移動最大値制御と企業の価格設定
(前田英昭教授還暦記念号)

移動最大値制御と企業の価格設定

荒 木 長 照

1. はじめに

確率制御のなかに移動最大値 (running max) 制御というものが存在する。この移動最大値とは拡散確率過程の過去および現在までの最大値によって作られる確率過程を意味する。過去の最大値による過程であるから，その最大値が更新されるまでプロセスは一定の値をとることになる。したがってプロセスは単調なものとなり，この意味で nonstandard な確率過程ということができる。このような確率過程上での制御問題は複雑ではあるが，Heinricher and Stockbridge [7] はある条件のもとで付随する複雑さを巧妙に回避し，問題の最適な政策を導きだしている。

この確率過程は本来機械の取り替え問題のために考案された過程であり，Heinricher and Stockbridge [7] において問題に適する形ですでに数学的に解かれた問題である[1)]。また，狭い意味での制御問題ではないが，この過程はファイナンスの分野でも応用されている。たとえば赤壁・荒木 [1] Shepp and Shiryaev [11] らは仮想的な金融資産であるロシアン・オプションの評価に最適停止問題としてこれを応用したものである。

この小論では，経済学ではまだほとんど馴染みのない移動最大値制御法を紹介するとともに，価格に関する規制を受けている単純な独占企業モデルにこれを応用することを試みる。

1） 機械の取り替え問題への直接的な応用に関しては Heinricher and Stockbridge [8] を参照のこと。

2. 移動最大値制御

Heinricher aod Stockbridge [7] は移動最大値制御による最大化のための十分条件を明らかにしている。以下，彼らにしたがいながら制御法を解説することにしよう。

まず目的関数は割引のない累積的なペイオフが仮定される。

$$(1) \qquad J(x,\ y\ ;\ u) = E_{xy}\int_0^{\tau(B)} h(x_t,\ y_t,\ u_t)dt \to \max$$

変数 x, y はいわゆる状態変数で，u は制御変数である。被積分関数 h は連続で，適当な正の定数 C と p について，次の多項成長条件を満たすものとする。

$$(2) \qquad 0 \leq h(x,\ y,\ u) \leq C(1+|x|^p+|y|^p+|u|^p)\ (x \leq y \leq B,\ u \in U)$$

(1) 式で B は定数で，計画期間 $\tau(B)$ は次のようなマルコフタイムである。

$$(3) \qquad \tau(B) = \inf\{t \geq 0 : x_t = B\} \quad x \leq y \leq B$$

状態変数 x は通常の拡散確率過程で次の確率微分方程式に従うものとする。

$$(4) \qquad dx_t = f(x_t,\ u_t)dt + \sigma(x_t,\ u_t)dw_t,\ \ x_0 = x,\ w_0 = 0\ \ w.p.1$$

ただし，(4) 式においてドリフト f およびディフュージョン σ は連続で C^1 級の関数で，適当な正の定数 K, M と α について次の三つの条件を満たすものとする。

$$(5) \qquad |f_x(x,\ u)|+|f_u(x,\ u)| \leq K,\ |\sigma_x(x,\ u)|+|\sigma_u(x,\ u)| \leq K \quad (x \leq B,\ u \in U)$$

$$(6) \qquad |\sigma(x,\ u)| \leq M \quad (x \leq B,\ u \in U)$$

$$(7) \qquad 0 < \alpha \leq f(x,\ u) \quad (x \leq B,\ u \in U)$$

(2) (5) (6) 式が通常の確率制御理論で仮定される条件[2)]であるのに対し，条

2） たとえば Fleming and Rishel [6] を参照のこと。

件 (7) はこれらに加えて停止時刻が有限であることを保証するための条件である。

さて，もうひとつの状態変数である y が移動最大値過程に従う。すなわち，

$$(8) \qquad y_t = \max\{x_s : 0 \leq s \leq t\} \vee y, \ \ y_0 = y \geq x$$

ただし，$a \vee b$ は a と b との内大きいほうを表す。

拡散過程 x と最大値過程 y のそれぞれの見本過程を図示したのが図 1 である。図中の水平線分が最大値過程の見本過程である。

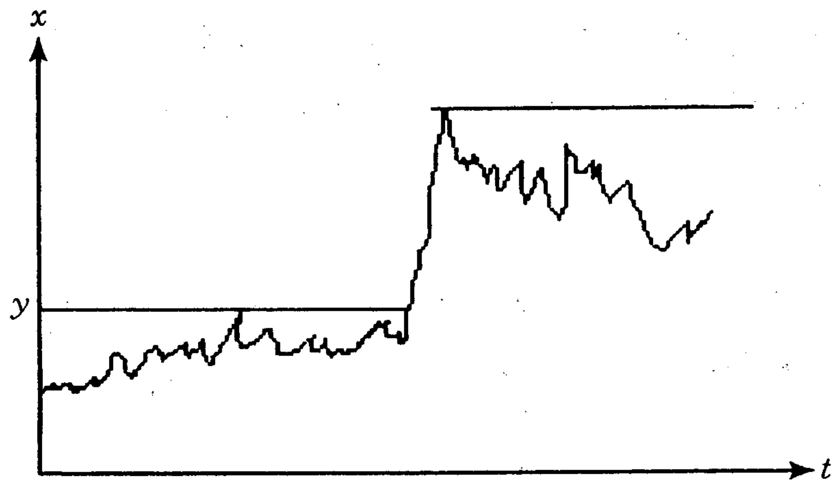

図 1　見本過程

(8) 式からわかるように移動最大値過程 y_t は x_t の最大値をとるプロセスである。そして $y = x$ となったときにのみ y の値は増加する単調なプロセスである。

Heinricher and Stockbridge [7] によると (1)～(8) の最大化問題の十分条件は次のようになる。

$V(x, y)$ を次の DP 方程式の解であるとする。

$$(9) \qquad \max_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \sigma(x, u)^2 V_{xx}(x, y) + f(x, u) V_x(x, y) + h(x, y, y) \right\} = 0$$

ただし $x < y < B$ で定義されている。また，境界条件

(10) $$V(B,\ B)=0$$

(11) $$V_y(y,\ y)=0,\quad (y \le B)$$

を満たすものとする。さらに $V(x,\ y)$ は連続で x について二階連続微分可能[3]，そして適当な定数 C と p について多項成長条件

(12) $$|V(x,\ y)| \le C(1+|x|^p+|y|^p),\quad (x \le y,\ y \le B)$$

を満たすものとする。このとき，

(a) 任意の制御可能な u と任意の $x \le y$ について $V(x,\ y) \ge J(x,\ y\ ;\ u)$。

(b) もし u^* が制御可能で DP 方程式の最大化を達成するものであれば，u^* は最適制御量で $V(x,\ y)=J(x,\ y,\ ;\ u^*)$ は価値関数 (value function) である。

解決すべき問題 (1)～(8) を主問題と呼ぶことにしよう。この主問題を解決するには次の補助問題を考えるのがいい。

補助問題

状態変数の制約はこれまで通りとし，$x \le y$ について次のように定義する。ただし以下の補助問題では y は定数と考える。

(13) $$J_1(x,\ y\ ;\ u)=E_{xy}\int_0^{\tau} h(x_t,\ y_t,\ u_t)\,dt$$

(14) $$\tau=\tau(x,\ y\ ;\ u)=\inf\{t \ge 0 : x_t=y\}$$

補助問題に対する十分条件は次のようになる。

3) 価値関数がかならずしも C^2 級でないケースを考えることが一般的になりつつある。その場合の解概念は粘性解 (viscosity solution) と言われている。小論で議論されている微分方程式の解は古典解 (classical solution) と呼ばれ，粘性解の特殊ケースである。粘性解については改めて論じることにする。

$W(x, y)$ を補助問題の価値関数とする。すなわち

(15) $$W(x, y) = \sup_{u \in U} J_1(x, y; u)$$

である.

一方，$W(x, y)$ を DP 方程式

(16) $$\max_{u \in U} \left\{ \frac{1}{2} \sigma(x, u)^2 W_{xx}(x, y) + f(x, u) W_x(x, y) + h(x, y, u) \right\} = 0$$

の解とする。ただしこの解は $x < y$ 上で定義され，境界条件

(17) $$W(y, y) = 0$$

を満たすものとする。

このとき，もし $W(x, y)$ が x に関して 2 階連続微分可能で，適当な定数 C, p について多項成長条件

(18) $$|W(x, y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p) \qquad (x \leq y)$$

を満たすとすれば，$W(x, y)$ は補助問題の価値関数である。また $u^*(x, y)$ が補助問題の DP 方程式の最大化を達成する制御関数ならば，これは最適制御でもある。

さらに，この補助問題と主問題は次のような簡単な関係で結び付けられる。

$W(x, y)$ が (x, y) について連続で，$x = y$ に沿って微分可能ならば，移動最大値を持つ価値関数は次のように与えられる。

(19) $$V(x, y) = W(x, y) + \int_y^B W_y(z, z)\, dz \qquad (x \leq y,\ y \leq B)$$

補助問題についての最適制御 $u^*(x, y)$ は同時に主問題についての最適制御でもある。

ここで解説した Heinricher and Stockbridge [7] の移動最大値制御法の最大の

特長は，最適制御が状態変数が過去の最大値に達するまでの最大化問題つまり，補助問題の解としてえられる点にある。このことは，(19) 式からわかるように状態変数が過去の最大値に達してからは $x=y$ に沿って価値関数が変化することによるものである。

3. 経済モデルへの応用

プライスキャップ規制を受けた独占企業の価格決定を考察する[4)]。政府は独占企業が供給する財の価格 p にそれ以上高い価格を付けられない上限 p_h を設定することができるものとする。この価格以下であれば企業は好きな価格を設定することができる。ここで企業は自由に設定できる価格に下限が存在するものとしよう。これを p_l で表せば結局企業はコンパクトな集合 $P \equiv [p_l, p_h]$ から価格を選択することになる。

t 時点での需要 q_t は次のような幾何ブラウン運動に従うものとする。

$$\text{(1)} \qquad \frac{dq_t}{q_t} = \mu \frac{1}{p_t} dt + \sigma dw_t; \; q_0 = q, \; \mu > 0, \; \sigma > 0$$

ここでもし価格が一定であるとすると，需要は次の関数で与えられる。

$$\text{(2)} \qquad q_t = q_0 \exp\left(\left(\mu \frac{1}{p} - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w_t\right)$$

したがって，(2) より，ある一定の時刻で需要量と設定された価格との間には負の関係があることがわかる。

ここで次の不等式を仮定する。

$$\text{(3)} \qquad \mu \frac{1}{p} - \frac{\sigma^2}{2} > 0$$

この不等式は需要の確率的な変動よりもその変化のトレンドの方が大きいと

4） 競争的な市場で価格に制限があるモデルは Dixit [5] Smith [12] で考察されている。彼らの場合価格制約は確率過程上の反射壁として定式化されている。

いうことを意味している[5]。

さて，なんら一般性を失うことなく，この企業は財1単位を生産するために生産能力 k_t の1単位を必要とするものと仮定する。この企業は当該財の唯一の供給者であるから，存在する需要にはかならず財を供給する社会的使命が存在すると考えられる。また企業もそのように認識しているものと考えることは不自然ではないであろう。企業がこのような認識をもっている状況のもとで，企業の生産能力は一切減耗せず，また新たに追加される生産能力は経済的に転売不可能，すなわち投資が不可逆的であると仮定すれば，この企業の生産能力は一度使用するとその後しかるべき計画期間中は継続してその水準を維持する必要があるということになる。

計画の当初は十分需要を満たすだけの十分な生産能力があるとすれば，生産能力 k_t に関する以上の仮定は数学的に次のように表現することができよう。

$$k_t = \max\{q_s : 0 \leq s \leq t\} \vee k,\ k_0 = k \geq q \tag{4}$$

(4) 式はとりもなおさず生産能力が移動最大値過程に従うということを意味する[6]。

当該独占企業の瞬時的な目的関数は次のように，二次の費用関数を収入から控除したもので構成されると仮定する。

$$\pi(q, k, p) = pq - bq^2 - ck^2,\ b > 0,\ c > 0 \tag{5}$$

前節のモデル同様割引を考えないとすると，この企業の長期的な目的関数は次のようになる。

$$J(q, k\,;\, p) = E_{qk}\int_0^{\tau(B)} \pi(q_t, k_t, p_t)\,dt \tag{6}$$

---

5) 拙著 [2] を参照のこと。

6) 投資の不可逆性に関する論文としては，先に参照した Dixit [5] や Kobila [9] など多くの文献が存在する。これらは特異制御 (singular control) を用いてモデル解析をおこなっている。

さて，現在の技術水準に対して供給可能な需要水準の上限を B とする。この値は十分大きいものとする。そして，需要量がこの水準に対した後，企業は現在の生産行動をあらため，別の新たな生産計画を立案しそれに従うものと仮定する。

したがって，この企業の当面の計画期間の上限は次のように表すことができる。

$$(7)\qquad \tau(B)=\inf\{t\geq 0: q_t=B\},\ q\leq k,\ k\leq B$$

ここで仮定 (2−7) に反しないようにするためには，次のように仮定すれば十分である。

$$(8)\qquad p_h B-bB^2-cB^2\geq 0$$

一方，仮定 (3) より，企業は確率 1 で技術の限界に対応する程十分大きな需要水準に直面してしまう。ところがそのようになる以前に，確率的な偶然の積み重ねによって経常的な企業活動をおこなうに困難なほど極めて小さい水準の需要量を経験することがないとは限らない。つまり，そのような確率はゼロではない。このようなときには，政府が直接・間接的に，当該財の唯一の供給者たるこの企業に補助を与えることが合理的であろう。そこでこのような需要水準を A で表すことにする。そして当該独占企業の生産する財を政府が直接購入するという形で補助をあたえるものと仮定する。以上の仮定の意味することは確率過程 (1) が $q=A$ で反射壁をもつということである。

さて，以上のような設定でこの問題の最適な価格設定方式を Heinricher and Stockbridge [7] の便利な性質を利用して求めることにしよう。まず，前節で紹介した補助問題に対応する DP 方程式は次のようになることがわかる。

$$(9)\qquad \max_{p\in P}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 W_{qq}+\mu\frac{1}{p}qW_q+pq-bq^2-ck^2\right\}=0$$

この (9) 式で最大化に貢献する部分だけをとりだして，それを y で表しておく。

(10) $$y=\mu\frac{1}{p}qW_q+pq$$

方程式 (10) を価格 p に関する関数と考えれば，$W_q \leq 0$ なる q に関して，関数 y は増加の凹関数，$W_q > 0$ なる q に関して，関数 y は凸関数である。したがって (9) 式を最大にするための貢献部分である (10) 式を最大にするような価格を $p^* \in [p_l, p_h]$ とすれば，次のような小さな正の数 ε が存在することになる。

(11) $$\begin{cases} \varepsilon > W_q \Rightarrow p^* = p_h \\ W_q > \varepsilon \Rightarrow p^* = p_l \end{cases}$$

(11) 式から明らかなように，価格設定の最適な方式はバン・バン制御法である。したがって (9) 式を最大にする制御量（価格）は短い間では一定であるので，とりあえず価格を一定と考えて (9) の微分方程式を解くと次のような一般解を得る。

(12) $$W(q)=c_1(p,k)+c_2(p,k)q^{\lambda}-\frac{p^2}{\mu}q+\frac{b}{\sigma^2+2\dfrac{\mu}{p}}q^2-\frac{2ck^2}{\lambda\sigma^2}\log(q)$$

ただし，

(13) $$\lambda=1-\frac{2\mu}{p\sigma^2}$$

である。また (12) 式において $c_i(p,k)$ は状態変数 q から独立で，制御変数である価格と生産能力に依存する未定係数である。さらに境界条件として次の二式を要求する。

(14) $$W(k,k)=0$$

(15) $$W_q(A,k)=0$$

(14) 式は (2-17) より得られ，(15) 式は反射壁での境界条件である[7)]。

7） たとえば Cox and Miller [3], Dixit [4], Malliaris and Brock [10] などを参照のこと。

一般解 (12) の最終項は対数関数であるので，明らかに多項成長条件 (2-18) を満たさない。ところが仮定より状態変数のひとつである需要量 q は閉区間 $[A, k]$ を定義域として持つ。したがってこの場合には多項成長条件を考慮する必要はない[8)]。

よって (12) の未定項 c_1, c_2 を二つの境界条件 (14) (15) さらに価値関数の C^2 性を用いて決定すればよい。もちろん，未定項 c_1, c_2 は制御変数 p に依存しているから，まず最適な政策を決定することが必要である。以下では最適制御である最適な価格 p^* を見つけることにしよう。

(11) から補助問題の価値関数の需要量に対する傾きが十分大きければ，最も低い価格 (p_l) をそうでなければ最も高い価格 (p_h) を設定することが最適である。いわゆるバン・バン制御である。一方 (14) 式および補助問題の価値関数は正でなければならないことから補助問題の停止時刻に対応する需要量 $q=k$ においては $p=p_h$ であることがわかる。また，(15) 式から反射壁 $q=A$ においても $p=p_h$ でなければならないことも直接明らかである。

これらのことは経済学的に見ても極めて自然なことである。反射壁 A の近傍では需要水準はかなり小さいが無料で政府の補助が受けられる。したがって需要を喚起すべく価格を下げる必要はない。現在能力最大の需要水準の近傍では，きわめて大きな需要を満たすべく生産活動をおこなっているので，費用関数の性質から費用が相対的に過大であり企業の収入を圧迫している。したがって，価格を高く設定して需要を押さえ込むことで，逆に利潤を増加させる可能性があるのである。

次の問題はこれら需要量の両極の中間的な水準に関してである。すなわち，中間的な需要水準において $W_q > \varepsilon$ となるような価値関数が正の大きな傾きをもつかどうか調べなければならない。以下では，二つの境界条件と価値関数の

---

8) 多項成長条件は一様可積分性のために必要であるが，このように有界な区間上で考える場合には必要ない。詳しくは Fleming and Rishel [6] を参照のこと。

C^2 級であることに矛盾しないような関数は，需要量 q の定義されている区間 $[A, k]$ で負またはゼロの傾きをもたなくてはならないことを明らかにする。したがって，最適な価格は常に高い価格を付けることであるということを導く。政府の手厚い保護のもとでは企業は常に可能なかぎり高い価格を維持することが最適であることを得る。

境界条件 (15) および (11) から，まず未定項 $c_2(p, k)$ が決定される。すなわち，

$$(16)\qquad c_2(p, k)=\frac{1}{\lambda}A^{-\lambda}\left[-\frac{2b}{\sigma^2+\dfrac{2\mu}{p}}A^2+\frac{p^2}{\mu}A+\frac{2ck^2}{\lambda\sigma^2}\right],\ p=p_h$$

である。もうひとつの未定項 $c_1(p, k)$ も，(16) 式，境界条件 (14) 式および需要量 $q=k$ で $p=p_h$ であるという事実から容易に決定される。$c_1(p, k)$ に関しては，ここでは直接関係ないのでこれ以上言及しない。

さて，ここで次のような需要水準を定義する。

$$(17)\qquad A_i^*=\frac{-p_i+\sqrt{p_i^2-4bck^2}}{-2b}>0,\ i=h, l$$

(17) 式において，A_i^* は高い価格・低い価格のそれぞれの価格を付けたときに，短期的な利潤がゼロになってしまう需要水準の下限を表す。このことは (5) 式から導かれる。一方，(17) 式から $A_h^*<A_l^*$ であるから，(2-2) より反射壁に対応する需要の大きさ A に関して $A_h^*\leq A\leq k$ なる場合だけを考えればよい。

価値関数 (13) は C^2 級でなければならない。そこで $q\in[A_h^*, k]$ なる需要量の大きさの範囲で，特に $q=A$ における価値関数の二階微分 $W_{qq}(A, k)$ を考えると，$A=A_h^*$ で価値関数の 2 階微分の値はゼロで，(8) 式より他の値の範囲では負の値をとることがわかる。すなわち，

(18) $$W_{qq}(A, k) \leq 0, \quad {}^{\forall}A \in [A_h^*, k]$$

である。

$A = A_h^*$ の特殊なケースでは，すでに述べたように $q = A$ においては $W_q(A, k) = 0$, $q = k$ においては $W_q(k, k) \leq 0$ であるので，これらの事実と (18) 式を考慮すると，この場合 $q \in [A_h^*, k]$ について $W_q(q, k) \leq 0$ であることがわかる（図 3-1-a）。

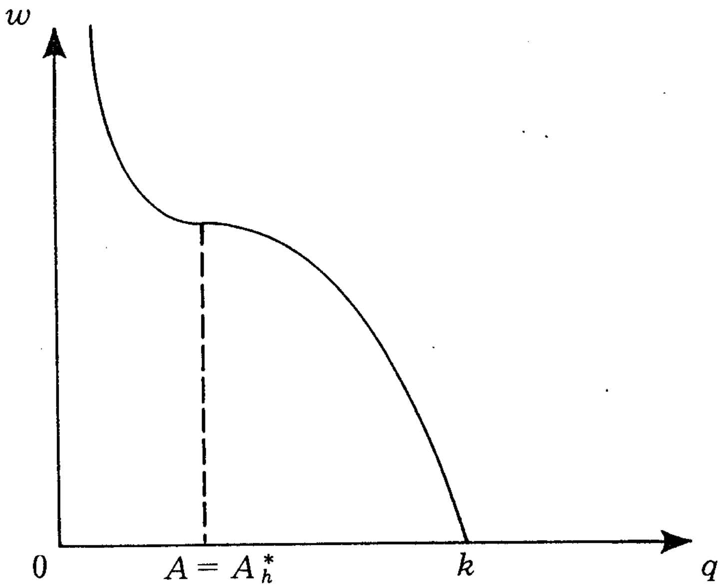

図 3-1-a　$A = A_h^*$ の場合

次に $q \in [A_h^*, k]$ の需要量の大きさの範囲で，$A \neq A_h^*$ なる一般のケースについて考えてみよう。そのためにまず価値関数の変曲点の個数を調べて，(18) を考慮し，さらにうんざりするような計算をへて，$A \in (A_h^*, k]$ なる A については $q \in [A, k]$ で変曲点は高々 1 個であることを導くことができる。$q = A$ においては $W_q(A, k) = 0$ かつ $W_{qq}(A, k) \leq 0$ であるから，もし当該区間 $q \in [A_h^*, k]$ に変曲点が存在しなければ，$W_q(q, k) \leq 0$ である（図 3-1-b）。もし存しても $q = k$ で $W_q(k, k) \leq 0$ であるから $W_q(q, k) \leq 0$ でなければならない(図 3-1-c)。

以上から $q \in [A, k]$ について $W_q(q, k) \leq 0$ でなければならないことがわかる。したがって，補助問題に対応する最適価格設定は常に最も高い価格 p_h を

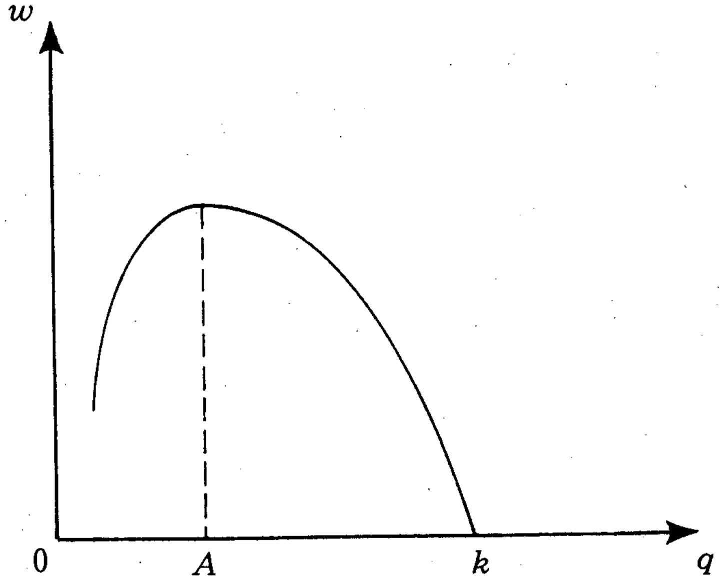

図 3-1-b　変曲点がない場合の例

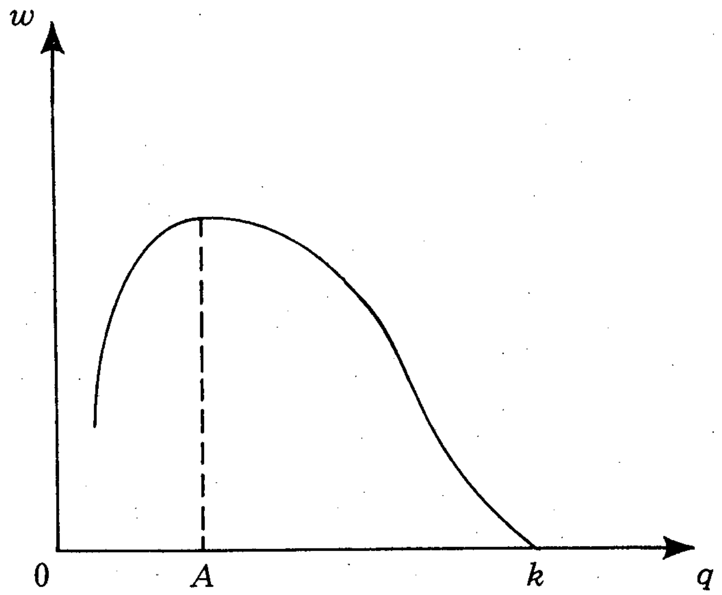

図 3-1-c　変曲点がひとつの場合の例

設定することである。よって，Heinricher and Stockbridge [7] の結果を用いると，この独占企業は常に，政府の規制の範囲内で最も高い価格を設定することが最適であることを得る。

4. おわりに

前節で用いた幾何ブラウニアン型の確率微分方程式は，経済現象をモデル化するときによく用いられるものである。これに従う状態変数は常に正またはゼロの値をとる。需要量，資源存在量，為替レート，株価，財の価格などの確率的挙動をモデル化するために都合のいい性質をもっている。変数が常に正またはゼロの値をとるというのは経済学的には極めて有用な性質であるが，不都合なこともありうる。前節のモデルの一般解 (3-12) の第5項 $-\dfrac{2ck^2}{\lambda\sigma^2}\log(q)$ がそれである。この項は需要水準 q が対数正規分布すること，すなわち幾何ブラウニアン型を仮定することによるものであって，需要量がゼロに近くなるにしたがって，この項は $-\infty$ に発散してしまう。すなわち幾何成長条件 (2-18) に矛盾することになる。もちろん (3-12) 式の第3項も需要量がゼロに近くなるにしたがって発散するが，未定項 $c_2(p, k)$ をゼロとおけば第3項に関するかぎり問題は回避される。前節の例においては，状態変数 q の定義域は反射壁 $q=A$ によって下から有界と仮定することによって，ここに示した $-\dfrac{2ck^2}{\lambda\sigma^2}\log(q)$ の非有界性の問題を回避しているのである。

さて，回避するために仮定された反射壁であるが，言うまでもなく確率過程はこの反射壁に到達してからも停止することはない。ここでもし前節とは異なり，反射壁のかわりに吸収壁を仮定するとどうだろうか。もちろんこの場合も状態変数の定義域は下から有界かつ閉になるので，前述のような幾何成長条件に抵触することはない。しかしながら，このときには別の問題が生ずる。Heinricher and Stockbridge [7] の移動最大値制御法の最大の特長は，最適制御が状態変数が過去の最大値に達するまでの最大化問題つまり，補助問題の解としてえられる点にある。これは実に都合のいい性質で，この性質によって複雑な確率過程上での制御を簡単に見つけだすことができるのである。この性質は，(2-19) 式からわかるように，状態変数が過去の最大値に達してからは $x=y$ に沿って価値関数が変化することによるものである。このことを保証するためには，状態変数が過去の最大値に達するまでにその確率過程が停止する

確率がゼロでなければならない。したがって，確率過程に吸収壁を設けることは (2-19) 式に矛盾することになるのである。実際，機械の取り替え問題に移動最大値制御を応用している Heinricher and Stockbridge [8] においては，機械の潰れてしまう可能性（吸収壁）を $x=y$ の上だけに限定して応用をおこなっているのである。

参考文献

[1] 赤壁弘康・荒木長照，"Russian Option と最適停止問題"，『神戸学院 Working Paper Series (B)』，No. 5, 1994.

[2] 荒木長照，『退出－戦略とタイミングのモデル分析－』，大阪府立大学経済研究叢書，77, 1991.

[3] Cox, D. R. and H. D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen, 1965.

[4] Dixit, A., *The Art of Smooth Pasting*, Harwood, 1993.

[5] Dixit, A., "Irreversible Investment with Price Ceilings," *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 541–557, 1991.

[6] Fleming, W.H. and R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, 1975.

[7] Heinricher, A. C. and H. Stockbridge, "Optimal control of the running max," *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 29, No. 4, pp. 936–953, 1991.

[8] Heinricher, A. C. and H. Stockbridge, "Optimal control and replacement with state-dependent failure rate : Dynamic programming," *The Annals of Applied Probability*, Vol. 3, No. 2, pp. 364–379, 1993.

[9] Kobila, T. Φ., "Partial Investment Under Uncertainty," in *Stochastic Models and Option Values*, D. Lund and B. Φksendal (ed.), pp. 167–186, North-Holland, 1991.

[10] Malliaris, A. G. and W. A. Brock, *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland, 1982.

[11] Shepp, R. and A. N. Shiryaev, "The Russian Option : Reduced Regret," *The Annals of Applied Probability*, Vol. 13, No. 3, pp. 631–40, 1993.

[12] Smith, W. T., "Investment, Uncertainty, and price stabilization schemes," *Journal of Economics and Dynamics and Control*, Vol. 18, No. 3/4, pp. 561–579, 1993.