



<研究ノート>連立微分方程式の位相

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 和田, 貞夫 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24729/00001922">https://doi.org/10.24729/00001922</a>

(研究ノート)

## 連立微分方程式の位相

和田 貞 夫

0. 最近の経済分析の論稿において、二つの変数を含む定係数連立微分方程式を用いて理論モデルを構成し、変数の時間的な変動のパターンを位相図によって表示するという方法が、しばしば用いられる。このような位相図の数学的な性質は古くからよく知られていて、現在ではほとんどの微分方程式や振動理論のテキストにその説明がみられる<sup>(1)</sup>。そして、通常は、適当な変数変換によって微分方程式を標準型に変形し、それについての位相図を得た後に、必要な座標変換を行ない、はじめの微分方程式の位相図に達するという方法を用いて、その説明がなされている。この方法の理解のためには、線型代数についての知識が不可欠である。他方、多くの経済分析では、それぞれの変数の時間的変化率がゼロとなるような直線<sup>(2)</sup>とこれらの直線上以外の点における各変数の変化方向とを確かめ、そのことを通じて変動の態様を明らかにするという方法がとられている。これは、前述の数学的な方法に比べて、手順は簡単ではあるが、往々にして、その結果は不正確となる<sup>(3)</sup>。もし比較的簡単な方法で、より正確な位相図を得ることができれば、それは望ましいであろう。本稿はこのような方法を求める一つの試みである<sup>(4)</sup>。

---

(1) たとえば、Coddington・Levinson [1], Lefschets [2], Struble [4], Minorsky [3] を参照されたい。

(2) 後に  $x$  線,  $y$  線と呼ぶものである。

(3) そのような例を和田[7]に示しておいた。

(4) 微分方程式の通常の説明方法を踏襲して、和田[5], [6] (155—166ページ) では、連立定差方程式の位相を説明したが、これを以下の方法を用いて行なうこともで

上述のように、微分方程式の位相図についてはすでによく知られており、したがって、これを得る方法が従来のものと異なるとはいえ、その結果については特に新しいものはない。その意味で、本稿は単に pedagogic なものといふことができる。<sup>(5)</sup>

1. 次のような連立微分方程式を考えよう。

$$(1) \quad \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$(2) \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

係数  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  がともにゼロであれば、これは  $x$ ,  $y$  のそれぞれだけを含む二個の微分方程式である。以下では、 $x$ ,  $y$  および  $a_{ij}$  は実数とし、

$$(3) \quad a_{12} \neq 0$$

としよう。(1)の特性方程式は

$$(4) \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

であって、もし

$$(5) \quad a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$$

であれば、(1), (2)式の特異点(critical point)もしくは均衡点(equilibrium point)は  $(0, 0)$  だけである。特にことわらない限り、(5)式がなりたつものとする。

(1), (2)式の一般解は、特性根  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  が相異なる場合には

$$(6) \quad x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$(7) \quad y = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} C_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる。ただし、 $C_1$ ,  $C_2$  は任意の定数とする。また特性根  $\lambda$  の重複度が2であるときには、一般解は

$$(7) \quad x = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t}$$

✓きる。

(5) 本稿で述べる方法は、数年の講義に用いてきたものであるが、受講者の便宜をも考慮して、公けにすることにした。

$$(8) \quad y = \left[ \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} C_1 t + \left( \frac{1}{a_{12}} C_1 + \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} C_2 \right) \right] e^{\lambda t}$$

である。もし(5), (6)式において  $\lambda_1, \lambda_2$  が互に共役な複素数であれば, それは,  $a_{11} \neq a_{22}$  のとき,

$$(9) \quad x = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \omega)$$

$$(10) \quad y = \frac{A \sqrt{(\alpha - a_{11})^2 + \beta^2}}{a_{12}} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \omega + \eta)$$

となる。ただし,  $A, \omega$  は任意の定数であり,

$$(11) \quad \lambda_1 = \alpha + \beta i \quad (i = \sqrt{-1}, \beta > 0)$$

$$(12) \quad \eta = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha - a_{11}}$$

また,  $a_{11} = a_{22}$  のときには, (10)式の代わりに,

$$(13) \quad y = \frac{A \beta}{a_{12}} e^{\alpha t} \cos(\beta t + \omega)$$

がなりたつ。

2. 連立微分方程式 (1・1), (1・2) 式の位相図は,  $x \cdot y$  平面において上述の解によって表わされる動点  $(x, y)$  がたどる軌道 (trajectory) を示すものである。そのおよその性質を述べるのが本稿の目的であるが, まず軌道の勾配が一定の値 ( $k$ ) をもつような点の集合について考えよう。これは

$$(1) \quad S(k) = \left\{ (x, y) \mid \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = k \right\}$$

のように表わすことができる。(1・1), (1・2) 式を考慮すれば

$$(2) \quad \frac{y}{x} = \frac{k a_{11} - a_{21}}{a_{22} - k a_{12}} \quad ((x, y) \in S(k))$$

であることがわかる。それゆえ,  $x \cdot y$  平面(位相平面 (phase plane))において, 原点を通り, (横軸に対する) 勾配が(2)式の左辺でに等しい直線上では  $(x, y)$  のすべての軌道は同一の勾配 ( $k$ ) をもつ。この直線を等傾斜線 (isocline) <sup>(6)</sup> という。(2)式の特殊な場合として,

(6) (2)式の分母がゼロのとき,  $x/y$  について, 問題を考えればよい。以下では, こゝ

$$(3) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{x}=0} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

$$(4) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{y}=0} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

の等傾斜線は後に重要な役割を担うことになる。便宜上、それぞれを  $x$  線,  $y$  線と呼ぶことにする。<sup>(7)</sup>

3. 位相平面において  $y/x$  が時間 ( $t$ ) の変化にもかかわらず、一定であるような場合を考えよう。このとき

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = 0$$

がなりたち、(1・1) 式を考慮すれば、このとき  $y/x$  が実数値

$$(2) \quad \mu_j = \frac{\lambda_j - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{\lambda_j - a_{22}} \quad (j=1, 2)$$

に等しくなければならないことが確かめられる。等傾斜線  $S(\mu_j)$  を  $\mu_j$  線と呼ぶことにする。 $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$  の場合には(2)式は

$$(3) \quad \mu = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda - a_{22}}$$

となる。このとき  $S(\mu)$  を  $\mu$  線と呼ぼう。<sup>(8)</sup>

4.  $x$  線上では  $\dot{x}$  はゼロであり、 $y$  線上では  $\dot{y}$  はゼロである。それでは  $x$  線,  $y$  線上以外の点では  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  の値はどうであろうか。これは次のようにして知ることができる。(1・1) 式より

$$(1) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = a_{11}$$

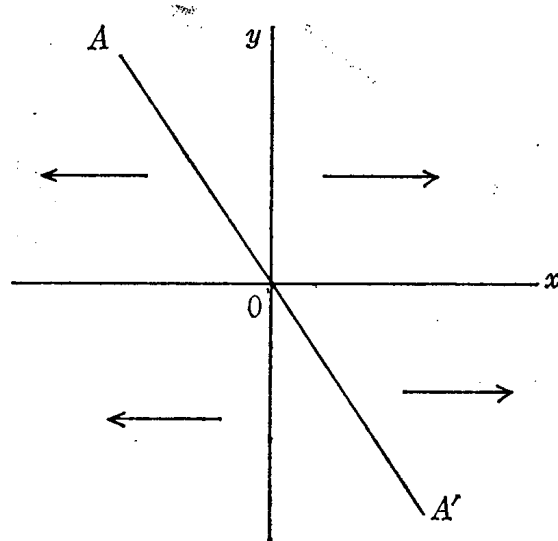
$$(2) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = a_{12}$$

✓のような注意を繰り返さない。

(7) 和田[7]では、これを各変数の停止線と呼んだ。

(8)  $[1, \mu_j]' (j=1, 2)$  もしくは  $[1, \mu]'$  は (1・1), (1・2) 式の係数の行列  $[a_{ij}]$  の固有列ベクトルである。ただし'は転置を意味する。

それゆえ、 $a_{11} > 0$ であれば、 $x$ 線の右方（左方）にある点において $\dot{x} > 0$  ( $\dot{x} < 0$ )、 $a_{12} > 0$ ならば、 $x$ 線の上方（下方）の点上で $\dot{x} > 0$  ( $\dot{x} < 0$ )である。そして $\dot{x} > 0$  ( $\dot{x} < 0$ )は $\dot{x}$ が時間とともに増加（減少）することを意味する。第1図の直線 $AA'$ は、 $a_{11} > 0$ 、 $a_{12} > 0$ の場合の $x$ 線であって、水平に引かれた矢線はこのような $x$ の変化方向を表わしている。 $a_{11}$ 、 $a_{12}$ の符号がこれと異なる場合にも、同様の方法で $\dot{x}$ の正負を知ることができる。



第1図

$y$ 線上以外の点での $\dot{y}$ の値については、(1・2)式より得られる。

$$(3) \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = a_{21}$$

$$(4) \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = a_{22}$$

を用いて、上述と同じように、これを確かめることができる。そして $y$ の時間的な変動方向は位相平面上に垂直の矢線を用いて示される。

5. 等傾斜線上では $(x, y)$ の軌道の勾配が等しい。しかし相異なる等傾斜線の上での軌道の勾配が異なるのは当然である。そして、等傾斜線の勾配と軌道の勾配との間に一定の関係がみられる。一般に、

$$(1) \quad \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{d\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{d\left(\frac{a_{21} + a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)}{a_{11} + a_{12}\left(\frac{y}{x}\right)}\right)}{d\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\left[a_{11} + a_{12}\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2}$$

であって、(1・4)式よりわかるように、(1)式の右辺の分子は(1・1)、(1・2)式の二つの特性根の積に等しい。したがって、二根の積が負である

とき、つまり特性根が実数であって、一つは正、他は負の時に限って、(1)式は負となる。つまり、 $x$  線上は除いて、勾配の大きい等傾斜線上では軌道の勾配が小さい。その他の場合にはこの逆である。<sup>(9)</sup>

6. 特性根が相異なる実根であって、 $\lambda_1 > \lambda_2$  であるとしよう。このとき (1・6), (1・7) 式を考慮すれば、容易にわかるように、

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \mu_1 \quad (C_1 \neq 0 \text{ のとき})$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \mu_2 \quad (C_2 \neq 0 \text{ のとき})$$

このことは  $(x, y)$  の軌道を時間の動きと同じ方向に進むとき、 $y/x$  の値と軌道の勾配が  $\mu_1$  線の勾配に収束し、時間の動きと逆方向にたどれば、それらが  $\mu_2$  線の勾配に収束することを示している。<sup>(10)</sup>

特性根が相等しい実根の場合には (1・7), (1・8) 式によって、(1), (2)式において  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  とおいた関係がなりたつから、上述のいずれの場合にも、 $y/x$  と軌道の勾配とは  $y$  線の勾配に収束する。

このことから次の事実がわかる。二つの特性根が負の実根であるとしよう。このときすべての軌道は原点に向っている。それゆえ、それは  $\mu_1$  線もしくは  $\mu$  線に接してはならない。もし二つの特性根が正の実根であるならば、軌道は原点から遠ざかってゆくから、軌道を時間の向きとは逆にたどるとき、それは  $\mu_2$  線または  $\mu$  線に接していることになる。

7. 以上で (1・1), (1・2) 式のシステムの位相図を描くための一般的な準備が終った。まとめておこう。位相平面上に、

(a) まず  $x$  線,  $y$  線を描く。

(b)  $x$  線,  $y$  線によって平面が四個の部分に分かれる。そのそれぞれにおける  $x, y$  の変動方向を矢線によって示す。

(9) 軌道が  $x$  線と交わるとき  $\dot{y}/\dot{x}$  の値に非連続的に変化する。

(10)  $C_1 = 0$  のとき動点  $(x, y)$  は  $\mu_2$  線上にあり、 $C_2 = 0$  ならばそれは  $\mu_1$  線上にある。このとき(1)または(2)式はなりたたない。

- (c) 特性根が実数ならば,  $x$  線,  $y$  線との関係に考慮を払いながら,  $\mu_1$  線,  $\mu_2$  線, もしくは  $\mu$  線を描く。
- (d) 第 5, 6 節で叙述を考慮に入れて  $(x, y)$  の軌道を描く。軌道の方向は (b) の矢線によって知ることができる。

8. 上述のルールにしたがって, いくつかの場合の位相図を描いてみよう。  
まず

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0 \\ a_{21} > 0, \quad a_{22} < 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$$

としよう。このとき, 特性根は実根であって,

$$(3) \quad 0 > \lambda_1 > \lambda_2$$

がなりたち, また一般に

$$(4) \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_{12}}$$

$$(5) \quad \mu_1 \mu_2 = -\frac{a_{21}}{a_{12}}$$

である。特にいまの場合(4)式は正, (5)式は負であるから,  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 < 0$ 。  
また

$$(6) \quad \mu_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} < -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

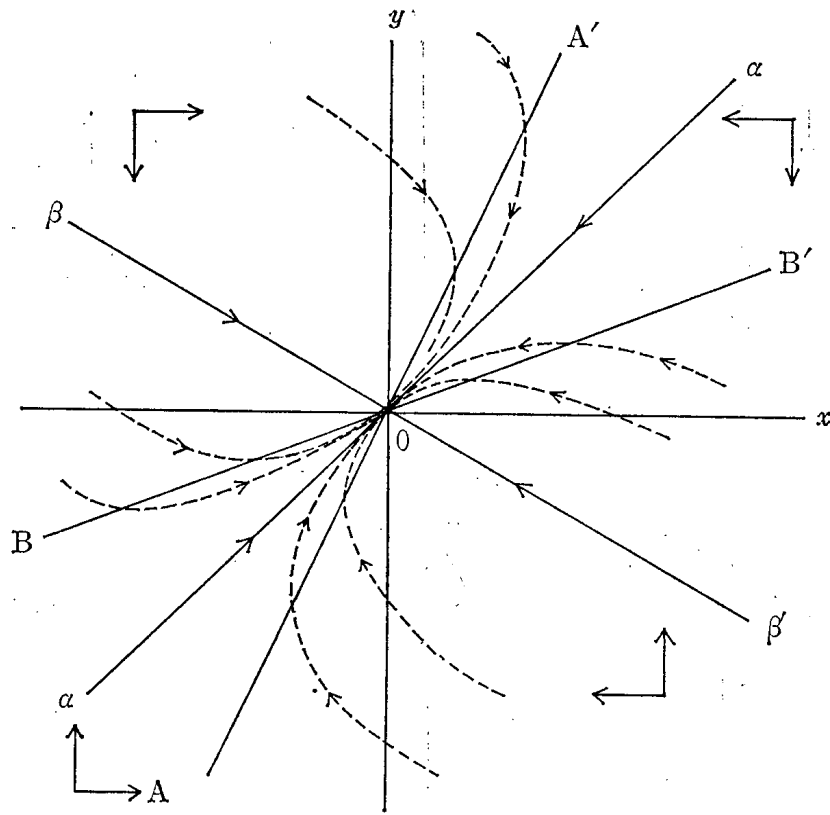
$$(7) \quad \mu_1 = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}} > -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

となり, 結局,

$$(8) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{x}=0} > \mu_1 > \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{y}=0} > 0 > \mu_2$$

それゆえ,  $x$  線,  $\mu_1$  線,  $y$  線の勾配は正であって, その大きさはこの順であり,  $\mu_2$  線の勾配は負である。(1)式および第 5, 6 節の叙述を考慮すれば, 第 2 図のような位相図が描かれる。図の直線  $AA'$ ,  $BB'$  は, それぞれ,  $x$  線,  $y$  線であり,  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  は  $\mu_1$  線,  $\mu_2$  線を表わす。この場合の特異点は結節点 (node)





第 2 図

である。

なお、(5)式が正であるような場合には、 $\mu_1, \mu_2$  の正負は

$$(8) \quad \mu_1 + \mu_2 = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}$$

によって知ることができる。

9. 次に

$$(1) \quad a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0$$

$$a_{21} > 0, \quad a_{22} < 0$$

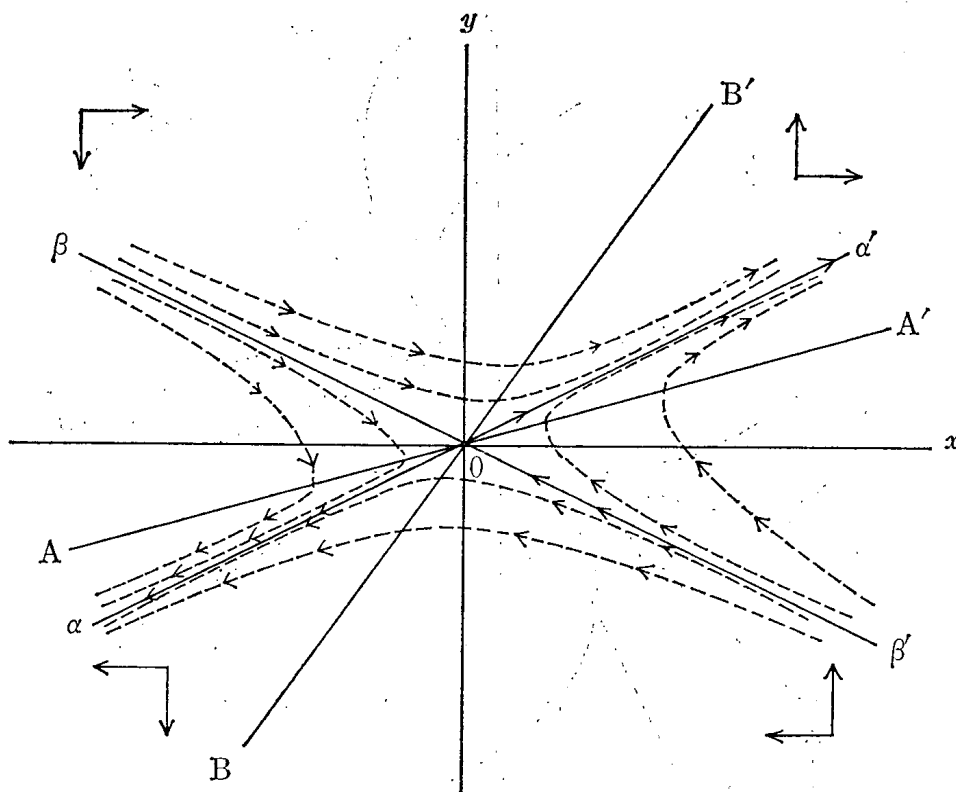
$$(2) \quad a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$$

の場合をみよう。特性根は実数であって

$$(3) \quad \lambda_1 > 0 > \lambda_2$$

そして、また

$$(4) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{y}=0} > \mu_1 > \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{x}=0} > 0 > \mu_2$$



第 3 図

となることが確かめられる。したがって、位相図は第3図のようになり、特異点は鞍点 (saddle point) である。

10. もし

$$(1) \quad a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0$$

$$a_{21} < 0, \quad a_{22} < 0$$

$$(2) \quad a_{11} > a_{22}$$

$$(3) \quad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$$

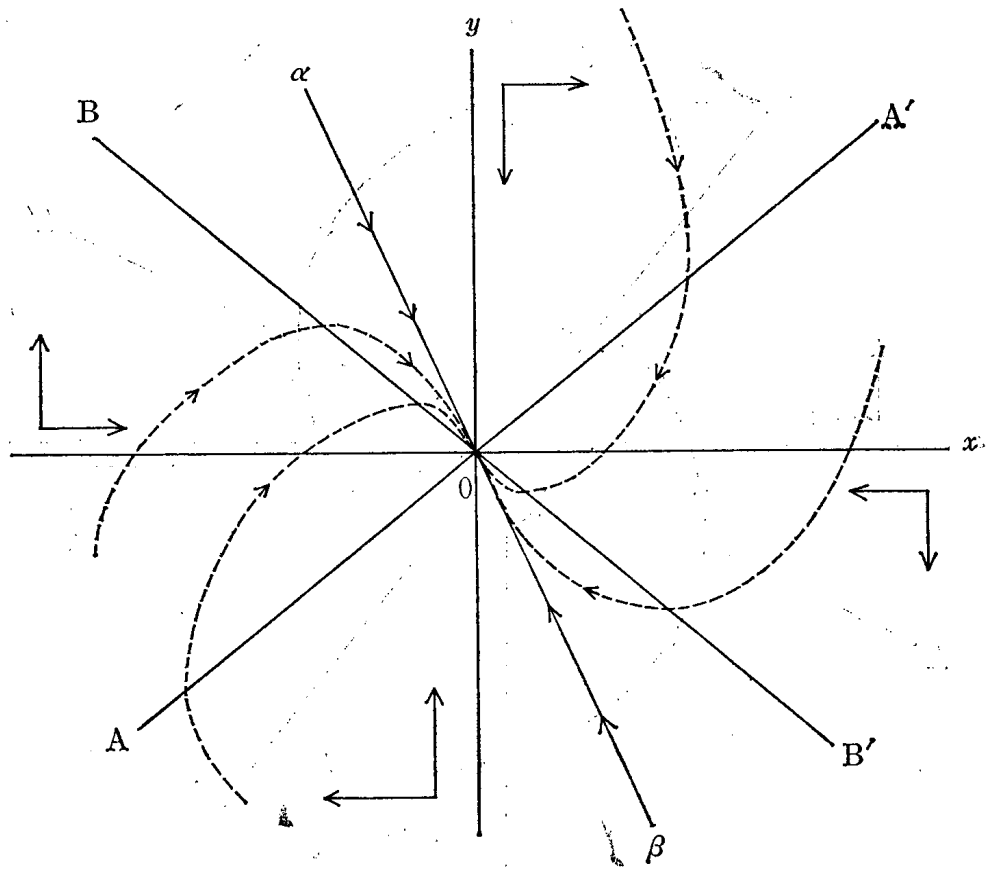
がなりたつならば、特性根  $\lambda$  の重複度は2であって、

$$(4) \quad a_{11} > \lambda > a_{22}$$

それゆえ

$$(5) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{x=0} > 0 > \left. \frac{y}{x} \right|_{y=0} > \mu$$

であることが確かめられる。したがって、この場合の位相図は第4図のようになる。ただし、直線  $\alpha\beta$  は  $\mu$  線である。この場合、特異点は結節点である。



第 4 図

11. それでは

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0 \\ a_{22} < 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$$

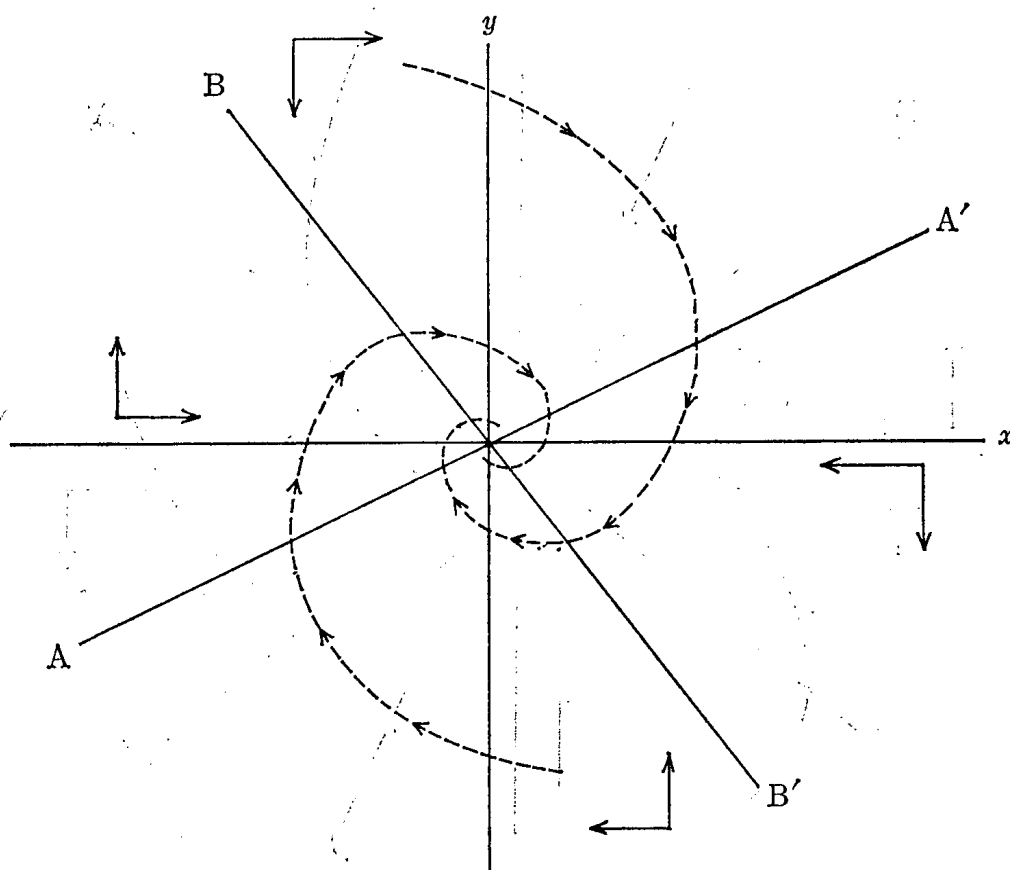
の場合はどうであろうか。このとき

$$(3) \quad a_{21} < 0$$

でなければならない。特性根は複素数であって、その実数部分は負である。また

$$(4) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{x}=0} > 0 > \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{y}=0}$$

そして  $\mu_1$  線,  $\mu_2$  線は存在しない。この場合の位相図は第 5 図のようになり、特異点は渦状点 (focal point) である。



第 5 図

## 12. 単一の 2 階微分方程式

$$(1) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

の場合には

$$(2) \quad \dot{x} = y$$

とすれば, (1)式は

$$(3) \quad \dot{y} = -bx - ay$$

となる。(2), (3)式を連立方程式と考えれば, 前述の方法によってその位相図を描くことができる。

この場合, (2)式より明らかなように,  $x$  線は横軸 ( $x$  軸) に一致し,  $y$  線の勾配は  $-(b/a)$  に等しい。さらに  $\mu_i = \lambda_i$  ( $i=1, 2$ ) または  $\mu = \lambda$  がなり

(11)  $\dot{x}$  は, 横軸の上方 (第一, 二象限) では正, 横軸の下方 (第三, 四象限) では負である。

たつ。

13. 第11節までは(1・5)式がなりたつものとしたが、これがなりたない場合を考えてみよう。このとき特性根の中にゼロであるものがある、特異点は一意的でない。 $x$ 線と $y$ 線とが重なり、その線上のすべての点が特異点となる。そして軌道の勾配は常に一定の値をもち、したがって、すべての軌道は平行である。<sup>(12)</sup>

例をあげよう。

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0 \\ a_{21} > 0 \end{aligned}$$

とする。このとき、

$$(2) \quad a_{22} < 0$$

$$(3) \quad \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{x}=0} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} = \left. \frac{y}{x} \right|_{\dot{y}=0}$$

がなりたつ。(3)式の示す直線は第6図のABで示され、特異点の集合を表わしている。また

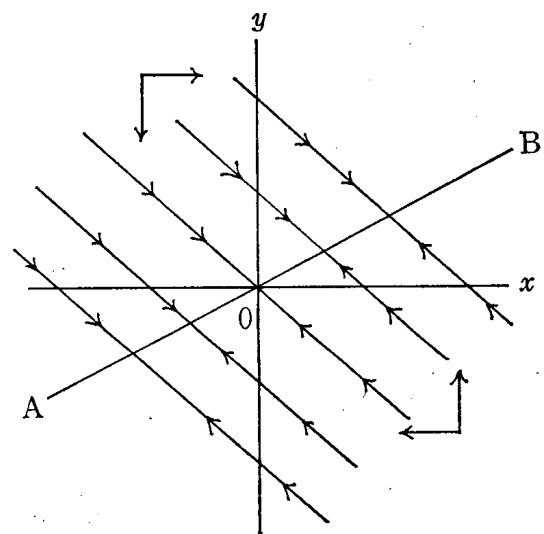
$$(4) \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} = \frac{a_{21}}{a_{11}} < 0$$

であって、これはすべての軌道が同じ勾配( $a_{21}/a_{11}$ )をもつことを示している。図の右下りの直線はこのような軌道を示している。この場合、均衡は準安定(quasi-stable)である。

14. これまで $a_{12} \neq 0$ と仮定したが、ここでは

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{12} = a_{21} = 0 \\ a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0 \end{aligned}$$

としよう。 $x$ 線は縦軸に、 $y$ 線は横軸



第 6 図

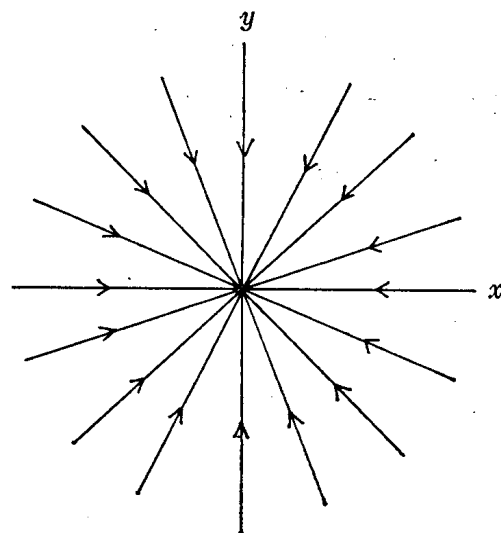
(12) このような性質をもつ経済モデルは、和田[8]にみられる。

に一致し、また

$$(2) \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{y}{x} = C \frac{a_{22}}{a_{11}} e^{(a_{22}-a_{11})t}$$

がなりたつ。ただし、 $C$  は任意の定数である。

したがって、 $a_{11} \neq a_{22}$  であれば、横軸、縦軸のいずれかが  $\mu_1$  線に、他方が  $\mu_2$  線となる。<sup>(13)</sup> もし  $a_{11} = a_{22}$  であれば、 $y/x$  は時間と経過にもかかわらず、変化しない。それゆえ、 $a_{11} < 0$  として、この場合の位相図を描けば、第7図のようになる。このとき特異点は星状結節点 (stellar node) と呼ばれる。<sup>(14)</sup>



第 7 図

### 15. 非線型連立微分方程式

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, y)$$

$$(2) \quad \dot{y} = g(x, y)$$

が特異点をもつならば、その近傍の局所的な状態は (1・1), (1・2) 式のような定係数連立微分方程式で近似的に示される。そして、その位相図を描くことによって、(1), (2) 式の特異点の性質を知ることができる。<sup>(15)</sup> 前節までの方法はこのために役立つ。

### 参 考 文 献

[1] Coddington, E. A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*

(13) ここでも第6節の議論があてはまり、それを考慮すれば、このことは明らかである。

(14)  $a_{11} > 0$  であれば、第3図の矢印の向きが逆になる。

(15) 線型近似方程式の特異点が星状結節点であるとき、その特性根が純虚数であって、特異点が渦心点 (center) となるとき、および第13節の場合には、必ずしもこのことはあてはまらない。

tions, 1955.

- [2] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd ed., 1963.
- [3] Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, 1962.
- [4] Struble, R. A., *Nonlinear Differential Equations*, 1962.
- [5] 和田貞夫「連立定差方程式の位相」大阪府立大学経済研究, 昭和38年3月, 12—22ページ。
- [6] 和田貞夫『経済成長の基礎理論』昭和44年。
- [7] 和田貞夫「2変数動態システムについてのノート」大阪府立大学経済研究, 昭和51年10月, 95—106ページ。
- [8] 和田貞夫「外貨準備と経済均衡」大阪府立大学経済研究, 昭和53年7月, 1—22ページ。

(1978. 10. 6)