



## 新製品の最適受容タイミング： 離散モデルによるアプローチ

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 荒木, 長照 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24729/00001392">https://doi.org/10.24729/00001392</a>

# 新製品の最適受容タイミング —離散モデルによるアプローチ—

荒木長照

事物が人々の間に普及する現象は、社会学におけるコミュニケーションの一つのタイプとして分析が始まった<sup>1)</sup>。この考え方方がマーケティングの分野に導入されるのが1960年代である。導入過程の多くの文献の中でも、特にBass (1969) が重要であろう。彼は消費者が新しい耐久消費財を購入するタイミングを予測するモデルを提示することで、新製品の売り上げの時系列を推計することを試みた。彼のモデルはいわゆる需要に普及(拡散)効果(diffusion effect)が存在するモデルで、一連のモデル分析はマーケティングの分野でも普及理論あるいは普及モデルと呼ばれるようになる。

普及理論は現在の（累積）売上高によって将来の売上を予測しようとするものである。このモデルは売上高予測のいわばマクロモデルであって、新製品を受容（購入）する個人（消費者や企業）の選択的な行動を明示的に考慮したミクロモデルではない。この分析的すき間を埋めるべく、売上高予測のためのミクロ理論、すなわち個人レベルでの受容意思決定を分析したDiffusion理論のマイクロファンデーションモデルが登場することになった。たとえば、Chatterjee and Eliashberg (1990)、Jensen (1982) やStoneman (1981) などがそれである<sup>2)</sup>。これらのモデルは、価格（費用）は直接的に確率的変動の影響を受けない状況の下で新製品や新技术の性能（品質）に関する情報を観測し受容を決定するという設定になっている。

1) Rogers (1971) 参照。

2) これ以外にも複数の貢献が存在する。それらの文献に関してはMahajan, Muller and Bass (1993) を参照。

この論文では、現代の流通で重要な位置を占めると思われる耐久消費財を対象にし、これまで議論されてこなかった不確実性を伴う価格に関する情報を観測することで耐久財を受容（購入）する消費者の最適なタイミングを離散モデルを使って分析する。ただし、品質に関しては先行研究とは逆に、すでに探索は終了していて所与であるものと考えることにする<sup>3)</sup>。これは、品質に関して完全情報の仮定をおくことに等しい。

以下の構成は次のとおりである。§ 1 では耐久消費財の価格過程をモデル化する。§ 2 では、仮定された価格の確率過程を前提に有限期間の離散的な最適停止モデルとして受容決定を定式化し、最適な受容タイミングを導出する。§ 3 では同じモデルの計画期間を無限大に拡張したモデルの最適な受容タイミングを導出する。§ 4 は得られら二つの解とパラメータの関係を考察する。§ 5 は有限期間モデルを用いて平均受容時刻を求め解の性質を実験的に考察する。§ 6 は無限期間モデルの解を利用して、異なる効用水準を持つ消費者に関して集計化を行い、新製品投入後まもなく受容行動を起こすイノベータの割合を求めその性質を考察する。

## § 1 価格過程

耐久財の市場価格は新製品として投入されてから、一般的に徐々に下落する<sup>4)</sup>ことが観測されている。この現象を理論的に説明する目的の文献が多数存在する。たとえば、Robinson and Lakhani (1975)、Dolan and Jeuland (1981)、Kalish(1983)、Horsky(1990)、Bass and Bultez(1982)、Bensanko and Winston(1990)、Eliashberg and Jeuland(1986)、Bayus(1992)、Levunthal and Purohit (1989) などである。本論はこの現象を説明することが目的ではないので、これ以上この問題には立ち入らない。むしろ耐久財価格が時間とともに

---

3) 価格と品質の両方を情報として利用した受容決定モデルは荒木 (1998) を参照。

4) Bayus (1992)、古川 (1997) 参照。

に下落するという経験的事実を所与の前提として議論を始める。

この前提に立って議論を始めるには価格の下落現象をモデル化する必要がある。そこで、 $t$ 時点での財の価格は、確率的に非増加の経路をたどるものとし、次の確率過程に従うものと仮定する。

$$(1.1) \quad p_t = (1 - \lambda_t) p_{t-1}, \quad p_0 > 0$$

ここで、 $\lambda = (\lambda_t)$  は独立なランダムな系列であり、所与の値 $\alpha$ とゼロの二つの値だけをとるものとする。ただし、 $1 > \alpha > 0$ と仮定する。すなわち、

$$(1.2) \quad \lambda_t = \begin{cases} 0 \\ \alpha \end{cases}$$

である。これは、計算機を用いた確率過程のシミュレーションでよく用いられる二項（格子点）モデルと呼ばれる離散確率モデルの一例である。（1.1）に従う価格の見本過程は時間に関して非増加の階段状グラフを持つ。このような価格の経路は、例えばパーソナルコンピュータの様な製品のライフサイクルの短い耐久消費財の店頭価格の経路を抽象化したものである。

さて、（1.2）による確率変数は何らかの可測空間  $(\Omega, \mathcal{F})$  で定義されていると考えれば、確率空間  $\Omega$  として、系列  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  の実現値による空間を考えることができる。つまり、 $\Omega = \{0, \alpha\}^N$  と表現することができる。さて、確率測度  $\mathbf{P}$  の族  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$  は可測空間の中に与えられており、任意の測度  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$  に対して、確率変数の系列  $\lambda = (\lambda_t)$  は次のような独立で同一の分布に従う確率変数であると仮定する。

$$(1.3) \quad q = \mathbf{P}(\lambda_t = \alpha) \quad 1 - q = \mathbf{P}(\lambda_t = 0)$$

仮定（1.3）の下で定義されたマルコフ連鎖  $p = (p_t)_{t \geq 0}$  は、初期条件を  $p_0 = p$  として、集合  $E = \{p(1 - \alpha)^k, k = 0, +1, \dots\}$  上で値をとる確率過程であるといえる。

この価格モデルの  $p = p_{t-1}$  の条件付きの時刻  $t$  での期待値  $m$  と分散  $\sigma^2$  は次のようになる。

$$(1.4) \quad m = (1 - \alpha q) p$$

$$(1.5) \quad \sigma^2 = (1 - q) q \alpha^2 p^2$$

## § 2 離散的有限期間モデル

ある消費者がある耐久消費財を 1 単位だけ受容（購入）する状況を考える。このとき彼には二つの選択が許されているであろう。一つは耐久財を受容せずに、受容していれば享受することができたであろうなんらかの効用を諦めることである。もちろんこれは、より低い価格で受容したほうが、彼の純効用がより改善されるであろうという予測から合理的に判断された結果であるはずである。

この消費者は購入を諦めることによって、一期間につき一定値  $\mu \geq 0$  だけの機会不効用をこうむるものと仮定する。彼に許されたもう一つの選択は言うまでもなく財を受容することである。財を受容する時刻を  $\tau$  で表すと、彼は受容することによって  $p_\tau$  だけの支払を要することになる。一方、彼はいったん耐久財を受容すれば、それを用いることによって何らかの効用を享受し続けることができる。しかし効用を享受し続けるためには、何らかのメンテナンス費用の支出が必要であるかもしれない。そこでメンテナンス費用を差し引いたネットの効用の将来にわたる流列の受容時点での現在総価値を定数  $u_0$  で表すこととする<sup>5)</sup>。

当該耐久消費財が取引される市場は離散時間で開かれているものとする。考察する代表的消費者は財の品質の真の状態を、財が市場に投入された時点  $t=0$  で何ら不確実性なく理解しているものとする。この時点から市場に参加し、 $t=$

---

5) 受容による効用が定数であるという仮定は、かなり強い仮定である。しかし、受容を決定した財の品質に関する期待効用の形をとるモデルを考えることで緩和される。このモデルについては荒木（1998）を参照。

$N$ 時点までにこの財を購入する。 $t=N$ 時点までに購入できなかった場合は、 $t=N$ 時点の価格で購入するものと仮定する。したがって適当な価格プロセス  $p_t$  上でのこの個人の目的関数は、割引因子を  $\beta$  として、次のように表される。

$$(2.1) \quad J_0(p_0) = \max_{\tau \leq N} E_{p_0} \left( \beta^\tau (u_0 - p_\tau) - \sum_{t=0}^{\tau-1} \beta^t \mu \right)$$

ただし、 $E_{p_0}$  は  $p_0$  の条件付き期待値オペレータを表す。

パラメータに関して次を関係を仮定する。

$$(2.2) \quad 0 < \beta \leq 1, 0 < \alpha < 1, 0 < q \leq 1, \mu \geq 0 \text{ ただし、} \\ \beta = 1 \text{ と } \mu = 0 \text{ とは同時に成立しない。}$$

$$(2.3) \quad \alpha q \beta u_0 > \mu$$

(2.2) における  $\beta = 1$  と  $\mu = 0$  の関係は受容を延期する魅力が過大にすぎないための仮定ということができる。一方、(2.3) の意味するところは次のように述べることができる。(2.3) の左辺は、現在の価格が  $p = u_0$  (つまり今期の消費者余剰がゼロ) であったとして、もう一期製品の受容を延期することで価格の下落によってさらに手に入れることができる価格で評価した効用の期待現在価値である。これは受容しないことによる機会効用と言い換えることができる。一方、右辺は今期受容しないときに被る機会不効用である。したがって、不等式 (2.3) は価格が極めて高い水準 ( $p = u_0$ ) では受容を待つことに十分理由があることを述べているといふことができる。

問題 (1.1) (2.1) は数学的には有限期間の最適停止問題と考えることができる。ここで、 $J_t(p_t)$  を価格  $p_t$  を観測したときの  $t$  時点での価値関数とする。つまり  $t$  時点で価格  $p_t$  を観測したときから考え始めたときの消費者余剰の現在価値である。また、 $u_0 > p_0$  なる価格を初期価格  $p_0$  とおくと、Shiryae (1973) Ch2., Bertsekas (1976) Ch.3によると、DPの手法によって最終期での価値関数は次

のようになる。

$$(2.4) \quad J_N(p_N) = u_0 - p_N$$

この(2.4)式は最終期までに購入していなければ、その時点の価格でかならず購入しなければならないという仮定によるものである。さらに一期さかのぼることによって次の関係を得る。

$$(2.5) \quad J_{N-1}(p_{N-1}) = \max[u_0 - p_{N-1}, \beta E_{p_{N-1}}(J_N(p_N)) - \mu]$$

ただし(2.5)式の期待値は $p_{N-1}$ の条件付き期待値である。このときの受容を決定すべき価格（これを単に閾値と呼ぶことにする） $\xi_{N-1}$ は

$$(2.6) \quad \xi_{N-1} = \{p_{N-1} \in E \mid u_0 - p_{N-1} = \beta E_{p_{N-1}}(J_N(p_N)) - \mu\}$$

でえられる。(2.6)の表現は集合のそれであるが、明らかにこれは一意的なある値である。

以下同様にして一般の $p_t \in E$ について、

$$(2.7) \quad J_t(p_t) = \max[u_0 - p_t, \beta E_{p_t}(J_{t+1}(p_{t+1})) - \mu]$$

$$(2.8) \quad \xi = \{p_t \mid u_0 - p_t = \beta E_{p_t}(J_{t+1}(p_{t+1})) - \mu\}$$

をえる。DP方程式であるから、以下バックワードに解を求めることができる。

さて、わざわざ上で定義した値(2.6)および(2.8)であるが、これらは空である可能性が高い。つまりそれぞれの条件を満たす価格が実数の範囲ではおそらく存在するものの、 $p_t \in E$ の範囲にちょうどそれが収まるかどうか疑わしいということを意味する。そこでまず集合 $E$ を含む適當な大きさの実数の集合

上で近似解を求める、それを用いて厳密解を定義する。

(2.4) および (2.6) より、 $\xi_{N-1} \in R_+$ について、

$$\begin{aligned} u_0 - \xi_{N-1} &= \beta E(J_N(p_N) \mid \xi_{N-1}) - \mu \\ &= \beta \{ u_0 - (1-q)\xi_{N-1} - q(1-\alpha)\xi_{N-1} \} - \mu \end{aligned}$$

であるから、 $t=N-1$ における近似的な最適受容価格（閾値）は

$$(2.9) \quad \xi_{N-1} = \frac{\mu + (1-\beta)u_0}{1-\beta(1-\alpha q)}$$

となる（図1参照）。

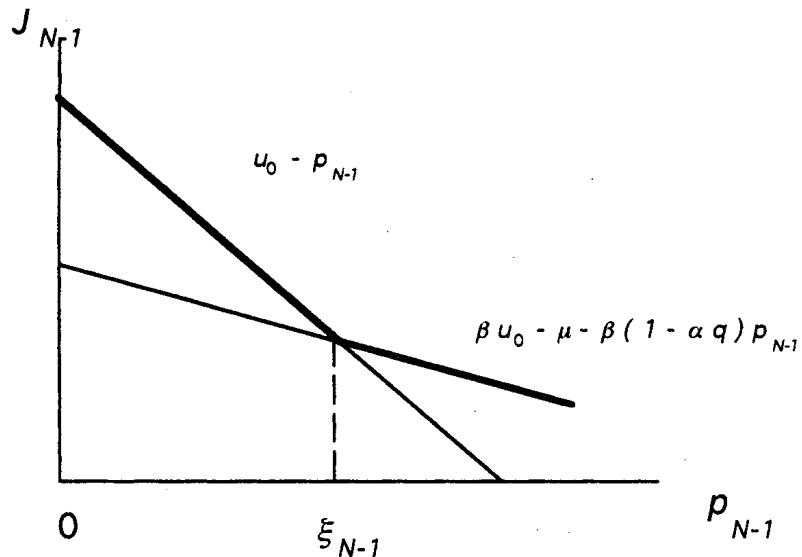


図1

さて、 $t=N-1$ の近似解 (2.9) は  $p \in R_+$  の解であるから、これをもとに  $p \in E$  での閾値、つまり厳密解を求めるにしよう。近似的閾値  $\xi$  に対応する時刻  $\tau$  は確率変数であるから具体的に求めることはできない。しかし、確率プロセス (1.1) による見本過程は時間に関して階段状の非増加のグラフを持つ。したがって、近似的閾値  $\xi$  に対応する時刻  $\tau$  は前もってわからないが、閾値に至るまでに何度価格が階段状のグラフ上を減少しなければならないかは計算すること

ができる。すなわち、初期価格から始まって、閾値に到着するまでに価格過程は、

$$(2.10) \quad x = \log_{1-a} \left( \frac{\xi}{p_0} \right)$$

なる理論的ステップ数だけ下方に減少すればよい。もちろん実際のステップ数は整数でなければならない。もし、理論的ステップ数  $x$  が整数であれば厳密解は近似解に一致する（図 2）。しかしこれが整数でなければ、確率過程（1.1）によって変化する価格が達する閾値が集合  $E$  に属していないことを意味する。この場合には理論的ステップ数の整数部分の値に 1 ステップだけ足してこれをステップ数とすればよい（図 3）。その上で、（2.1）にしたがってこのステップ数だけ価格を減少させたものを厳密解の閾値とすればよいだろう。もし理論的ステップ数が整数でないときに、その整数部分だけでもって同様に厳密解の閾値とすれば、このことは価格が停止領域にまだ入っていないときに受容するということを意味する。これは明らかに最適ではない。

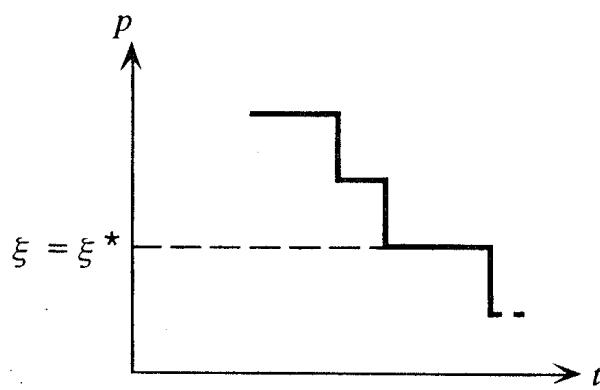


図 2

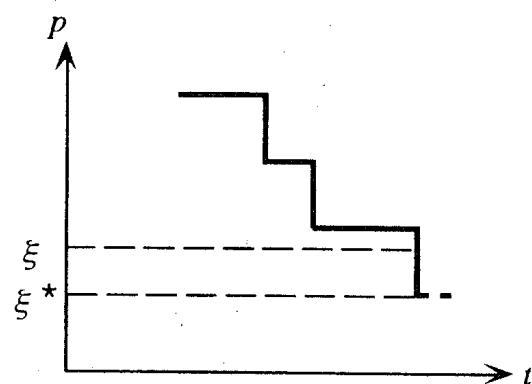


図 3

厳密解を形式的に表すために、記号  $[x]$  はガウス記号で実数  $x$  の整数部分を表すものと約束しておく。また、 $\rho = [x] + 1 - x$  と定義すると、以上の議論から  $t = N - 1$  の厳密解は次のように表現することができる。

$$(2.11) \quad \xi^*_{N-1} = \begin{cases} \xi_{N-1} & \rho = 1 \\ (1-\alpha)^{[x]+1} p_0 & \rho < 1 \end{cases}$$

このモデルでは単純な確率過程 (1.1) を仮定しているので、期中の任意の時間についても一般的な閾値に関する解析解を見つけることができる。結果は次の命題 1 として与える。

### 命題1

(2.2) および (2.3) の下で、任意の時間  $0 \leq t \leq N - 1$  について、(1.1) (2.1) の有限期間問題の近似解は次の価格水準である。

$$\xi = \frac{\mu + (1-\beta) u_0}{1 - \beta (1 - \alpha q)}$$

また同様の厳密解は、

$$\xi^* = \begin{cases} \xi & \rho = 1 \\ (1-\alpha)^{[x]+1} p_0 & \rho < 1 \end{cases}$$

である。ただし、 $x = \log_{1-\alpha} \left( \frac{\xi}{p_0} \right)$ 、 $\rho = [x] + 1 - x$  とする。

### 証明

帰納法によって証明する。まず  $t = N - 2$  に関して実際に (2.7) 式を計算してみよう。すると、

(2.12)

$$\begin{aligned} J_{N-2}(p_{N-2}) \\ = \max[u_0 - p_{N-2}, \beta E(J_{N-1}(p_{N-1}) \mid p_{N-2}) - \mu] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max[u_0 - p_{N-2}, \beta\{(1-q)J_{N-1}(p_{N-2}) + qJ_{N-1}((1-\alpha)p_{N-2})\} - \mu] \\
&= \max[u_0 - p_{N-2}, \beta\{(1-q)\max[u_0 - p_{N-2}, \beta(u_0 - (1-\alpha q)p_{N-2}) - \mu] + q\max[u_0 - (1-\alpha)p_{N-2}, \beta(u_0 - (1-\alpha)(1-\alpha q)p_{N-2}) - \mu]\} - \mu]
\end{aligned}$$

をえる。

$p_{N-2} = \xi_{N-1}$  を (2.12) 式に代入すると、

(2.13)

$$\begin{aligned}
&J_{N-2}(\xi_{N-1}) \\
&= \max[u_0 - \xi_{N-1}, \beta E(J_{N-1}(p_{N-1}) \mid \xi_{N-1}) - \mu] \\
&= \max[u_0 - \xi_{N-1}, \beta\{(1-q)(u_0 - \xi_{N-1}) + q(u_0 - (1-\alpha)\xi_{N-1})\} - \mu] \\
&= \max\left[\frac{\alpha q \beta u_0 - \mu}{1 - \beta(1 - \alpha q)}, \frac{\alpha q \beta u_0 - \mu}{1 - \beta(1 - \alpha q)}\right]
\end{aligned}$$

となり、(2.3) から (2.13) は正値となり意味を持ち、しかも  $\xi_{N-1}$  は  $t=N-2$  での閾値の条件を満たす。つまり、(2.8) より (2.13) 式において、

(2.14)  $u_0 - \xi_{N-1} = \beta E(J_{N-1}(p_{N-1}) \mid \xi_{N-1}) - \mu$

が成り立つ。したがって、

$$(2.15) \quad \xi_{N-1} = \frac{\mu + (1-\beta)u_0}{1 - \beta(1 - \alpha q)} = \xi_{N-2}$$

をえる。一方、(2.12) より明らかに閾値は一意的に決定されるので、(2.15) 以外に (2.14) 式が成立する閾値が存在しないのは明らかである。よって、 $t=N-2$  の場合命題が成立する。

次に、一般の場合として  $t=s$  として、このときに命題の主張が成立すると仮定する。すなわち

$$\xi_s = \frac{\mu + (1-\beta)u_0}{1-\beta(1-\alpha q)}$$

を仮定する。このとき、

$$J_{s-1}(p_{s-1}) = \max[u_0 - p_{s-1}, \beta E(J_s(p_s) \mid p_{s-1}) - \mu]$$

であるから、 $t=N-2$ の場合と同様にして $p_{s-1}=\xi_s$ で評価すると、

$$J_{s-1}(\xi_s) = \max[u_0 - \xi_s, \beta E(J_s(p_s) \mid \xi_s) - \mu]$$

をえる。ここで、関数 $G(x)$ を、

$$G(x) = \beta\{(1-q)J_{s+1}(x) + qJ_{s+1}((1-\alpha)x)\} - \mu$$

とおくと、

$$\begin{aligned} & \max[u_0 - \xi_s, \beta E(J_s(p_s) \mid \xi_s) - \mu] \\ &= \max[u_0 - \xi_s, \beta(1-q)J_s(\xi_s) + \beta q J_s((1-\alpha)\xi_s) - \mu] \\ &= \max[u_0 - \xi_s, \beta(1-q)\max[u_0 - \xi_s, G(\xi_s)] + \\ & \quad \beta q \max[u_0 - (1-\alpha)\xi_s, G((1-\alpha)\xi_s)] - \mu] \end{aligned}$$

となる。

まず、仮定から $u_0 - \xi_s = G(\xi_s)$ が成立する。次に、DPのアルゴリズムから、  
 $0 < p \leq \xi_s$ について $u_0 - p \geq G(p)$ が成り立つ。 $(1-\alpha) \xi_s < \xi_s$ であるから、

$$u_0 - (1-\alpha)\xi_s \geq G((1-\alpha)\xi_s)$$

となり、先の結果と合わせると、結局、

$$J_{s-1}(\xi_s) = \max[u_0 - \xi_s, \beta \{ (1-q)(u_0 - \xi_s) + q(u_0 - (1-\alpha)\xi_s) \} - \mu]$$

をえる。よって、 $t=N-2$ の場合と同様にして、

$$(2.16) \quad \xi_s = \frac{\mu + (1-\beta) u_0}{1 - \beta(1-\alpha q)} = \xi_{s-1}$$

となる。ところで、DPのアルゴリズムから価値関数は価格についてのアフィン型の関数を区別的に張りあわせた関数である。また閾値はその価値関数が停止利得関数<sub>0</sub>-pと初めて交わる点で決まるので、閾値は各期について一意に定まる。したがって、(2.16)以外に $t=s-1$ のときの閾値は存在しないことは明らかである。

以上から、すべての期間tに対して

$$\xi_t = \frac{\mu + (1-\beta) u_0}{1 - \beta(1-\alpha q)} = \xi$$

が成り立つ。厳密解に関しては (2.11) によって導きだせる。

証明終わり

命題1から最適な受容タイミングは時間から独立で一定の値をとることがわかった。この性質は価格が非増加な確率過程にしたがうという仮定によるものと考えられる。

また、命題1およびShiryae (1973) Ch.2 Bertsekas (1976) Ch.3より、 $\xi^*$ を観測した最初の時刻に受容を決定するのが最適解であることになる。さらに、厳密解を利用すると受容を見送り価格を観察し続けるべき継続領域C\*は、

$$(2.17) \quad C^* = (\xi^*, p_0]$$

と表現することができる。

### § 3 離散的無限期間モデル

前節においては最適な耐久消費財の受容タイミング決定モデルを有限期間で議論した。無限期間モデルは有限期間での停止問題の一般化と通常考えられており、数学的に興味のある問題である。そこでこの節では前節のモデルを無限期間に拡張し、最適解を求める。モデルの設定は期間の長さとパラメータに関する仮定以外はすべて同じとし、解の導出から議論を始める。

前節のモデルで  $N = \infty$  の場合を考えればよいが、このような場合は Siryaev (1973) Ch.2 Bertsekas (1976) Ch.6, 7 によると、観測された価格  $p \in E$  に対して、

$$(3.1) \quad J(p) = \max[u_0 - p, \beta E_p(J(p')) - \mu]$$

なるDP方程式を考えなければならない。そして、Markov時刻

$$(3.2) \quad \tau = \inf\{t : J(p_t) = u_0 - p_t\}$$

が  $\mathbf{P}(\tau < \infty \mid p) = 1$ ,  $p \in E$  の条件のもとで最適となる。

ここで  $p_\tau = \xi$  と定義すると、通常の最適停止の議論により、継続領域は

$$(3.3) \quad C = \{p : p \in (\xi, p_0]\}$$

と表すことができる。 $\xi$  をここでも閾値と呼ぶことにする。

さて、(3.1) を解く前にパラメータに関して次の仮定をおく。

$$(3.4) \quad 0 < \beta \leq 1, 0 < \alpha < 1, 0 < q \leq 1, \mu \geq 0 \text{ ただし、} \\ \beta = 1 \text{ と } \mu = 0 \text{ とは同時に成立しない。}$$

この仮定によると、割引因子は  $0 < \beta \leq 1$  であるが、 $\beta = 1$  の場合には方程式(3.1)が退化してしまうので、まずははじめに、将来効用の割引が行われない  $\beta = 1$  の場合について考察する。続いて  $0 < \beta < 1$  のケースを考察する。いずれの場合も近似解を求める。厳密解は Shiryaev, Kabanov, Kramkov and Mel'nikov (1994) を参照のこと。

$\beta = 1$  の場合

この場合DP方程式としては次の (3.5) を考えればよい。

$$(3.5) \quad J(p) = \max [u_0 - p, E_p(J(p')) - \mu]$$

ここで、現在価格が受容せず観測すべき水準である継続領域に含まれる、すなわち  $p \in C$  と仮定すると、

$$(3.6) \quad E_p(J(p')) - \mu \geq u_0 - p$$

が成り立つ。したがって、方程式 (3.5) の  $J(p)$  は、

$$(3.7) \quad u((1-\alpha)p) - u(p) = \frac{\mu}{q}$$

から得られる。(3.7) を満たす解  $u(p)$  は次の形で求めることができる。

$$(3.8) \quad u(p) = c_1 \log(p) + c_2$$

実際に、(3.8) を (3.7) に代入して係数比較を行うと、

$$(3.9) \quad c_1 = \frac{\mu}{q \log(1 - \alpha)}$$

をえる。さらにvalue-matching条件、

$$(3.10) \quad u(\xi) = u_0 - \xi$$

とsmooth-pasting<sup>6)</sup>条件、

$$(3.11) \quad \left. \frac{du}{dp} \right|_{p=\xi} = -1$$

とにより、次式をえる<sup>7)</sup>。

$$(3.12) \quad u(p) = \frac{\mu}{q \log(1 - \alpha)} \left\{ \log(p) - \log \left( -\frac{\mu}{q \log(1 - \alpha)} \right) + 1 \right\} + u_0$$

$$(3.13) \quad \xi = -\frac{\mu}{q \log(1 - \alpha)}$$

(3.13) 式の特徴は閾値が受容することで得られる効用から独立で、もっぱら価格の経路と機会不効用とで決定される点である。

$\beta < 1$ の場合

同様に  $p \in C$  を仮定すると (3.1) より、価値関数は

$$(3.14) \quad u(p) = \beta [ (1 - q) u(p) + q u((1 - \alpha)p) ] - \mu$$

6) value-matching条件は単位に (3.2) を言い換えたに過ぎない。smooth-pasting条件は最適停止問題での常套手段である。詳しくはShiryayev (1973) ch3 § 6 を参照。

7) value-matching条件とsmooth-pasting条件を離散モデルで用いるという発想は Shiryaev, Kabanov, Kramkov and Mel'nikov (1994) による。

から得られる。この場合には、

$$(3.15) \quad u(p) = c_1 p^\gamma + c_2$$

とおいて係数比較を行う。すると、

$$(3.16) \quad c_2 = \frac{-\mu}{1-\beta} < 0$$

$$(3.17) \quad \gamma = \log_{1-\alpha} \left( \frac{1-\beta(1-q)}{\beta q} \right) < 0$$

をえる。さらに、value-matching条件およびsmooth-pasting条件より、

$$(3.18) \quad \xi = \frac{\gamma}{\gamma-1} (u_0 - c_2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( u_0 + \frac{\mu}{1-\beta} \right) > 0$$

$$(3.19) \quad c_1 = \frac{-1}{\gamma} \xi^{1-\gamma} > 0$$

をえる。

これで問題は完全に解けたことになる。以上から次の命題をえる。

## 命題2

無限期間の最適受容問題の近似的な閾値は、(3.4) の下で、

$\beta=1$ の場合、

$$\xi = -\frac{\mu}{q \log(1-\alpha)}$$

$\beta < 1$ の場合、

$$\xi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( u_0 + \frac{\mu}{1-\beta} \right)$$

である。ただし、 $\gamma = \log_{1-\alpha} \left( \frac{1-\beta(1-q)}{\beta q} \right)$  とする。

### § 4 近似解の性質

命題 1において  $\rho=1$  の場合は、パラメータの変化による近似的な閾値の微小な減少は厳密解の減少として現れる。しかし、 $\rho < 1$  の場合には必ずしもそうであるとは限らない。しかし、近似解のパラメータの変化に対応する影響を考察することは、顕在的あるいは潜在的を問わずモデルの性質を理解するうえで必要であり、また実際以下の節においてこの結果を利用する。

そこでまず有限期間モデルの近似解の性質を考察する。命題 1 の近似的な閾値は、各パラメータに関して以下のような性質をもっていることが容易に確かめられる。

まず割引因子に関して微分計算を行うと、

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \begin{cases} > 0 & \cdots \frac{\alpha q}{1-\alpha q} u_0 < \mu \\ < 0 & \cdots \frac{\alpha q}{1-\alpha q} u_0 > \mu \end{cases}$$

となる。ところが、パラメータに関する仮定 (2.3) から、この関係のうち第二の不等式しか成立しえないので、結局、

$$(4.1) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \beta} < 0$$

となる。それ以外の関係は次のとおりである。

$$(4.2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_0} > 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial q} < 0$$

これらの結果はそれぞれ次のように解釈することができるだろう。まず (4.1) 式であるが、価格の条件付き期待値が (1.4) より  $E(p_t | p_{t-1}) = (1 - \alpha q)p_{t-1}$  であることに留意すると、仮定 (2.3) から、来期の価格は十分下落すると予想さ

れるので、将来を大きく評価すればそれだけ低い価格で受容することのほうが好ましくなる。つまり価格の下落が大きいと予想されるので、受容による将来余剰を大きく評価できれば今しばらく価格を観測し、低い価格で受容したほうがいいだろうということを意味している。

次に(4.2)について順番に考えてみる。一番目の不等式は、受容による効用が大きければ、価格が高い水準にあっても受容できることを意味している。二番目の不等式によると、受容しないことによる機会費用が大きくなれば価格の下落を待つより、高い価格で受容するほうが好ましいことになる。両者は同じような効果をもつことになるが、これらは常識と一致すると言えるだろう。

最後の二つの不等式は、価格下落の確率が大きくしかも下落しやすければ、価格下落の期待が高まり価格を観測するインセンティブが強まる。それだけ閾値が小さくなると解釈することができる。

次に無限期間モデルのパラメータと近似的な閾値との関係を調べる。まず $\beta=1$ の場合である。すでに述べたように、このケースに特徴的なことは受容による効用に閾値が依存しない点である。さらに、それぞれの性質は以下の通りである。

$$(4.3) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial q} < 0$$

となる。(4.3)の一番目の不等式は、受容しないことによる不効用が増加すると高い価格でも受容するほうが有利であるということを意味している。また、二番目および三番目の不等式は、価格の下落が著しいという状況では受容を手控え、もう少し低い価格まで観測しようというインセンティブが働くということを意味している。有限期間モデルと同様の結果である。

次に $\beta < 1$ の場合である。まず割引因子と閾値の関係について調べてみる。有限期間モデルでのこの関係は確率測度を規定するパラメータの大きさに依存して偏微係数の符号が決まった。結果的には仮定(2.3)によって結論は一つになっ

たが、このケースの場合、パラメータの大きさによって結果の符号が変化する。閾値を偏微分したものは次のように変形できる。

$$(4.4) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \frac{-\mu A^2}{(\gamma-1)^2(1-\beta)^2} \frac{1}{\log(1-\alpha)} \times \left[ C - \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right]$$

ただし、

$$A = \log\left(\frac{1-\beta(1-q)}{\beta q}\right) \quad B = \frac{-1}{\beta\{1-\beta(1-q)\}}$$

$$C = \frac{\mu A + (\mu(1-\beta) + u_0(1-\beta)^2)B}{\mu A^2}$$

である。(4.4)式の符号は同式の大括弧の中の二つの項の差だけできる。そこでパラメータ  $\alpha$  の集合  $\Phi$  を、

$$\Phi = \left\{ \alpha \mid C > \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right\}$$

とおくと、(4.4)の符号に関して定量的に次のようにいいうことができる。

$$(4.10) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \begin{cases} > 0 & \alpha \in \Phi \\ < 0 & \alpha \notin \Phi \end{cases}$$

その他のパラメータに関しては次のとおりである。

$$(4.11) \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_0} > 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial q} < 0$$

(4.10)式において、 $C < 0$  のとき  $\alpha \notin \Phi$  なる  $\alpha$  は相対的に大きい値をとるということを意味しているので、価格下落の期待が大きいときには、将来の期待余剰が大きければ低い価格で受容したほうがよいということになる。(4.11)の結果は有限期間モデルと全く同じである。

## § 5 平均受容時刻

この節では有限期間モデルを用いて平均受容時刻を求め、厳密解の統計的性質を数値実験によって考察しよう。これまでに、最適なタイミングを受容すべき価格という代理変数で議論してきた。最適停止の分野でこのような手法は通常おこなわれていることである。しかし、平均受容時刻という統計量を導きだせるのであれば、より直観的に受容タイミングの性質を理解することができることを意味するので、大変都合がよい。このためには閾値の変化が平均受容時刻にどのような効果をもたらすかをまず明らかにしなければならない。その上でパラメータと平均受容時刻との関係を考察することにしよう。

さて、価格が下落するという事象を $A$ で表す。さらに $s$ 回目の試行で事象 $A$ が起こったとき $1$ 、 $A$ が起きなかつたときに $0$ の値をとる新たな確率変数を $X_s$ で表すことになると、それぞれの試行は独立であるから確率過程  $\{X_s\}_{s=1,2,\dots}$  は独立である。さらにこれまでの仮定からこれらはすべて同じ確率分布、

$$(5.1) \quad \mathbf{P}(X_s=1)=q, \quad \mathbf{P}(X_s=0)=1-q, \quad s=1, 2, \dots$$

にしたがうことになる。ここで、 $S_0=0$ ,  $S_t=\sum_{s=1}^t X_s$ ,  $\log_{1-q}\left(\frac{\xi^*}{p_0}\right)\equiv s^*$  とおけば、たとえば $N-1$ 期までに価格が閾値の水準に到達している確率は、 $\sum_{r=s}^{N-1} \mathbf{P}(S_{N-1}=r)$  となる。この確率 $\mathbf{P}$ は単純な二項分布で表現できる。すなわち、

$$(5.2) \quad \mathbf{P}(S_{N-1}=r)=\frac{(N-1)!}{(r)!(N-1-r)!} q^r (1-q)^{N-1-r}$$

である。

さて、閾値が $k$ のときの平均受容時刻を $E(T_k)$ で表す。 $E(T_k)$ を求めるために次のことを考慮する必要がある。まず、 $N-1$ 期までに価格が閾値の水準まで下落していなければ次の最終期 $N$ で受容するという仮定がおかれていているという

こと。もう一つは、たとえば、 $s^* + r$ 期で初めて閾値に価格が到達する事象は、 $s^* + r - 1$ 期で閾値の1つ手前に達していなければならないということである。これらを考慮すると平均受容時刻は次のようになる。

$$(5.3) \quad E(T_{\xi^*}) = \sum_{r=0}^{N-1-s^*} (s^* + r) P(S_{s^*+r-1} = s^* - 1) q + N \sum_{k=0}^{s^*-1} P(S_{N-1} = k)$$

なんらかの理由で厳密解の閾値 $\xi^*$ の値が減少し、 $\xi^* - \Delta\xi$ に変化したという状況を想定する。ただし、簡単化のために $\log_{1-a}\left(\frac{\xi^* - \Delta\xi}{p_0}\right) = s^* + 1$ とする。よって、 $E(T_{\xi^*}) - E(T_{\xi^* - \Delta\xi})$ の符号を確かめることで平均受容時刻の性質を考察することができる。しかし、この方程式は階乗を含んでおり、この式の評価は解析的には困難である。したがって、本節では数値計算によって平均受容時刻の性質を明らかにする。

数値計算を行うにあたって、(5.2) および (5.3) 式を用いた場合期間を長く設定したモデルでは計算の途中でオーダが爆発的に増加するため結果を得るのに困難が伴う可能性があると予想できる。そこで期間を極く短い $N=15$ としてこの問題を回避する。また、期間を短くとれどこの問題を回避できないときは、通常は既知の連続な確率分布で二項分布の近似を行い、これでもって性質を明らかにするという手法<sup>8)</sup>、あるいはモンテカルロ法による実験も行われる。そこで、本節でも参考実験として、よく用いられておりまた最も単純である正規分布による近似を用いた数値解析と、モンテカルロ実験とを行う。特に、ここでのモンテカルロ実験は初期価格から出発して乱数によって価格の経路を確率的に発生させ、最初に厳密解の閾値に価格が到達したところでうちきることを一回として、これを10000回繰り返し平均をとるものとする。

実験のために閾値が異なる二つのモデルを用意する。それぞれのパラメータは次のように設定する。

---

8) 例えば、竹内・藤野 (1981) の第5章を参照。

モデル1 :  $N=10, p_0=10, \beta=\frac{1}{1.05}, \alpha=0.1, q=0.2, u_0=10, \mu=0.1$

モデル2 :  $N=10, p_0=10, \beta=\frac{1}{1.03}, \alpha=0.1, q=0.2, u_0=10, \mu=0.1$

これらのモデルに対する、モンテカルロ実験、(5.3)による理論値、さらに正規近似による近似値の結果は表1にまとめた。両モデルのちがいは割引因子の値で、それぞれのパラメータの選び方によって閾値と厳密な閾値、したがって受容価格の水準まで下落するのに必要なステップ数が異なる。モデル1の方がステップ数が小さくなるので、常識的には平均受容時刻はモデル1の方が早くなるはずである。結果はこの常識どおり、モンテカルロ、理論値そして正規近似のいずれにおいてもモデル1の方が受容の平均時刻が早くなっている。つまり、閾値が大きくなればそれだけ平均受容時刻は早くなるということがいえる。また、この結果を見るかぎり、近似としてはモンテカルロの方が正規近似よりもはるかに優れているようである。

実験において閾値を変化させるために割引因子を用いたが、 $q$ を除く他のパラメータを用いても同様の実験を行うことで、各パラメータと平均受容時刻 $E(T_{\xi^*})$ との関係を実験によって明らかにすることもできる。しかし、先の(4.2)の性質を用いても結果を得ることはできる。もちろん、先ほど述べたように各パラメータの変化が $\xi^*$ を増減させるほど大きいという状況を想定する必要がある。このような状況の下で、各パラメータと平均受容時刻との関係をまとめると以下のようになる。

モデル1およびモデル2を用いた数値実験から、平均受容時刻が早くなるのは次の場合である。

1. 将来を小さく評価する場合
2. 受容による効用が大きくなった場合
3. 受容を延期することによる機会不効用が増加した場合
4. 価格の下落が小さいと予想される場合

モデル1の結果  
閾値とステップ数： $\xi = 8.64286$ ,  $\xi^* = 8.1$ ,  $s^* = 2$

平均受容時刻：

	モンテカルロ*	理論値	正規近似
9.027	8.98845	8.39701	

到達確率と到達時刻の積\*\*：

時刻	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
モンテカルロ	0.077	0.192	0.308	0.4025	0.4932	0.5663	0.5648	0.6057	0.589	0.6094	0.5376	0.5369	0.4816	3.063
理論値	0.08	0.192	0.3072	0.4096	0.49152	0.550502	0.587203	0.60398	0.60398	0.590558	0.566936	0.536012	0.500278	2.96868
正規近似	0.053991	0.241099	0.389939	0.483335	0.535237	0.558283	0.561565	0.551448	0.532413	0.50764	0.479401	0.449326	0.41858	2.63475

モデル2の結果

閾値とステップ数： $\xi = 8.06$ ,  $\xi^* = 7.29$ ,  $s^* = 3$

平均受容時刻：

	モンテカルロ*	理論値	正規近似
12.003	11.9983	11.6265	

到達確率と到達時刻の積\*\*：

時刻	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
モンテカルロ	0.0207	0.0708	0.1475	0.2484	0.3696	0.44	0.5409	0.611	0.6413	0.7116	0.7306	0.7686	6.702
理論値	0.024	0.0768	0.1536	0.24576	0.344064	0.440402	0.528482	0.60398	0.664378	0.70867	0.737016	0.750417	6.72076
正規近似	0.00775012	0.0597991	0.161897	0.286492	0.408449	0.513598	0.596258	0.655733	0.693861	0.713559	0.718021	0.710319	6.1008

\*) 実験回数は10000回

\*\*) ウエイトを意味し、これらの値をすべての時刻について足しあわせると平均受容時刻となる。

表 1

## § 6 集計化

本論の冒頭で言及した受容決定モデルは普及理論のミクロ的基礎として発展してきた。つまりそれらの最終的な目的が、消費者個人のレベルの決定を集計化することで市場全体としての販売率、つまり普及曲線や普及率を推定しようとすることがある。本論のモデルは価格による受容決定であり先行研究とはモデルの枠組みが異なるが、同様に集計化の試みを行い、特に経営者にとって好ましい、イノベータつまり新製品投入と同時に購買行動を行う個人の集合の大きさについて考察を行う。ここでは無限期間モデルを用いる。

市場には製品を一単位だけ購入する多数の潜在的消費者が同時に存在し、各消費者の製品の受容による効用は既知の確率分布にしたがうものとする。効用以外のパラメータはすべての個人について同一であると仮定する<sup>9)</sup>。したがって、各自の製品受容による効用に応じて受容タイミングが決定されることになる。

そこで、すべての潜在的消費者の製品受容による効用  $u$  は閉区間  $u \leq u \leq \bar{u}$  上に分布する次のような密度関数をもつと仮定する。

$$(6.1) \quad f(u) = \begin{cases} G(u) & 0 < \underline{u} \leq u \leq \bar{u} < \infty \\ 0 & \underline{u} > u, \bar{u} < u \end{cases}$$

以下  $\beta < 1$  とし、さらに近似解に限定して議論すれば、受容による効用水準が  $u$  である消費者が製品を購入する受容価格  $p$  を見つけることができる。すなわち、命題 2 より、

---

9) 受容しないことによる不効用は受容による効用と相関関係を持っていると考えることもできるがここでは簡単化のため無相関でしかも個人について、同一であると仮定する。

$$(6.2) \quad p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( u + \frac{\mu}{1-\beta} \right)$$

である。したがって、(6.2) を用いればそれぞれの価格水準に対応する売上率  $S(p)$  を計算することができる。価格が確率的に下落することを考慮に入れれば、(6.1) および (6.2) より価格が  $p$  のときの売上率  $S(p)$  は次のようになる。

$$(6.3) \quad S(p) = \int_{\underline{p}}^{\bar{p}} G \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( x - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{1-\beta} \right) \right) \frac{\gamma-1}{\gamma} dx \quad \underline{p} \leq p \leq \bar{p}$$

ただし、 $\underline{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( u + \frac{\mu}{1-\beta} \right)$ ,  $\bar{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \bar{u} + \frac{\mu}{1-\beta} \right)$  とする。

効用  $u$  の密度関数 (6.1) を特定化してさらに議論を続ける。仮定から効用が分布する台の集合が有界閉集合であるから、既知の密度関数の中から次のような一様分布を仮定する。

$$(6.4) \quad G(u) = \frac{1}{\bar{u} - \underline{u}}$$

したがって、一様分布 (6.4) を用いたときの売上率関数 (6.3) は次のようになる。

$$(6.5) \quad S(p) = \frac{1}{\bar{u} - \underline{u}} \frac{\gamma-1}{\gamma} (\bar{p} - p) = \frac{1}{\bar{u} - \underline{u}} \left( \bar{u} + \frac{\mu}{1-\beta} \right) - \frac{1}{\bar{u} - \underline{u}} \frac{\gamma-1}{\gamma} p$$

さて、(6.5) 式において新製品の初期価格を  $p_0$  とし、これが  $\bar{p} > p_0$  という条件を満たすと仮定すると、

$$(6.6) \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \bar{p} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{1-\beta} \right) \geq u \geq \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( p_0 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mu}{1-\beta} \right)$$

なる大きさの効用  $u$  を持つ消費者は初期価格の段階ですでに停止領域、つまり

受容すべき価格の範囲に存在している。したがって、このような消費者は即時受容することになる。このタイプの消費者がすでに述べたイノベータと呼ばれ新製品投入後時間をおかずして受容を決定する消費者である。(6.6) の範囲の消費者を売上率で表現すると、イノベータの売上率に占める割合は、

$$(6.7) \quad S(p_0) = \frac{1}{\bar{u} - u} \left( \bar{u} + \frac{\mu}{1-\beta} \right) - \frac{1}{\bar{u} - u} \frac{\gamma-1}{\gamma} p_0$$

となる。

経営者の立場からは、イノベータの割合 (6.7) が大きくなるということは、新製品投入後の相対的に高い価格で取引される量が増加することを意味するので、好ましいことである。初期価格および効用の上・下限を一定として関係するパラメータとイノベータの割合との関係を調べると次のようになる。まず割引因子との関係は (4.4) 式の記号を用いると、

$$(6.8) \quad \frac{\partial S(p_0)}{\partial \beta} = \frac{-p_0}{\bar{u} - u} \frac{B}{A^2} \left[ \log(1-\alpha) - \frac{A^2}{B} \frac{\mu}{p_0(1-\beta)^2} \right]$$

となる。(4.4) と同様にして、

$$(6.9) \quad \frac{\partial S(p_0)}{\partial \beta} = \begin{cases} > 0 & \log(1-\alpha) > D \\ < 0 & \log(1-\alpha) < D \end{cases}$$

ただし、 $D = \frac{A^2}{B} \frac{\mu}{p_0(1-\beta)^2}$  とする。(6.9) より価格の下落が相対的に小さいと予想されるとき、割引因子の増加はイノベータの割合を増加させる効果があるといえる。少し受容を手控え価格の変化を観測しようというインセンティブが働いていると考えることができる。他のパラメータに関しては次のようになる。

$$(6.10) \quad \frac{\partial S(p_0)}{\partial p_0} < 0, \quad \frac{\partial S(p_0)}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial S(p_0)}{\partial q} < 0$$

(6.10) の最初の不等式の意味は明らかである。一方、最後の二つの不等式は、

今後の価格の下落が小さいと予想されるときはイノベータの割合が大きくなるということを意味している。

## § 7 結論

受容による効用が一定である単純なモデルを用いて消費者の受容決定を理論的に分析した。最適なタイミングは受容すべき価格（閾値）を求めるに帰着し、計画期間が有限の場合と無限の場合それぞれについて受容の最適な厳密な閾値、近似的な閾値を求めることができた。それぞれ命題1と命題2にその結果がまとめられている。

さらに近似解はパラメータに関して次のような性質を持っていることがわかった。

価格下落の期待が大きいと閾値小さくなる。

受容の効用や受容を諦める不効用が大きくなると閾値は大きくなる。

有限期間モデルの場合、将来を大きく評価すると閾値は小さくなる。

次に、有限期間モデルに関して平均受容時刻を解析的に得た。さらに数値計算によってパラメータの値と平均受容時刻の関係を明らかにした。それによると、厳密解の値の減少は平均受容時刻を遅らせることができた。この性質と先の近似解の性質とにより十分大きなパラメータの変化が平均受容時刻に及ぼす影響を明らかにすることができた。無限期間モデルによって近似的にイノベータの割合を求め、その性質を明らかにした。イノベータの割合を大きくするためには、初期価格を低くすること、予想される価格の下落を小さく抑えること、もし予想される価格の下落を小さく抑えることができれば、消費者の割引因子が大きいことが要求されることがわかった。

最後に不確実性と受容タイミングに関して分析する。(1.5) より価格の分散は観測される現在の価格を所与として  $\sigma^2 = (1-q)q\alpha^2p^2$  で与えられる。 $\sigma^2$  を  $q$  の関数と考えると、これは  $q$  に関する厳密な凹関数となる。また、これを  $\alpha$  の関数と考えると単調な増加関数である。そこで、議論を単純にするために  $\sigma^2$  を  $\alpha$  の関

数と考えることにする。将来価格の不確実性は分散で測るのが適当であるので、 $\alpha$ の関数と考えた（1.5）の値を、不確実性の尺度とする。

$\alpha$ の増加は将来価格の不確実性を増す効果がある。一方で $\alpha$ の増加は将来の平均価格を小さくする効果、つまり消費者にとっては余剰の増加をもたらす効果があるので、結局 $\alpha$ の増加はハイリスク・ハイリターンの状況をもたらすといえる。このとき、それぞれの解の $\alpha$ に対する性質を用いると、不確実性が与える影響は次のようにまとめることができる。

将来の価格に対する不確実性が十分増加すると、

- ・厳密な意味での受容すべき価格は下落する。
- ・有限期間の場合、平均受容時刻は遅くなる。
- ・イノベータの割合は近似的に小さくなる。

## 参考文献

- [1] 荒木長照（1998）“不完全情報下の最適受容タイミング”、未定稿。
- [2] 古川一郎（1995）、“日本企業のプライシング・プラクティクス”、上田隆穂編著『価格決定のマーケティング』、第1章、有斐閣。
- [3] 竹内啓・藤野和建（1981）、『2項分布とポワソン分布』、東京大学出版。
- [4] Bass, F.M. (1969) , “A New Product growth model for consumer durables, “*Management Science* ,Vol.15, No.5, pp.215-227.
- [5] Bass, F.M. and A.Bultez (1982) , “A Note on Optimal Strategic Pricing of Technological Innovations, “*Marketing Science* , Vol.1, pp.371-378.
- [6] Bayus, B.L. (1992) , “The Dynamic Pricing of Next Generation Consumer Durables, “*Marketing Science* , Vol.11, No.3, pp.251-265.
- [7] Bensanko, D. and W.Winston (1990) , “Optimal Price Skimming by a Monopolist Facing Rational Consumers, “*Management Science* , Vol.36, No.5, pp.555-567.
- [8] Bertsekas, D.P. (1976) , *Dynamic Programming and Stochastic Control*, Academic Press.
- [9] Chatterjee, R. and J.Eliashberg (1990) , “The innovation diffusion process in a heterogeneous population : A micromodeling approach, “*Management Science* Vol. 36, No.9, pp.1057-1079.
- [10] Dolan, R. and A.Jeuland (1981) , “Experience Curves and Dynamic Demand Models : Implications for Optimal Pricing Strategies, “*Journal of Marketing* , Vol.45,

- No.1, pp.52-62.
- [11] Eliashberg, J. and A.P.Jeuland (1986) , "The Impact of Competitive Entry in a Developing Market upon Dynamic Pricing Strategies, " *Marketing Science*, Vol.5, No. 1, pp.20-36.
  - [12] Horsky, D. (1990) , "A Diffusion Model Incorporating Product Benefits, Price, Income and Information, " *Marketing Science*, Vol.9, No.4, pp.342-365.
  - [13] Jensen, R. (1982) , "Adoption and diffusion of an innovation of uncertain profitability, " *Journal of Economic Theory*, Vol.27, No.1, pp.182-193.
  - [14] Kalish, S.(1983), "Monopolist Pricing with Dynamic Demand and Production Cost, " *Marketing Science*, Vol.2, No.2, pp.135-159.
  - [15] Levunthal, D.A. and D. Purohit (1989) , "Durable Goods and Product Obsolescence, " *Marketing Science*, Vol.8, No.1, pp.35-56.
  - [16] Mahajan, V., E.Muller and F.M.Bass, (1993)" New-Product Diffusion Models, " *Handbooks in OR & Management Science* Vol.5 (ed.Eliashberg, J. and G.L.Lilien) pp.348-408, Elsevier Science Publishers.
  - [17] Robinson, B. and C.Lakhani (1975) , "Dynamic Price Models For New Product Planning, " *Management Science*, Vol.21, No.10, pp.1113-1122.
  - [18] Rogers, E.M. (1971) ,*Communication of Innovations : A Cross-Cultural Approach, 2nd edition*, The Free Press.
  - [19] Shiryaev, A.N. (1973) , *Statistical Sequential Analysis*, AMS, Providence.
  - [20] Shiryaev, A.N, Yu.M.Kabanov, O.D.Kramkov and A.V.Mel'nikov (1994) , "Toward the Theory of Pricing of Options of Both European and American Types.I.Discrete Time, " *Theory of Probability and Its Applications*, Vol.39, No.1, pp.14-60.
  - [21] Stoneman, P. (1981) , "Intra-firm diffusion, Bayesian learning and profitability, " *Economic Journal*, Vol.91, pp.375-388.