインダクタ電流 $I_L + \Delta I_L(s)$ を加算点で比較を行い、その出力と電圧補償器の出力を加算することで最終的なデューティ比 $D + \Delta D(s)$ を決定している。ここで、 I_L^* と I_L の関係から動作を(1) $I_L^* > I_L$, (2) $I_L^* < I_L$, (3) $I_L^* = I_L$ の3パターンに分けることが出来る。なお、 $\Delta I_L(s)$ は非常に小さく、(1)と(2)における I_L^* と I_L の関係が変わらないものとする。更に、(1)と(2)が生じる状態は後述のステップ応答のように急激に変化した場合を想定する。

また、電力変換器における入力電圧 V_i はバッテリーなどの定電圧源が一般的であり、出力電流 I_o ほど急激に変化させることが難しいため、本研究では検討しない。

(1) $I_L^* > I_L$ の場合

インダクタ電流指令値 I_L^* が検出したインダクタ電流 I_L よりも上回った場合を考える。この場合は現状の負荷から重負荷になった場合に相当する。出力電流 I_o は出力平滑キャパシタ C_o から急激に電荷を引き抜くため、出力電力指令値 P_o^* は増大する。従って、インダクタ電流指令値 I_L^* は負荷に応じて大きくなる。それに対し、検出するインダクタ電流 I_L は傾きを持って上昇するため、出力電流 I_o のような急峻な変化は生じない。従って、入力電力 P_i が出力電力 P_o と等しくなるまで、式(4-8)の関係が成り立つ。

$$I_L^* > I_L \dots\dots\dots (4-8)$$

これにより、電圧補償器の出力信号 $V_c + \Delta V_c(s)$ に加算する信号は正となるため、デューティ比 $D + \Delta D(s)$ は増大する。

(2) $I_L^* < I_L$ の場合

インダクタ電流指令値 I_L^* が検出したインダクタ電流 I_L よりも下回った場合を考える。この場合は現状の負荷から軽負荷になった場合に相当する。出力電流は出力平滑キャパシタ C_o から急激に電荷を引き抜くため、出力電力指令値 P_o^* は減少する。従って、インダクタ電流指令値 I_L^* は負荷に応じて小さくなる。それに対し、検出するインダクタ電流 I_L は傾きを持って下降するため、出力電流のような急峻な変化は生じない。従って、入力電力 P_i が出力電力 P_o と等しくなるまで、式(4-9)の関係が成り立つ。

$$I_L^* < I_L \dots\dots\dots (4-9)$$

これにより、電圧補償器の出力信号 $V_c + \Delta V_c(s)$ に加算する信号は負となるため、デューティ比 $D + \Delta D(s)$ は減少する。

(3) $I_L^* = I_L$ の場合

インダクタ電流指令値 I_L^* と検出したインダクタ電流 I_L が等しい場合を考える。この場合は回路の定常状態に相当する。定常状態では入力電力 P_i と出力電力 P_o が理想的には等しいため、式(4-10)の関係が成り立つ。

$$I_L^* = I_L \dots\dots\dots (4-10)$$

この場合、インダクタ電流の微小変動 $\Delta I_L(s)$ のみ残っている状態となる。そのため、CMCと同じ制御系がシームレスに動作する。

これらのパターンをまとめると、式(4-11)の関係となる。

$$\begin{cases} I_L^* > I_L & \text{if } P_o > P_i \\ I_L^* < I_L & \text{if } P_o < P_i \\ I_L^* = I_L & \text{otherwise } (P_o = P_i) \end{cases} \dots\dots\dots (4-11)$$

即ち、PBMCは入力電力 P_i 及び出力電力 P_o を常に監視し、電力差があればそれを埋めるように制御する手法である。そのため、CMCにおけるフィードバック制御に加え、入出力電力を平衡させるフィードフォワード制御を有した2自由度(2-DOF:degree of freedom)制御系で構成されている。以降で各制御法における動作検証を行う。

4.5 デジタル方式電力平衡モード制御の設計

本節では、昇圧型DC-DCコンバータのデジタルPBMCの設計手法について述べる。回路及び電圧補償器 $G_c(s)$ (Type-II補償器)のパラメータは第2章の表2.1及び表2.3の通りである。また、補償器の離散化には、式(4-12)で示す双一次変換法を用いる。表4.2に、デジタルPBMCの設計を行う際に必要な制御パラメータを示す。なお、タイマカウンタCNTはクロックパルスのパルス数を表しており、クロックパルス4000回で f_s と等価となる。

$$s \approx \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \dots\dots\dots (4-12)$$

表 4.2 制御パラメータ

Parameters	Symbol	Values
Clock Frequency	f_{clock} [MHz]	100 MHz
Sampling Frequency(= Switching Frequency)	f_s [kHz]	50 kHz
Sampling Period(= Switching Period)	T_s [μ s]	20 μ s
Timer Counter (= f_{clock} / f_s)	CNT	4000
Correction Coefficient (= K_i)	K_e	0.06
Gain Crossover Frequency	f_c [Hz]	100 Hz

4.5.1 電圧補償器 $G_c(s)$ の設計

PBMC における電圧補償器 $G_c(s)$ の設計方法について述べる。PBMC は前述のとおり、フィードバック制御とフィードフォワード制御からなる 2 自由度制御系の一種である。そのため、定常状態ではフィードフォワード制御系は発振しない。しかし、フィードバック制御系は定常状態で発振する可能性を有しているため、安定条件を満たすように補償器を設計する必要がある。

フィードバック制御系の安定条件はナイキストの安定判別法(Nyquist stability criterion)によって判別することができる。このナイキストの安定判別法を用いて一巡伝達関数が安定であることを判別することができれば、実際に制御している閉ループ伝達関数の安定判別も同時に行うことができる。PBMC の一巡伝達関数は CMC の $T(s)$ と同じであるため、CMC 用に設計された $G_c(s)$ と同じものを使用することができる。

制御系を簡略化するために、各種センサゲインをすべて 1 に設定している。抵抗分圧による電圧センサやホール効果を用いた電流センサなどを使用しているため、実際のセンサゲインは 1 ではない。しかし、マイコンの A/D 変換で検出したデジタル値に、センサゲインの逆数を掛けることで各種センサに入力する前のアナログ値を使用できるため、各種センサゲインをすべて 1 にすることが可能となる。PWM 変調ゲイン F_m は、アナログ制御におけるコンパレータの伝達関数である。コンパレータは、鋸波（または三角波）の信号と制御信号を比較してデューティ比を調整し、PWM 信号を出力する。

アナログ制御では、鋸波信号の傾きが PWM 変調ゲインに相当する。一方で、デジタル制御では、鋸波信号の代わりにクロックカウンタを用いる。クロックカウンタで生成される鋸波信号の傾きは 1 である。したがって、アナログ制御とデジタル制御の F_m は、式(4-13)で与えられる。 V_{p-p} はアナログ制御における鋸歯状波信号の peak-to-peak 値である。

$$\begin{cases} F_{m_analog} = \frac{1}{V_{p-p}} \dots\dots\dots (4-13) \\ F_{m_digital} = 1 \end{cases}$$

CMC では、定常状態でインダクタリプル電流の影響を受けてデューティ比が発振しないように K_i を調整する必要がある。一方で、PBMC では $I_L^* - I_L$ の計算を容易にするために、各種センサゲインを 1 に設定する。しかし、定常状態では $I_L^* = I_L$ であっても、CMC と同様にインダクタリプル電流の影響により、デューティ比が発振する可能性がある。

そこで、PBMC の K_e を CMC の K_i と同じ値にすることで、PBMC の開ループ伝達関数は CMC の $T(s)$ と完全に等しくなり、デューティ比の振動を防ぐことが可能となる。さらに、古典制御理論に基づいた補償器の設計法であるループ整形法や DC-DC コンバータの補償器設計手法である k ファクタ法なども利用できる⁽⁷⁾⁻⁽⁸⁾。

4.5.2 インダクタ電流の検出点

デジタル制御はアナログ制御と異なり、A/D 変換器を用いて有限個のデータを取得する。アナログ制御に近づけるためにはサンプリング周波数を高周波にすることで大量のデータを扱うことも可能だが、制御アルゴリズムの演算が周期内に終わらない可能性もあり、推奨されない。そのため、スイッチング周期内に1回、適切な個所で検出することができれば問題ない。特に、検出点がスイッチング周期ごとに異なるとデューティ比が大きく変動してしまう。そのため、定常状態においてインダクタ電流指令値 I_L^* とインダクタ電流検出値（直流値） I_L が等しくなるようにセンシングを行う必要がある。

DC-DC コンバータはスイッチングノイズを有しているため、スイッチの状態が切り替わる箇所でのセンシングは避けるべきである。そのため、インダクタ電流の midpoint でセンシングをすることができれば、スイッチングノイズを避けることができる。更に、連続導通モード (Current Continuous Mode : CCM) 駆動であればインダクタ電流の midpoint はインダクタ電流の平均値 I_L に等しい。そのため、スイッチング周期ごとにインダクタ電流を正確にセンシングすることで、定常状態におけるデューティ比の変動を抑制することが可能となる。なお、インダクタ電流の検出点を示しているが、出力電圧もスイッチングノイズを少なからず有しているため、同様の検出点でセンシングするのが好ましい。

図 4.4 にインダクタ電流の検出点を示す。図内にはインダクタ電流の検出点、タイマカウンタのカウント値、ゲートソース間電圧を示す。タイマカウンタの CNT はマイコンのクロック周波数 f_{clock} をスイッチング周波数 f_s で除算した値で求められる。即ち、1 周期において制御系で使用可能なカウント数を表す。A/D 変換や PI 制御演算の一つ一つの動作毎にカウント数が増加し、CNT を上回ってしまうと 1 周期内に演算が終了しなくなり、むだ時間が増加してしまう。

CMPA 及び CMPB はコンペアレジスタを表す。CMPA はデューティ比の更新やアナログ回路におけるコンパレータ用として、CMPB は A/D 変換の検出点を決定するトリガ用とし

て用いる。CMPB を常に CMPA の半分の値となるように演算することで、インダクタ電流の平均値 I_L をセンシングすることができる。

OFF 期間の midpoint でセンシングすることも可能だが、制御演算がスイッチング周期内に完了しない可能性がある。その場合、動作の遅れにより位相余裕が減少し、制御系が発振する恐れがある。そのため、ON 期間の midpoint でセンシングを行うか、想定されるむだ時間遅れを制御系設計の中に組み込む必要がある。一方で、ON 期間が非常に小さい場合においてはスイッチングノイズを検出する可能性がある。その場合は OFF 期間の midpoint でセンシングする必要もある。

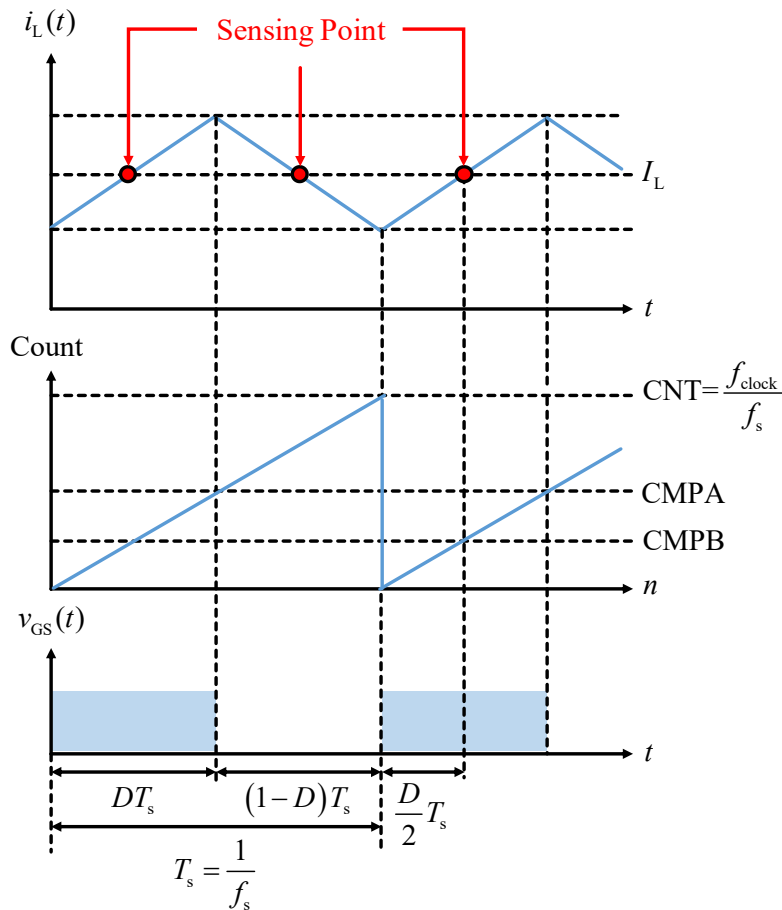


図 4.4 インダクタ電流検出点

4.5.3 制御アルゴリズムの注意事項

PBMC の制御アルゴリズムは VMC や CMC と比較して、電力平衡制御部があるため演算量が多くなってしまふ。特に、除算器は演算量が特に多くなり、前述のように制御演算がスイッチング周期内に収まらない場合もあるため、対策が必要となる。

PBMC においてはインダクタ電流指令値を算出するために入力電力に対して入力電圧で除算する。ここで、入力電圧がバッテリーのように急激に電圧が変化しない場合、定数として入力電圧の逆数を事前に計算することで乗算の計算に置き換えることも可能である。しかし、制御系のロバスト性を高める場合は除算器を使用したほうが良い。

代表的な高速除算技法として、ニュートン-ラプソン除算やゴールドシュミット除算等がある。また、マイコンのクロック周波数が高い高性能マイコンを用いる場合や自動的に演算の最適化を行うマイコンを選択するのが良い。実験で使用した TI 社のマイコン (TMS320F28377S) は除算などの算術演算において内部の高速演算ユニットを用いることが可能なため、除算に必要なカウント数を大幅に削減することが可能となる。

4.6 PBMC と従来制御方式との比較

4.6.1 制御ループの周波数特性

PBMC と CMC の一巡伝達関数 $T(s)$ の周波数特性を図 4.5 に示す。青線がシミュレーション結果、橙線が実測結果である。線形近似したシミュレーション結果と実験結果の一巡伝達関数の周波数特性は、低周波から高周波まで高い精度で一致している。10k~100kHz で実測波形が歪んでいるのは、スイッチング周波数近傍なため、スイッチングノイズが影響していると考えられる。

図 4.6 は、一巡伝達関数 $T(s)$ の周波数特性を VMC、CMC 及び PBMC で比較した実験結果である。なお、VMC の $G_c(s)$ における各パラメータも第 2 章の表 2.2 に既に示しており、応答性の指標となるゲインクロスオーバー周波数 f_c が 3 つの制御方式で 100Hz に統一するように、補償器のパラメータを調整している。橙線が VMC、青線が CMC、緑線が PBMC である。

図より、PBMC の一巡伝達関数 $T(s)$ は、小信号解析において CMC と同等である。従って、PBMC における $G_c(s)$ は CMC で設計したのと同じものを用いても良いため、制御系設計が非常に容易となる。

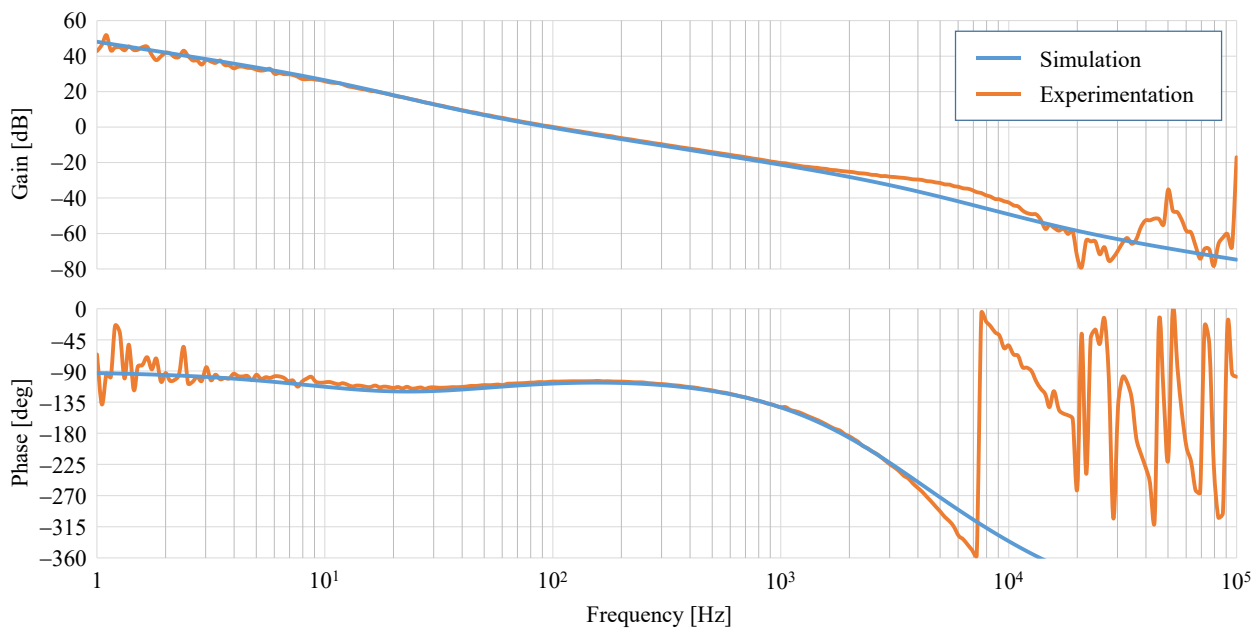


図 4.5 $T(s)$ の周波数特性 (CMC, シミュレーションと実験結果の比較)

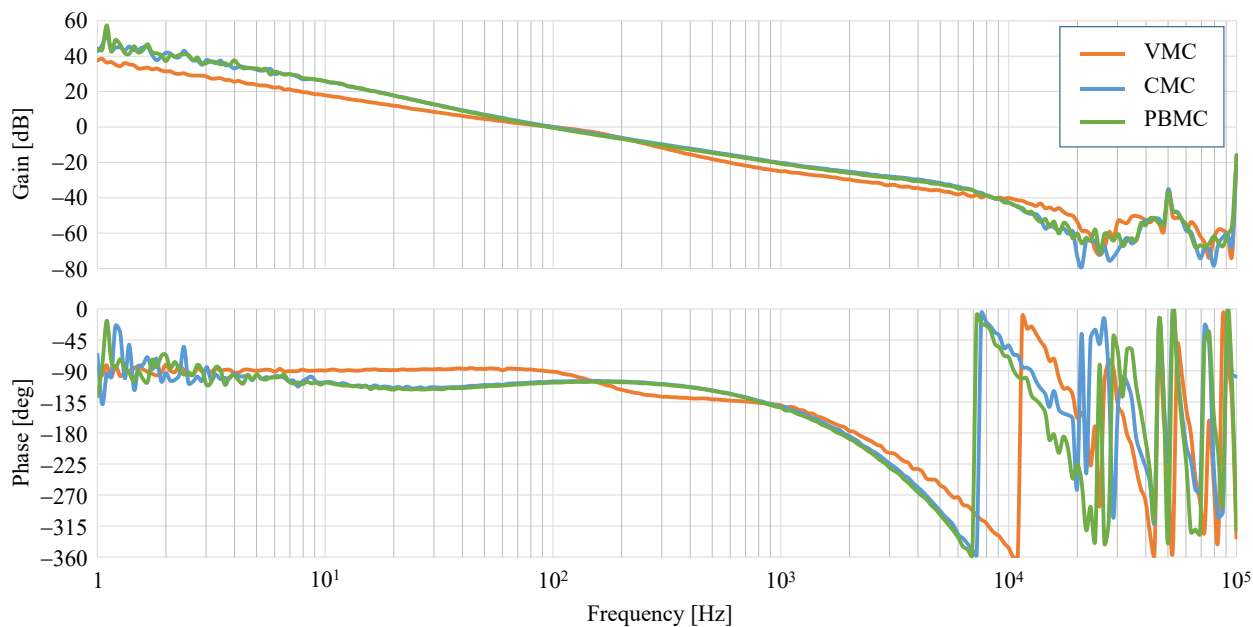


図 4.6 $T(s)$ の周波数特性 (実験結果：VMC, CMC, PBMC の比較)

4.6.2 出力インピーダンスの周波数特性

PBMC との比較に用いた CMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ の周波数特性について述べる。出力インピーダンス $Z_o(s)$ の伝達関数の説明は2章で既に詳細に述べている通りである。CMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ の周波数特性を図 4.7 に示す。青線がシミュレーション結果、橙線が実測結果である。線形近似したシミュレーション結果と実験結果の出力インピーダンス $Z_o(s)$ は、低周波から高周波まで高い精度で一致している。10k~100kHz で波形が大きく異なるのは、出力キャパシタの等価直列インダクタンス(ESL)などの寄生成分が影響している可能性がある。

図 4.8 は、出力インピーダンス $Z_o(s)$ の周波数特性を VMC, CMC 及び PBMC で比較した実験結果である。橙線が VMC, 青線が CMC, 緑線が PBMC である。図より, PBMC の出力インピーダンス $Z_o(s)$ は, 小信号解析において CMC と同等である。

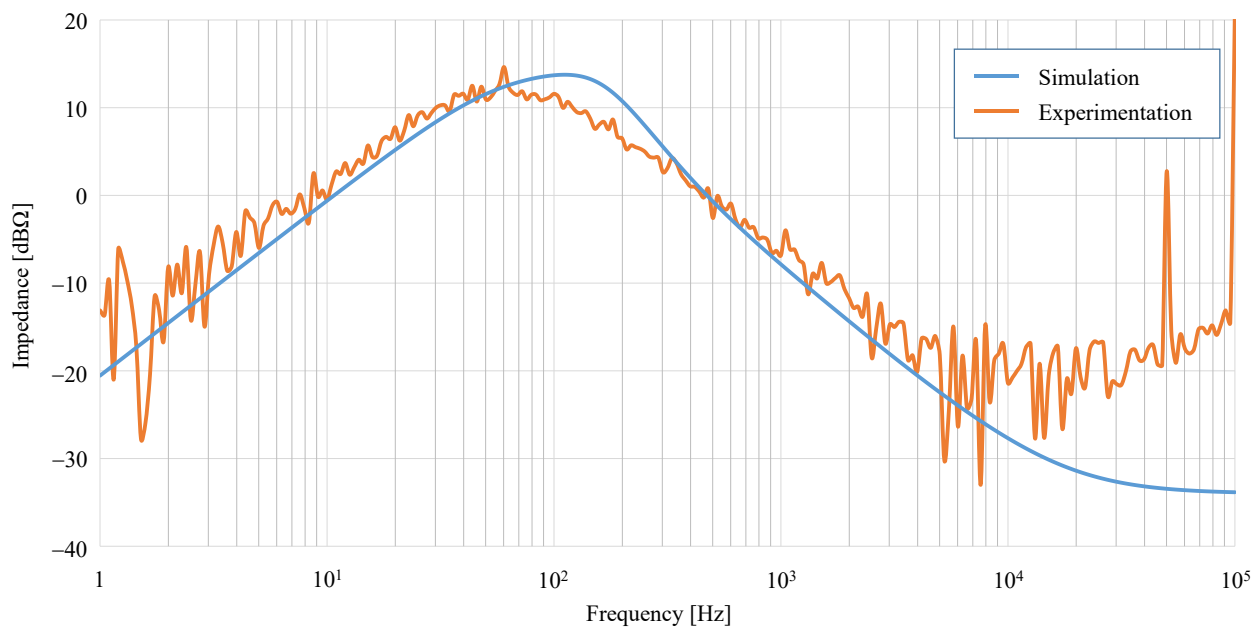


図 4.7 $Z_o(s)$ の周波数特性 (CMC, シミュレーションと実験結果の比較)

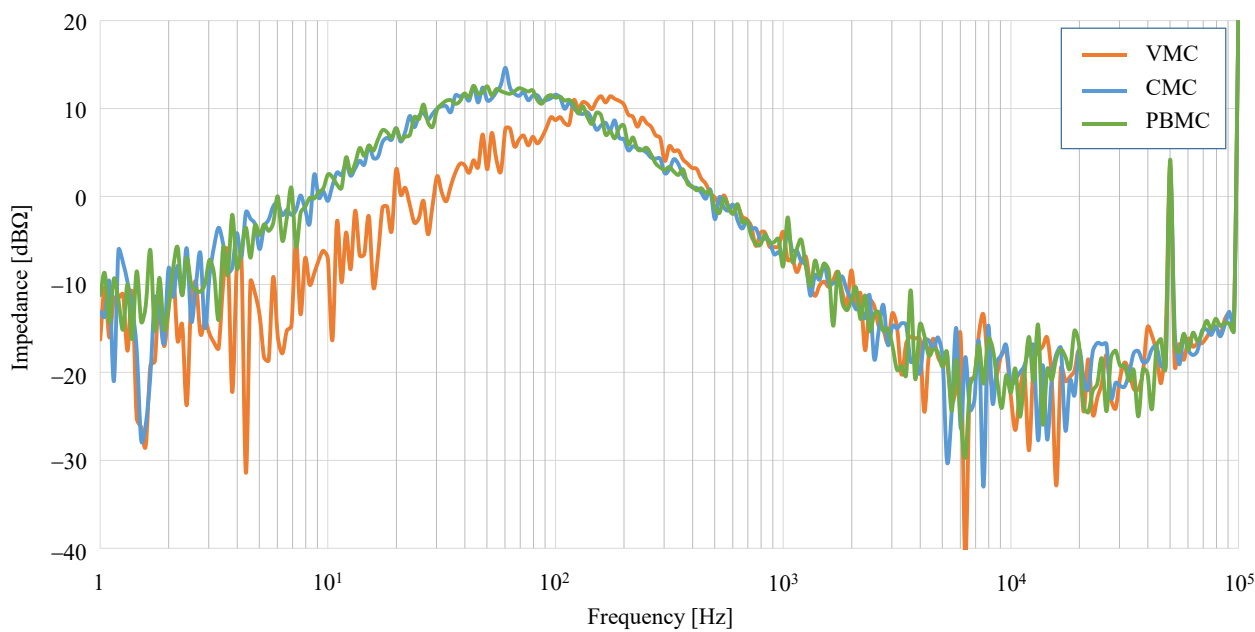


図 4.8 $Z_o(s)$ の周波数特性 (実験結果：VMC, CMC, PBMC の比較)

4.6.3 負荷過渡応答特性

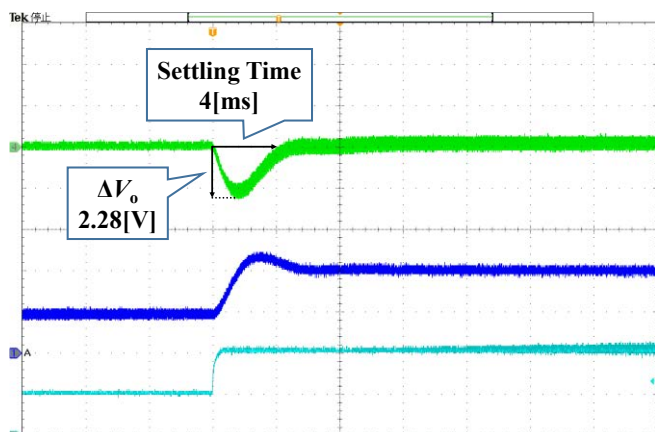
本項では、負荷過渡応答特性を比較する。図 4.9 は、それぞれ VMC、CMC、PBMC の負荷過渡応答波形を示す。緑線は出力電圧、青線はインダクタ電流、水色線は出力電流を表す。負荷を段階的に変化させ、軽負荷から重負荷へのステップアップ変動及び、重負荷から軽負荷へのステップダウン変動の 2 種類の負荷過渡現象を比較する。出力電圧は一定になるように制御するため、負荷を変化させても変化前の値に収束する。出力電圧測定の設定を AC 結合にし、変動の度合いと整定時間を測定している。

出力電圧の変動幅は、VMC で約 2V、CMC で約 3V、PBMC で約 1V であり、PBMC の変動幅が最も小さい。PBMC の出力電圧変動は、CMC の約 1/3 である。つまり、負荷変動時の出力キャパシタの電荷の変化が抑えられている。出力キャパシタの容量は、出力電圧リップルを低減し、出力電圧変動を抑制するための重要なパラメータである。CMC ではなく PBMC で出力電圧変動を大幅に抑えることができれば、出力コンデンサを小型化することが可能となる。さらに、整定時間は、VMC が約 4ms、CMC が約 12ms、PBMC が約 8ms であり、VMC が目標値に向けて最も早く収束する。

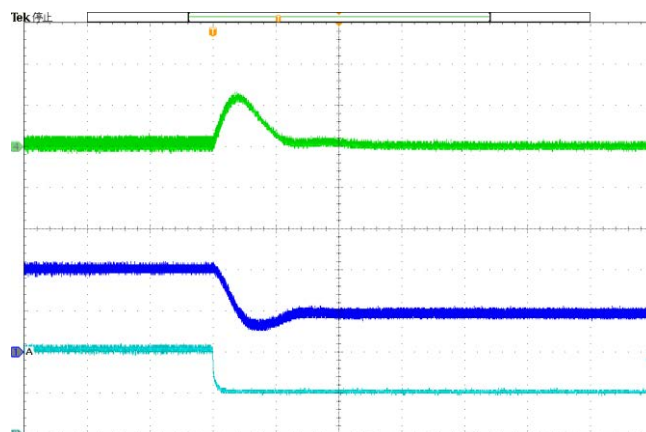
VMC は制御ループの伝達関数に 2 次系を有しているが、CMC は電流制御ループと電圧制御ループで近似相殺した 1 次系を有している。2 次系の整定時間は、共振ピークを有しているため、1 次系の整定時間よりも短くなる。そのため、VMC の整定時間は、同じ伝達関数を持つ CMC や PBMC よりも短くなる。しかし、CMC や PBMC では、2 次系が近似的に相殺されているため、位相遅れが小さくなっている。そのため、VMC よりもゲインクロスオーバー周波数 f_c を高く設定しやすく、応答速度を向上させることが可能となる。

しかし、ゲインクロスオーバー周波数 f_c を高くしすぎると、制御系にスイッチングノイズが混入してしまい、速応性とノイズとの間にトレードオフの関係が生じてしまう。さらに、昇圧型 DC-DC コンバータは、高負荷時に右半面の零点 ω_{rhp} が低周波数側にシフトするため、応答性を向上させることが難しい。

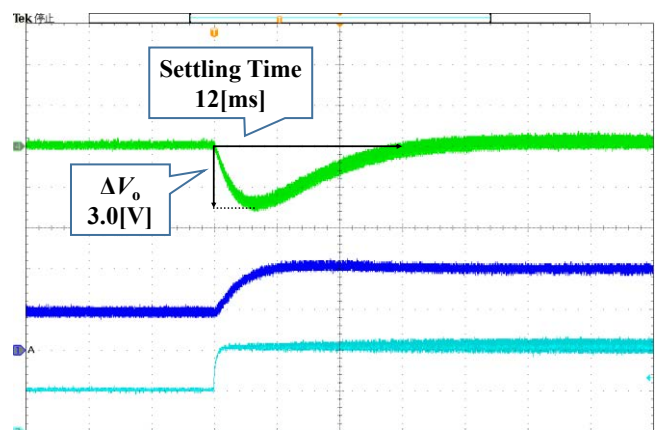
しかし、PBMC は負荷変動に対する出力電圧の変動が従来の制御方式に比べて最も小さいため、ゲインクロスオーバー周波数 f_c をあまり高い値に設定しなくても、整定時間を短くすることが可能となる。すなわち、昇圧型 DC-DC コンバータの広い駆動範囲における制御系の不安定さを同時に回避することができる。さらに、この制御系は CMC をベースに設計できるため、シンプルな制御アルゴリズムで構築することが可能となる。



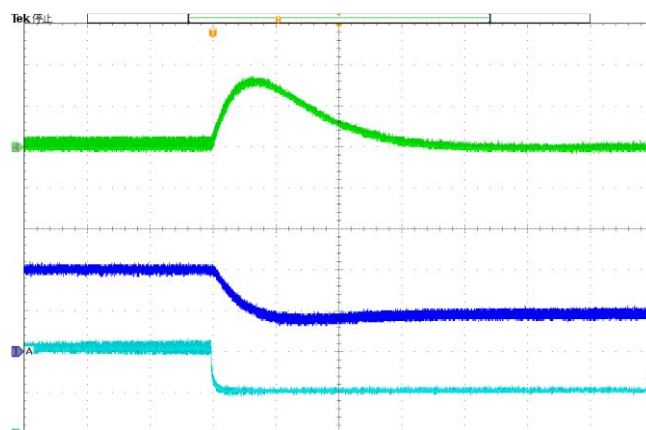
(a) Step-Up (50 W to 100 W) : VMC



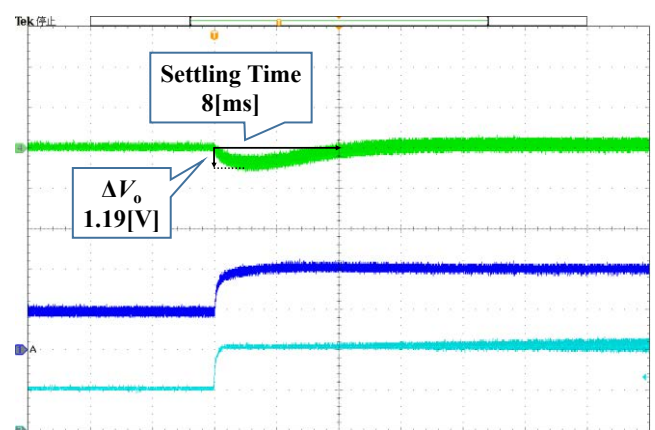
(b) Step-Down (100 W to 50 W) : VMC



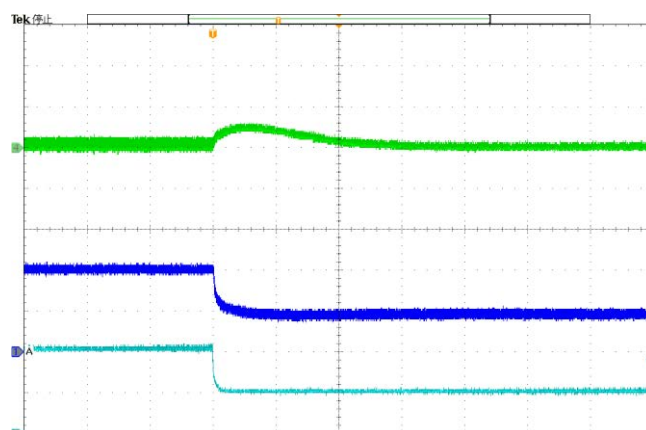
(c) Step-Up (50 W to 100 W) : CMC



(d) Step-Down (100 W to 50 W) : CMC



(e) Step-up (50 W to 100 W) : PBMC



(f) Step-down (100 W to 50 W) : PBMC

図 4.9 負荷過渡応答特性の比較 (左：ステップアップ変動, 右：ステップダウン変動)

緑: V_o (AC Coupling, 2 V/div), 青: I_L (5 A/div), 水色: I_o (1 A/div), Time: 4 ms/div

4.6.4 制御帯域の変化に伴う速応性の比較

制御帯域の変化に伴う速応性の比較について述べる。ゲインクロスオーバー周波数 f_c を 100Hz から 10Hz に変化させたときの、負荷過渡応答時の出力電圧変動 ΔV_o を比較した。

図 4.10 に、出力電圧変動の比較結果を示す。ゲインクロスオーバー周波数を最小で 1/10 まで低下させても、PBMC の出力電圧変動が最も小さいことがわかる。つまり、制御系の応答性と安定性を両立させることが可能となる。したがって、出力キャパシタの小型化だけでなく、安定余裕（ゲイン余裕、位相余裕）のさらなる改善も可能となる。

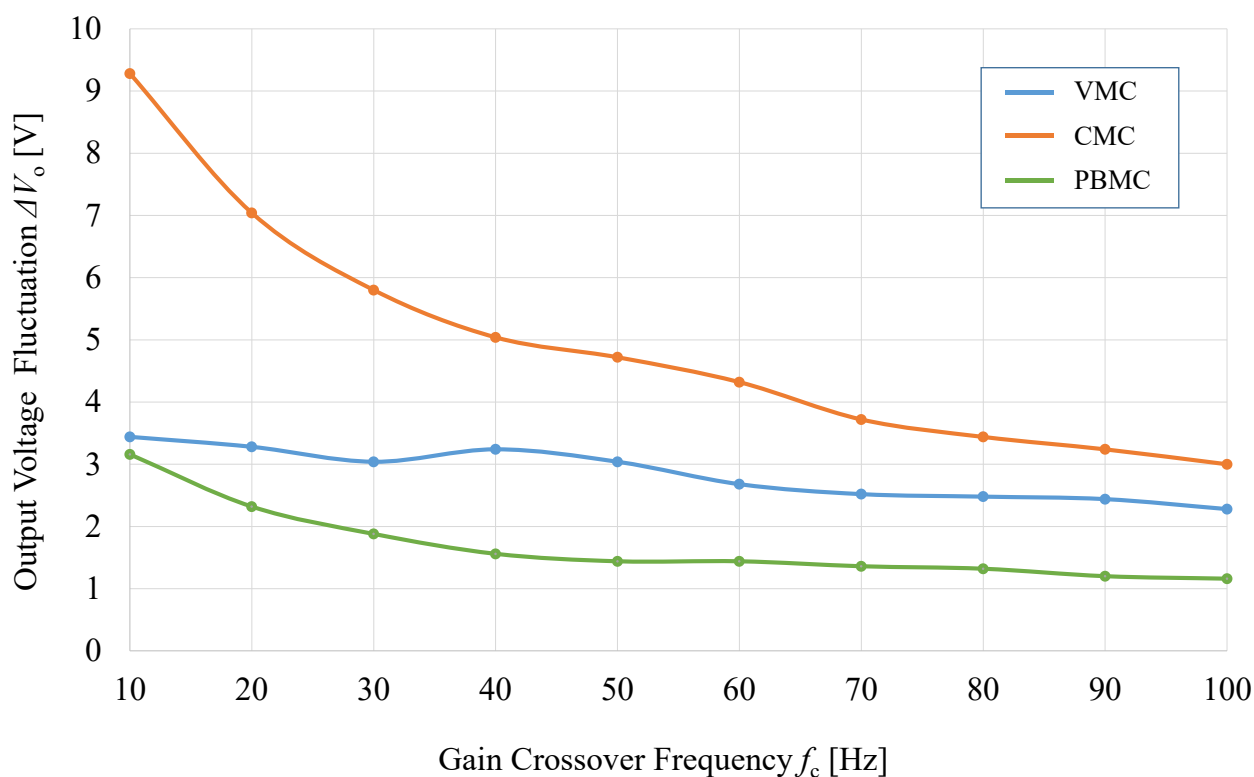


図 4.10 ゲインクロスオーバー周波数 f_c の変化に対する出力電圧変動量の比較

4.7 結言

本章では、昇圧型 DC-DC コンバータにおける電力平衡モード制御の設計と解析について述べた。昇圧型 DC-DC コンバータの制御系設計において、デューティ比の微小変動に伴う各種外乱以外の外乱が静止状態で発生しないと仮定すると、制御系は CMC と同等となる。したがって、CMC 用に設計されたものと同じ電圧補償器を使用することができる。

また、開ループ伝達関数と出力インピーダンスの実験的測定では、静止状態では外乱が発生していない。また、実験的に測定された開ループ伝達関数と出力インピーダンスの周波数特性は、外乱注入信号による微小な変動により、インダクタ電流の基準値が大きく変化することはない（小信号解析）。そのため、CMC と PBMC の各種周波数特性は同等である。

しかし、PBMC では、外乱による変動が大きいほど、デューティ比の変化も大きくなる。その結果、従来の制御方法に比べて、出力電圧の変動を大きく抑えることができる。これにより、出力電圧の変動を抑制する出力コンデンサの容量を小さくすることが可能となり、回路全体の小型化に貢献している。

また、出力電圧変動を大幅に改善することができ、CMC と同等の安定性マージンとゲインのクロスオーバー周波数を持つ PBMC を容易に設計することが可能となる。さらに、CMC 動作と PBMC 動作をシームレスに切り替えることが可能となる。

そのため、PBMC を用いた制御系の設計が容易であり、安定性は CMC と同等でありながら、応答性を大幅に向上することが可能となる。また、インダクタ電流のセンシングによりマルチフェーズ方式にも容易に適用できるため、更なる回路の小型化が期待できる。

参考文献

- (1) 川上 太知, 山本 真義 : 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, 電気学会部門誌 D, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)
- (2) T. Kawakami, K. Yamada, K. Umetani, S. Morimoto, “Design and Analysis of Power Balance Mode Control using Digital Control for Boost-type DC-DC Converter,” IEEJ Transactions on Electrical Engineering (TEEE), Vol. 17, No. 5, accepted for publication
- (3) S. -C. Tan, Y. M. Lai and C. K. Tse, "General Design Issues of Sliding-Mode Controllers in DC-DC Converters," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 55, No. 3, pp. 1160-1174 (2008)
- (4) Siew-Chong Tan, Y. M. Lai, C. K. Tse and M. K. H. Cheung, "Adaptive feedforward and feedback control schemes for sliding mode controlled power converters," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 21, No. 1, pp. 182-192, (2006)
- (5) S. K. Kollimalla, M. K. Mishra and Lakshmi Narasamma N, "Analysis and control of DC-DC converters using average power balance control (APBC) in solar power applications," 2014 IEEE Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science, pp. 1-6 (2014)
- (6) S. K. Kollimalla and M. K. Mishra, "Analysis and control of DC-DC boost converter using average power balance control (APBC)," 2012 4th International Conference on Intelligent and Advanced Systems (ICIAS2012), pp. 513-518 (2012)
- (7) Arnab, G., Subrata, B., Mrinal, K-S., Priyanka, D. : “Design and implementation of type-II and type-III controller for DC-DC switched-mode boost converter by using K-factor approach and optimization techniques”, IET Trans. Power Electron, Vol.9, No.5, pp.938-950 (2016)
- (8) N.D, Muhamad., M.R, Sahid., N.N, Idris., M.S, Ayob. : “Design of Power Stage and Controller for DC-DC Converter Systems Using PSPICE”, International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS2005), pp.904-908 (2005)

第5章 結論

本研究では、電力変換器の更なる小型化・高電力密度化の実現において障壁となる「相数の増加に伴う制御モデリングの複雑化」及び「制御系の不安定要素に伴う速応性及びロバスト性の悪化」という二つの問題点を改善することを目的に議論・検討を行った。

はじめに車載用電力変換器であるマルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータの駆動相数の増加に伴うモデリングの複雑化を対象に、低次元化モデリング手法を提案し、一般化した状態平均化方程式を提示するとともに、低次元化モデリング手法の有効性を検討した。次に、昇圧型 DC-DC コンバータの制御系における速応性及びロバスト性を対象に、その両者を改善する「電力平衡モード制御」を提案し、その具体的な設計方法を提示するとともに、提案する制御系の有効性を検討した。本論文の内容を以下にまとめる。

第2章では、DC-DC コンバータの制御系について述べた。以降の章で用いる昇圧型 DC-DC コンバータを対象とした。制御系のモデリング手法には状態平均化法を用いた。

第3章では、マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの相数の増加に伴う制御モデリングの複雑化を改善する低次元化モデリング手法を提案した。提案するモデリング手法は、出力キャパシタを各相に分配するように等価回路変換し、単相 DC-DC コンバータの多段接続として考えるというものである。提案したモデリング手法を用いてマルチフェーズ方式昇圧型 DC-DC コンバータの伝達関数モデルを導出し、回路モデルと低次元化モデリング手法で得られた伝達関数モデルとで比較を行った。その結果、10相まで相数を増加した場合の回路モデルと低次元化モデリング手法の周波数特性及びステップ応答波形が一致し、提案するモデリング手法の有効性を確認した。

第4章では、制御系における速応性及びロバスト性を改善した電力平衡モード制御を提案した。電力平衡モード制御は電流モード制御にフィードフォワード制御を追加した2自由度制御系の構成となっている。電力平衡モード制御は入出力電力が異なる場合にフィードフォワード制御が、等しい場合は電流モード制御と等価なフィードバック制御がシームレスに動作する2自由度制御系となっている。単相昇圧型 DC-DC コンバータに対して電力平衡モード制御と従来制御手法(電圧モード制御, 電流モード制御)と各種比較を行った。はじめに、一巡伝達関数及び出力インピーダンスの周波数特性を比較した結果電力平衡モード制御と電流モード制御で一致した。そのため、電力平衡モード制御における電圧補償器は電流モー

ド制御と同じものを使用することが可能なため、補償器の設計が非常に容易となる。次に、負荷過渡応答特性を比較し、電力平衡モード制御が従来制御手法よりも収束が速く、速応性が優れていることを確認した。最後に、ゲインクロスオーバー周波数を当初の設計値から最大で 1/10 まで低下させたときの負荷過渡時における電圧変動量を比較し、電力平衡モード制御の変動量が従来制御手法よりも小さく、速応性及びロバスト性が優れていることを確認した。

本論文で提案した各種制御アプローチにより、電力変換器の更なる小型化・高電力密度化を実現することが期待される。以上を本論文の総括とする。

参考文献一覧

第1章 緒論

- (1) 外務省 ウェブページ「2020年以降の枠組み：パリ協定」
https://www.mofa.go.jp/mofaj/ic/ch/page1w_000119.html (2020)
- (2) 環境省 ウェブページ「持続可能な開発のための2030アジェンダ/SDGs」
<https://www.env.go.jp/earth/sdgs/> (2020)
- (3) 環境省, 「日本の排出削減目標」
https://www.mofa.go.jp/mofaj/ic/ch/page1w_000121.html (2022年1月11日)
- (4) 国土交通省 ウェブページ, 「運輸部門における二酸化炭素排出量」
http://www.mlit.go.jp/sogoseisaku/environment/sosei_environment_tk_000007.html
(2021年4月)
- (5) 水谷良治, 立花武, 森本雅之, 赤津観, 星伸一: 「自動車の低燃費化に貢献する電動化技術」, 電気学会部門誌 D, Vol. 135, No. 9, pp. 884-891 (2015)
- (6) 森田賢治, 桑田雅敏: 「電動車両の開発動向」, JARI Research Journal
JRJ20140903 (2014)
- (7) 財団法人エネルギー総合工学研究所, 「新エネルギーの展望 パワーエレクトロニクス」 (2008年3月)
- (8) 河村篤男: 「現代パワーエレクトロニクス」, 数理工学社 (2005)
- (9) 伊東淳一, 伊東洋一: 「パワーエレクトロニクス技術教科書」, トランジスタ技術
SPECIAL, CQ 出版社, No. 12 (2014)
- (10) トヨタ自動車ホームページ, 20th PRIUS, 「受け継がれるハイブリッド技術」
<https://newsroom.toyota.co.jp/jp/prius20th/innovation/tech/> (2017年8月4日)
- (11) 小林徹也: 「デンソーにおけるHV/EV向け製品開発」, デンソーテクニカル
レビュー, Vol. 16, pp. 16-22 (2007)
- (12) 中島優, 菊池隆二, 北澤成, 富田芳樹, 小杉肇, 金子高久: 「小型車用パワーコントロールユニットの開発」, 自動車技術会 2016年春季大会学術講演会講演予稿集,
20165433, pp.2320-2325 (2016)
- (13) 山本真義: 「4代目プリウスのPCU分解から紐解く車載パワーデバイスの技術動向

- 予測], 車載テクノロジー (4月号), 技術情報協会, pp.125-131 (2017)
- (14) 中納啓介, 石倉啓太: 「DC/DC コンバータのマルチフェーズ化による小型・高効率化の検討」, 信学技報, Vol. 116, No. 133, pp. 1-6 (2016)
- (15) 北村達也・山田正樹・原田茂樹・小山正人: 「SiC を用いた高パワー密度を用いた高パワー密度インターリーブ DC/DC コンバータの開発」, 電気学会部門誌 D, Vol. 134, No. 11, pp. 956-961 (2014)
- (16) M. T. Zhang, M. M. Jovanovic, and F. C. Lee, "Analysis and evaluation of interleaving technique in forward converters," IEEE Trans. on Power Electronics, Vol. 13, No. 4, pp. 690–698 (1998).
- (17) 望月賢人, 富永麗司, 湊純司, 中井久史: 「小型高出力車載充電器の開発」, パナソニック技報, Vol. 61, No. 1, pp.47-51 (2015)

第2章 DC-DC コンバータの制御系

- (1) R. D. Middlebrook, S. Cuk, "A general unified approach to modelling switching converter power stages", IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC), pp. 18-34 (1976)
- (2) T. Ninomiya, M. Nakahara, T. Higashi and K. Harada, "A unified analysis of resonant converters," in IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 6, No. 2, pp. 260-270 (1991)
- (3) A.F. Witulski; R.W. Erickson: "Extension of state-space averaging to resonant switches and beyond", IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 5, No. 1, pp. 98-109 (1990)
- (4) 川上 太知, 山本 真義: 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, 電気学会部門誌 D, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)
- (5) M. Truntič and M. Milanović, "Voltage and Current-Mode Control for a Buck-Converter based on Measured Integral Values of Voltage and Current Implemented in FPGA," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 29, No. 12, pp. 6686-6699 (2014)
- (6) B. Bryant and M. K. Kazimierczuk, "Voltage loop of boost PWM DC-DC converters with peak current-mode control," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 53, no. 1, pp. 99-105 (2006)
- (7) S. Saggini, D. Trevisan, P. Mattavelli and M. Ghioni, "Synchronous–Asynchronous Digital

- Voltage-Mode Control for DC–DC Converters," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 22, No. 4, pp. 1261-1268 (2007)
- (8) G. Garcera, E. Figueres and A. Mocholi, "Novel three-controller average current mode control of DC-DC PWM converters with improved robustness and dynamic response," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 15, No. 3, pp. 516-528, (2000)
- (9) K. I. Hwu, W. Jiang and J. Shieh, "Analysis and design of type 3 compensator for the boost converter based on PSIM," 2018 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), pp. 1437-1442 (2018)
- (10) K. I. Hwu, J. Shieh and W. Jiang, "Analysis and design of type 3 compensator for the buck converter based on PSIM," 2018 13th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), pp. 1010-1015 (2018)

第3章 低次元化モデリング手法

- (1) A. Villarruel-Parra and A. J. Forsyth, "Enhanced Average-Value Modeling of Interleaved DC–DC Converters Using Sampler Decomposition," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 32, No. 3, pp. 2290-2299 (2017)
- (2) O. F. Ruiz and I. Cervantes, "Averaged modeling of transformer-coupled interleaved boost converters," IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, pp. 256-261 (2012)
- (3) P. Azer and A. Emadi, "Generalized State Space Average Model for Multi-Phase Interleaved Buck, Boost and Buck-Boost DC-DC Converters: Transient, Steady-State and Switching Dynamics," IEEE Access, Vol. 8, pp. 77735-77745 (2020)
- (4) F. H. Dupont, C. Rech, R. Gules and J. R. Pinheiro, "Reduced-Order Model and Control Approach for the Boost Converter With a Voltage Multiplier Cell," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 28, No. 7, pp. 3395-3404 (2013)
- (5) H. Mao, L. Yao, C. Wang and I. Batarseh, "Analysis of Inductor Current Sharing in Nonisolated and Isolated Multiphase dc–dc Converters," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 54, No. 6, pp. 3379-3388 (2007)
- (6) J. A. Morales-Saldana, J. Leyva-Ramos, E. E. Carbajal-Gutierrez and M. G. Ortiz-Lopez,

- "Average Current-Mode Control Scheme for a Quadratic Buck Converter With a Single Switch," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 23, No. 1, pp. 485-490 (2008)
- (7) N. Jantharamin, L. Zhang: "Analysis of multiphase interleaved converter by using state-space averaging technique", Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology(ECTI-CON), pp.288-291 (2009)
- (8) 川上 太知, 山本 真義: 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, 電気学会部門誌 D, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)

第4章 電力平衡モード制御

- (1) 川上 太知, 山本 真義: 「マルチフェーズ方式 DC-DC コンバータの数学的モデリングにおける低次元化手法の提案」, 電気学会部門誌 D, Vol. 137, No. 3, pp. 207-212 (2017)
- (2) T. Kawakami, K. Yamada, K. Umetani, S. Morimoto, "Design and Analysis of Power Balance Mode Control using Digital Control for Boost-type DC-DC Converter," IEEJ Transactions on Electrical Engineering (TEEE), Vol. 17, No. 5, accepted for publication
- (3) S. -C. Tan, Y. M. Lai and C. K. Tse, "General Design Issues of Sliding-Mode Controllers in DC-DC Converters," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 55, No. 3, pp. 1160-1174 (2008)
- (4) Siew-Chong Tan, Y. M. Lai, C. K. Tse and M. K. H. Cheung, "Adaptive feedforward and feedback control schemes for sliding mode controlled power converters," IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 21, No. 1, pp. 182-192, (2006)
- (5) S. K. Kollimalla, M. K. Mishra and Lakshmi Narasamma N, "Analysis and control of DC-DC converters using average power balance control (APBC) in solar power applications," 2014 IEEE Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science, pp. 1-6 (2014)
- (6) S. K. Kollimalla and M. K. Mishra, "Analysis and control of DC-DC boost converter using average power balance control (APBC)," 2012 4th International Conference on Intelligent and Advanced Systems (ICIAS2012), pp. 513-518 (2012)

-
- (7) Arnab, G., Subrata, B., Mrinal, K-S., Priyanka, D. : “Design and implementation of type-II and type-III controller for DC-DC switched-mode boost converter by using K-factor approach and optimization techniques”, IET Trans. Power Electron, Vol.9, No.5, pp.938-950 (2016)
- (8) N.D, Muhamad., M.R, Sahid., N.N, Idris., M.S, Ayob. : “Design of Power Stage and Controller for DC-DC Converter Systems Using PSPICE”, International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS2005), pp.904-908 (2005)

謝辞

本論文は、小型化・高電力密度化を実現する車載用電力変換器における制御系のモデリングの低次元化、及び、高い速応性・ロバスト性を兼ね備えた制御手法に関する研究成果をまとめたものです。稿を終えるにあたり、終始種々のご指導とご鞭撻を賜った大阪府立大学大学院工学研究科 森本茂雄教授に厚く感謝の意を表します。

また、本論文をまとめるにあたり、有益なご助言とご指導を賜りました大阪府立大学大学院工学研究科 石亀篤司教授ならびに小西啓治教授に深甚なる謝意を表します。

本研究を遂行するにあたり、平素より暖かいご教示とご配慮をいただきました大阪府立大学大学院工学研究科 真田雅之准教授ならびに井上征則准教授には、心より感謝の意を表します。また、名古屋大学 山本真義教授ならびに今岡淳准教授、岡山大学 梅谷和弘准教授、奈良高専 石飛学教授、ローム株式会社 財津俊行氏には数多くのご助言とご支援をいただき、深く感謝申し上げます。

平素より、ご指導いただいた大阪府立大学大学院工学研究科 電気・情報系専攻 電気情報システム工学分野の諸先生方に厚くお礼申し上げます。

最後に、種々の面でご協力いただいた大阪府立大学大学院工学研究科 電気・情報系専攻 電気情報システム工学分野 モータドライブシステム研究グループの皆様、大阪府立大学工業高等専門学校の皆様、電力変換制御技術研究室の皆様ならびに、島根大学パワーエレクトロニクス研究室時代の同期として共に研究を支え合ってきた株式会社デンソー 木村翔太氏、舞鶴高専講師 七森公碩氏、そして、研究活動に寛大な理解を示してもらい、多くの面において支えとなってくれた両親に心より感謝致します。