非協力ゲームにおける均衡解存在定理の一拡張 (百号記念特別号)

非協力ゲームにおける均衡解存在定理の一拡張*

洲浜源一

目次

1 序

Nash〔4〕の非協力ゲーム (non-cooperative game) は，Debreu〔2〕で，一般化された。以下，この一般化された非協力ゲームを，単に非協力ゲームと呼ぶ。本報告は，この非協力ゲームの均衡解に関する Debreu の存在定理を取上げ，その一つの拡張を行なう。

Debreu の存在定理は「他のプレイヤーのあらゆる戦略 (strategy) に対して，各プレイヤーの取得る戦略が存在する」という条件を，その前提としている。(1) しかし，ある種の市場ゲームは，この前提を満たさないがその均衡解を持つ。(2) この前提を満たさないゲームについては，各プレイヤーの戦略集合を適当に縮小したゲーム（これを部分ゲームと呼ぶ）を導出し，この部分ゲームについて，あらためて Debreu の存在定理を適用する方法が考えられる。しかし，

＊ 本稿を作成するうえで，有益なコメントを頂いた大阪府立大学山谷恵俊教授に感謝する。もちろん，ありうべき誤りについては筆者の責任である。

（1） Arrow and Debreu〔1〕(lemma, 274)，Debreu〔2〕(888)。なお，この前提を本報告では条件 B 1 とする（後の Debreu の存在定理参照)。

（2） 洲浜〔6〕(補注 2，127)。

このようにして導かれた部分ゲームが，常に元ゲームと同一の均衡解を持つとは限らない。そこで，本報告は，元ゲームと同一の均衡解を持った部分ゲームの一つを提示し，これによって，Debreu の存在定理を拡張する。

2 定義および Debreu の存在定理

1 定義。ゲームに参加するプレイヤーの数を n とする。その第 i 番目のプレイヤーの戦略集合を位相空間 X_i とする。また，全プレイヤーの戦略集合の全体を直積空間 X および第 i 番目を除くすべてのプレイヤーの戦略集合の全体を直積空間 $\overline{X}_i$ で表わす。すなわち，それぞれ，

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_n$$
$$\overline{X}_i = X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots\cdots \times X_n$$

となる。次に第 i 番目のプレイヤーが取る戦略を $x_i(\in X_i)$ とし，またすべてのプレイヤーの取る戦略を $x(\in X)$ で表わし

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$
$$= (x_i,\ \overline{x}_i) \quad (\text{ただし } \overline{x}_i \in \overline{X}_i)$$

とする。ここで，$\overline{x}_i$ は第 i 番目を除くすべてのプレイヤーの取る戦略の全体を表わしている。すなわち

$$\overline{x}_i = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

である。そこで，第 i 番目のプレイヤーの行動は，他のすべてのプレイヤーの戦略 $\overline{x}_i$ を所与として，その戦略集合 X_i のなかから，その利得関数 $f_i(x_i, \overline{x}_i)$ を最大にする戦略 x_i を選ぶことである。しかし，ある種のゲームでは，あるプレイヤーの取得る戦略集合が，他のプレイヤーの取る戦略と無関係ではなく，むしろ後者によって制約される。つまり，第 i 番目のプレイヤーに許される戦略集合は X_i ではなくて，$\overline{x}_i$ によって制約されるその部分集合 $A_i(\overline{x}_i)$ $(\subset X_i)$ に限定される。以下，この集合 $A_i(\overline{x}_i)$ のことを，第 i 番目プレイヤーの制約集合と呼ぶ。

そこで，X_i および $f_i(x_i, \overline{x}_i)$ について，次の基本仮定を設定しておく。

A 1　戦略集合 x_i は，有限次元のユークリッド空間 (R^{h_i}) において，コンパクトで非空の凸部分集合である。

A 2　利得関数 $f_i(x_i,\ \bar{x}_i)$ は，直積空間 X の全域にわたって定義された実数値連続関数である。

A 3　同利得関数は，あらゆる $\bar{x}_i$ に対して，x_i の擬凹関数 (quasiconcave function) である。

以上の諸仮定は，各プレイヤーについて成立するものとする。(3) そこで，かかる基本仮定を含む非協力ゲームを

$$(X_i,\ f_i,\ A_i)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

と表わすことにする。

つづいて，非協力ゲーム $(X_i,\ f_i,\ A_i)$ の均衡解を，次のように定義する。すなわち，X の一点 $x^*=(x_i^*,\ \bar{x}_i^*)$ が

$$f_i(x_i^*,\ \bar{x}_i^*)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i^*)}{\mathrm{Max}} f_i(x_i,\ \bar{x}_i^*)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

を満足するとき，この点 x^* は非協力ゲームの均衡解である。最後に，ある非協力ゲームの均衡解の全体を，そのゲームの解集合 X^* と呼び，

$$(1)\quad X^*=[x^* \mid x^*\in X,\ f_i(x_i^*,\ \bar{x}_i^*)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i^*)}{\mathrm{Max}} f_i(x_i,\ \bar{x}_i^*)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)]$$

とする。

2　Debreu の存在定理。非協力ゲームの均衡解に関する Debreu の存在定理は，Debreu [2] およびこれを市場均衡に適用した Arrow and Debreu [1]，またこれを紹介した鈴木 [5] 等のなかでみられる。

---

(3) これらの基本仮定の一部を，より一般的な仮定にかえることができる。例えば，Debreu [2]，鈴木 [5] (第 13 章) に従って，A 1 の戦略集合 X_i を R^{h_i} におけるコンパクトで可縮な集合 (あとの注 7 参照) とすることができる。またA 3 の全体を，「可縮な集合 $u_i(\bar{x}_i)=\{z_i \mid z_i\in A_i(\bar{x}_i),\ f(z_i,\ \bar{x}_i)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i)}{\mathrm{Max}} f_i(x_i,\ \bar{x})\}$ の存在」にかえることもできる。しかし本報告の主張は，これらの一般化された基本仮定のもとにおいても，一部の変更を加えれば，成立する (後述)。

Debreu の存在定理

「基本仮定A 1〜A 3を満足する非協力ゲーム（X_i, f_i, A_i）は，次の条件が成立するとき，その均衡解を持つ。ただし，$i=1, 2, \cdots\cdots, n$ とする。

B 1　制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ は，任意の $\bar{x}_i(\in \bar{X}_i)$ に関して，X の非空の凸部分集合である。

B 2　同集合 $A_i(\bar{x}_i)$ は，$\bar{X}_i$ において定義される連続[(4)]な多価関数（multi-valued function）である。」

この定理は，Arrow and Debreu〔1〕の lemma（274頁）を整理したものである[(5)]。なお，制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ が，任意の $\bar{x}_i \in \bar{X}_i$ に対して，$A_i(\bar{x}_i)=X_i$ となる非協力ゲームは，Nash の非協力ゲームに一致する。このとき，上記定理のB 1，B 2は常に成立する[(6)]。したがって，Nash の非協力ゲームが均衡解を持つためには，基本仮定A 1〜A 3のみが成立すればよい。

3　部分ゲーム

制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ がある $\bar{x}_i \in \bar{X}_i$ について空である非協力ゲームは，Debreu の条件B 1を満足しない。かかるゲームに対しては，その戦略集合を適当に縮小した部分ゲームを導出し，このゲームについて，あらためて Debreu の存在定理を適用する方法が考えられる。そこで，本節では，任意の非協力ゲームに対してその部分ゲームを定義し，つづいて元の非協力ゲームと同一の解集合を持った部分ゲームを指摘する。

（4）ここでの連続とは上半かつ下半連続（upper and lower semi-continuous）を意味する（Debreu〔3〕1・7節）。

（5）本定理の証明は洲浜〔6〕（補注1，125）を参照されたい。しかし，Debreu〔2〕は，より一般的な基本仮定（前注(3)参照）のもとで，本文と同じ定理を証明している。

（6）$A_i(\bar{x}_i)=X_i$ のとき，基本仮定A 1より，X_i は非空の凸集合であるから，B 1は成立する。また，このとき $A_i(\bar{x}_i)$ のグラフは，閉じた空間 $X(=X_i \times \bar{X}_i)$ そのものであるから，閉写像である。ゆえに，関数 $A_i(\bar{x}_i)$ は上半連続となる。次に，同空間 X は凸性を持つから，洲浜〔6〕（補助定理1，124）より，関数 $A_i(\bar{x}_i)$ は下半連続でもある。以上より，関数 $A_i(\bar{x}_i)$ は $\bar{X}_i$ で連続となり，B 2も成立する。

1　部分ゲーム。非協力ゲーム (X_i, f_i, A_i) に対する部分ゲームを

$$(Y_i,\ g_i,\ B_i)\quad(1=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

と表わし，次のように定義する。

C 1　第 i 番目のプレイヤーの部分ゲームにおける戦略集合 Y_i は，R^{h_i} においてコンパクトで，元の戦略集合 X_i の凸部分集合である。したがって，

(2)　$Y_i \subset X_i$

となる。また，戦略集合の直積についても $Y \subset X$，$\overline{Y}_i \subset \overline{X}_i$ が成立する。ただし，

$$Y = Y_1 \times Y_2 \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \times Y_n$$

$$\overline{Y}_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots\cdots \times Y_{i-1} \times Y_{i+1} \times \cdots\cdots \times Y_n$$

とする。

C 2　第 i 番目のプレイヤーの部分ゲームにおける制約集合 $B_i(\overline{y}_i)$ $(\overline{y}_i \in \overline{Y}_i)$ は，元ゲームの制約集合と部分ゲームの戦略集合との共通部分である。すなわち

(3)　$B_i(\overline{y}_i) = A_i(\overline{y}_i) \cap Y_i$, for any $\overline{y}_i \in \overline{Y}_i$

となる。

C 3　第 i 番目のプレイヤーの部分ゲームにおける利得関数 $g_i(y_i, \overline{y}_i)$ は，次式で定義される実数値連続関数で，あらゆる $\overline{y}_i$ に対して y_i の擬凹関数である。

(4) $g_i(y_i, \overline{y}_i) = f_i(y_i, \overline{y}_i)$, for any $y_i \in Y_i$, for any $\overline{y}_i \in \overline{Y}_i$

最後に，部分ゲームの均衡解および解集合は，元のゲームのそれらに準じて定義されるものとする。例えば，部分ゲームの解集合 Y^* は

(5)　$Y^* = [y^* \mid y^* \in Y,\ g_i(y_i{}^*, \overline{y}_i{}^*) = \underset{y_i \in B_i(\overline{y}_i{}^*)}{\mathrm{Max}}\, g_i(y_i, \overline{y}_i{}^*)$

$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)]$

となる。

2　$Y^* \equiv X^*$ の成立する部分ゲーム。部分ゲームの定義から明らかなごとく，一つの非協力ゲームより，多数の部分ゲームが導かれる。それらすべての部分

ゲームについて，それぞれの解集合 Y^* が，元のゲームの解集合 X^* に等しいとは限らない。しかし，次の補助定理が示すように，ある特殊な戦略集合を持った部分ゲームの解集合は，元の非協力ゲームの解集合に等しい。まず，補助定理に必要な二，三の概念について説明する。

和集合 $\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i)$：すべての $\bar{x}_i(\in\bar{X}_i)$ に関する制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ の和集合を表わす。

閉凸包 $\overline{c_k(z)}$：R^k において，その部分集合 z を含む，閉じた最小の凸集合を表わす。ただし k は有限とする。

補助定理（$Y^*\equiv X^*$）

「基本仮定A１～A３を満足する任意の非協力ゲーム（X_i，f_i，A_i）は，それぞれ

（6） $Y_i=\overline{c_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))}$ （$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）

を戦略とする部分ゲームを含み，その解集合は元の非協力ゲームの解集合に等しい。」

証明。すべての $\bar{x}_i(\in\bar{X}_i)$ に対して，$A_i(\bar{x}_i)\subset X_i$ であるから，$\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i)\subset X_i$ が成立する。そこで，この両辺に閉凸包をとり，さらに戦略集合 X_i が基本仮定A１より R^{h_i} において閉じた凸集合であることを考慮して

$$Y_i=\overline{c_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))}\subset X_i$$

となる。したがって，部分ゲームの定義C１が成立する。次に，任意の $\bar{y}_i\in\bar{Y}_i$ に対して，$A_i(\bar{y}_i)$ を考える。上記の $Y_i\subset X_i$ より，$\bar{Y}_i\subset\bar{X}_i$ であるから，明らかに

$$A_i(\bar{y}_i)\subset\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i)\subset\overline{c_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))}=Y_i$$

となる関係が存在する。ゆえに，定義C２における部分ゲームの制約集合 $B_i(\bar{y}_i)$ は存在して

（7） $B_i(\bar{y}_i)=A_i(\bar{y}_i)$ for any $\bar{y}_i\in\bar{Y}_i$

となる。次に，基本仮定A１，A２を満たす利得関数 $f_i(x_i, \bar{x}_i)$ は集合 X の

全域にわたって定義される。したがって，その定義域を X からその部分集合 Y に縮小することによって，部分ゲームの利得関数 $g_i(y_i, \bar{y}_i)$ は一意に決定する。すなわち

(8) $g_i(y_i, \bar{y}_i)=f_i(y_i, \bar{y}_i)$, for any $y_i \in Y_i$, for any $\bar{y}_i \in \bar{Y}_i$

となる。以上より，定理が述べる部分ゲーム (Y_i, g_i, B_i) は存在し，その Y_i, g_i, B_i は，それぞれ(6)，(8)，(7)で決定される。

次に $Y^* \equiv X^*$ を証明する。

$Y^* \subset X^*$。解集合 Y^* の任意の一点 $y^*=(y_i^*, \bar{y}_i^*)$ について，(5)，(7)，(8)および(1)より，

$$g_i(y_i^*, \bar{y}_i^*)=\operatorname*{Max}_{y_i \in B_i(\bar{y}_i^*)} g_i(y_i, \bar{y}_i^*)=\operatorname*{Max}_{y_i \in A_i(\bar{y}_i^*)} f_i(y_i, \bar{y}_i^*)$$
$$=f_i(y_i^*, \bar{y}_i^*)$$

が成立する。ここで，$y^* \in Y \subset X$ であるから，上式は $y^* \in X^*$ を意味している。したがって，$Y^* \subset X^*$ が成立する。

$X^* \subset Y^*$。解集合 X^* の任意の一点 $x^*=(x_i^*, \bar{x}_i^*)$ をとりあげる。ただし，$x_i^* \in A_i(\bar{x}_i^*)$ である。当然 $\bar{x}_i^* \subset \bar{X}_i$ であるので

$$A_i(\bar{x}_i^*) \subset \bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i) \subset \overline{c_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))}=Y_i$$

が成立する。したがって，$x_i^* \subset Y_i$ および $\bar{x}_i^* \in \bar{Y}_i$ となる。そこで，上述と同じ方法で

$$f_i(x_i^*, \bar{x}_i^*)=\operatorname*{Max}_{x_i \in A_i(\bar{x}_i^*)} f_i(x_i, \bar{x}_i^*)=\operatorname*{Max}_{x_i \in B_i(\bar{x}_i^*)} g_i(x_i, \bar{x}_i^*)$$
$$=g_i(x_i^*, \bar{x}_i^*)$$

となり，$x^* \in Y^*$ すなわち $X^* \subset Y^*$ が成立する。

以上の二つの結果より，$X^* \equiv X^*$ が証明された。　　(証明終)

4 拡 張 定 理

前節の補助定理における部分ゲーム (Y_i, g_i, B_i) に，Debreu の存在定理を適用して，次の拡張定理を得る。

拡張定理

「基本仮定A 1～A 3を満たす非協力ゲーム（X_i, f_i, A_i）は，次の条件が成立するとき，その均衡解を持つ。ただし，$Y_i=\overline{c_{h_i}(\bigcup_{x_i} A_i(\overline{x}_i))}$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ とする。

D 1　制約集合 $A_i(\overline{y}_i)$ は，任意の $\overline{y}_i\in\overline{Y}_i$ に対して，Y_i の非空の凸部分集合である。

D 1　同 $A_i(\overline{y}_i)$ は，$\overline{Y}_i$ において定義される連続な多価関数である。」

この定理について，次の二点を明らかにしておく。

1　拡張定理は，Debreu の定理を含む。実際，任意のゲームで $\overline{Y}_i\subset\overline{X}_i$ であるから，Debreu の定理B 1が成立すれば任意の $\overline{y}_i\in\overline{Y}_i$ についても $A_i(\overline{y}_i)$ は X_i の非空の凸部分集合である。さらに補助定理の証明の前段において明らかにしたごとく，$A_i(\overline{y}_i)\subset Y_i$ である。以上より，拡張定理のD 1は成立する。次に，Debreu の存在定理のB 2が成立すれば，$A_i(\overline{x}_i)$ は $\overline{X}_i$ において定義される連続な多価関数であるから，その部分集合 $\overline{Y}_i(\subset\overline{X}_i)$ においても同じである。ゆえにD 2も成立する。以上より，Debreu の存在定理は，上の拡張定理に含まれる。

2　基本仮定A 1における戦略集合 X_i を，R^{h_i} におけるコンパクトで可縮[7]な集合に一般化しても，集合 Y_i を適当に選べば，上記と同じ定理が成立する。以下，このことを明らかにする。そこで，基本仮定A 1を，次のA1′に一般化する。

A1′　戦略集合 X_i は，有限次元のユークリッド空間（R^{h_i}）における，コンパクトで可縮な部分集合である。

次に，$\overline{D_{h_i}(z)}$ によって，R^{h_i} の部分集合 z を含む閉じた可縮な集合の最小のものを表わすものとする。そのとき，前述の通り $\bigcup_{x_i} A_i(\overline{x}_i)\subset X_i$ であるから，

（7）一般に R^{h_i} の部分集合 X がその一点 $x^\circ(\in X)$ に収縮可能又は可縮（contractible）であるとは，$I=(t\,|\,0\leqq t\leqq 1)$ とするとき，すべての $x(\in X)$ に対して $H(x, 0)=x$, $H(x, 1)=x^\circ$ を満たす $X\times I$ から X のなかへの連続写像 $H(x, t)$ が存在することである。例えば，R^n における凸部分集合は可縮である。

この両辺に $\overline{D_{h_i}(\cdot)}$ をとれば，仮定A1′を考慮して

$$\overline{D_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))} \subset X_i$$

となる関係が存在する。そこで，補助定理における(6)を

$$(6')\quad Y_i' = \overline{D_{h_i}(\bigcup_{\bar{x}_i} A_i(\bar{x}_i))} \quad (1=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

に置きかえ，前述と同じ証明を繰返せば，基本仮定A1′，A 2～3のもとにおける補助定理が成立する。これを利用すれば，この一般化された基本仮定を満たす非協力ゲームに対しても，Y_i を Y_i' に置きかえた拡張定理が成立する。

参 考 文 献

〔1〕 Arrow, J.K. and G. Debreu, "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, Vol. 22 No. 3, 265—90, 1954.

〔2〕 Debreu, G., "A Social Equilibrium Existence Theorem, *Proceedings of the National Academy of Science*," Vol. 38, 886—93, 1952.

〔3〕 —— *Theory of Value*, John Wiley and Sons, Inc. 1954.

〔4〕 Nash, J., "Non-Cooperative Games," *Annals of Mathematics*, 286—95, 1951.

〔5〕 鈴木光男『ゲームの理論』勁草書房，1959。

〔6〕 洲浜源一「非協力ゲームの均衡解に関する Debreu の存在定理について」大阪府立大学経済研究，昭和51年 (1976) 1月，119—129。