ソ連国営企業従業員の短期・長期行動分析(村上義弘教授還暦記念号)

ソ連国営企業従業員の短期・長期行動分析[1]

宮 本 勝 浩

ソ連経済のミクロ理論分析では，これまで生産主体である国営（工業）企業，またはその企業長の行動が主たる研究対象として取り扱われてきた。しかしその国営企業に従事する一般従業員の行動は，これまでほとんど理論的研究の対象として分析されていない。

本論では，国営企業に従事する一般従業員の行動様式を短期と長期の経済モデルを用いて分析することを目的としている。

第一節　短期経済モデル

国営企業に従事する一般従業員は，自由主義経済の労働者と同様に，労働を提供し，その代価としての所得を得るという行動様式をとる。この代表的従業員の効用関数を，

$$U=U(I,\ L_2), \tag{1}$$

で表し，Iは総所得，$\bar{L}$はこの従業員の総時間であり，これは労働時間（L_1）と余暇の時間（L_2）に分けることができる。この効用関数Uはそれぞれの変数に関して連続であり二次まで偏微分可能であると仮定する。さらにその偏導関数は次の性質を持つものと仮定する。

$$U_1=\frac{\partial U}{\partial I}>0,\qquad U_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial I^2}<0,$$

$$U_2=\frac{\partial U}{\partial L_2}>0,\qquad U_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial L_2^2}<0, \tag{2}$$

（1） 本論作成にあたり大阪学院大学の和田貞夫教授および大阪府立大学経済学研究会の会員の方々から多くのコメントをいただきましたことを感謝いたします。

$$U_{21}=\frac{\partial^2 U}{\partial L_2 \partial I}=\frac{\partial^2 U}{\partial I \partial L_2}=U_{12}>0.$$ [2]

一般従業員の総所得は，規定の賃金と賃金以外のボーナス（B）から成り立っており，

$$I=wL_1+B, \qquad (3)$$

上式で表されるが，ここで w は時間当りの賃金率（所与）であり，wL_1 は賃金所得を意味する。

従業員は賃金以外に，政府または上部計画機関の定めた計画目標（成功指標）を生産実績が上回った場合，出来高に応じたボーナス（成功報酬）を得るものと仮定する。

$$B=\frac{b}{N}(X-\bar{X}) \qquad (4)$$ [3]

ここで b はボーナス・パラメーターであり（$b>0$），X は生産実績，$\bar{X}$ は計画目標値である。[4] N は当該国営企業に従事する一般従業員の人数であり，$b(X-\bar{X})$ は一般従業員全員に与えられるボーナスの総額である。

国営企業の生産関数は単純化のため唯一の生産要素労働によってのみ表されると仮定する。

（2）$U_{12}=U_{21}>0$ は Bonin〔3〕で用いられた仮定であり，所得の限界効用（余暇の限界効用）が余暇（所得）の増加とともに増加することを意味している。

（3）ボーナスを決定するシステムは（4）式以外多くのものが考案されている。代表的な三システムを次に例示する。

(A)　$X \geqq \bar{X}$ の時　$B=B_0+b(X-\bar{X})$

　　$X<\bar{X}$ の時　$B=0$

　　B_0 は定額ボーナス，　b はボーナス・パラメーター。

(B)　$B=a\bar{X}+ka(X-\bar{X})$

　　$X>\bar{X}$ の時　$k<1$

　　$X<\bar{X}$ の時　$k>1$,　a はボーナス・パラメーター。

(C)　$X \geqq \hat{X}$ の時　$B=B_0+\beta(\hat{X}-\bar{X})+\alpha(X-\hat{X})$,

　　$X<\hat{X}$ の時　$B=B_0+\beta(\hat{X}-\bar{X})+\gamma(X-\hat{X})$,

　　$\gamma>\beta>\alpha>0$,　$\hat{X}$ は企業申請の計画目標値。

（4）X，$\bar{X}$ が具体的にどのような経済変数を意味するかは，ソ連経済のミクロ分析においては一つの重要な問題であり，具体的には生産高，売上高，利潤額，利潤率，等が考えられているが，本論では生産高を表すものと仮定する。

$$X = F(NL_1). \tag{5}$$

生産関数Fは連続で二次まで微分可能であり，労働の限界生産力が正でかつ逓減的であると仮定する。

$$F' > 0, \quad F'' < 0. \tag{6}$$

この代表的従業員の効用関数は，

$$U = U\left(wL_1 + \frac{b}{N}(F(NL_1) - \bar{X}),\ L_2\right), \tag{7}$$

で表され，総時間の制約

$$\bar{L} = L_1 + L_2, \tag{8}$$

のもとで，従業員は（7）式を最大にする行動をとる。

効用最大の必要条件は，

$$U_1 \cdot (w + b \cdot F') = U_2 \tag{9}$$

(5)

で表され，これはこの従業員が一単位の時間を労働に向けた時の所得増加による限界効用と，同じ一単位の時間を余暇に向けた時の限界効用が等しいことをしめしている。

また効用最大の十分条件の第二条件式は，

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & U_{11}(w+bF')^2 + U_1 bF'' & U_{12}(w+bF') \\ -1 & U_{21}(w+bF') & U_{22} \end{vmatrix} > 0, \tag{10}$$

(6)

である。

次にそれぞれのパラメーターが変化した時，この従業員は彼の総時間の労働と余暇への配分をどのように変えるであろうかということをみるために従業員の行動について比較静学分析を行う。

（10）式のヘシアンの値をHで表す。

$$\frac{\partial L_1}{\partial \bar{L}} = \frac{U_{12}(w+bF') - U_{22}}{H} > 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \bar{L}} = \frac{-U_{11}(w+bF')^2 - U_1 bF'' + U_{21}(w+bF')}{H} > 0, \tag{12}$$

（5） 数学注1を参照されたい。

（6） 数学注1を参照されたい。

$$\frac{\partial L_1}{\partial w}=\frac{-U_{21}L_1+U_{11}(w+bF')L_1+U_1}{H}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial b}=\frac{\frac{X-\bar{X}}{N}\{U_{21}+U_{11}(w+bF')\}+U_1F'}{H}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \bar{X}}=\frac{b\{U_{21}-U_{11}(w+bF')\}}{NH}>0.^{(7)} \tag{15}$$

この代表的従業員は自己の自由になる総時間が増加すれば，それを労働と余暇の両方に向けようとする。また政府が国営企業の従業員の関心を企業労働に向けさせる目的で，賃金率を引きあげたり，ボーナス・パラメーターの値を上昇させたとしても，それが即労働時間の増加につながるとは限らない。したがって生産向上のため政府が賃金率，ボーナス・パラメーターを変化させることは必ずしも効果的ではない。しかし，政府が計画目標値を上昇させれば，従業員は総所得の減少を嫌って，生産を高める努力をおこなうので，計画目標を政策パラメーターとして用いることは効果があると考えられる。

第二節　長期経済モデル

この節では長期的な計画期間において，国営企業の一般従業員がどのような行動をとるかを分析する。

計画期間を $T(>0)$ とすると，T 期間の従業員の効用の現在価値は，

$$\int_0^T U(I(t))e^{-\gamma t}dt, \tag{16}$$

で表される。$\gamma(>0)$ は割引率であり，$I(t)$ は t 期の所得を表している。

政府は次期計画目標を決定するのに次の関数を用いると仮定する。

$$\bar{X}(t+1)=X(t)+\alpha X(t). \tag{17}$$

次期の計画目標は今期の生産実績に基いて決定される。α はノルマ・パラメーターであり $0<\alpha<1$ を仮定する。

次期計画目標決定関数を（17）とするとボーナス関数（4）は次のように表される。

（7）　数学注2を参照されたい。

$$B(t)=\frac{b}{N}(X(t)-\bar{X}(t))=\frac{b}{N}(X(t)-X(t-1)-\alpha X(t-1)). \tag{18}$$

ここで差分方程式体系でなく微分方程式体系で分析を行うために (18) 式を次のように変形する。

$$B(t)=\frac{b}{N}(\dot{X}-\alpha X). \tag{19}$$

ここで $\dot{X}=\frac{dX}{dt}$ である。

従業員の総所得は賃金とボーナスの和であるから (20) 式のように表される。

$$I(t)=wL_1(t)+\frac{b}{N}(\dot{X}(t)-\alpha X(t)). \tag{20}$$

生産関数は第一節で用いられた生産関数を仮定する。

$$X=F(NL_1). \tag{5}$$

この時，代表的一般従業員の効用の現在価値は,

$$\int_0^T U\left[wL_1(t)+\frac{b}{N}\{F'\cdot N\cdot\dot{L}_1(t)-\alpha F(NL_1(t))\}\right]e^{-\gamma t}dt, \tag{21}$$

で表される。

初期の労働供給時間を $L_1(0)=L_1^0$ 一定とし，計画期間 T (所与) とすれば，代表的一般従業員が彼の効用の現在価値を最大化する問題は，ポントリヤーギン最大値原理の問題におきかえて考えることが出来る。しかしここでは変分法のオイラーの定理を用いて分析する。(21) 式の効用の最大化必要条件はオイラーの定理より次のように表される。

$$\dot{I}=\frac{U'}{U''bF'}\{w-bF'(\alpha-\gamma)\}.^{(8)} \tag{22}$$

また (20) 式より

$$\dot{L}_1=\frac{1}{bF'N}\{NI-wNI+b\alpha F(NL_1)\}. \tag{23}$$

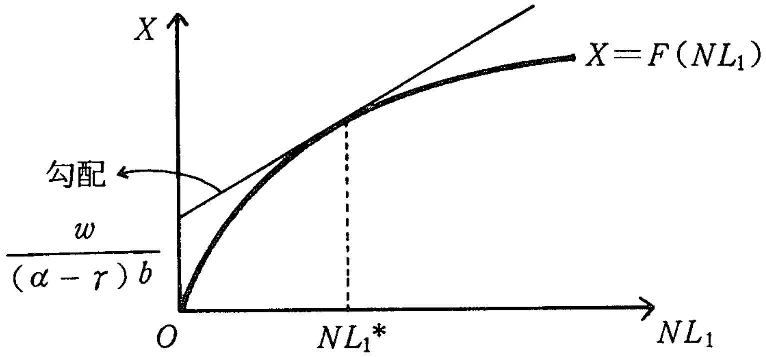
が求まる。ここで経済的な意味を持たせるために $\alpha-\gamma>0$ を仮定する。

$\dot{I}=0$ の時,

(8) 数学注3を参照されたい。

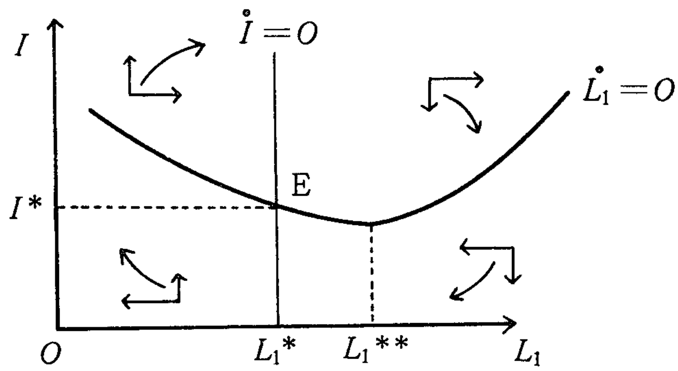
$$w=b\cdot F'(\alpha-\gamma),\tag{24}$$

が成立するが，この（24）式が成立する時の NL_1 を NL_1^* とすれば，第1図の生産関数の接線の勾配が，$\dfrac{w}{(\alpha-\gamma)b}$ の時の横軸の値が NL_1^* となる。



（第1図）

第2図において $\dot{I}=0$ の曲線は $L_1=L_1^*$ において垂線となり，$\dot{I}=0$ の直線の左側では $\dfrac{dI}{dt}>0$，右側では $\dfrac{dI}{dt}<0$ となる。



（第2図）

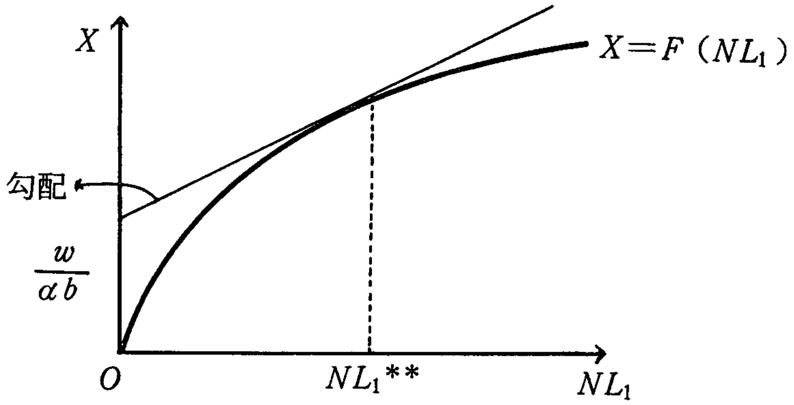
次に $\dot{L}_1=0$ の時，

$$I=\frac{1}{N}(wNL_1-\alpha bF(NL_1)),\tag{25}$$

が成立するが，この時，

$$\frac{\partial I}{\partial L_1}=w-\alpha bF'\tag{26}$$

であるから，生産関数の接線の勾配が $\dfrac{w}{\alpha b}$ と等しい時の NL_1 を NL_1^{**} とすると第2図で描かれる。



(第3図)

(26) 式より,

$L_1^{**}>L_1$ の時 $\quad \frac{\partial I}{\partial L_1}>0,$

$L_1^{**}=L_1$ の時 $\quad \frac{\partial I}{\partial L_1}=0,$

$L_1^{**}<L_1$ の時 $\quad \frac{\partial I}{\partial L_1}<0.$

このことより $\dot{L}=0$ の曲線は第2図に描かれた形態をとる。そして $\dot{L}_1=0$ の曲線より上部では $\frac{dL_1}{dt}>0$, 下部では $\frac{dL_1}{dt}<0$ となる。さらに $\frac{w}{(\alpha-\gamma)b}>\frac{w}{\alpha b}$ であるから $L_1^*<L_1^{**}$ となる。

(22), (23) 式の連立微分方程式を均衡点 (L_1^*, I^*) の近傍でテーラー展開し, 一次までの近似式を求める。さらにそれに基いた次の行列の値を求めると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{L}_1}{\partial L_1} & \frac{\partial \dot{L}_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial L_1} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha bF'(NL_1^*)-w}{bF'(NL_1^*)} & \frac{1}{bF'(NL_1^*)} \\ -\frac{U'(I^*)Nb(\alpha-\gamma)F''(NL_1^*)}{U''(I^*)bF'(NL_1^*)} & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

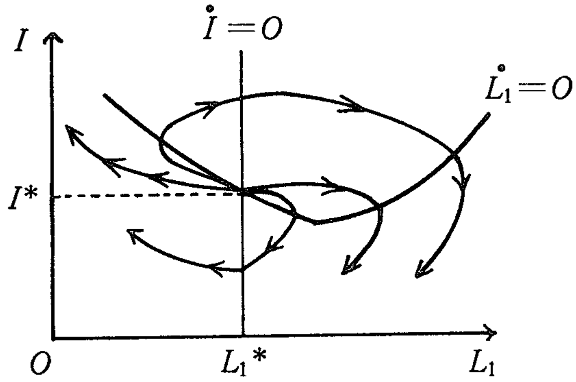
となる。この時均衡点の近傍では,

$$\frac{\partial \dot{L}_1}{\partial L_1}=\frac{\alpha bF'(NL_1^*)-w}{bF'(NL_1^*)}>0,$$

$$\frac{\partial \dot{L}_1}{\partial I}=\frac{1}{bF'(NL_1^*)}>0,$$

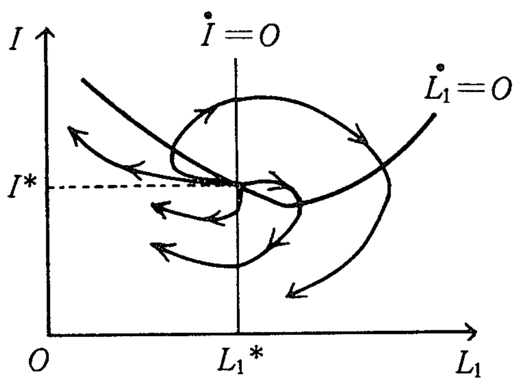
$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial L_1}=-\frac{U'(I^*)Nb(\alpha-\gamma)F''(NL_1^*)}{U''(I^*)bF'(NL_1^*)}<0,$$

となる。この符号に基き（27）式の特性根が，(A)相異なる二実根の場合，(B)相等しい実根の場合，(C)正の実部を持つ複素根の場合に分けて考えると次のような位相図となる。



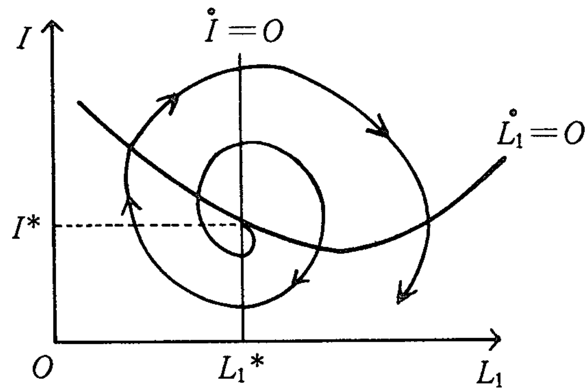
(A)の場合

（第４のA図）



(B)の場合

（第４のB図）

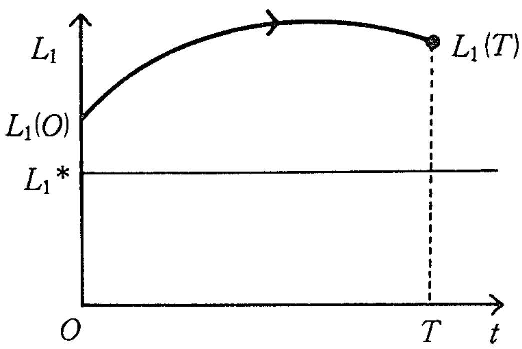


(C)の場合

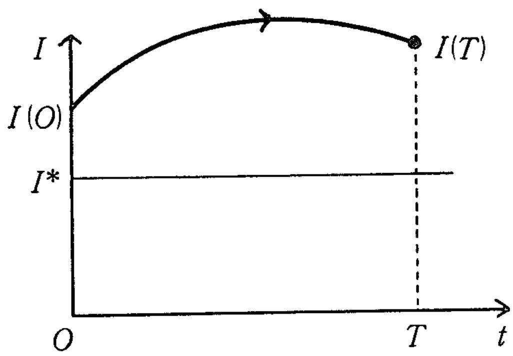
（第４のC図）

このように均衡点（$L_1{}^*$，I^*）は不安定であることがわかる。

次の計画期間Tを横軸にとって時間経過を考えてみる。



（第５図）



（第６図）

縦軸に労働供給 L_1 をとった第5図においては，計画期間をとおして最適計画の経路は均衡値 L_1^* に近づかず，遠ざかりながら最終点（$L_1(T)$）に到達する。同様に縦軸に所得 I をとった第6図においても，計画期間をとおして最適計画の経路は均衡値 I^* に近づかず，遠ざかりながら最終点 $I(T)$ に到達する。

従来の最適成長理論では，ラムゼーの最適貯蓄理論から発展した「消費ターンパイク定理」においても，ドーフマン・サムエルソン・ソローの研究より発展した「生産ターンパイク定理」においても，計画期間をとおして最適計画の経路は均衡経路に近づきつつ最終点に到達するというパターンであったが，本論で研究したソ連国営企業の一般従業員の長期最適経路は，均衡値から遠ざかりながら最終点に到達するという特殊な経路をとるので，「ターンパイク定理」に対応して「田舎道定理（Country-lane theorem)」と呼ぶことにする。

数学注1

代表的従業員は，総時間制約

$$\bar{L}=L_1+L_2, \tag{1—1}$$

のもとで，彼の効用

$$U=U\left(wL_1+\frac{b}{N}(F(NL_1)-\bar{X}),\ L_2\right), \tag{1—2}$$

を最大にする。

ラグランジ関数は，

$$\mathcal{L}(L_1, L_2, \lambda)=U\left(wL_1+\frac{b}{N}(F(NL_1)-\bar{X}),\ L_2\right)+\lambda(\bar{L}-L_1-L_2), \tag{1—3}$$

で表され，λ はラグランジ乗数である。

最大の必要条件は，次の三式で表される。

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L_1}=U_1\cdot(w+b\cdot F')-\lambda=0, \tag{1—4}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L_2}=U_2-\lambda=0, \tag{1—5}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=\bar{L}-L_1-L_2=0. \tag{1—6}$$

(1—4) と (1—5) より，効用最大の条件式は，

$$U_1\cdot(w+b\cdot F')=U_2. \tag{1—7}$$

で表される。

また，効用最大の十分条件の第二条件式は，

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & U_{11}(w+bF')^2+U_1bF'' & U_{12}(w+bF') \\ -1 & U_{21}(w+bF') & U_{22} \end{vmatrix}>0, \tag{1—8}$$

である。

数学注 2

数学注 1 の (1—4)，(1—5)，(1—6) 式より次式をえる。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & U_{11}(w+bF')^2+U_1bF'' & U_{12}(w+bF') \\ -1 & U_{21}(w+bF') & U_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\lambda \\ dL_1 \\ dL_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -d\bar{L} \\ -\{U_1+U_{11}(w+bF')L_1\}dw-\left\{U_1F'+\dfrac{(X-\bar{X})}{N}U_{11}(w+bF')\right\}db \\ +U_{11}(w+bF')\dfrac{b}{N}d\bar{X} \\ -U_{21}L_1dw-U_{21}\dfrac{(X-\bar{X})}{N}db+U_{21}\dfrac{b}{N}d\bar{X} \end{pmatrix}$$

(2—1)

数学注 3

オイラーの定理 (Euler's theorem) は，

$$\frac{\partial U}{\partial L_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{L_1}}\right), \tag{3—1}$$

であるから，

$$U'(w+bF''N\dot{L_1}-\alpha bF')=U''bF'\dot{I}+U'bF''N\dot{L_1}-\gamma U'bF', \tag{3—2}$$

が成立し，これを整理すると本文 (21) 式が求まる。

参考文献

(1) Arrow, K. J., "Applications of Control Theory to Economic Growth," in *Mathematics of the Dicision Sciences*, Part 2, ed. by G. B. Dantzig, A. F. Veinott, Jr., Providence, American Mathmatical Society, 1968.

(2) Atsumi, H., "Neoclassical Growth and the Efficient Program of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, April, 1965.

(3) Bonin, J. P., "Work Incentives and Uncertainty on a Collective Farm," *Journal of Comparative Economics*, Vol. 1, No. 1, March, 1977.

(4) Dorfman, R., P. A. Samuelson and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, N. Y., McGraw-Hill 1958.

(5) Gindin, S., "A Model of the Soviet Firm," *Economic Planning*, Vol. 10, No. 3, 1970.

(6) Hadley, G., and M. C. Kemp, *Variational Methods in Economics*, Amsterdam, North-Holland, 1971.

(7) Heal, G. M., *The Theory of Economic Planning*, Amsterdam-London, North-Holland, 1973.

(8) Inada, K., "Some Structural Characteristics of Turnpike Theorems," *Review of Economic Studies*, Januray, 1964.

(9) Karlin, S., *Mathematical Methods and Thery in Games, Programming and Economics*, Addison-Wesley. 1959.

(10) Kemeny, J. G., O. Morgenstern and G. L. Thompson, "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy," *Econometrica*, April, 1956.

(11) Mckenzie, L. W., "Turnpike Theorems for a Generalized Leontief Model," *Econometrica*, Jan.-April, 1963.

(12) Morishima, M., "Proof of a Turnpike Theorem: The No Joint Production Case," *Review of Economic Studies*, Feb. 1961.

(13) Nikaido, H., "Presistence of Continual Growth near the von Neumann Ray-A Strong Version of the Radner Turnpike Theorem," *Econometrica* April 1964.

(14) Keren. M., J. Miller and J. R., Thornton," The Ratchet: A Dynamic Managerial Incentive model of the Soviet Enterprise," *Journal of Comparative Economics*, Vol. 7, No. 4, Dec. 1983.

(15) Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gramkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical theory of Optimal Processes* (translated by K. N. Trirogoff), N. Y., Interscience Pub. 1962.

(16) Radner, R., "Paths of Economic Growth that are Optimal with regard

only to Final States: a Turnpike Theorem," "*Review of Economic Studies*, Feb. 1961.

(17) Ramsey, F. P., "Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, Dec. 1982.

(18) Samuelson, P. A., "Efficient Paths of Capital Accumulation in terms of Calculus of Variations," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, Stanford, Stanford Univ. Press, 1960.

(19) 佐藤隆三「経済成長の理論」勁草書房, 昭和43年。

(20) Shell, K., "Applications of Pontriagin's Maxmum Principle to Economics," in *Mathematical Systems Theory and Economics*, ed. by H. W. Kuhn and G. P. Szegö N. Y., Springer, 1967.

(21) Takayama, A., *Mathematical Economics*, Hinsdale, Dryden Press, 1974.

(22) 和田貞夫「経済成長と資本の理論」東洋経済新報社, 昭和50年。

(23) Weitzman, M. L., "The New Soviet Incentive Model," *Bell Journal of Economics*, Vol. 7, Spring, 1976.

(24) Weitzman, M. L., "The Ratchet Ppinciple and Performance Incentives," *Bell Journal of Economics*, Vol. 11, Spring, 1980.

(25) Yunker, J. A., "A Dynamic Optimization Model of the Soviet Enterprise," *Economic Planning*, Vol. 13, 1973.