撤退タイミングを伴う広告制御モデル
(山谷恵俊教授記念号)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 荒木, 長照 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00001546

研究ノート

撤退タイミングを伴う広告制御モデル

—— 確定的なケース ——

荒 木 長 照

§-1 序

広告量を制御変数とする企業モデルにはこれまで数多くのものがある。[(1)] 特殊ケースである確定的な市場環境のもとでは，単一企業モデルは言うに及ばず複占市場を想定した微分ゲームとしても多く議論されている。[(2)] より一般的な不確実性下では，その取り扱いの難しさから，微分ゲームで議論されるものは皆無であるが単一企業のものは多く存在する。[(3)] このノートでは特に前者の確定的な環境での広告制御モデルを考察する。その際これまであまり考慮されてこなかった製品分野（市場）からの撤退タイミングも合わせて考察することを企図している。このことは制御論的に言うならば，広告量および計画期間の終了時刻を制御変数とする利潤極大化企業モデルを分析するということができよう。

一般論として，制御量と計画期間の最適な同時決定は極めて難しい問題である。とりわけ不確実性下の制御モデルに必然的にクローズド・ループ制御になるから，[(4)] 撤退時刻とコントロール関数を同時に発見することは極めて困難な仕事である。[(5)] しかしながら，ここで考察するような確実性下でしかも単純な制御

（1） Bensoussan, Gerald Hurst, Jr. and Naslund (1974) や Tapiero (1988) を参照。

（2） Erickson (1992) を参照。

（3） Tapiero (1988) を参照。

（4） Bensoussan, Gerald Hurst, Jr. and Naslund (1974) や Tapiero (1988) を参照。

（5） 荒木 (1993) はこの問題を論じている。しかし撤退タイミングを特定化するには至っていない。

問題においては，制御がオープン・ループとなり，比較的容易にこれら二つの制御量を同時考察することができる場合がある。具体的に言えば，計画時間以外の制御変数によって最適にコントロールされた目的汎関数が極めて単純な形をもつ場合には，この問題は容易に解くことができる。

Thompson (1968) はその一つの例である。彼は機械のメンテナンス問題と取り替え問題とを同時に考察している。彼は次の様な問題を想定した。

ある企業が生産活動をする。生産に用いられる機械は物理的に消耗してゆく。これに対してメンテナンスを施すことによって，機械の物理的磨耗による生産効率の悪化を改善することができる。そして同時に機械を取り替え，新たなものを購入する際の現存機械の経済的価値，つまりサルベージ・バリューもメンテナンスを施していることによって高くなる。このような状況のなかで，企業の担当者はどの程度メンテナンスを施し，また同時に新たな機械といつ入れ替えればいいかを決定しなければならない。

Thompson はこの問題をバン・バン制御を用いて解いている。メンテナンスを広告に，取り替え時刻を撤退時刻に換えることによって，ここで考察しようとしている問題として考えることができるのではないかというのがこのノートの動機である。

以下の解析的な解はほぼ彼のものと同じである。しかし数値解に関しては彼と異なり，利潤の成長経路を用いて企業の最適な広告戦略の結果による市場の成長→成熟→衰退そして企業の撤退というパターンをシミュレートする。

§-2 モデル

T時点でこの企業は当該製品分野から撤退すると仮定して，企業の目的関数 $V(T)$ を次の様に定義する。

(1) $$V(T)=\int_0^T e^{-rs}Q(s)ds+e^{-rT}\theta\pi(T).$$

ただし，

(2) $$Q(t)=\pi(t)-pA(t)$$

で，$\pi(t)$ は t 時点での当該企業の生産活動からの経常的な利潤を，$A(t)$ は広告量を p はその単位当たりに費用を表しているものとする。したがって，$Q(t)$ は経常的な純利潤を表すことになる。また，$\theta\pi(T)$ は当該製品分野からの撤退時点でのサルベージ・バリューを表しているものとする。ただし $\theta\geq 0$ とする。ここで制御変数である広告量に関して次のような制約を設ける。

$$(3)\quad 0\leq A(t)\leq \bar{A}.$$

ここで $\bar{A}$ は広告の物理的な実行可能な上限を表わすが，広告の単位当たり費用が一定であるから（3）の不等式は事実上広告費用の予算制約を表わすと解釈することもできる。

さて，生産販売活動による利潤 $\pi(t)$ は次の単純な確定的な微分方程式（4）にしたがうものと仮定する。

$$(4)\quad \frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t),\ \alpha<0,\ \varphi(t)\geq 0.$$

（4）式にしたがう企業の利潤は広告量がおおいほどその額が増加すると仮定されている。関数 $\varphi(t)$ は単位当たりの広告がどれだけ需要を喚起するかを測る広告効果関数である。この関数は広告量から独立な時間に関する連続な関数と考える。一方，α は負の値をとり減衰パラメータとして作用する。これは当該ブランドの忘却や需要の飽和，さらにここでは明示的に考慮されてはいないが差別化された他の製品を供給する（ライバル）企業の広告活動等によって生ずる効果を表わしている。

企業が解決しなければならない問題は次の様に表現することができる。

$$\max_{A,T} V(T)$$

$$(7)\quad \text{s.t.}\ \frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t),$$

$$0\leq A(t)\leq \bar{A}$$

まず，撤退時刻 T を一定の値に固定して議論をすすめる。制御変数である広告量に関して最適なコントロールが見つかってから割引現在価値を最大にすべ

く撤退時刻を決定する。この問題のように確定的な環境での動的な最適化で，しかも制約をともなっている場合には，ダイナミック・プログラミングよりもポントリャーギンの最大値原理によって問題を解いたほうが容易な場合が多い。そこで Bensoussan, Gerald Hurst, Jr. and Naslund (1974) にしたがって，問題 (7) をさらに扱いやすいかたちに変形する。目的関数 (1) を任意の時間 t に関する方程式と読み換えて，これを時間に関して微分すれば次式をえる。

$$
(8)\quad \frac{dV(t)}{dt}=(\pi(t)-pA(t))e^{-rt}+\theta\frac{d\pi}{dt}e^{-rt}-r\theta\pi e^{-rt}
$$

$$
=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt}
$$

目的関数である企業の割引現在価値を状態変数の一つとして扱い，この新たな状態変数の撤退時刻での値を目的関数とする。そうすると最大化問題 (7) は次のような問題に変換することができる。

$$
(9)\quad \operatorname*{Max}_{A,T} V(T)
$$

$$
\text{s.t.}\ \frac{d\pi(t)}{dt}=\alpha+\varphi(t)A(t),
$$

$$
\frac{dV(t)}{dt}=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt},
$$

$$
0\leq A(t)\leq\bar{A}
$$

§-3　解析的な解

実際に解を求めてみよう。問題 (9) に対応するハミルトニアン H は，

$$
(10)\quad H=\rho_1(\alpha+\varphi A)+\rho_2\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rt}
$$

となる。よって，最大値原理より，随伴変数に関して次の関係が成り立つ。

$$
(11)\quad \dot{\rho}_1=-\frac{\partial H}{\partial\pi}=-\rho_2(1-r\theta)e^{-rt},\ \ \rho_1(T)=\frac{dV(T)}{d\pi}=0,
$$

$$(12)\quad \dot{\rho}_2 = -\frac{\partial H}{\partial V} = 0, \quad \rho_2(T) = \frac{dV(T)}{dV} = 1.$$

境界条件付き連立微分方程式 (11), (12) の解は次のようになる。

$$(13)\quad \rho_1(t) = \frac{1-r\theta}{r}\left[1-e^{-r(T-t)}\right]e^{-rt}$$

$$\rho_2(t) = 1.$$

よって, (10) および (13) より最大化ハミルトニアン $H(t)^*$ は (14) 式となる。

$$(14)\quad H(t)^* = \left[\left\{\left(\frac{1}{r} - \frac{1-r\theta}{r}e^{-r(T-t)}\right)\varphi - p\right\}A + \left(\frac{1}{r} - \frac{1-r\theta}{r}e^{-r(T-t)}\right)\alpha + (1-r\theta)\pi\right]e^{-rt}$$

(14) 式はコントロール変数 $A(t)$ に関して1次であるから最適制御はバン・バン制御となる。最適制御は,

$$(15a)\quad \varphi(t) > \frac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}} \quad \text{のとき}\ A(t) = \bar{A},$$

$$(15b)\quad \varphi(t) = \frac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}} \quad \text{のとき}\ A(t)\ \text{は任意},$$

$$(15c)\quad \varphi(t) < \frac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}} \quad \text{のとき}\ A(t) = 0$$

となる。

この最適政策の意味を考えるためには (14) について検討しなくてはならない。(14) 式の大きい括弧のなかの三つの項のうち第1項だけがコントロール変数である広告量Aを含み, この項だけが最大化に貢献している。そこで第1項のもつ意味を考えてみることにしよう。第1項を (13) 式を用いて変形すれば,

$$(16)\quad (\rho_1 - \theta e^{-rt})\varphi(t)A - pAe^{-rt}$$

となる。随伴変数である ρ_1 は, 企業の経常的な利潤が1単位変化したときの

当該製品分野から撤退するまでの企業活動による現在価値の変化量を意味する。また $-\theta e^{-rt}$ は製品分野から撤退しなかったために入手し損ねた価値額の，利潤1単位当たりの現在価値である。したがって（16）式の第1項は広告を行なうことによるネットの現在価値ということができる。第2項は広告に伴う費用の現在価値であるから，結局（16）式が正の値のときには広告を行なうことは企業にとって有利であり，これが負の値のときには広告は行なわないほうが有利となる。したがって，（16）で正値であるときが最適戦略の（15a）に，負値のときが（15c）にそれぞれ対応する。（15b）のケースは，連続時間モデルの場合一瞬の出来事（測度ゼロ）であるから無視しても構わない。広告を行なうべき状態とそうでない状態とを分ける臨界的な状態を意味する。つまり（15a）が成立した時刻が政策を切り替えるタイミングということができる。そこで広告を停止するあるいは開始する時刻の集合を次のように定義しておく。

$$(16)\quad \bar{T}=\left\{t\in R^{+}\middle|\varphi(t)=\frac{rp}{1-(1-r\theta)e^{-r(T-t)}}\right\}.$$

Thompson（1968）は（15）式の左辺である広告効果関数に相当する関数が正値で時間に関する単調な減少関数であると仮定している。また（15）式の右辺に相当するものが本稿と同じく時間の増加関数であることに注意すれば，彼の仮定のもとでは適当な初期値と一定の撤退時刻Tについて一意的な広告停止（開始）時刻 $\bar{t}\in\bar{T}$ が存在する。本稿ではこの仮定はおかない。したがって集合$\bar{T}$は空集合あるいは複数の要素を持つ場合もありうる。

最後に製品分野からの撤退タイミングを決定する。（15）のルールで制御される企業の目的関数である割引現在価値 $V(T)$ を，退出時刻Tに関して最大化すればいい。ところが目的関数 $V(T)$ はもはやコントロール変数である広告量によって，最適にコントロールされているから（2）は次のように書き換えられなければならない。

$$(17)\quad V(T)=\int_0^T e^{-rs}Q(s,\ A(s,\ T))ds+e^{-rT}\theta\pi(T).$$

よって，（17）を退出時間Tに関して微分してゼロとおけばよい。つまり，

$$(18)\quad \frac{dV(T)}{dT}=(\pi(T)-pA(T))e^{-rT}+\int_0^T e^{-rs}\frac{\partial Q(s,\ A(s,\ T))}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial T}ds$$

$$+\theta\frac{d\pi}{dT}e^{-rT}-r\theta\pi e^{-rT}$$

$$=\{\theta\alpha+(\theta\varphi-p)A+(1-r\theta)\pi\}e^{-rT}=0$$

である。(18) 式に特徴的なことは最適に制御された広告量が時間から独立であるということである。このことが関数を単純なものとしている。(18) 式の最後の式の両辺に dt をかけて，(4) 式を用いると次のようになる。

$$(19)\quad (\pi-pA)dt+\theta d\pi=r\theta\pi dt.$$

(19) 式の左辺は t 時点で当該分野から撤退しなかったことによる dt の間の純利潤である。右辺は t 時点で当該分野から撤退していれば追加的に入手できた価値額すなわち撤退しなかったことによる機会費用を表わしている。したがって (19) 式は撤退しないことによる瞬時的な利潤と費用がバランスする時点が最適な撤退タイミングであることを教えている。

§-4　数 値 解

この節では広告効果関数を特定化することで，具体的に撤退タイミングを計算してみることにする。特定化に際して次のようなルールを決めておく。

1. 得られる利潤の動的経路が山型をしていること。
2. 広告停止時刻は一度だけであること。
3. 製品分野からの撤退の時には広告は行っていないこと。

ルール1は得られる結果が成長→成熟→衰退という動的なパターンのシミュレーションであることを要求している。ルール2と3は簡単化の仮定である。計算の手間を惜しまなければこれらは容易に弛めることは可能である。計算方法は基本的に以下と同様に行うことができる。

さて，各パラメータの値を次のように設定する。

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha=-0.1 \\ \theta=0.1 \\ r=0.5 \\ p=0.019 \\ \pi(0)=0.0 \\ 0.0\leq A\leq 1.0 \end{cases}$$

広告効果関数 $\varphi(t)$ はパラメータ ε, h, u をもつ次のような関数と仮定する。

$$(2)\quad \varphi(t)=\frac{(\varepsilon-hu)\varepsilon ue^{\varepsilon t}}{(\varepsilon-hu+hue^{\varepsilon t})^2}. \qquad \text{(広告効果関数)}$$

(2) 式は，シグモイド[(6)]あるいはロジスティック関数と呼ばれる (3) 式を時間 t に関して微分したものである。

$$(3)\quad \Psi(t)=\frac{\varepsilon ue^{\varepsilon t}}{(\varepsilon-hu)\left(1+\dfrac{hue^{\varepsilon t}}{\varepsilon-hu}\right)} \qquad \text{(シグモイド)}$$

(3) の概形は図1に示してある。パラメータ ε は関数値の成長率を決定し，h

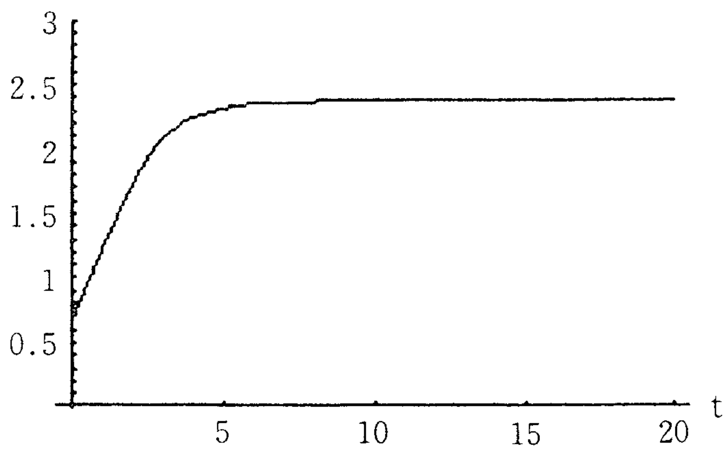

図1　シグモイド（ロジスティック関数）（$\varepsilon=0.95$, $h=0.4$, $u=0.67$）

---

(6)　シグモイドは次の微分方程式の解である。

$$\frac{du(t)}{dt}=(\varepsilon-hu(t))u(t),\quad u(0)=u$$

$$\varepsilon>0,\quad h>0,\quad u>0$$

詳しくは，山口 (1979) を参照。

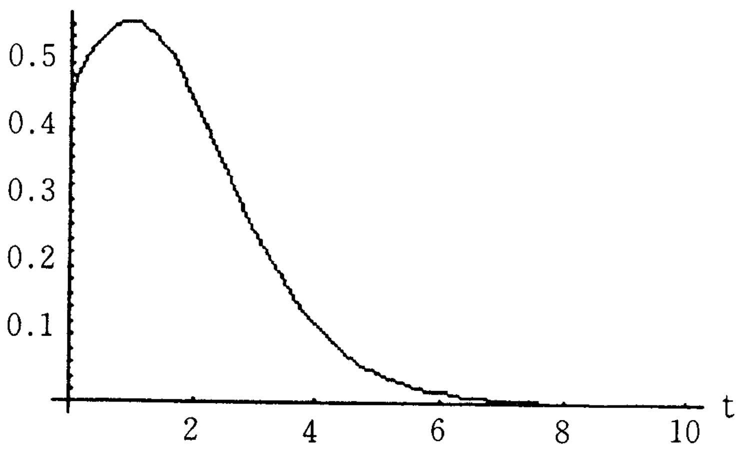

図2　広告効果関数 ($\varepsilon=0.95$, $h=0.4$, $u=0.67$)

は成長率の減少度を規定する。そしてuは $t=0$ のときの関数の初期値である。(3) には飽和水準が存在するがこの水準は ε/h によって決まる。

効果関数 (2) の概形を横軸に時間をとって示したものが図2である。単峰型の関数であれば他のもの，たとえば正規分布関数のようなものでもいいが，積分しやすいという点を考慮してこのシグモイドを選択した。この図によると比較的早い時期においては広告による需要喚起効果は大きく，その後段々この効果が減少することがわかる。前述のルールに従うならば，$t=0$ 時点から広告を行うことになるから効果関数は (2) で定義したように時間だけに依存し，広告停止時刻あるいは広告開始時刻に依存していなくても構わないことに注意すべきである。

撤退時刻を求めるには次のような手順で計算が進められる。まず，$t<\bar{t}$ のとき初期条件 $\pi(0)=0$ のもとで (2-4) 式を積分する。このときには広告は最大水準である $A=1.0$ が行なわれることに注意すれば，

$$(4)\quad \pi(t)=-0.1t+\frac{\varepsilon u e^{\varepsilon t}}{(\varepsilon-hu)\left(1+\dfrac{hue^{\varepsilon t}}{\varepsilon-hu}\right)}-u$$

をえる。次に (4) 式の値を $t=\bar{t}$ のときの初期条件として，$t\geq\bar{t}$ に関して同じく (2-4) 式を積分する。このときには広告停止時刻を過ぎているからすでに広告は行なわれていない。したがって，

$$(5)\quad \pi(t)=-0.1t+\frac{\varepsilon u e^{\varepsilon\bar{t}}}{(\varepsilon-hu)\left(1+\dfrac{hue^{\varepsilon\bar{t}}}{\varepsilon-hu}\right)}-u$$

となる。(5) 式は時間 t に関する1次式であることに注意を要する。

したがって，制御量 $A=\bar{A}=1.0$ を実施する時間と，$A=0$ を実施する時間とを分ける臨界的な時間 $t=\bar{t}$ の以前で，企業の利潤の経路は (4) によって，その後は (5) によってそれぞれ決まることになる。

さて，前述のルールから製品分野から撤退するときには広告は行なっていないから，$t=T^*$ のときには $A=0$ である。したがって (3-18) 式より最適な撤退時刻 T^* における当該企業の利潤は，

表1

	ε	h	u
図3	0.95	0.4	0.67
	0.95	0.4	0.7
	0.95	0.4	0.8
	0.95	0.4	0.9
	0.95	0.4	1.0
図4	0.6	0.4	0.67
	0.65	0.4	0.67
	0.75	0.4	0.67
	0.85	0.4	0.67
	0.9	0.4	0.67
図5	0.95	0.5	0.67
	0.95	0.55	0.67
	0.95	0.6	0.67
	0.95	0.7	0.67
	0.95	0.75	0.67

$$(6)\quad \pi(T^*)=\frac{\alpha\theta}{1-r\theta}=\frac{1}{95}$$

である。つまりこの値を観測する時点で撤退すればよい。一方，(3-15b) は制御量である広告量をその最大値から最小値に変更する時点 $t=\bar{t}$ を規定する関係であるが，(3-15b) に，仮定された数値を代入すれば，

$$(7)\quad \frac{(\varepsilon-hu)\varepsilon ue^{\varepsilon\bar{t}}}{(\varepsilon-hu+hue^{\varepsilon\bar{t}})^2}=\frac{0.0095}{1-0.95e^{-0.5(T^*-\bar{t})}}$$

となる。したがって (5) 式を撤退時刻 $t=T^*$ で評価し，これに (6) を代入することで，

$$(8)\quad \frac{1}{95}=-0.1T^*+\frac{\varepsilon ue^{\varepsilon\bar{t}}}{(\varepsilon-hu)\left(1+\dfrac{hue^{\varepsilon\bar{t}}}{\varepsilon-hu}\right)}-u$$

をえる。よって (7) 式と (8) 式を同時に解くことによって，最適な製品分野からの撤退時刻と広告停止時刻との組 $(T^*,\ \bar{t})$ をえることができる。

利潤の動的経路を決定する (4) 式と (5) 式にはシグモイドが登場している。

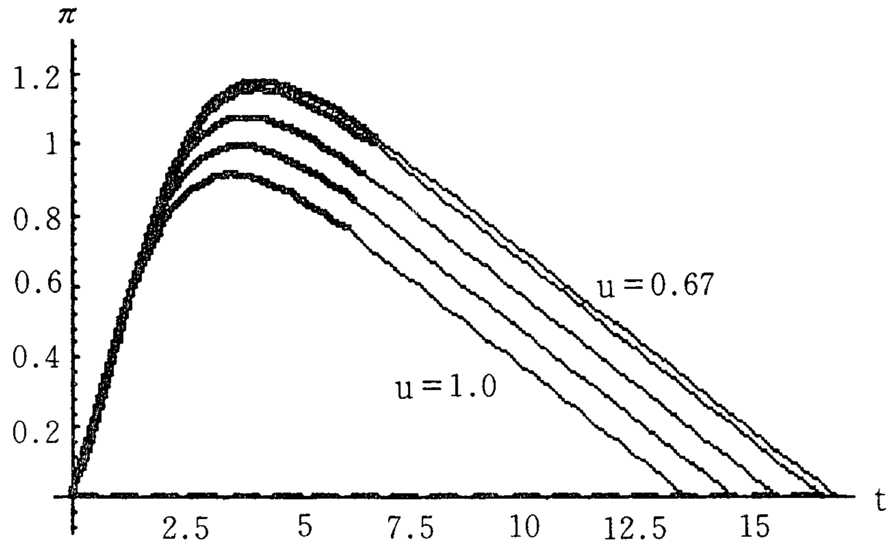

図3　利潤経路1　$\varepsilon=0.95$, $h=0.4$, $u=\{0.67,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 1.0\}$.

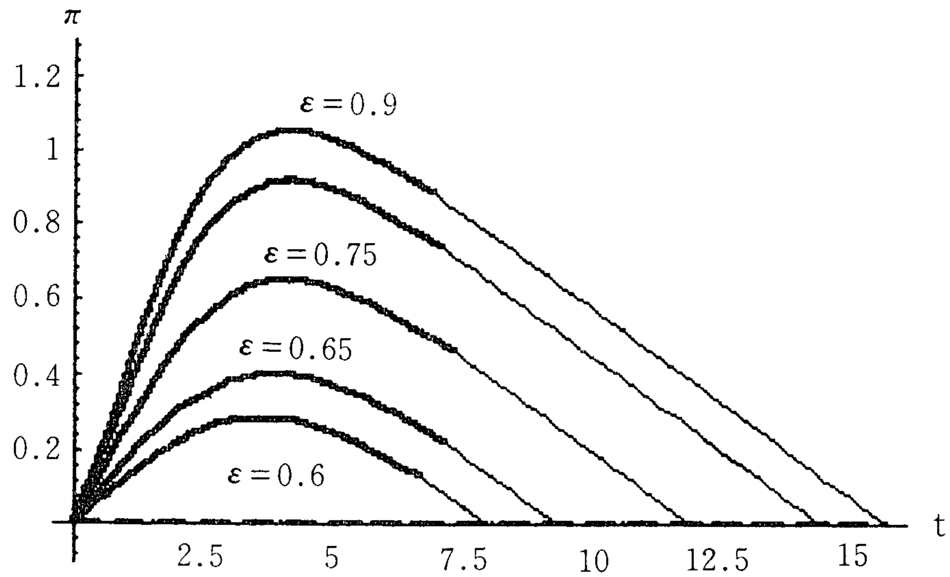

図4　利潤経路2　$\varepsilon=\{0.6,\ 0.65,\ 0.75,\ 0.85,\ 0.9\}$, $h=0.4$, $u=0.67$

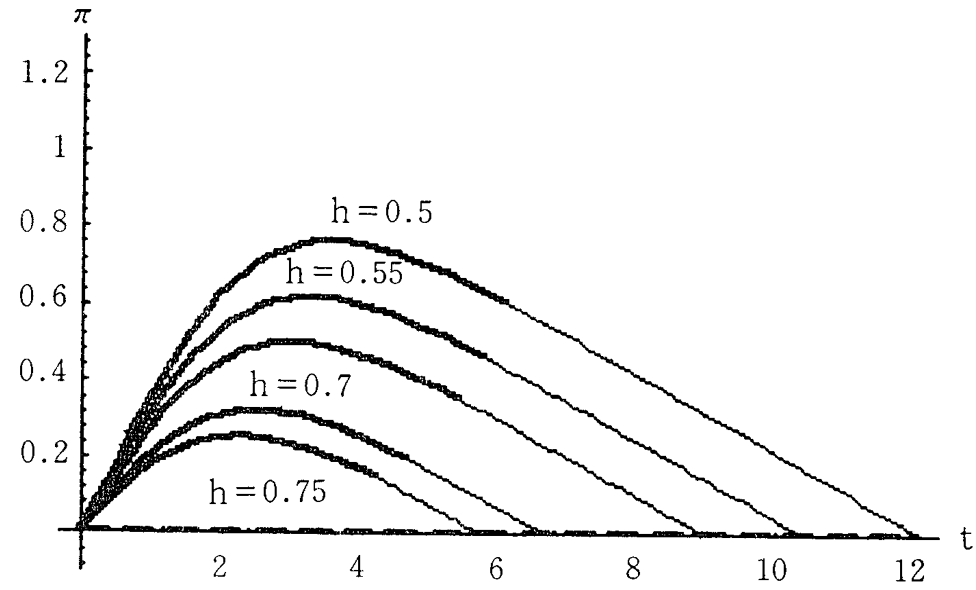

図5　利潤経路3　$\varepsilon=0.95$, $h=\{0.5,\ 0.55,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.75\}$, $u=0.67$

このシグモイドは現在の企業の利潤を，広告を行なうことによる需要喚起効果によって，どのようにもたらすかを表わすものである。したがってシグモイドの三つのパラメータのうち，εは広告による利潤の成長率を規定するものであり，hは成長率の減速の程度を決定するものであり，uは初期水準を表わすものと解釈することができる。そこでこれら三つのパラメータにさまざまな値を与えて，企業の動的な経路の特徴を明らかにしてみることにしよう。

パラメータの値は $0 \leq t \leq T^*$ となるように選ばなければならない。このことに注意しながら，まず始めに利潤の経路を計算する。計算手順はすでに示したとおりであるが，(7) と (8) から具体的に二つの撤退時刻を計算するためにここでは Newton 法を用いて数値計算を行なう。

表1が与えるパラメータである。それぞれのパラメータに対応して経路は図3・図4・図5にグラフ化してある。グラフは横軸に時間を縦軸に利潤をとってある。横軸に平行にゼロの近くにある点線は製品分野からの撤退すべき利潤の水準（1/95）を表わしている。またグラフの太い線は広告を行なっているときの利潤を表わしている。

図3はシグモイドの初期値uの変化に対応する経路の変化の様子を示しているが，uの値が大きくなるにしたがって経路の頂上，つまり最大利潤が低くなっている。したがってuの値が大きいときには当該市場で相対的に多くの利潤

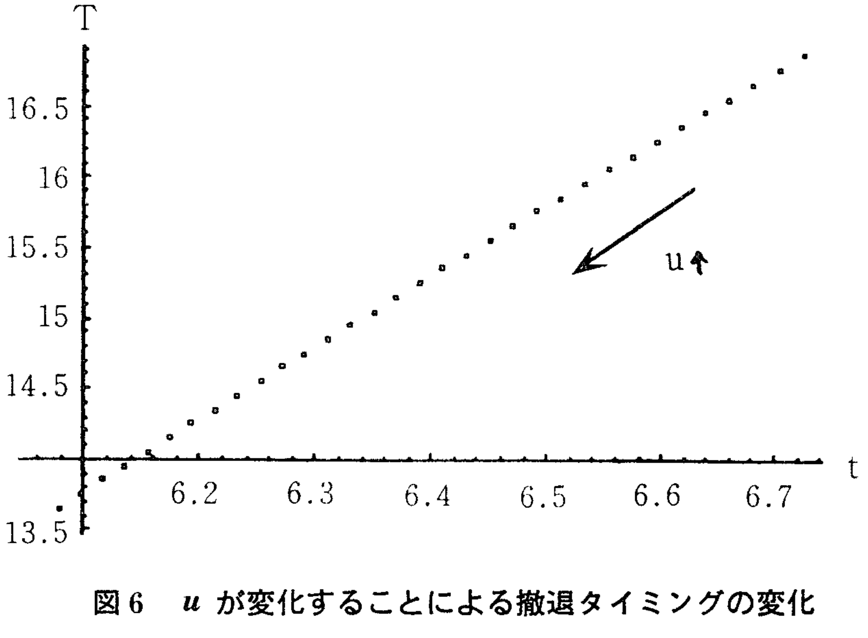

図6　u が変化することによる撤退タイミングの変化

を稼ぐことができないことになる。これは飽和水準（ε/h）が一定であるから，初期条件が大きいと間もなく市場の成長が限界に達してしまうからと考えられる。

一方，図4はシグモイドの成長率εが変化する場合を示している。εが増加するにしたがってピークが上がる。図5は成長率の減少率hが減少するにしたがってピークが上がることを示している。これらの意味は明らかであろう。

次にパラメータの変化に対する二つのタイミング（広告停止時刻・製品分野

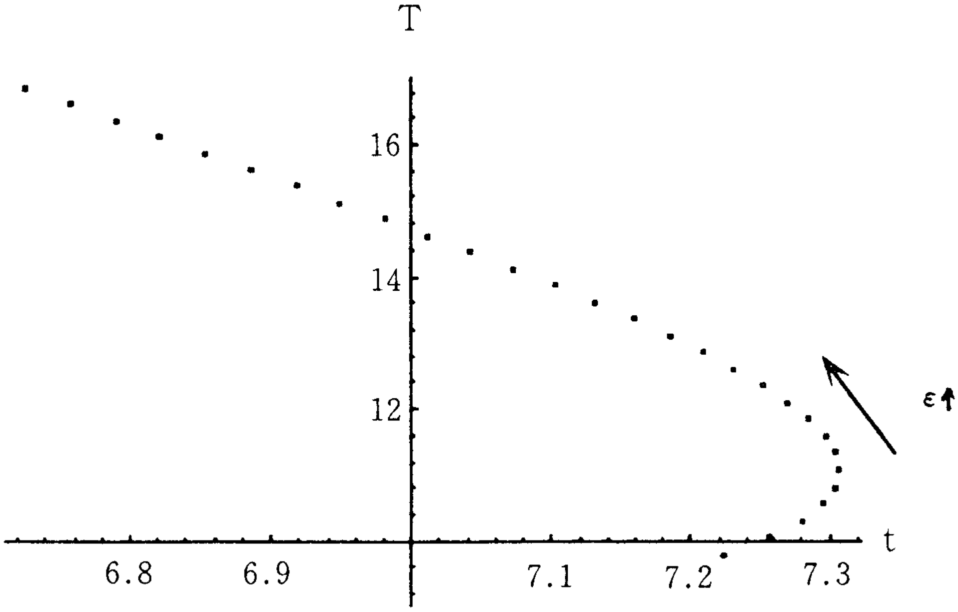

図7　ε が変化することによる撤退タイミングの変化

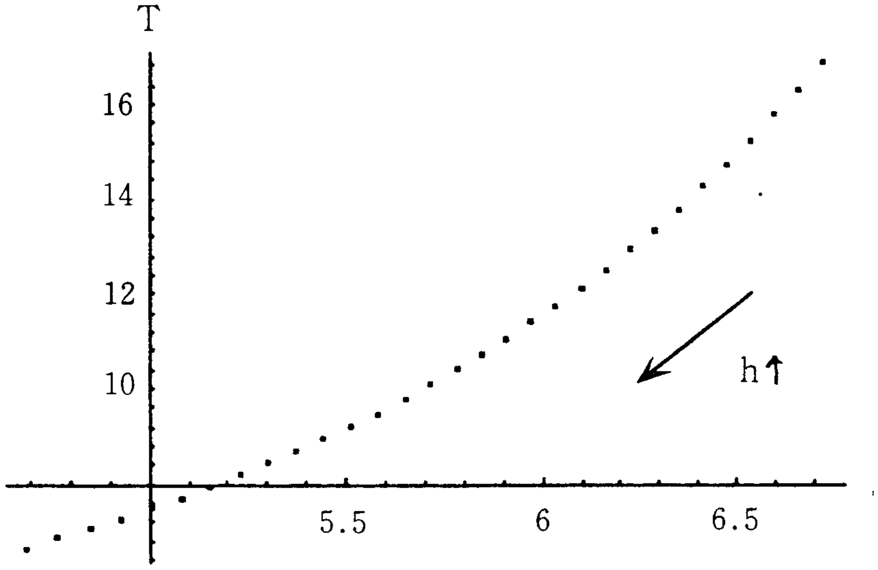

図8　h が変化することによる撤退タイミングの変化

からの撤退時刻）の変化についてみよう。表2はuが増加するときのそれぞれのタイミングの変化である。図6は表2の値を，横軸に広告停止時刻を縦軸を撤退タイミングをとったそれぞれのタイミングの組の散布図である。uが増加するにしたがって両方の撤退タイミングが早まることがわかる。これは前述のようにuの増加による市場の限界が厳しくなり，したがって市場に対する魅力が減少するからである。

表2

u	t	T
0.67	6.72593	16.8437
0.68	6.70388	16.7437
0.69	6.68202	16.6436
0.7	6.66033	16.5436
0.71	6.63881	16.4436
0.72	6.61744	16.3436
0.73	6.59622	16.2435
0.74	6.57516	16.1435
0.75	6.55423	16.0435
0.76	6.53343	15.9434
0.77	6.51276	15.8434
0.78	6.49221	15.7434
0.79	6.47177	15.6433
0.8	6.45145	15.5433
0.81	6.43122	15.4432
0.82	6.4111	15.3432
0.83	6.39107	15.2432
0.84	6.37113	15.1431
0.85	6.35128	15.0431
0.86	6.3315	14.943
0.87	6.31179	14.8429
0.88	6.29215	14.7429
0.89	6.27258	14.6428
0.9	6.25307	14.5428
0.91	6.23361	14.4427
0.92	6.2142	14.3426
0.93	6.19483	14.2426
0.94	6.17551	14.1425
0.95	6.15622	14.0424
0.96	6.13696	13.9423
0.97	6.11773	13.8423
0.98	6.09852	13.7422
0.99	6.07933	13.6421
1	6.06015	13.542

表3はϵが増加するときのそれぞれのタイミングの変化である。図7によるとϵが増加するにしたがって製品分野からの撤退タイミングは単調に遅くなることがわかる。これは飽和水準が高くなるから市場に長く留まろうとする誘因が生まれるからである。ところが，広告停止時刻は，製品分野からの撤退タイミングと異なり，始め遅くなり，やがて反転し早くなることがわかる。余りにも急速な市場の成長は，市場がその飽和水準に達するのも速いということを意味する。したがって飽和水準に達した後は初期に行なった広告の余力によって後半は広告を行なわなくても十分であるということができる。

表4はhが増加するときのそれぞれのタイミングの変化である。対応する図8によるとhの増加によって両方のタイミングが早くなる。

表3

ε	t	T
0.65	7.12731	9.2225
0.66	7.18155	9.48646
0.67	7.22453	9.74849
0.68	7.25738	10.0089
0.69	7.28118	10.2679
0.7	7.29696	10.5258
0.71	7.30567	10.7826
0.72	7.30819	11.0387
0.73	7.30531	11.294
0.74	7.29774	11.5488
0.75	7.28614	11.803
0.76	7.27106	12.0569
0.77	7.25301	12.3103
0.78	7.23242	12.5634
0.79	7.20967	12.8163
0.8	7.1851	13.0689
0.81	7.15899	13.3214
0.82	7.13159	13.5736
0.83	7.10312	13.8257
0.84	7.07377	14.0777
0.85	7.0437	14.3295
0.86	7.01304	14.5812
0.87	6.98191	14.8329
0.88	6.95043	15.0844
0.89	6.91866	15.3359
0.9	6.88671	15.5874
0.91	6.85461	15.8387
0.92	6.82244	16.09
0.93	6.79025	16.3413
0.94	6.75806	16.5925
0.95	6.72593	16.8437

表4

h	t	T
0.4	6.72593	16.8437
0.41	6.66143	16.2642
0.42	6.59766	15.7123
0.43	6.53451	15.186
0.44	6.47184	14.6836
0.45	6.40955	14.2034
0.46	6.34751	13.744
0.47	6.28561	13.304
0.48	6.22374	12.8823
0.49	6.16178	12.4777
0.5	6.09964	12.0892
0.51	6.0372	11.7157
0.52	5.97437	11.3564
0.53	5.91105	11.0106
0.54	5.84714	10.6774
0.55	5.78257	10.3561
0.56	5.71725	10.046
0.57	5.65111	9.74664
0.58	5.58407	9.45734
0.59	5.51608	9.17759
0.6	5.44707	8.90689
0.61	5.37699	8.64476
0.62	5.3058	8.39078
0.63	5.23346	8.14452
0.64	5.15993	7.90559
0.65	5.0852	7.67364
0.66	5.00924	7.4483
0.67	4.93204	7.22926
0.68	4.85359	7.0162
0.69	4.77389	6.80882
0.7	4.69294	6.60685

参考文献

荒木長照（1993），『退出一戦略とタイミングのモデル分析一』，大阪府立大学経済研究叢書第77冊。

Erickson, G. M. (1992), *Dynamic Models of Advertising Competition*, Kluwer Academic Publishers.

Bensoussan, A., E. Gerald Hurst, Jr. and B. Naslund (1974), *Management Applications Modern Control Theory*, North-Holland.

Tapiero, C. S. (1988), *Applied Stochastic Models and Control in Management*, North-Holland.

Thompson, G. L. (1968), "Optimal Maintenance Policy and Sale Date of a Machine," *Management Science*, 14, 543-550.

山口昌哉編 (1979),『非線型の現象と解析』, 日本評論社。