研究・開発をめぐる一つの企業間競争モデル

研究・開発をめぐる一つの企業間競争モデル

前　田　英　昭

1．序

イノベーションと技術進歩は、個々の企業にとってはもちろん、マクロ経済にとっても、その成長発展のために大きな意義をもっている。そしてイノベーションや技術進歩が新しく、より効率的な生産工程の形をとるにせよ、あるいはより良い品質、性能をもつ新製品の形をとるにせよ、それらの実現には研究・開発（Ｒ＆Ｄ）のための資源の投入 ── Ｒ＆Ｄ投資 ── を必要とする。

ここでは寡占市場にある企業のＲ＆Ｄ政策について考察するが、企業がＲ＆Ｄに資源を配分する誘因の主たるものは、Ｒ＆Ｄ投資の成功が企業に利潤の増加とライバルに対する競争上の優位な地位をもたらすことである。ここでは特に前者を重視した議論を行う。

近時Ｒ＆Ｄに関する企業間競争の問題にゲームの理論が用いられることが多いが、それらについての手際の良い展望は、*Beath, J. et al.* [2] に、やや古い時期のそれは *Kamien & Schwartz* [5]、*Feichtinger & Jorgensen* [3] などに見られる。ここではそれらに取り上げられている多くの研究とは異なって、新製品の市場への投入と新生産工程の導入によってもたらされる販売高の増加と生産費の減少が利潤の増加にどれだけ寄与するかという点だけに注目している。そして製品や工程に係わる技術の絶対的水準ではなく、それらの差が販売高や生産費の増加や減少をもたらすものと想定している。分析は微分ゲームの方法によっているが、解を明示的に得るために、モデルは極めて簡単なものになっている。次の節でモデルを構築し、第３節でオープン・ループ・ナッシュ均衡を、第４節でフィードバック・ナッシュ均衡を求め、それぞれ、関連したいくつかの問題を分析している。なお第４節のモデルは更に簡略化されている。

2．モデル

市場には、基本的には同じ種類の製品を生産している企業１と企業２があるものとし、それらの企業の製品の品質や性能の水準と生産工程の効率は何らかの尺度によって表すことが

できるものとする。時点 t における前者のそれを、企業１、２について、それぞれ、$x_1(t), x_2(t)$ によって、また後者を $y_1(t), y_2(t)$ によって表し、これらの尺度の企業の間における差を、それぞれ

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$
$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

によって定義する。以下においては x と y を技術差とよぶ。正（負）の x は企業１（企業２）の販売高を増加させることによって、また正（負）の y は企業１（企業２）の生産費を減少させることによって、企業１（企業２）の経常利潤（*operating profit*）を増加させる。

各企業の販売高の増加もしくは減少 $R_1(t), R_2(t)$ が製品に係わる技術差 x の関数として下のように簡単な形で与えられるものと仮定する。

$$\left.\begin{aligned} R_1(t) &= a[\alpha_1 - \beta_1 x(t)/2]x(t) \\ R_2(t) &= -a[\alpha_2 - \beta_2 x(t)/2]x(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで $a, \alpha_i, \beta_i\ (i = 1, 2)$ はパラメターであって、

$$a > 0,\quad \alpha_1 > \alpha_2 > 0,\quad \beta_2 > \beta_1 > 0 \qquad (\mathrm{A}.1)$$

であるとする。(1)と仮定(A.1)は、企業1は製品技術の差が有利に働く範囲を x が正の領域に、企業2は負の領域にもっているが、そのような範囲は企業1の方が広いこと、そして販売高の増加分の最大値も企業1の方が大きいことを示してる。また製品技術に差がない場合には両企業の販売高に増減はない。

工程技術の差が生産費に与える影響、つまり生産費の減少または増加は、それぞれの企業について、x, y の関数として次のように表されるものとする。

$$\left.\begin{aligned} C_1(t) &= b[-\gamma_1 x(t) + (\lambda_1 - \mu_1 y(t)/2)y(t)] \\ C_2(t) &= b[\gamma_2 x(t) - (\lambda_2 + \mu_2 y(t)/2)y(t)] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ここで $b, \gamma_i, \lambda_i, \mu_i\ (i = 1, 2)$ は下の仮定(A.2)を満たすパラメターである。

$$b > 0,\quad \gamma_2 > \gamma_1 > 0,\quad \mu_1 > \mu_2 > 0 \qquad (\mathrm{A}.2)$$

(2)と(A.2)は製品技術の差が生産費の増減に関係していて、高い品質の製品ほど生産費を増加させることを示している。また同一の x に対して工程技術の差 y が有利に働く、つまり生産費を減少させる範囲を企業1は y が正の領域に、企業2は負の領域にもっているが、そのような範囲は企業2の方が広く、生産費の減少分の最大値も企業2の方が大きい。

以上により企業1は製品技術の面で、企業2は工程技術の面で優位な立場に立ちやすい特徴をもっているということができる。それぞれの企業の経常利潤の増加（減少）分は、(1)と(2)で与えられる二つの効果の和として得られる。それらを $\Pi_i(t)\ (i = 1, 2)$ で表せば、

$$\left.\begin{aligned}\Pi_1(t) &= (a\alpha_1 - b\gamma_1)x(t) - a\beta_1 x(t)^2/2 + b\lambda_1 y(t) - b\mu_1 y(t)^2/2 \\ \Pi_2(t) &= -(a\alpha_2 - b\gamma_2)x(t) - a\beta_2 x(t)^2/2 - b\lambda_2 y(t) - b\mu_2 y(y)^2/2\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで

$$a > b,\ \ \beta_i > \mu_i > 0,\ \ a\alpha_i - b\gamma_i > 0 \qquad (i = 1,\ 2) \qquad (\mathrm{A.3})$$

を仮定する。この最後の仮定は、製品技術の差が生産費に与える影響が製品の販売高に与えるそれよりも比較的小さいことを意味する。与えられた t に対して Π_1 は

$$x = (a\alpha_1 - b\gamma_1)/a\beta_1 > 0,\ y = \lambda_1/\mu_1 > 0$$

において最大値

$$(a\alpha_1 - b\gamma_1)^2/2a\beta_2 + b\lambda_1^2/2\mu_1$$

をとり、Π_2 は

$$x = -(a\alpha_2 - b\gamma_2)/b\beta_2 < 0, \quad y = -\lambda_2/\mu_2 < 0$$

において最大値

$$(a\alpha_2 - b\gamma_2)^2/2a\beta_2 + b\lambda_2^2/2\mu_2$$

をとる。最大値は前者の方が大きい。

製品にせよ、工程にせよ、イノベーションのためにはＲ＆Ｄ投資が必要である。それぞれの企業の製品と工程のための投資を u_i, v_i によって表し、それらに係わる費用が次式で与えられるものとする。

$$E_i(t) = [ku_i(t)^2 + lv_i(t)^2]/2, \quad (i = 1,\ 2) \qquad (4)$$

ここでパラメターについて次のことを仮定する。

$$l > k > 0 \qquad (\mathrm{A.4})$$

(4)と(A.4)はＲ＆Ｄ投資費用の構造が両企業について同一であること、限界投資費用の増加率は工程に係わるものの方が大きいことを示している。

また製品と工程の技術差は両企業のＲ＆Ｄ投資によって、それぞれ次のダイナミック・プロセスにしたがうものと仮定する。

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \eta[u_1(t) - u_2(t)] - \delta x(t), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y}(t) &= \sigma[v_1(t) - v_2(t)] - \theta y(t), \quad y(0) = y_0\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ここで

$$\eta > \sigma > 0,\ 1 > \delta > \theta > 0 \qquad (\mathrm{A.5})$$

である。この最初の仮定は製品技術の差の方がＲ＆Ｄ投資の差に敏感に反応することを、後の仮定は、技術差が新技術の普及などによって縮小する傾向をもつことを意味する。

各企業の目的は(3)と(4)から得られる

$$J_i = \int_0^{\infty} [\Pi_i(t) - E_i(t)]\exp(-rt)dt, \quad (i = 1,\ 2) \qquad (6)$$

を(5)の制約の下で最大にするようにR＆D投資戦略$u_i(t)$, $v_i(t)$を選ぶことであると想定する。rは割引率である。(3)、(4)から明らかなように(6)の被積分関数は、x, yとu_i, v_iについて厳密な凹関数である。

企業iにとってのオープン・ループ戦略空間（ＯＬＳＳ）を

$$S_i = \{u_i(t),\ v_i(t) \mid u_i,\ v_i\text{: } \textit{piecewise continuous for } t \geqq 0\}$$

によって定義する。

オープン・ループ戦略（ＯＬＳ）はR＆D投資の時間経路である。利得関数が(6)と(5)によって特定化され、戦略空間（S_1,S_2）をもつ企業1と企業2の間の微分ゲームに対するオープン・ループ・ナッシュ均衡（ＯＬＮＥ）は

$$J_i(u_i^\circ,\ v_i^\circ,\ u_j^\circ,\ v_j^\circ) \geqq J_i(u_i,\ v_i,\ u_j^\circ,\ v_j^\circ)\ \textit{for all}\ (u_i,\ v_i) \in S_i$$

が成立する戦略の組（u_i°, v_i°, u_j°, v_j°）である。定常的なＯＬＮＥは両企業の技術差が一定の均衡である。

これに対してフィードバック戦略空間（ＦＳＳ）は、その時の状態変数つまり技術差と時間tに依存する決定法則の集合である。企業がフィードバック戦略（ＦＳ）にしたがうときには、それぞれの時点におけるR＆D投資を前もって決めておく必要はなく、それぞれの時点で観察された技術差にもとづいて決定すればよい。企業iのＦＳＳを次のように定義する。

$$S_{if} = \{u_i[x(t),\ y(t)],\ v_i[x(t),\ y(t)] \mid u_i,\ v_i\text{: } \textit{functions of } x(t),\ y(t)\ \textit{and}\ t\}$$

そして利得関数が(6)と(5)によって特定化され、戦略空間が（S_{1f}, S_{2f}）である微分ゲームのフィードバック・ナッシュ均衡（ＦＮＥ）は

$$J_i(u_i^*,\ v_i^*,\ u_j^*,\ v_j^*) \geqq J_i(u_i,\ v_i,\ u_j^*,\ v_j^*)$$
$$\textit{for all}\ (u_i,\ v_i) \in S_{if}\ \textit{and for every initial conditions}\ (x_0,\ y_0) \qquad (7)$$

が成立する戦略の組（u_i^*, v_i^*, u_j^*, v_j^*）である。

ところで(7)は、均衡経路上の点に対してだけでなく、すべての可能な点に対して成立しなければならないから、ＦＮＥは（サブゲーム）完全均衡になっている。なおＯＬＮＥはゲームのルールが前もって決定されたＯＬＳにしたがうことを要求しないときには、たとえばある企業が何らかの過誤とか外生的なショックなどによって計画から外れてしまうような場合には完全均衡ではなくなる(1)。

ここで定式化したゲームはいわゆる*linear-quadratic*な構造のものであるが、*Reinganum*［8］がいうように、一般的な微分ゲームについて明示的な解を得ることは困難であるから、まずは簡単なモデルについて明示的な解を求めると共に、そうすることによって、より一般的な条件の下で成立する結果が示唆できることを期待して、上のような定式化

（1） この点に関してはたとえばReynolds, S, S,［9］

を行ったのである。なお以下において混乱の恐れがない場合には時間 t の表示は省略する。

3．オープン・ループ・ナッシュ均衡

はじめにＯＬＮＥを形成するＲ＆Ｄ投資戦略を求める。それぞれの企業はＲ＆Ｄ投資戦略の時間経路を選び、ゲームがどのように進行するかにかかわらず、その経路にしたがう、それぞれの企業の戦略の時間経路は、ライバルの選ぶ経路に対する最良の反応になっていなければならない。

企業 i にとっての問題は、ライバルである企業 j の任意のＲ＆Ｄ投資の経路に対して、(6)を(5)の制約の下で最大にするようにＲ＆Ｄ投資戦略の経路を選ぶことである。

さて企業１と２に対する current value Hamiltonian（ＣＶＨ）はそれぞれ下のように与えられる。

$$H_1 = (a\alpha_1 - b\gamma_1)x - a\beta_1 x^2/2 + b\lambda_1 y - b\mu_1 y^2/2 - (ku_1^2 + lv_1^2)/2 + \omega_1[\eta(u_1 - u_2) - \delta x] + \xi_1[\sigma(v_1 - v_2) - \theta y] \quad (8.1)$$

$$H_2 = -(a\alpha_2 - b\gamma_2)x - a\beta_2 x^2/2 - b\lambda_2 y - b\mu_2 y^2/2 - (ku_2^2 + lv_2^2)/2 + \omega_2[\eta(u_1 - u_2) - \delta x] + \xi_2[\sigma(v_1 - v_2) - \theta y] \quad (8.2)$$

ここで ω_i, ξ_i は共役変数である。均衡の必要条件は企業１に対して

$$\partial H_1/\partial u_1 = -ku_1 + \omega_1\eta = 0 \quad (9.1)$$

$$\partial H_1/\partial v_1 = -lv_1 + \xi_1\sigma = 0 \quad (10.1)$$

$$\dot{\omega}_1 = r\omega_1 - \partial H_1/\partial x = (r+\delta)\omega_1 - (a\alpha_1 - b\gamma_1) + a\beta_1 x \quad (11.1)$$

$$\dot{\xi}_1 = r\xi_1 - \partial H_1/\partial y = (r+\theta)\xi_1 - b\lambda_1 + b\mu_1 y \quad (12.1)$$

企業２について

$$\partial H_2/\partial u_2 = -ku_2 - \omega_2\eta = 0 \quad (9.2)$$

$$\partial H_2/\partial v_2 = -lv_2 - \xi_2\sigma = 0 \quad (10.2)$$

$$\dot{\omega}_2 = r\omega_2 - \partial H_2/\partial x = (r+\delta)\omega_2 + (a\alpha_2 - b\gamma_2) + a\beta_2 x \quad (11.2)$$

$$\dot{\xi}_2 = r\xi_2 - \partial H_2/\partial y = (r+\theta)\xi_2 + b\lambda_2 + b\mu_2 y \quad (12.2)$$

である。

はじめに定常的均衡を求める。上の諸条件と(5)から技術差について次のような２階の線型微分方程式の体系が得られる（数学注１）。

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= r\dot{x} + [\delta(r+\delta) + a\eta^2(\beta_1+\beta_2)/k]x \\ &\qquad - \eta^2[(a\alpha_1 - b\gamma_1) - (a\alpha_2 - b\gamma_2)]/k \\ \ddot{y} &= r\dot{y} + [\theta(r+\theta) + b\sigma^2(\mu_1+\mu_2)/l]y \\ &\qquad - b\sigma^2(\lambda_1 - \lambda_2)/l \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

定常的ＯＬＮＥにおける技術差 x^c, y^c は⒀において

$$\ddot{x} = \dot{x} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$$

とおくことによって一義的に得られる。すなわち

$$\left.\begin{aligned} x^c &= D/A \\ y^c &= E/B \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

である。ここで

$$A = \delta(r+\delta)+a\eta^2(\beta_1+\beta_2)/k > 0$$
$$B = \theta(r+\theta)+b\sigma^2(\mu_1+\mu_2)/l > 0$$
$$D = \eta^2[(a\alpha_1-b\gamma_1)-(a\alpha_2-b\gamma_2)]/k > 0$$
$$E = b\sigma^2(\lambda_1-\lambda_2)/l < 0$$

これらの符号はパラメターに関する先の諸仮定による。したがって技術差の定常値は製品、工程のそれぞれについて

$$x^c > 0, \quad y^c < 0$$

となる。これは、定常的均衡においては製品に関しては企業１の技術が、工程に関しては企業２のそれが優れていることを意味する。

技術差の定常値にパラメターの値の変化が与える影響を吟味すると下のような結果が得られる。

	a	b	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	k	l	η	δ	σ	θ	r
x^c	?	+	+	−	−	−	−	+					−		+	−			−
y^c		−							+	−	+	+		+			−	+	−

x^c に与える a の変化の影響はパラメターに関するこれまでの仮定からは判定できない。

次に⒁で求めた技術差の定常状態に対応する各企業のＲ＆Ｄ投資すなわち定常的ＯＬＮＥ戦略（u_i^c, v_i^c）を求めると、(9.1)、(9.2)、(10.1)、(10.2)、(11.1)、(11.2)、(12.1)、(12.2) を用いることによって次のように得られる（数学注２）。

$$\left.\begin{aligned} u_1^c &= \eta[(a\alpha_1-b\gamma_1)-a\beta_1 x^c]/k(r+\delta) \\ v_1^c &= b\sigma(\lambda_1-\mu_1 y^c)/l(r+\theta) \\ u_2^c &= \eta[(a\alpha_2-b\gamma_2)+a\beta_2 x^c]/k(r+\delta) \\ v_2^c &= b\sigma(\lambda_2+u_2 y^c)/l(r+\theta) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

次にこのような定常的均衡に到達するＯＬＮＥ戦略の経路を求める。⒀は x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ に関する次のような１階の微分方程式の体系に書き換えられることに注目する。

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= \dot{x} \\ d\dot{x}/dt &= Ax + r\dot{x} - D \\ dy/dt &= \dot{y} \\ d\dot{y}/dt &= By + r\dot{y} - E \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

この方程式体系の同次部分の特性方程式は、z を特性根とすると次のようになる。

$$\begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & 0 \\ A & r-z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 1 \\ 0 & 0 & B & r-z \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$(r-z)^2 z^2 + (A+B)(r-z)z + AB = 0 \quad (17)$$

ここで $(r-z)z = w$ とおくと(17)は

$$w^2 + (A+B)w + AB = 0 \quad (18)$$

となる。ここで(A.3)、(A.4)、(A.5) により $A > B$ であるから

$$(A+B)^2 - 4AB = (A-B)^2 > 0$$

となり、(18)は相異なる負の2根 w_1, w_2 $(0 > w_1 > w_2)$ をもつ。そしてそれらに応じて(17)は2個の正根と2個の負根 z_1, z_2 $(0 > z_1 > z_2)$ をもつ。したがって $(x^c, 0, y^c, 0)$ は上の方程式体系の鞍点であり、負根は

$$z_1 = [r - (r^2 - 4w_1)^{1/2}]/2$$
$$z_2 = [r - (r^2 - 4w_2)^{1/2}]/2$$

である(2)。そして $A > B > 0$ であるから $w_1 = -B,\ w_2 = -A$ より

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= [r - (r^2 + 4B)^{1/2}]/2 \\ z_2 &= [r - (r^2 + 4A)^{1/2}]/2 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

となる。

点 $(x^c, 0, y^c, 0)$ が鞍点であることから、技術差のそれぞれの初期状態を定常的均衡に対応する点に移す技術差の安定な経路が唯一組存在する(3)。x と y のそのような安定経路は先の特性根 z_1, z_2 を用いて次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} x &= h_{11} exp(z_1 t) + h_{12} exp(z_2 t) + x^c \\ y &= h_{21} exp(z_1 t) + h_{22} exp(z_2 t) + y^c \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

ここで係数 h_{ij} は次のとおりである（数字注3）。

（2） 正根は $[r + (r^2 - 4w_1)^{1/2}]/2$ と $[r + (r^2 - 4w_2)^{1/2}]/2$ である。

（3） Flaherty, M. T. [4]

$$h_{11}=0,\quad h_{12}=x_0-D/A,\quad h_{21}=y_0-E/B,\quad h_{22}=0 \tag{21}$$

(21)を用いると、x, y の安定な経路は、結局

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_0-x^c)\,exp\,(z_2t)+x^c \\ y &= (y_0-y^c)\,exp\,(z_1t)+y^c \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

となる。それらをもたらすＯＬＮＥ戦略の経路は(5)から

$$\left.\begin{aligned} u_1^\circ-u_2^\circ &= (\dot{x}+\delta x)/\eta = [(x_0-x^c)(z_2+\delta)\,exp\,(z_2t)+\delta x^c]/\eta \\ v_1^\circ-v_2^\circ &= (\dot{y}+\theta y)/\sigma = [(y_0-y^c)(z_1+\theta)\,exp\,(z_1t)+\theta y^c]/\sigma \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

となる。

次にＯＬＮＥ戦略の経路をそれぞれの企業について示すことにしよう。たとえば ω_1 は(11.1)から安定な技術差の経路 x と定数 k によって

$$\omega_1 = exp\,[(r+\delta)t]\int W_1\,exp\,[-(r+\delta)t]dt+k$$
$$W_1 = a\beta_1x-(a\alpha_1-br_1)$$

のように書けるが、定常状態における ω_1 の値が一定であることにより $k=0$ でなければならない。他の ω や ξ についても同様である。

したがって安定な技術差の経路 x, y に対応する共役変数の経路はそれぞれ次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= a\beta_1X+(a\alpha_1-br_1)/(r+\delta) \\ \omega_2 &= a\beta_2X-(a\alpha_2-br_2)/(r+\delta) \\ \xi_1 &= b\mu_1Y+b\lambda_1/(r+\theta) \\ \xi_2 &= b\mu_2Y-b\lambda_2/(r+\theta) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ここで

$$X = (x_0-y^c)\,exp\,(z_2t)/[z_2-(r+\delta)]-x^c/(r+\delta)$$
$$Y = (y_0-x^c)\,exp\,(z_1t)/[z_1-(r+\theta)]-y^c/(r+\delta)$$

である。

(24)を用いると、安定な技術差の経路を産むそれぞれの企業のＯＬＮＥは、結局、(9.1)、(9.2)、(10.1)、(10.2) から、それぞれ、次のように得られる[(4)]。

（４） (24)を t で微分して得られた結果と(24)を(11.1)、(11.2)、(12.1)、(12.2)に代入すれば、(22)が得られ、それらを用いて

$u_1^\circ-u_2^\circ = (\dot{x}+\delta x)/\eta$

$v_1^\circ-v_2^\circ = (\dot{y}+\delta y)/\sigma$

を計算すると(23)が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
u_1^\circ &= \eta\omega_1/k = \eta[a\beta_1 X+(a\alpha_1-br_1)/(r+\delta)]/k\\
u_2^\circ &= -\eta\omega_2/k = -\eta[a\beta_2 X-(a\alpha_2-br_2)/(r+\delta)]k\\
v_1^\circ &= \sigma\xi_1/l = \sigma[b\mu_1 Y+b\lambda_1/(r+\theta)]/l\\
v_2^\circ &= -\sigma\xi_2/l = -\sigma[b\mu_2 Y-b\lambda_2/(r+\theta)]/l
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

4．フィードバック・ナッシュ均衡

次にどちらの企業もＲ＆Ｄ投資の経路に前もってコミットしない場合について考える(5)。それぞれの企業はＲ＆Ｄ投資戦略を決定するための決定法則を採用することができ、それらの決定法則は、それぞれの時点におけるＲ＆Ｄ投資の大きさをその時の状態変数つまり製品と工程に係わる技術差の関数として特定する。このような定式化を行えば、各企業はＲ＆Ｄ投資の全経路を前もって定めるのではなく、技術差がどのように変化して行くかにしたがって、各時点におけるＲ＆Ｄ投資を決定することができる。ここでは完全均衡に対応する決定法則だけを考えることにし、すべての可能な状態に対してナッシュ均衡とはならないようなプレコミットメントは除外する。

前節では企業の間の技術差とそれに起因する結果をパラメターの値の違いによって表すことにつとめたが、ここでは解析解を得るために、それらの違いはないものとする。したがってここでの議論は、企業の特徴がわかりにくいものとなっている。具体的には以下において次のように仮定する。

$$\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2,\ \lambda_1=\lambda_2,\ \mu_1=\mu_2 \qquad (\mathrm{A}.6)$$

Ｒ＆Ｄ投資のＦＮＳを求めるために価値関数による方法を用いる。両企業がそれぞれの戦略空間に属するＲ＆Ｄ戦略の組（u_1^*, v_1^*）、（u_2^*, v_2^*）を採用するとき、各企業に対する価値関数は、それぞれ下のように与えられる。

$$V_i[x(\tau),\ y(\tau)]=\int_\tau^\infty\{\Pi_i(x,\ y)-E_i[u_i^*(x,\ y),\ v_i^*(x,\ y)]\}exp(-rt)dt,\ (i=1,\ 2)\qquad(26)$$

ここで(A.6)により

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_1(x,\ y) &= (a\alpha-b\gamma)x-a\beta x^2/2+b\lambda y-b\mu y^2/2\\
\Pi_2(x,\ y) &= -(a\alpha-b\gamma)x-a\beta x^2/2-b\lambda y-b\mu y^2/2
\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

である。E_iについては(4)と同様である。状態変数である技術差は（u_1^*, v_1^*）、（u_2^*, v_2^*）と時点τにおける技術差$x(\tau)$、$y(\tau)$にしたがって変化する。Ｒ＆Ｄ投資の組（u_1^*, v_1^*）、

（５） このようなゲームについては、たとえば、Basar, T. & Olsder, G. J. [1], Reinganum, J. F. [7], Star, A. W. & Ho, Y. C. [10], Mehlmann, A. [6] など。

(u_2^*, v_2^*) がＦＮＥであるための必要条件は次の *Hamilton-Jacobi-Bellman*（ＨＪＢ）方程式によって与えられる。

$$\left.\begin{aligned} -\partial V_1/\partial t &= max\{\Pi_1(x, y)-E_1(u_1, v_1)+(\partial V_1/\partial x)[\eta(u_1-u_2)-\delta x] \\ &\qquad +(\partial V_1/\partial y)[\sigma(v_1-v_2)-\theta y]\} \\ -\partial V_2/\partial t &= max\{\Pi_2(x, y)-E_2(u_2, v_2)+(\partial V_2/\partial x)[\eta(u_1-u_2)-\delta x] \\ &\qquad +(\partial V_2/\partial y)[\sigma(v_1-v_2)-\theta y]\} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

これらの方程式は可能な任意の状態変数に対して成立しなければならないから、ＦＮＥを構成する戦略の組は、完全均衡を成立させる戦略の組となっている。

(28)の右辺の被最大化関数は、各企業に対して、u_1, v_1 について凹であるから(28)の右辺の最大条件より

$$u_1 = \eta V_{1x}/k, \quad v_1 = \sigma V_{1y}/l, \quad u_2 = -\eta V_{2x}/k, \quad v_2 = -\sigma V_{2y}/l \qquad (29)$$

となる。ここで $V_{ix} = \partial V_i/\partial x$, $V_{iy} = \partial V_i/\partial y$ である。

(29)を(28)に代入すれば、$-\partial V_i/\partial t = rV_i$ であるから

$$\left.\begin{aligned} rV_1 &= \Pi_1(x, y)+\eta^2(V_{1x})^2/2k+\sigma^2(V_{1y})^2/2l \\ &\qquad +\eta^2 V_{1x}V_{2x}/k-\delta x V_{1x}+\sigma^2 V_{1y}V_{2y}/l-\theta y V_{1y} \\ rV_2 &= \Pi_2(x, y)+\eta^2(V_{2x})^2/2k+\sigma^2(V_{2y})^2/2l \\ &\qquad +\eta^2 V_{1x}V_{2x}/k-\delta x V_{2x}+\sigma^2 V_{1y}V_{2y}/l-\theta y V_{2y} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

が得られる。

この体系の閉じた形の均衡解を求め、その性質を明らかにしよう。このゲームはいわゆる *linear-quadratic* な構造をもっているから、２次形式の価値関数の存在を仮定することができる(6)。ところが仮定(A.6)により、技術差による経常利潤の増加分について

$$\Pi_1(x, y) = \Pi_2(-x, -Y)$$

であり、かつＲ＆Ｄ投資支出関数は両企業にとって同一であるから、企業１の価値関数 V_1 を m, n, p, g, s および f をパラメターとして(31)の始めの式のように定義すれば、企業２のそれは(31)の後の式のように定義される。

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= mx^2/2+nxy+py^2/2+gx+sy+f \\ V_2 &= mx^2/2+nxy+py^2/2-gx-sy+f \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

(28)を満たすこれらのパラメターが得られれば、技術差 x, y に関する２次形式の価値関数の存在の仮定が正当化される。(31)から

$$\left.\begin{aligned} &\partial V_1/\partial x = mx+ny+g, \quad \partial V_1/\partial y = nx+py+s \\ &\partial V_2/\partial x = mx+ny-g. \quad \partial V_2/\partial y = nx+py-s \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

（６）　たとえばBasar,, T. & Olsder, G. J. [1]

であるから(29)は

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = \eta(mx+ny+g)/k, \quad v_1 = \sigma(nx+py+s)/l \\ &u_2 = -\eta(mx+ny-g)/k, \quad v_2 = -\sigma(nx+py-s)/l \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

となる。そして(28)の左辺に(31)を代入して得られる式と、右辺の最大化を実行して得られる式、つまり右辺に(32)、(33)（および(27)）を代入して得られる式の間には、それぞれの企業について、恒等関係が成立しなければならない。両辺の係数を比較するとそれらの条件は、両企業について

$$\left.\begin{aligned} &3\eta^2m^2/2k+3\sigma^2n^2/2l-(\delta+r/2)m-a\beta/2 = 0 \\ &3\eta^2mn/k+3\sigma^2np/l-(\delta+\theta+r)n = 0 \\ &3\eta^2n^2/2k+3\sigma^2p^2/2l-(\theta+r/2)p-b\mu/2 = 0 \\ &\eta^2mg/k+\sigma^2ns/l-(\delta+r)g+(a\alpha-b\gamma) = 0 \\ &\eta^2ng/k+\sigma^2ps/l-(\theta+r)s+b\lambda = 0 \\ &\eta^2g^2/2k+\sigma^2s^2/2l+rf = 0 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

である。これらから、それぞれのパラメターの値は次のとおりでなければならない（数字注４）。

$$\left.\begin{aligned} &m = k\{(\delta+r/2)\pm[(\delta+r/2)^2+3a\beta\eta^2/k]^{1/2}\}/3\eta^2 \\ &n = 0 \\ &p = 1\{(\theta+r/2)\pm[(\delta+r/2)^2+3b\mu\sigma^2/l]^{1/2}\}/3\sigma^2 \\ &g = -(a\alpha-b\gamma)/[\eta^2m/k-(\delta+r)] \\ &s = -b\lambda/[\sigma^2p/l-(\theta+r)] \\ &f = -(\eta^2g^2/2k+\sigma^2s^2/2l)/r \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

このようにしてＨＪＢ方程式(28)あるいは(30)を満たす４通りのパラメターとそれらに対応する価値関数がそれぞれの企業について得られる。

そこで技術差x, yの安定な経路について調べる。上に得られた価値関数のパラメターの組を(33)に代入するとＲ＆Ｄ投資の線型フィードバック戦略が得られ、それらの結果を(5)に代入すると

$$\dot{x} = (2\eta^2m/k-\delta)x, \quad \dot{y} = (2\sigma^2p/l-\theta)y$$

となる。したがって

$$x = x_0\,exp[(2\eta^2m/k-\delta)t], \quad y = y_0\,exp[2\sigma^2p/l-\theta)t]$$

が得られる。これらが安定な技術差の経路である条件は

$$2\eta^2m/k-\delta < 0, \quad 2\sigma^2p/l-\theta < 0$$

である。これらを満たすパラメターの値は

$$\left.\begin{aligned} m^* &= k\{(\delta+r/2)-[(\delta+r/2)^2+3a\beta\eta^2/k]^{1/2}\}/3\eta^2 \\ p^* &= l\{(\theta+r/2)-[(\theta+r/2)^2+3b\mu\sigma^2/l]^{1/2}\}/3\sigma^2 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

である（数学注５）。これらに対応する技術差の安定経路は

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^* &= (2\eta^2 m^*/k-\delta)x^* \\ \dot{y}^* &= (2\sigma^2 p^*/l-\theta)y^* \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

より

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x_0\, exp[(2\eta^2 m^*/k-\delta)t] \\ y^* &= y_0\, exp[(2\sigma^2 p^*/l-\theta)t] \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

となる。そしてこれらの技術差の組に対応するフィードバックＲ＆Ｄ投資戦略は(33)から

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \eta(m^*x+g^*)/k, \quad & v_1^* &= \sigma(p^*y+s^*)/l \\ u_2^* &= -\eta(m^*x-g^*)/k, \quad & v_2^* &= -\sigma(p^*y-s^*)/l \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

のように得られる。ここで

$$\left.\begin{aligned} g^* &= -(a\alpha-b\gamma)/[\eta^2 m^*/k-(\delta+r)] \\ s^* &= -b\lambda/[\sigma^2 p^*/l-(\theta+r)] \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

である。

次にこれらのパラメーターの値に対するフィードバックＲ＆Ｄ戦略の組(39)がナッシュ均衡であることを確認する。そのためにはたとえば企業 i の戦略（u_i^*, v_i^*）が、ライバルの戦略（u_j^*, v_j^*）に対して最適であることを示さなければならない。

まず企業１については企業２の戦略が

$$u_2^* = -\eta(m^*x-g^*)/k, \quad v_2^* = -\sigma(p^*y-s^*)/l$$

であるとき

$$J_1 = \int_0^\infty (\Pi_1 - E_1)\, exp(-rt)dt \quad (41)$$

を

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \eta[u_1+\eta(m^*x-g^*)/k]-\delta x, \quad & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= \sigma[v_1+\sigma(p^*y-s^*)/l]-\theta y, \quad & y(0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

の下で最大にするようなＲ＆Ｄ投資戦略が選ばれなければならない。なお(41)において

$$\Pi_1 = (a\alpha-b\gamma)x-a\beta x^2/2+b\lambda y-b\mu y^2/2$$

であり、E_1 は(4)に与えられている。またパラメーターの値は(36)、(40)に与えられている。

そこで企業１に関するＣＶＨを K_{1f} で表すと

$$K_{1f} = (a\alpha - b\gamma)x - a\beta x^2/2 + b\lambda y - b\mu y^2/2 - (ku_1^2 + lv_1^2)/2$$
$$+ \upsilon_1[\eta(u_1 + \eta(m^* x - g^*)/k) - \delta x]$$
$$+ \phi_1[\sigma(v_1 + \sigma(p^* x - s^*)/l) - \theta y \qquad (43)$$

ここで υ_1, ϕ_1 はそれぞれ x, y に係わる共役変数である。

企業2についても同様に、企業1の戦略

$$u_1^* = \eta(m^* x + g^*)/k, \quad v_1^* = \sigma(p^* y + s^*)/l$$

に対して

$$J_2 = \int_0^\infty [\Pi_2 - E_2] exp(-rt) dt \qquad (44)$$

を

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \eta[\eta(m^* x + g^*)/k - u_2] - \delta x, \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y} &= \sigma[\sigma(p^* y + s^*)/l - v_2] - \theta y, \quad y(0) = y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

の下で最大にするように u_2, v_2 が選ばれなければならない。(43)において

$$\Pi_2 = -(a\alpha - b\gamma)x - a\beta x^2/2 - b\lambda y - b\mu y^2/2$$

であり、E_2 は(4)のとおりである。ＣＶＨ K_{2f} は次式によって与えられる。

$$K_{2f} = -(a\alpha - b\gamma)x - a\beta x^2/2 - b\lambda y - b\mu y^2/2 - (ku_2^2 + lv_2^2)/2$$
$$+ \upsilon_2^2[\eta(\eta(m^* x + g^*)/k - u_2) - \delta x$$
$$+ \phi_2[\sigma(\sigma(p^* y + s^*)/l - v_2) - \theta y \qquad (46)$$

ここで υ_2, ϕ_2 は同様に共役変数である。

最適条件は企業1については(42)と

$$\left.\begin{aligned} \partial K_{1f}/\partial u_1 &= -ku_1 + \upsilon_1 \eta = 0 \\ \partial K_{1f}/\partial v_1 &= -lv_1 + \phi_1 \sigma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

$$\dot{\upsilon}_1 = r\upsilon_1 - \partial K_{1f}/\partial x = (\delta + r - \eta^2 m^*/k)\upsilon_1 + a\beta x - (a\alpha - b\gamma) \qquad (48)$$

$$\dot{\phi}_1 = r\phi_1 - \partial K_{1f}/\partial y = (\theta + r - \sigma^2 p^*/l)\phi_1 + b\mu y - b\lambda \qquad (49)$$

であり、企業2については(45)と

$$\left.\begin{aligned} \partial K_{2f}/\partial u_2 &= -ku_2 - \upsilon_2 \eta = 0 \\ \partial K_{2f}/\partial v_2 &= -lv_2 - \phi_2 \sigma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\upsilon}_2 &= r\upsilon_2 - \partial K_{2f}/\partial x = (\delta + r - \eta^2 m^*/k)\upsilon_2 + a\beta x + (a\alpha - b\gamma) \\ \dot{\phi}_2 &= r\phi_2 - \partial K_{2f}/\partial y = (\theta + r - \sigma^2 p^*/l)\phi_2 + b\mu y + b\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

である。

両企業に関するこれらの最適条件から両企業に共通の技術差の最適経路が次のように得られる（数学注６）。

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}-r\dot{x}-[(\delta-\eta^2m^*/k)(\delta+r-\eta^2m^*/k)+a\beta\eta^2/k]x=0\\&\ddot{y}-r\dot{y}-[(\theta-\sigma^2p^*/l)(\theta+r-\sigma^2p^*/l)+b\mu\sigma^2/l]y=0\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

容易にわかるように、安定な技術差の経路(36)または(37)は(52)を満たしている。したがって(38)に示されている（u_1^*, v_1^*）、（u_2^*, v_2^*）はＦＮＥを形成するＲ＆Ｄ投資戦略であり、(36)あるいは(37)はそれらに対応する技術差の経路である。そして投資戦略の差は

$$u_1^*-u_2^*=2\eta m^*x/k,\quad v_1^*-v_2^*=2\sigma p^*y/l$$

である。また技術差の定常値が

$$x^{c^*}=y^{c^*}=0$$

であること、それらに対応するＲ＆Ｄ投資が

$$u_1^{c^*}=u_2^{c^*}=0,\quad v_1^{c^*}=v_2^{c^*}=0$$

であることは容易に判明する。

以上の考察により、今後の分析にとっていくらかの示唆を得たが、この節の議論はモデルを更に簡略化したために企業の技術的特徴が不鮮明になり、ＯＬＮＥについて分析した場合よりも経済的含意の乏しいものとなった。いずれにせよ企業の研究・開発活動は、それ自体として企業の多面的な活動の中で独立した位置を占めるものではないのであるから、複雑に絡み合った様々な活動の一貫として捉えるべきものであり、企業の多面的な活動を包含するモデルの中でとり扱われるべきものである。今後その方向にむかって想を新に考察を進めなければならない。

（数学注１）(9.1)、(9.2)、(10.1)、(10.2)を t について微分して、変形すると

$$\dot{\omega}_1=k\dot{u}_1/\eta,\quad \dot{\omega}_2=-k\dot{u}_2/\eta,\quad \dot{\xi}_1=l\dot{v}_1/\sigma,\quad \dot{\xi}_2=-l\dot{v}_2/\sigma\qquad(\mathrm{M.1})$$

また同様にして(5)から

$$\dot{u}_1-\dot{u}_2=(\ddot{x}+\delta x)/\eta,\quad \dot{v}_1-\dot{v}_2=(\ddot{y}+\theta\dot{y})/\sigma\qquad(\mathrm{M.2})$$

他方(9.1)、(9.2)、(10.1)、(10.2)、(M.1)を(11.1)、(11.2)、(12.1)、(12.2)に代入して（$\dot{u}_1-\dot{u}_2$）、（$\dot{v}_1-\dot{v}_2$）をつくれば

$$k^2(\dot{u}_1-\dot{u}_2)/\eta=k^2(r+\delta)(u_1-u_2)/\eta-k[(a\alpha_1-b\gamma_1)-(a\alpha_2-b\gamma_2)]+ak(\beta_1+\beta_2)x$$
$$l^2(\dot{v}_1-\dot{v}_2)/\sigma=l^2(r+\theta)(v_1-v_2)/\sigma-bl(\lambda_1-\lambda_2)+bl(u_1+u_2)y$$

これに(5)と(M.2)を代入して整理すれば(13)が得られる。

（数学注２）(11.1)、(11.2)、(12.1)、(12.2)において $\dot{\omega}_i=\dot{\xi}_i=0,\ x=x^c,\ y=y^c$ とおくと、定常的均衡における共役変数の値は

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^c &= [(a\alpha_1-b\gamma_1)-a\beta_1x^c]/(r+\delta)\\ \omega_2^c &= -[(a\alpha_2-b\gamma_2)+a\beta_2x^c]/(r+\delta)\\ \xi_1^c &= b(\lambda_1-\mu_1y^c)/(r+\theta)\\ \xi_2^c &= -b(\lambda_2-\mu_2y^c)/(r+\theta)\end{aligned}\right\}\quad \text{(M.3)}$$

さらに(9.1)、(9.2)、(10.1)、(10.2)を代入すると(15)が得られる。

（数学注3）(20)から

$$\dot{x} = z_1h_{11}exp(z_1t)+z_2h_{12}exp(z_2t)$$
$$\ddot{x} = z_1^2h_{11}exp(z_1t)+z_2^2h_{12}exp(z_2t)$$
$$\dot{y} = z_1h_{21}exp(z_1t)+z_2h_{22}exp(z_2t)$$
$$\ddot{y} = z_1^2h_{21}exp(z_1t)+z_2^2h_{22}exp(z_2t)$$

これらと(20)を(13)に代入して得られる結果と(20)において$t=0$として整理すれば

$$[(z_1-r)z_1-A]h_{11}+[(z_2-r)z_2-A]h_{12} = Ax^c-D$$
$$[(z_1-r)z_1-B]h_{21}+[(z_2-r)z_2-B]h_{22} = By^c-E$$
$$h_{11}+h_{12} = x_0-x^c$$
$$h_{21}+h_{22} = y_0-y^c$$

$(z_1-r)z_1=-w_1=B$, $(z_2-r)z_2=-w_2=A$, $x^c=D/A$, $y^c=E/B$ であることに注意すれば、これらから(21)が得られる。

（数学注4）$n=0$ ならば(34)から

$$3\eta^2m^2/2k-(\delta+r/2)m-a\beta/2=0$$
$$3\sigma^2p^2/2l-(\theta+r/2)p-b\mu/2=0$$
$$\eta^2mg/k-(\delta+r)g+(a\alpha-b\gamma)=0$$
$$\sigma^2ps/l-(\theta+r)s+b\lambda=0$$
$$\eta^2g^2/2k+\sigma^2s^2/2l+rf=0$$

が得られる。この最初の2式からそれぞれ独立に(35)の最初と第三番目の式が得られる。上の次の2式にそれらを代入すれば(35)の次の2式が得られ、それらと上の最後の式から(35)の最後の式が得られる。

$n\neq 0$ ならば m と p とは

$$m=k\{(\delta+r/2)\pm[(\delta+r/2)^2-3\eta^2(3\sigma^2n^2/l-a\beta)/k]^{1/2}\}/3\eta^2$$
$$p=l\{(\theta+r/2)\pm[(\theta+r/2)^2-3\sigma^2(3\eta^2n^2/k-b\mu)/l]^{1/2}\}/3\sigma^2$$

でなければならないが、(A.3)、(A.4)、(A.5)により $\delta>\theta$, $a\beta\eta/k>b\mu\sigma/l$ であるから、上の m と p は(34)の第2式から得られる

$$3\eta^2m/k+3\sigma^2p/l-(\delta+\theta+r)=0$$

を成立させず、したがって $n=0$ でなければならない。

（数学注５）

$$2\eta^2 m/k = 2\{(\delta+r/2)+[(\delta+r/2)^2+3a\beta\eta^2/k]^{1/2}\}/3$$

のとき

$$2\eta^2 m/k > 2\{(\delta+r/2)+[\delta+r/2)^2]^{1/2}\}/3 = 2(2\delta+r)/3 = 4\delta/3+2r/3 > \delta$$

また

$$2\eta 2m/k = 2\{(\delta+r/2)-[(\delta+r/2)^2+3a\beta\eta^2/k]^{1/2}\}/3$$

のとき右辺は明らかに負であるから $2\eta^2 m/k < \delta$ である。$2\theta^2 p/l$ についても同様であるから(36)で与えられるパラメターの値が x, y の安定な経路を生み出す。

（数学注６）(42)、(47)から

$$v_1 = k\dot{x}/\eta^2+k(\delta-\eta^2 m^*/k)x/\eta^2+g^*$$

これとこれを t で微分した結果を(48)に代入して整理すると

$$\ddot{x}-r\dot{x}-[(\delta-\eta^2 m^*/k)(\delta+r-\eta^2 m^*/k)+a\beta\eta^2/k]x = \eta^2[(\delta+r-\eta^2 m^*/k)g^*-(a\alpha-b\gamma)]/k \qquad (\mathrm{M.4})$$

同様に(42)、(47)、(49)から

$$\ddot{y}-r\dot{y}-[(\theta-\sigma^2 p^*/l)(\theta+r-\sigma^2 p^*/l)+b\mu\sigma^2/l]y = \sigma^2[(\theta+r-\sigma^2 p^*/l)s^*-b\lambda]/l \qquad (\mathrm{M.5})$$

また企業２について(45)、(50)、(51)から同様に

$$\ddot{x}-r\dot{x}-[(\delta-\eta^2 m^*/k)(\delta+r-\eta^2 m^*/k)+a\beta\eta^2/k]x = -\eta^2[(\delta+r-\eta^2 m^*/k)g^*-(a\alpha-b\delta)]/k \qquad (\mathrm{M.6})$$

$$\ddot{y}-r\dot{y}-[(\theta-\sigma^2 p^*/l)(\theta+r-\sigma^2 p^*/l)+b\mu\sigma^2/l]y = -\sigma^2[(\theta+r-\sigma^2 p^*/l)s^*-b\lambda]/l \qquad (\mathrm{M.7})$$

(39)を用いると、これらの方程式の右辺はすべてゼロであることが判明する。すなわち(M.4)と(M.6)、(M.5)と(M.7)は同じ方程式となり(52)が得られる。

参考文献

[１] Basar, T. & Olsder, G. j., Dynamic Noncooperative Game Theory, Academic Pr., 2nd ed., 1955.

[２] Beath, J., Katsoulacos, Y. & Ulph, D., "Game-Theoretic Approaches to the Modelling of Technologocal Change," in Stoneman, P. (ed), Handbook of the Economicks of Innovation and Technological Change, Blackwell, 1995.

[３] Feichtinger, G. & Jorgensen, S. "Differential Game Models in Managemnt Science," *European Journal of Operational Research,* Vol. 14 (1983).

[４] Flaherty, M. T., "Dynamic Pricing, Barriers to Entry, and Rational Firms," *Journal of*

Economic Theory, Vol. 23 (1980) .

[5] Kamien, M. I. & Schwartz, N. L., Market Structure and Innovation, Cambridge Univ. Pr.,1982.

[6] Mehlmann, A., Applied Differential Games, Plenum Pr., 1988.

[7] Reinganum, J. F., "A Class of Differential Games for Which the Closed-Loop and Open-Loop Nash Equiliblia Coincide," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 36 (1982).

[8] Reinganum, J. F., "A Dynamic Game of R and D : Patent Protection and Competitive Behavior," *Econometrica*, Vol. 50 (1982).

[9] Reynolds, S. S., "Capacity Investment, Preemption and Commitment in an Infinite Horizon Model," *International Economic Review*, Vol. 28 (1987).

[10] Star, A. W. & Ho, Y. C., "Nonzero-Sum Differential Games," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 3 (1969).