<論説>企業における投資と研究・開発(市橋英世鈴木和蔵教授記念号)

メタデータ	
	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2009-08-25
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 前田, 英昭
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00001800

企業における投資と研究・開発

前　田　英　昭

1. 序

今日の企業にとって生産技術の研究・開発はますます重要性をましてきている。われわれはかって資本財への投資と共に生産技術の研究・開発に関する企業の最適な政策について論じたことがある。(1) この小論もまた同じ問題意識の延長上にある。それらの諸論文では技術進歩は，支出される研究・開発費の直接的な成果としてとらえられていたが，ここでは新しい技術を生むプロセスを表わす生産関数を考え，そのプロセスへの資源の投入とその成果の産出の間にはタイム・ラブがあるものと想定している。このようなタイプのアプローチとしては Sato〔5〕などが知られているが，われわれのモデルでは，彼のものとは異なって，資本設備への投資と技術の研究・開発が同時に考察され，そして生産物の生産と生産技術の研究・開発の間に直接的なトレード・オフが考慮されている。しかしながらここで展開される議論はきわめて単純なモデルにもとずくものであるにすぎず，重要な諸要因が考慮されていないことを認めなければならない。

2. モデル

1種類の生産物の生産と同時に新しい生産技術の研究・開発を行なっている企業を考える。それぞれの時点における生産は，1種類の資本ストックに，可変的な生産要素を結合することによってなされる。そしてこの資本ストックは生産と研究・開発の両方に使用できるものと仮定する。時点 t において生産される生産物の量は，そのために配分される資本ストックの大きさとそのときの生産技術の水準によって規定されるものとする。可変的な生産要素の投入量

(1) Maeda〔1〕，前田〔2〕〔3〕

は，それぞれの時点において，使用される資本ストックの大きさに対して適当に調整されるものと想定する。

このような生産活動が，きわめて単純な形の生産関数

$$y(t)=a(t)F[\alpha(t)k(t)] \tag{1}$$

によって要約されるものとする。ここで $y(t)$ は時点 t における生産量，$a(t)$ は技術水準，$k(t)$は全体としての資本ストック，$\alpha(t)$は資本ストックのうち生産活動のために使用される部分の割合である。

生産技術の進歩もまた企業がその利用可能な資源を研究・開発へ投入することによってもたらされる。企業は，将来，より効率的な生産技術によって，より多くの利潤を獲得しようとして，現在利用可能な資源あるいは利潤の一部を生産技術の研究・開発のために「投資」する。研究・開発のために用いられる資源は，生産物の生産に用いられる資本設備と同じように，長期間にわたってサーヴィスを供給しつづけ，時と共にその効果が減少する。生産技術の進歩は，研究・開発への投資の結果として「生産」されるのである。これらのプロセスは技術進歩の「生産関数」を定義することによってあつかうことができる。なおここで考察される技術進歩は，(1) を見ればわかるように，生産物の生産関数を全体としてシフトさせる，いわゆる disembodied のタイプのものである。

研究・開発活動の特徴の一つは，それへの資源の投入が，一般には，すぐに成果を産み出すものではないということである。そこで新技術の生産プロセスへの「生産要素」の投入と「生産物」の産出との間にはタイム・ラグが存在するものと想定する。

われわれは，生産物の生産に用いられるのと同じ資本ストックが生産技術の研究・開発にも使用されることを想定したが，一般には研究・開発のためには，種々の特殊な種類の財や特殊な能力をもった専門家などが必要であろう。われわれは，議論を簡単にするために，Sato〔5〕の場合とは異なって，ここではそれらのすべてを捨象する。新技術の生産は，生産物の生産と同じ種類の資本ストックに（ここでは特定されていない）可変的な要素を適切に結合することによって行なわれるものと仮定する。したがって，われわれのここでの問題の一つは，生産物の生産と新技術の生産の間に資本ストックをどのように配

分するかということである。研究・開発活動を基礎的なそれと応用的なそれというようにいくつかの段階に分けて考察することはここではなされていない。Sodo のモデルでは生産物の生産と新技術のそれとの間の相互作用は直接あつかわれていないが，われわれのモデルにはそれらの間のトレード・オフの関係が含まれている。

さて，新しい生産技術の生産関数をSで表わすことにしよう。それぞれの時点における技術の粗進歩は，タイム・ラグがない場合には，その時点に研究・開発活動に配分される資本ストックの関数 S の値によって与えられる。これは，タイム・ラグがある場合には，それがなければ実現するはずの技術の潜在的粗進歩と解釈することができる。このとき現実の技術進歩は累積的であって，その時間的プロセスは次のような積分－微分方程式によって表現することができる。(2)

$$\dot{a}(t)=\int_{-\infty}^{t} S\,[\beta(\tau)k(\tau)]\varphi(t-\tau)d\tau-\mu a(t) \qquad (2)$$

ここで $\beta(\tau)$ は企業が保有する資本ストックのうち時点τに研究・開発活動に用いられる部分の割合であり，またμは生産技術の「減耗」率であり，時を通じて一定であると仮定する。研究・開発活動の一部はこのような減耗分の補填あるいは更新にむけられる。関数φはしばしば加重関数とよばれているものであり，次の条件をみたすものとする。

$$\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)d\tau=1,\quad \varphi(t-\tau)\geqq 0 \qquad (3)$$

方程式(2)は，時点tに実現される技術の粗進歩が過去からその時点にいたるまでの関数Sの値の加重平均であることを示している。

加重関数としてどのようなものが適当であるかについてはいくつかの考え方があり得る。研究・開発投資の効果は新しいものほど大きいと考えて，過去から現在までウエイトが連続的に増加する指数型の関数を想定することにも，また同じく指数型の関数を想定するが，過去のある特定の期間になされた投資の効果までしか考慮せず，それ以後の投資は現在の技術進歩には効果をもたないと考えることにも充分に理由があるように思われる。さらにこれらとは異なっ

---

(2)　dot(•)は時間に関する微分を表わす。

て，逆V字型あるいは逆U字型の加重関数によって，ある特定の時点における研究・開発投資が現在の技術進歩にもっとも大きい効果をもつと想定することもできる。(3) なお，加重関数について

$$\varphi(t-\tau)=1,\quad \tau=t$$

$$\varphi(t-\tau)=0,\quad \tau<t$$

とおくと，タイム・ラグのないケース

$$\int_{-\infty}^{t} S[\beta(\tau)k(\tau)]\varphi(t-\tau)d\tau=S[\beta(t)k(t)] \tag{4}$$

が得られる。

生産技術は減耗することを仮定したが，生産物と技術の生産に用いられる資本もまた減耗する。その減耗率はどちらの活動に用いられても同一であり，また時を通じて一定であることを仮定する。このとき全体としての資本ストックの変化は

$$\dot{k}(t)=u(t)-\delta k(t) \tag{5}$$

によって表わすことができる。ここで $u(t)$ は時点 t における粗投資，δ は減耗率である。

企業が生産物を生産し，技術を進歩させるためには費用を必要とする。その第一は資本財（とそれに結合すべき可変的要素）を購入する費用である。第二は購入された資本財をどちらかの生産プロセスで使用できるようにするための費用や資本ストックの変化にともなって必要となる可変的要素にかかわる追加的な費用などを含む（外部的）調整費用である。内部的調整費用を考慮しないことにすると，これらの費用は粗投資の関数と考えることができる。この費用を購入・調整費用とよぶことにし，$C[u(t)]$で表わす。費用の第三は，資本ストックを一方の活動から他方のそれへ転用することにともなって生じるものである。転用費用は，生産物を技術の生産に用いられる資本ストック1単位について，それぞれ $\omega(t)$，$\nu(t)$ だけ必要であると規定する。この時点 t における転用費用の全体は，$[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]k(t)$ となる。ここで ω，ν はとも

(3) 逆V字型の例としてガンマ分布がよく用いられている。Mann〔4〕はここにのべたようなタイプのいくつかの加重関数を用いて広告に関する最適政策を論じている。またガンマ分布は Sato〔5〕によっても用いられている。

に，α，βおよびkから独立であると仮定する。かくして時点tにおける総費用$E(t)$は

$$E(t)=C[u(t)]+[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]R(t) \tag{6}$$

となる。

企業は生産物の販売によって収入を得るものとする。時点tにおいて生産物1単位の販売によって$p(t)$の収入が得られ，生産されたものはすべて販売されることを仮定すると，総収入$R(t)$は

$$R(t)=p(t)y(t) \tag{7}$$

となる。ここでpはyから独立であると仮定する。(6)と(7)により，収入と費用の差としての純収入$\Pi(t)$は

$$\begin{aligned}\Pi(t)&=R(t)-E(t)\\&=p(t)a(t)F[\alpha(t)k(t)]-C[u(t)]-[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]\cdot k(t)\end{aligned} \tag{8}$$

によって与えられる。

企業の目的は将来における純収入(8)の割引現在価値Vを極大にすることであると想定する。

$$\begin{aligned}V&=\int_0^\infty \Pi(t)e^{-\rho t}dt\\&=\int_0^\infty \{p(t)a(t)F[\alpha(t)k(t)]-C[u(t)]\\&\quad-[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]k(t)\}e^{-\rho t}dt\end{aligned} \tag{9}$$

ここで$\rho>0$は割引率で，時を通じて一定であると仮定する。企業にとっての問題は(9)が極大になるように，それぞれの時点における粗投資$u(t)$と資本ストックの配分率$\alpha(t)$，$\beta(t)$を決定することである。

この極大化問題は(2)および(5)の他に次のような条件をみたさなければならないものとする。まず粗投資$u(t)$と資本ストックの配分率$\alpha(t)$，$\beta(t)$はいずれも区分的に連続であって，

$$u(t)\geqq 0,\ \alpha(t)\geqq 0,\ \beta(t)\geqq 0 \tag{10}$$

かつ

$$\alpha(t)+\beta(t)\leqq 1 \tag{11}$$

でなければならない，また資本ストックと技術水準の初期条件はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} k(t) &= \underline{k}(t) \geqq 0, \quad t \leqq 0 \\ \alpha(t) &= \underline{\alpha}(t) \geqq 0, \quad t \leqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

である。(4) パラメター ρ，δ，μ の値は

$$\rho > 0, \quad 1 > \delta > 0, \quad 1 > \mu > 0 \tag{13}$$

の範囲にあるものとする。そして二つの生産関数と購入・調整費用関数について次の性質を仮定する。すなわち $\alpha(t)k(t) = X(t)$，$\beta(t)k(t) = Y(t)$ とおくとき，

$$\left.\begin{array}{lll} F(0) = S(0) = C(0) = 0 & & \\ F(X) > 0 & & X > 0 \\ S(Y) > 0 & & Y > 0 \\ C(u) > 0 & & u > 0 \\ F_X > 0, & F_{XX} < 0, & X \geqq 0 \\ S_Y > 0, & S_{YY} < 0, & Y \geqq 0 \\ C' > 0, & C'' > 0, & u \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

なる性質をもっているものとする。ここで F_X，S_Y と F_{XX}，S_{YY} は F と S の，それぞれ X，Y に関する1次と2次の導関数である。

かくして問題は制約条件(2)，(5)および(12)の下で(9)で与えられる現在価値を極大にするように粗投資と資本ストックの配分率の時間経路を(10)，(11)がみたされるように選ぶことである。

3．モデルの解

このような問題は optimal condrel の理論を利用して解くことができる。この問題の状態変数である資本ストックの大きさ $k(t)$ と技術の水準 $a(t)$ は負の値をとってはならないが，それらが非負の初期条件(12)から出発し，制御変数 $u(t)$，$\alpha(t)$ および $\beta(t)$ が符号条件(10)をみたすかぎり，常に非負の値をとることは容易にたしかめることができる。以下においては議論を簡単にす

（4）　これらの与えられた過去の歴史 $\underline{k}(t)$，$\underline{a}(t)$ $(t \leqq 0)$ は独立な初期条件ではなく，$u(t), \alpha(t), \beta(t)$ の与えられた歴史 $\underline{u}(t), \underline{\alpha}(t), \underline{\beta}(t)$ $(t < 0)$ から得られる。

るために(10)を不等号で成立させる解が存在する場合だけを考える。

さて Sethi〔6〕にしたがって current value Hamiltonian を(9), (5) および(2)によって次のように定義する。

$$\begin{aligned}H &= H[k(t), a(t), u(t), \alpha(t), \beta(t), \lambda_1(\tau \geqq t), \lambda_2(\tau \geqq t)] \\ &= p(t)a(t)F[\alpha(t)k(t)] - C[u(t)] - [\omega(t)\alpha(t) + \nu(t)\beta(t)]k(t) \\ &\quad + \lambda_1(t)[u(t) - \delta k(t)] \\ &\quad + S[\beta(t)k(t)]\int_t^{\infty}\lambda_2(\tau)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau - \lambda_2(t)\mu a(t) \qquad (15)\end{aligned}$$

ここで $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ はいわゆる随伴変数である。与えられた $k(t)$, $a(t)$, $\lambda_1(\tau \geqq t)$ および $\lambda_2(\tau \geqq t)$ に対してHを制約条件(11)の下で極大する $u(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ の値を，それぞれ u^*, α^*, β^* と表わす。このときHの極大値は

$$\begin{aligned}\max_{u,\alpha,\beta} H &= H^*[k(t), a(t), \lambda_1(\tau \geqq t), \lambda_2(\tau \geqq t)] \\ &= H[k(t), a(t), u^*, \alpha^*, \beta^*, \lambda_1(\tau \geqq t), \lambda_2(\tau \geqq t)] \qquad (16)\end{aligned}$$

と表わすことができる。

もし $u^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), (t \geqq 0)$ が(9)を(11)と(5), (2), (12)の制約の下で極大にする制御のトラジェクトリであり，それらに対応する状態変数のトラジェクトリが $k^*(t)$, $a^*(t)$ であるならば, maximum principle により次のような非負の随伴変数のトラジェクトリ $\lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)$ が存在する：

(i) それぞれの t に対して $u^*(t)$, $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ は(11)の制約の下でHを極大にする。

(ii)
$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda}_1^*(t) &= \rho\lambda_1^*(t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial k}L\Big[k^*(t), a^*(t), u^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), \\ &\quad \lambda_1^*(\tau \geqq t), \lambda_2^*(\tau \geqq t), \gamma^*(t)\Big] \\ \dot{\lambda}_2^*(t) &= \rho\lambda_2^*(t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial a}L\Big[k^*(t), a^*(t), u^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), \\ &\quad \lambda_1^*(\tau \geqq t), \lambda_2^*(\tau \geqq t), \gamma^*(t)\Big]\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

ここでLは Lagrangean, $\gamma(t)$ は時間と共に変化する Lagrangean multiplier であって，(15)と(11)とから

$$L[k(t), a(t), u(t), \alpha(t), \beta(t), \lambda_1(\tau\geqq t), \lambda_2(\tau\geqq t), \gamma(t)]$$
$$= H+\gamma(t)[1-\alpha(t)-\beta(t)] \tag{18}$$

である。そして，$u=u^*$, $\alpha=\alpha^*$, $\beta=\beta$, $^*\lambda_1=\lambda_1^*$, $\lambda_2=\lambda_2^*$ および $\gamma=\gamma^*$ において

$$\frac{\partial L}{\partial u}=\frac{\partial L}{\partial \alpha}=\frac{\partial L}{\partial \beta}=0 \tag{19}$$

$$\gamma^*(t)\geqq 0,\quad \gamma^*(t)[1-\alpha^*(t)-\beta^*(t)]=0 \tag{20}$$

でなければならない。

これらの条件は最適性のための必要条件であるが，それらをみたすトラジェクトリの組 $\{u^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t), k^*(t), a^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)\}$ を Pontryagin Path とよぶことにする。Sethi〔7〕によれば Pontryagin Path は

(i) (16) で与えられる関数 H^* が与えられた任意の λ_1 と λ_2 に対して，k と a についての凹関数であり，

(ii) 横断条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_i(t)=0 \qquad (i=1,2) \tag{21}$$

が成立するならば最適である。これらの条件のうち (i)は，二つの生産関数と購入・調整費用関数についての仮定(14)によってみたされている。また (ii) の横断条件(21)は，すべての動きがなくなって，$\lambda_i(t)$ がそれぞれ一定値に収束するとき，$\rho>0$ であることによってみたされる。

さて最適性条件のいくつかをもう少しくわしく示すことにしよう。表現を簡単にするために，特に必要のない限り，＊印は省略する。まず随伴変数の運動に関する方程式(17)は(15)と(18)により，

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) = {} & (\rho+\delta)\lambda_1(t)-p(t)a(t)\alpha(t)F_X[\alpha(t)k(t)] \\ & +[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]-\beta(t)S_Y[\beta(t)k(t)] \\ & \times\int_t^\infty \lambda_2(\tau)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau\end{aligned} \tag{22}$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=(\rho+\mu)\lambda_2(t)-p(t)F[\alpha(t)k(t)] \tag{23}$$

また(19)は，

$$\frac{\partial L}{\partial u}=-C'[u(t)]+\lambda_1(t)=0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=p(t)a(t)k(t)F_X[\alpha(t)k(t)]-\omega(t)k(t)-\gamma(t)=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}=-\nu(t)k(t)+k(t)S_Y[\beta(t)k(t)]\int_t^{\infty}\lambda_2(\tau)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau-\gamma(t)=0 \tag{26}$$

これらの条件のうち，(24)は資本財の限界購入・調整費用が資本財への粗投資の帰属価値（current value）に等しくなるように粗投資が決定されるべきであることを示している。これに対して(25)と(26)は資本ストックの配分率の決定法則を規定している。(25)を書き直すと，complementary slackness condition (20)により

$$p(t)a(t)k(t)F_X-\omega(t)k(t)=\gamma(t)\geqq 0 \tag{27}$$

であるから，生産活動への配分率αについての生産物からの限界収入がその部門への限界転用費用よりも小さくなってはならないことを示している。同様に(26)から

$$-\nu(t)k(t)+k(t)S_Y\cdot\int_t^{\infty}\lambda_2(\tau)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau=\gamma(t)\geqq 0 \tag{28}$$

であるから，技術開発活動への資本ストックの配分率に関する限界転用費用は，その配分率の帰属価値の（時を通じての）加重平均とそれの限界技術開発力の積を超えてはならない。

また資本ストックの配分率は(25)と(26)または(27)と(28)から

$$p(t)a(t)F_X[\alpha(t)k(t)]-\omega(t)$$
$$=-\nu(t)+S_Y[\beta(t)k(t)]\int_t^{\infty}\lambda_2(t)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau$$

をみたすように決定されなければならない。

特に(11)が不等号で成立する，すなわち

$$\alpha(t)+\beta(t)<1$$

ならば，(20)により $\gamma(t)=0$ であるから上式の両辺が共にゼロになるように配分率は決定されなければならない。(27)と(28)のそれぞれにおいて配分率に関する限界転形費用の方が小さいならば，$\gamma(t)>0$ でなければならず，これは

$$\alpha(t)+\beta(t)=1$$

であることを意味するから，企業の保有する資本ストックは，すべて，生産物の生産と技術の研究・開発のために利用しつくされる。

4.　定常状態

今度はすべての状態変数と随伴度数の運動がなくなり，それらがそれぞれ一定値に収束する定常状態あるいは長期均衡点の近くにおける Pontryagin Path について吟味する。

はじめに時間 t が充分に大きくなるとき，最適条件のいくつかが次に示すように，簡単な形に書きかえられることに注意しよう。技術水準の変化を規定する方程式(2)において $\sigma=t-\tau$ とおくと，

$$\int_{\infty}^{t} S[\beta(\tau)k(\tau)]\varphi(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} S[\beta(t-\sigma)k(t-\sigma)]\varphi|\sigma)d\sigma$$

となる。そして t が充分に大きいところでは

$$\beta(t-\sigma)\fallingdotseq\beta(t),\quad k(t-\sigma)\fallingdotseq k(t)$$

とすることができる。したがってこのとき

$$\int_{0}^{\infty} S[\beta(t-\sigma)k(t-\sigma)]\varphi(\sigma)d\sigma$$

$$\fallingdotseq S[\beta(t)k(t)]\int_{0}^{\infty}\varphi(\sigma)d\sigma$$

$$=S[\beta(t)k(t)]$$

となる。ここで最後の等号は(3)による。これと同様に(15)その他に含まれている λ_2 の加重平均は，$\sigma=\tau-t$ とおくことによって

$$\int_{t}^{\infty}\lambda_2(\tau)e^{-\rho(\tau-t)}\varphi(\tau-t)d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}\lambda_2(\sigma+t)e^{-\rho\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma$$

と書きかえられ，$t\fallingdotseq\infty$ のとき $\lambda_2(\sigma+t)\fallingdotseq\lambda_2(t)$ とすることができるから，さらに

$$\int_{0}^{\infty}\lambda_2(\sigma+t)e^{-\rho\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma$$

$$\fallingdotseq\lambda_2(t)\int_{0}^{\infty}e^{-\rho\tau}\varphi(\sigma)d\sigma$$

となる。

これらの結果を用いると，t が充分に大きいところでは，状態変数と随伴変

数の変化の方程式(5)，(2)，(22)，(23)はそれぞれ下のように表わされる。

$$\dot{k}(t)=u(t)-\delta k(t) \tag{29}$$

$$\dot{a}(t)=S[\beta(t)k(t)]-\mu a(t) \tag{30}$$

$$\dot{\lambda}_1(t)=(\rho+\delta)\lambda_1(t)-p(t)a(t)\alpha(t)F_X[\alpha(t)k(t)] \\ +[\omega(t)\alpha(t)+\nu(t)\beta(t)]-\theta\lambda_2(t)\beta(t)S_Y[\beta(t)k(t)] \tag{31}$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=(\rho+\mu)\lambda_2(t)-p(t)F[\alpha(t)k(t)] \tag{32}$$

ここで

$$\theta=\int_0^\infty e^{-\rho\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma$$

である。ここで(30)は研究・開発活動への投入と産出の間にタイム・ラグのない(4)の場合における変化の方程式と同じものである。

また(24)，(25)および(26)はそれぞれ次のようなものとなる。

$$-C'[u(t)]+\lambda_1(t)=0 \tag{33}$$

$$p(t)a(t)k(t)F_X[\alpha(t)k(t)]-\omega(t)k(t)-\gamma(t)=0 \tag{34}$$

$$-\nu(t)k(t)+\theta\lambda_2(t)k(t)S_Y[\beta(t)k(t)]-\gamma(t)=0 \tag{35}$$

最後に complementary slackness condition (20)は

$$\gamma(t)\geqq 0,\ \ \gamma(t)[1-\alpha(t)-\beta(t)]=0 \tag{36}$$

さて $t\to\infty$ のとき $p(t), \nu(t), \omega(t)$ がそれぞれ $p(t)\to p,\ \omega(t)\to\omega,\ \nu(t)\to\nu$ のように一定値に収束することを仮定すると，$\dot{k}=\dot{a}=\dot{\lambda}_1=\dot{\lambda}_2=0$ となる定常状態における それぞれの 変数の値 $\bar{k}$, $\bar{a}$, $\bar{u}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$,$\bar{\lambda}_1$,$\bar{\lambda}_2$ および $\bar{\gamma}$ は(29)～(36)から

$$U-\delta k=0 \tag{37}$$

$$S(\beta k)-\mu a=0 \tag{38}$$

$$(\rho+\delta)\lambda_1-pa\alpha F_X(\alpha k)+(\omega\alpha+\nu\beta)-\theta\lambda_2\beta S_Y(\beta k)=0 \tag{39}$$

$$(\rho+\mu)\lambda_2-pF(\alpha k)=0 \tag{40}$$

$$-C'(u)+\lambda_1=0 \tag{41}$$

$$pakF_X(\alpha k)-\omega k-\gamma=0 \tag{42}$$

$$-\nu k+\theta\lambda_2 kS_Y(\beta k)-\gamma=0 \tag{43}$$

$$\gamma\geqq 0,\ \ \gamma(1-\alpha-\beta)=0 \tag{44}$$

をみたしていなければならない。以下においては定常値を表わすバー(—)の記

号は混乱のおそれがないかぎり省略する。

この定常状態では(37)の示すように，資本財への粗投資は資本ストックの減耗分を丁度おぎなうだけの大きさで行なわれ，(38)の示すように，生産技術も減耗分に等しいだけ更新される。資本ストックの純増はなく，生産技術の水準は変化しない。

また(42)と(43)から

$$paF_X(\alpha k)-\omega=-\nu+\theta\lambda_2 S_Y(\beta k) \tag{45}$$

であるから，配分比率は(45)をみたすように決定されなければならない。また(45)の両辺をα倍またはβ倍して(39)に代入し，(41)を用いると，

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha+\beta)[\nu-\theta\lambda_2 S_Y(\beta k)]+(\rho+\delta)C'(u)=0\\&(\alpha+\beta)[\omega-paF_X(\alpha k)]+(\rho+\delta)C'(u)=0\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

が得られる。定常状態においては粗投資と資本ストックの配分率は(46)をみたしていなければならない。

仮定(14)により$C'(u)>0$であるから(46)が成立するためには，$\alpha+\beta>0$であることを考慮すれば(45)の両辺が正すなわち$r>0$でなければならない。これは(44)により

$$\alpha+\beta=1$$

であることを意味する。すなわち定常状態では資本ストックは生産物の生産と新技術の生産に利用しつくされていなければならない。

このような定常解くの近くで状態変数と随伴変数の動きがどのような性質をもっているかを調べよう。そのためには(29)～(32)を定常点のまわりで線型近似して得られる方程式体系の根を調べればよい。(29)～(32)に対応するそのような特性方程式は変数xに関する4次方程式

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\dot{k}}{\partial k}-x & \dfrac{\partial\dot{k}}{\partial a} & \dfrac{\partial\dot{k}}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial\dot{k}}{\partial\lambda_2}\\[2ex] \dfrac{\partial\dot{a}}{\partial k} & \dfrac{\partial\dot{a}}{\partial a}-x & \dfrac{\partial\dot{a}}{a\lambda_1} & \dfrac{\partial\dot{a}}{\partial\lambda_2}\\[2ex] \dfrac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial k} & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial a} & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial\lambda_1}-x & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial\lambda_2}\\[2ex] \dfrac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial k} & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial a} & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial\lambda_2}-x\end{vmatrix}=0 \tag{47}$$

である。

ところで制御変数の定常値は，(41)～(43)から，状態変数，随伴変数とラグランジュ乗数の定常値の関数として，それぞれ

$$u=u(\lambda_1)$$

$$\alpha=\alpha(a,k,\gamma)$$

$$\beta=\beta(k,\lambda_2,\gamma)$$

のように得られる。(41)～(43)の全微分をとり，どれか2個の変数を除いて，他の変数の値の定常値からの変化をゼロとおき，(42)と(43)を用いて書き直すと次の結果が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{d\lambda_1}=\frac{1}{C''}\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial a}=-\frac{F_X}{akF_{XX}},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial k}=-\left(\frac{\gamma}{pak^3F_{XX}}+\frac{\alpha}{k}\right)\\
&\frac{\partial\beta}{\partial k}=-\left(\frac{\gamma}{\theta\lambda_2k^3S_{YY}}+\frac{\beta}{k}\right),\quad \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_2}=-\frac{S_Y}{\lambda_2kS_{YY}}
\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

(47)の左辺に含まれる微分を実行し，(48)と(42)，(43)を用いると

$$\frac{\partial\dot{k}}{\partial k}=-\delta,\quad \frac{\partial\dot{k}}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial\dot{k}}{\partial\lambda_1}=\frac{1}{C''},\quad \frac{\partial\dot{k}}{\partial\lambda_2}=0$$

$$\frac{\partial\dot{a}}{\partial k}=-\frac{\gamma S_Y}{\theta\lambda_2k^2S_{YY}},\quad \frac{\partial\dot{a}}{\partial a}=-\mu,\quad \frac{\partial\dot{a}}{\partial\lambda_1}=0$$

$$\frac{\partial\dot{a}}{\partial\lambda_2}=-\frac{(S_Y)^2}{\lambda_2S_{YY}}$$

$$\frac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial k}=\frac{\gamma}{k^2}\left[2(\alpha+\beta)+\frac{\gamma}{pak^2F_{XX}}+\frac{\gamma}{\theta\lambda_2k^2S_{YY}}\right]$$

$$\frac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial a}=\frac{\gamma F_X}{ak^2F_{XX}},\quad \frac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial\lambda_1}=\rho+\delta,\quad \frac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial\lambda_2}=\frac{\gamma S_Y}{\lambda_2k^2S_{YY}}$$

$$\frac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial k}=\frac{\gamma F_X}{ak^2F_{XX}},\quad \frac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial a}=\frac{p(F_X)^2}{aF_{XX}},\quad \frac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial\lambda_1}=0,$$

$$\frac{\partial\dot{\lambda}_2}{\partial\lambda_2}=\rho+\mu$$

となる。これらの結果を(47)に代入すると特性方程式が確定する。しかしながらこの特性根を吟味するのは面倒なので以下では $\theta\doteqdot1$ であるような特別の場合についてだけ考える。なお上にのべたように，$\alpha+\beta=1$，$\gamma>0$ である。

$$-\frac{\gamma S_Y}{\lambda_2 k^2 S_{YY}}=a_{21},\quad -\frac{S_Y^2}{\lambda_2 S_{YY}}=a_{24},$$

$$\frac{\gamma}{k^2}\left(2+\frac{\gamma}{pak^2F_{XX}}+\frac{\gamma}{\lambda_2 k^2 S_{YY}}\right)=a_{31},$$

$$\frac{\gamma F_X}{ak^2F_{XX}}=a_{32},\quad \frac{pF_X^2}{aF_{XX}}=a_{42}$$

とおくと，特性方程式(47)は

$$\begin{aligned}&(x+\delta)(x+\mu)[x-(\rho+\delta)][x-(\rho+\mu)]\\&-(x+\delta)[x-(\rho+\delta)]\cdot a_{24}a_{42}\\&-(x+\mu)[x-(\rho+\mu)]\frac{a_{31}}{C''}\\&+\frac{1}{C''}[(\rho+2\mu)a_{21}a_{32}+a_{24}a_{42}a_{31}-a_{24}a_{32}^2+a_{21}^2a_{42}]=0\end{aligned}\tag{49}$$

となる。ここで

$$x^2-\rho x=z\tag{50}$$

とおくと(49)は

$$\begin{aligned}&[z-\delta(\rho+\delta)][z-\mu(\rho+\mu)]\\&-[z-\delta(\rho+\delta)]a_{24}a_{42}-[x-\mu(\rho+\mu)]\cdot\frac{a_{31}}{C''}\\&+\frac{1}{C''}[(\rho+2\mu)a_{21}a_{32}+a_{24}a_{42}a_{31}-a_{24}a_{32}^2+a_{21}^2a_{42}]=0\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&z^2-\left[\delta(\rho+\delta)+\mu(\rho+\mu)+a_{24}a_{42}+\frac{a_{31}}{C''}\right]z\\&+\left[\delta\mu(\rho+\delta)(\rho+\mu)+\delta(\rho+\delta)a_{24}a_{42}+\mu(\rho+\mu)\frac{a_{31}}{C''}\right]\\&+\frac{1}{C''}[(\rho+2\mu)a_{21}a_{32}+a_{24}a_{42}a_{31}-a_{24}a_{32}^2+a_{21}^2a_{42}]=0\end{aligned}\tag{51}$$

と書きかえることができる。(51)の根の判別式をDで表わすと

$$\begin{aligned}D=&\left[\delta(\rho+\delta)-\mu(\rho+\mu)-a_{24}a_{42}+\frac{a_{31}}{C''}\right]^2\\&-\frac{4}{C''}[(\rho+2\mu)a_{21}a_{32}-a_{24}a_{32}^2+a_{21}^2a_{42}]\end{aligned}$$

となる。(40)から $\lambda_2=pF/(\rho+\mu)$ であることを考慮すると仮定(14)により

$$C''<0,\ a_{21}a_{32}<0,\ a_{24}>0,\ a_{42}<0$$

であるから，上式の右辺第2項は全体として正であり，したがって常に $D>0$ である。すなわち z に関する2次方程式(51)は常に相異なる2個の実根をもつ。そして(51)の右辺の z の係数が負であり，z を含まない項が正ならば，すなわち，それらに含まれる諸関数の値とパラメターの値がそのような条件をみたすならば，(51)の2個の根は共に負となる。(51)の根と(49)の根の間には(50)より

$$x=\frac{\rho\pm\sqrt{\rho^2-4z}}{2}$$

という関係があるから，(51)の2個の根が共に負ならば(49)は2個の正根と2個の負根をもつことになり，われわれの Pontryagin Path は定常点の近くにおいて鞍点の意味で安定になる。なおその他の場合には(49)の根は，(i)すべてが正の実数部分をもつ複素根，(ii)2個がそのような複素根で他の2個が正根，(iii)すべてが正根，(iv)3個が正根で1個がゼロ，(v)3個が正根，1根が負，(vi)2個が正，1個がゼロ，1個が負のいずれかである。

参照文献

〔1〕 Maeda, H., "On Optimal Capital Investment, Research and Development, and Advertising Policies," *Bulletin of Univ, of Osaka Prefecture*, SeriesD, Vol. XIII (1969).

〔2〕 前田英昭　企業の最適な投資政策，研究・開発政策および宣伝政策について（大阪府立大学経済学部，昭和46年）

〔3〕 前田英昭「経営者の目的と最適政策：企業の動学モデル」大阪府立大学経済研究，22巻3号（昭和52年7月）

〔4〕 Mann, D. H., "Optimal Theoretic Advertising Stock Models: A Generalization Incorporating the Effects of Delayed Response from Promotional Expenditure", *Management Science*, Vol. 21. No. 7 (March 1975)

〔5〕 Sato, R., *Theory of Technical Change and Economic Invariance: Application of Lie Groups* (Academic Pr., 1981)

〔6〕 Sethi, S. P., "A Useful Ttansformation of Hamiltonians Occuring in Optimal Control Problems in Economic Analyses", *Journal of Management Science and Applied Cybernetics*, Vol. 2, No. 3, 1～17 (1973)

〔7〕 Sethi, S. P., "Sufficient Conditions for the Optimal Control of a Class of Systems with Continuous Lags", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 13, No. 5, 545-552 (1974)