<論説>種々の確率分布の関係

種々の確率分布の関係

今　川　正

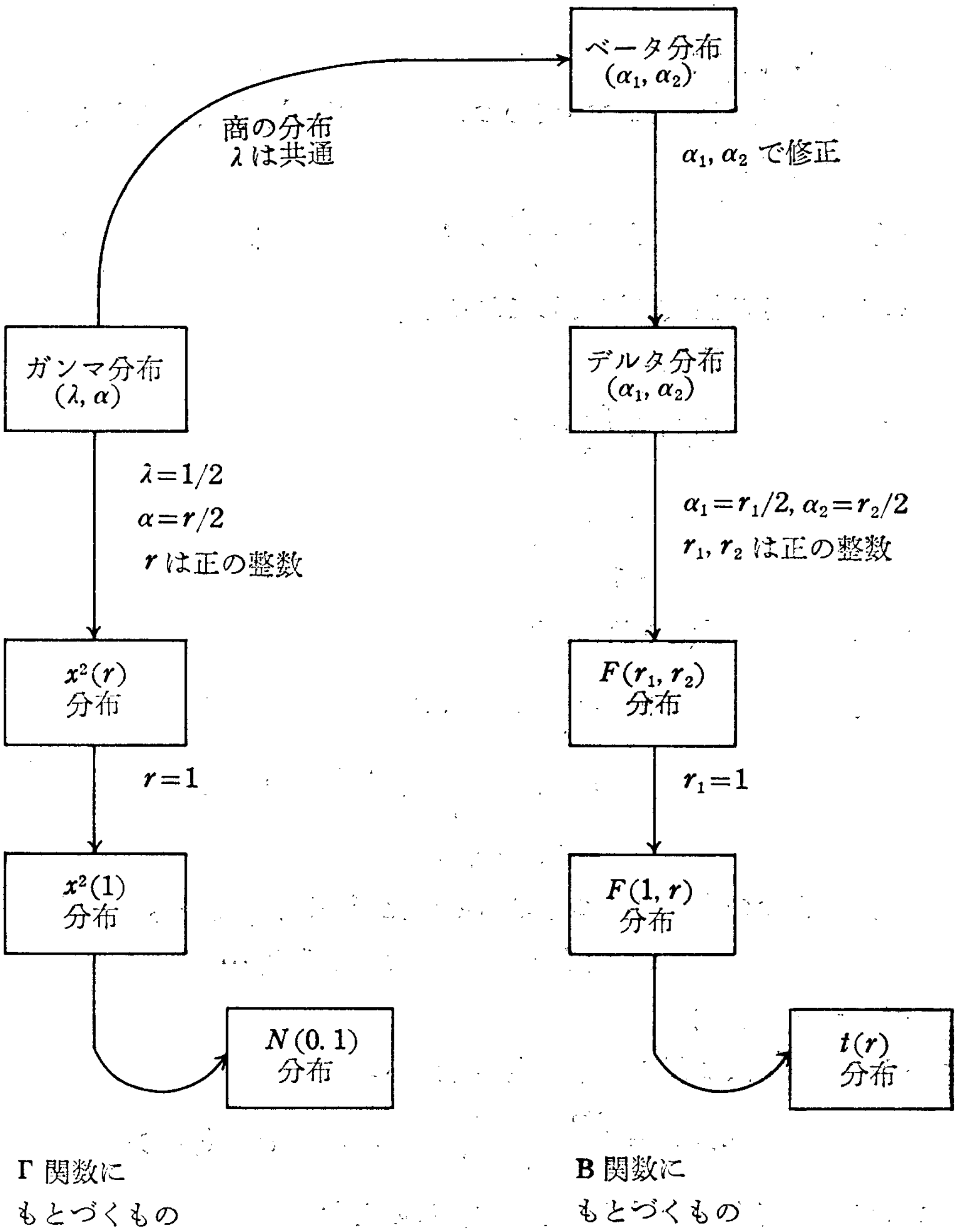
1. はじめに

ここで経済の統計的分析においてしばしば用いられている6種類の分布関数の関係を明らかにする。（図1を参照のこと）

すなわち，まずガンマ関数，ベータ関数およびその関係について数学的な準備をしたあとで，ガンマ関数にもづいてガンマ分布，カイ2乗分布，規準正規分布を導出する。ついで補論の商の分布の結果を用いてガンマ分布よりベータ分布をもとめる。後者はベータ関数にもとづいており，それよりスネデカーのF分布，スチューデントのt分布を導出する。（図1の縦の関係）

ベータ分布よりこれらの分布をもとめるにあたってデルタ分布を新しくつくった。そして6種類の分布の関係を明らかにあたってデルタ分布を主軸として用いた。なお，ここで用いたベータ分布は統計学のほとんどのテキストにおいて顧りみられていない第2種のベータ分布

図1　種々の確率分布の関係



である。

なお，ガンマ分布よりデルタ分布，カイ2乗分布よりF分布を容易にもとめることができる。（図1の横の関係）

2. 数学よりの準備

ガンマ関数

任意の実数 $\alpha>0$ についてのつぎの積分を $\Gamma(\alpha)$ とあらわし，ガンマ関数とよぶ。

$$(1) \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \qquad \alpha>0$$

ここでつぎの性質に注目しておこう。

定理　$\Gamma(1)=1$

証明
$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx$$
$$=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}$$
$$=1$$

定理　$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

証明
$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$$
$$=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}e^{x}dx$$
$$=0+\alpha\Gamma(\alpha)$$

うえの2つの定理よりつぎのものがただちにえられる。

$$\Gamma(n+1)=n\,!, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

ベータ関数

ベータ関数はつぎの積分で定義される。

$$B(\alpha_1, \alpha_1)=\int_0^{\infty}\frac{u^{\alpha_1-1}}{(1+u)^{\alpha_1+\alpha_2}}du \qquad \alpha_1>0, \alpha_2>0$$

ここで変数変換 $u=\sin^2\theta$ を施す。このとき

$$1-u=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$
$$du=2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

であり，u の $0, 1$ には θ の $0, \pi/2$ が対応するので，つぎのものをえる。

$$(2) \qquad B(\alpha_1, \alpha_2)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2\alpha_1-1}(\cos\theta)^{2\alpha_2-1}d\theta$$

これよりつぎのものを容易にえることができる。

(3)　$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

ベータ関数とガンマ関数との関係

定理　ベータ関数とガンマ関数とのあいだにはつぎの関係がある。

(4)　$$\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

証明　ガンマ関数(1)において変数変換 $x=u^2/2$ を施し，つぎのようにあらわしておく。

$$\Gamma(\alpha_1) = \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{2}\right)^{\alpha_1-1} e^{-u^2/2} u\,du$$

同様の式をもう1つつくり，その2つを掛け，極座標に変え，つぎのものをえる。

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{2}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{v^2}{2}\right)^{\alpha_2-1} e^{-(u^2+v^2)/2} uv\,du\,dv\\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} 2(\cos\theta)^{2\alpha_1-1}(\sin\theta)^{2\alpha_2-1} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta\\
&= \int_0^\infty y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-y} dy \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2\alpha_1-1}(\sin\theta)^{2\alpha_2-1} d\theta \qquad y=r^2/2\\
&= \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (1), (4)
\end{aligned}$$

これよりただちにつぎのものがえられる。

$$\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{B}(\alpha_2, \alpha_1)$$

(3)，(4)よりつぎのものがえられる。

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

3.　ガンマ関数にもとづくもの

ガ ン マ 分 布

まえに式(1)で定義したガンマ関数において $x=\lambda y\ (\lambda>0)$ とおき，つぎの形であらわしておく。

$$1 = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y} y^{\alpha-1} dy$$

$\alpha>0,\ \lambda>0,\ \Gamma(\alpha)>0$ であるから，つぎのものが確率密度関数である。そしてこの密度をもつランダム変数Yはパラメーターα, λのガンマ分布をもつといわれる。

$$f_Y(y)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda y}y^{\alpha-1} \tag{5}$$

$y\leq 0$ のとき $f_Y(y)=0$ である。

定理　パラメーター $\lambda,\ \alpha$ のガンマ分布のk次モーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k'=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$$

証明
$$\begin{aligned}\mu_k'&=\int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda y}y^{\alpha-1}y^k dy\\&=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}\right)^{-1}\int_0^\infty\frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}e^{-\lambda y}y^{\alpha+k-1}dy\\&=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

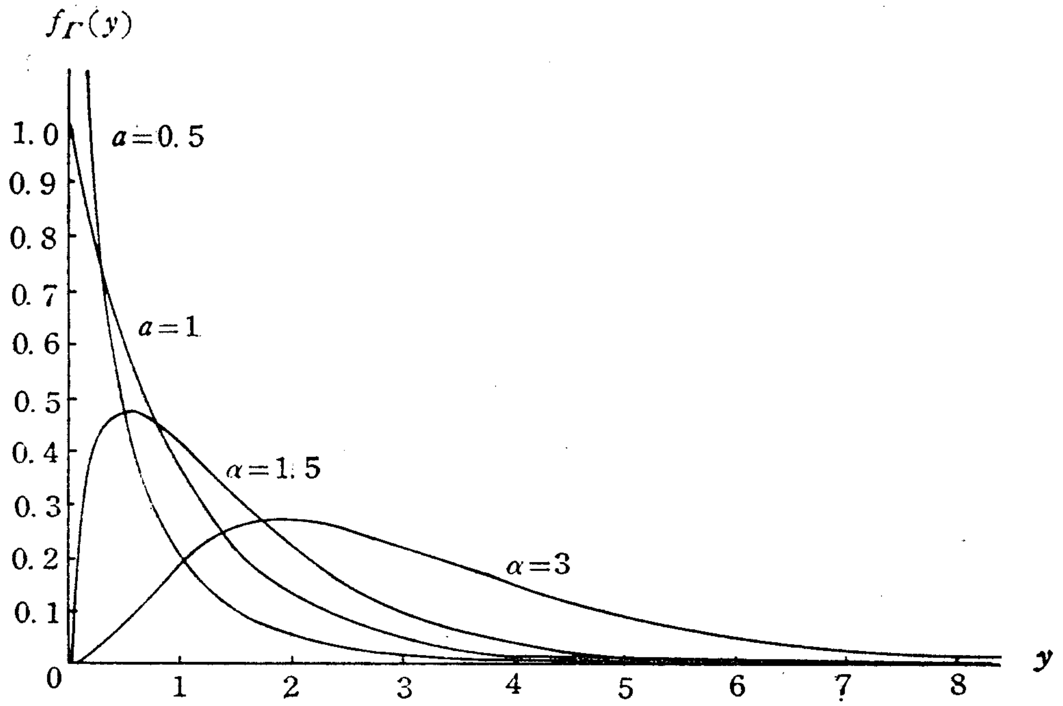


図2　ガンマ分布 ($\lambda=1$)

0次モーメントは1になる。(なお，あとで述べる他のすべての密度関数についても，1になることを容易に示すことができる)。

定理　パラメーター λ, α のガンマ分布の1次，2次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_1'=\alpha/\lambda$$

$$\mu_2'=(\alpha+1)\alpha/\lambda^2$$

カイ2乗分布

パラメーター λ, α のガンマ分布において λ, α を $1/2$, $r/2$, r は正の整数，とおいたものを自由度 r のカイ2乗分布という。

定理　自由度 r のカイ2乗分布の密度関数はつぎのもので与えられる。

$$f_{\chi^2}(y)=\frac{(1/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)}e^{-y/2}y^{r/2-1}, \qquad y>0$$

$y\leq 0$ のとき $f_{\chi^2}(y)=0$ である。

定理　自由度 r のカイ2乗分布の k 次，1次，2次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k'=2^k\frac{1}{\Gamma(r/2)}\Gamma\left(\frac{r}{2}+k\right)$$

$$\mu_1'=r$$

$$\mu_2'=(r+2)r$$

規準正規分布

定理　Y が自由度1のカイ2乗分布をもつとき $Z=Y^{1/2}$ はつぎの密度関数をもち，規準正規分布をもつといわれる。

$$f_Z(z)=\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}e^{-z^2/2}, \qquad -\infty<z<\infty$$

証明　$r=1$ のとき Y の密度関数はつぎのようにあらわされる。

$$f_Y(y)=\frac{(1/2)}{\Gamma(1/2)}e^{-y/2}y^{-1/2}, \qquad y>0$$

これにつぎの変換を施して z の密度関数をもとめる。

$$z=y^{1/2},\ \ y=z^2,\ \ dy/dz=2z$$

まず $z>0$ のときにはつぎの密度関数をえる。

$$f_Z{}^*(z)=\frac{z(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}e^{-z^2/2}, \qquad z>0$$

$z<0$ のときには $-z$ についてうえと同じ結果がえられる。対称性 $f_Z{}^*(z)=f_Z{}^*(-z)$ に注目すると，z の密度として定理に述べたものをえることができる。

定理　規準正規分布の k 次（k は偶数）のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k{}'=2^{k/2}\frac{\Gamma(1/2+k/2)}{\Gamma(1/2)}$$

証明　$$\mu_k{}'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}e^{-z^2/2}z^k dz$$

$$=\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}2^{k/2+1/2}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{1/2+k/2-1}dx,$$

$$z^2=2x,\ dz/dx=2^{-1/2}x^{-1/2}$$

$$=2^{k/2}\frac{1}{\Gamma(1/2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)$$

なお，k が奇数のときにはつぎのものをえる。

$$\mu_k{}'=\int_0^{\infty}\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}e^{-z^2/2}z^k dz+\int_{-\infty}^{0}\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}z^{-z^2/2k}dz=0$$

定理　規準正規分布の1次，2次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_1{}'=0$$

$$\mu_2{}'=1$$

4.　ベータ関数にもとづくもの

ベータ分布

定理　それぞれパラメーター λ, α_1 および λ, α_2（ここに λ は共通）のガンマ分布をもつ統計的に独立なランダム変数 Y_1, Y_2 の商

$$V=Y_1/Y_2$$

の密度はつぎのものによって与えられる。

$$f_V(v)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)}\ \frac{v^{\alpha_1-1}}{(1+v)^{\alpha_1+\alpha_2}} \qquad v>0$$

$v \leq 0$ であると $f_V(v)=0$ である。

このときVはパラメーター α_1, α_2 のベータ分布をもつといわれる。(注)

証明　Y_1, Y_2 の密度関数はそれぞれ(5)に与えられている。

補論の「商の分布」の結果を適用してつぎのものをえることができる。

ここでは $0<v=y_1/y_2<\infty$ のときに注目する。そして $\Gamma_0=\Gamma(\alpha_1)\times\Gamma(\alpha_2)$ の記号を用いる。

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \Gamma_0^{-1}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\int_0^\infty y_2(y_2)^{\alpha_2-1}e^{-\lambda y_2}(y_2 v)^{\alpha_1-1}e^{-\lambda y_2 v}dy_2 \\
&= \Gamma_0^{-1}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}v^{\alpha_1-1}\int_0^\infty y_2{}^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-y_2\lambda(1+v)}dy_2 \\
&= \Gamma_0^{-1}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}v^{\alpha_1-1}[\lambda(1+v)]^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^\infty z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z}dz \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)}\ \frac{v^{\alpha_1-1}}{(1+v)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad 0<v<\infty
\end{aligned}
$$

ここで変換 $y_2=z/[\lambda(1+v)]$ を施した。

定理　パラメーター α_1, α_2 のベータ分布の k 次のモーメントはつぎの通りである。

$$
\mu_k' = \mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}(\alpha_1+k, \alpha_2-k)
$$

$$
\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)
$$

証明

$$
\begin{aligned}
\mu_k' &= \mathrm{B}_0^{-1}\int_0^\infty \frac{v^{\alpha_1+k-1}}{(1+v)^{\alpha_1+\alpha_2}}dv \\
&= \mathrm{B}_0^{-1}\int_0^\infty \frac{v^{\alpha_1+k-1}}{(1+v)^{(\alpha_1+k)+(\alpha_2-k)}}dv \\
&= \mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}(\alpha_1+k, \alpha_2-k), \qquad \alpha_2-k>0
\end{aligned}
$$

定理　パラメーター α_1, α_2 のベータ分布の1次，2次のモーメントはつぎの通りである。

(注)　これは第2種のベータ分布とよばれるものである。第1種のベータ分布の密度関数はつぎのようにあらわされている。

$$
f_V(v) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, \quad 0<v<1
$$

そのほかの v の値のところで $f_V(v)=0$ である。

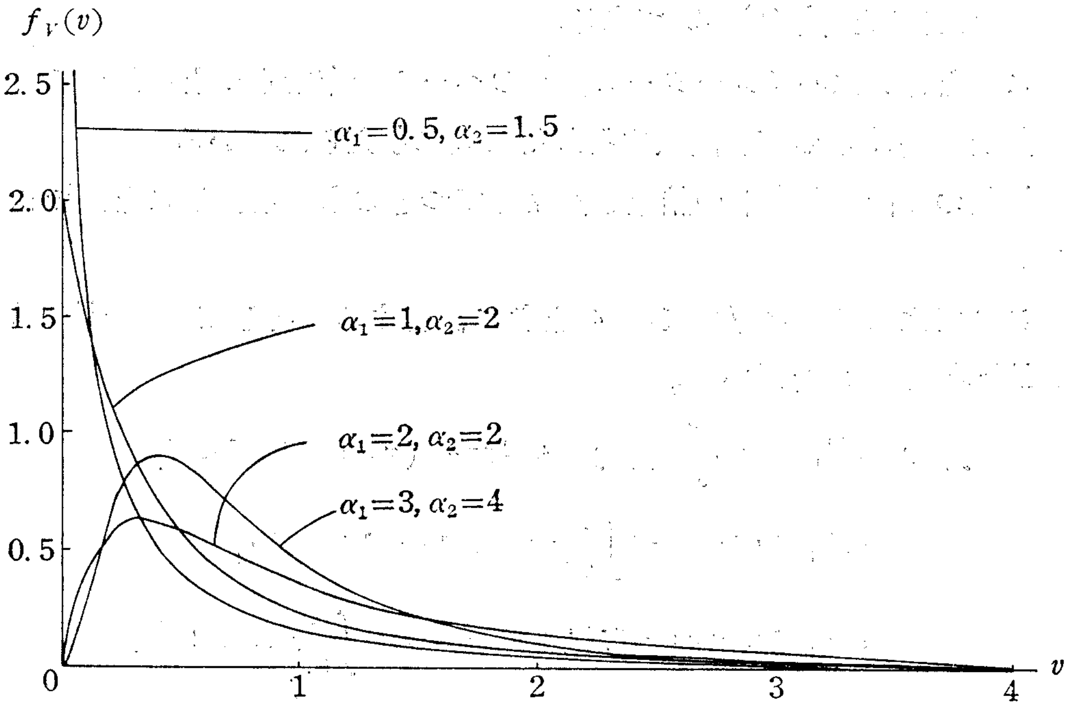


図3　ベータ分布

$$\mu_1'=\frac{\alpha_1}{\alpha_2-1}$$

$$\mu_2'=\frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)}$$

デルタ分布

定理　パラメーター α_1, α_2 のベータ分布をもつ変量Vを

$$X=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}V$$

と変換してえるXの密度はつぎのものによって与えられる。このときXはパラメーター α_1, α_2 のデルタ分布をもつとよぶ。

$$f_\Delta(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)}\ \frac{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1-1}}{\left[1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1+\alpha_2}}\quad x>0$$

$x\leq 0$ のとき $f_\Delta(x)=0$ である。

証明　Vの密度はまえの定理に述べられている。ここでつぎの変換を施すと定理に述べられている密度をえる。

$$x=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v,\quad v=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x,\quad \frac{dv}{dx}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

定理　パラメーター α_1, α_2 のデルタ分布の k 次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k'=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k \mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}(\alpha_1+k,\ \alpha_2-k)$$

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{B}(\alpha_1,\ \alpha_2)$$

証明

$$\mu_k'=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\mathrm{B}_0^{-1}\int_0^\infty \frac{x^k\left[\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1-1}}{\left[1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1+\alpha_2}}dx$$

$$=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k \mathrm{B}_0^{-1}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha_1-1}}{(1+u)^{\alpha_1+\alpha_2}}du \qquad x=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}u$$

$$=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^k \mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}(\alpha_1+k,\ \alpha_2-k)$$

定理　パラメーター α_1, α_2 のデルタ分布の１次，２次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_1'=\frac{\alpha_1}{\alpha_2-1}$$

$$\mu_2'=\frac{(\alpha_1+1)\alpha_2^2}{\alpha_1(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)}$$

スネデカーの F 分布

定理　パラメーター α_1, α_2 のデルタ分布において α_1, α_2 をそれぞれ $r_1/2, r_2/2$ (r_1, r_2 は正の整数) とおいたものの密度はつぎのもので与えられ，自由度 r_1, r_2 の F 分布，$F(r_1, r_2)$ をもつといわれる。

$$f_F(x)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\dfrac{r_1}{2}, \dfrac{r_2}{2}\right)}\ \frac{\dfrac{r_1}{r_2}\left[\dfrac{r_1}{r_2}x\right]^{r_2/2-1}}{\left[1+\dfrac{r_1}{r_2}x\right]^{(r_1+r_2)/2}} \qquad x>0$$

$x\leq 0$ のとき $f_F(x)=0$ である。

定理　自由度 r_1, r_2 の F 分布の k 次，１次，２次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k'=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k \mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}\left(\frac{r_1}{2}+k,\ \frac{r_2}{2}-k\right)$$

種々の確率分布の密度

Γ関数にもとづくもの	密度関数	変域
ガンマ分布 (λ, α)	$\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y} y^{\alpha-1}$	$y>0$
$\chi^2(r)$	$\frac{(1/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)} e^{-y/2} y^{r/2-1}$	$y>0$
$\chi^2(1)$	$\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-y/2} y^{1/2-1}$	$y>0$
$N(0, 1)$	$\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-z^2/2}$	$-\infty<z<\infty$

B関数にもとづくもの	密度関数	変域
ベータ分布 (α_1, α_2)	$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)} \frac{v^{\alpha_1-1}}{[1+v]^{\alpha_1+\alpha_2}}$	$v>0$
デルタ分布 (α_1, α_2)	$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1, \alpha_2)} \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1-1}}{\left[1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x\right]^{\alpha_1+\alpha_2}}$	$x>0$
$F(r_1, r_2)$	$\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} \frac{\frac{r_1}{r_2}\left[\frac{r_1}{r_2}x\right]^{r_1/2-1}}{\left[1+\frac{r_1}{r_2}x\right]^{(r_1+r_2)/2}}$	$x>0$
$F(1, r)$	$\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} \frac{\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}x\right]^{r/2-1}}{\left[1+\frac{1}{r}x\right]^{(1+r)/2}}$	$x>0$
$t(r)$	$\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} \frac{\left[\frac{1}{r}\right]^{-1/2}}{\left[1+\frac{1}{r}t^2\right]^{(1+r)/2}}$	$-\infty<t<\infty$

変域外の密度は0

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{B}\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)$$

$$\mu_1'=\frac{r_2}{r_2-2}$$

$$\mu_2'=\frac{(r_1+2)\,r_2^2}{r_1(r_2-2)(r_2-4)}$$

スチューデントの t 分布

関数およびモーメント

k 次のモーメント	1 次	2 次
$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+k)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$
$2^k \frac{1}{\Gamma(r/2)} \Gamma\left(\frac{r}{2}+k\right)$	r	$(r+2)r$
$2^k \frac{1}{\Gamma(1/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)$	1	3
$2^{k/2} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)$	0	1

k 次のモーメント	1 次	2 次
$\frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} B(\alpha_1+k, \alpha_2-k)$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_2-1}$	$\frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)}$
$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} B(\alpha_1+k, \alpha_2-k)$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_2-1}$	$\frac{(\alpha_1+1)\alpha_2^2}{\alpha_1(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)}$
$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k \frac{1}{B\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right)} B\left(\frac{r_1}{2}+k, \frac{r_2}{2}-k\right)$	$\frac{r_2}{r_2-2}$	$\frac{(r_1+2)r_2^2}{r_1(r_2-2)(r_2-4)}$
$r^k \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} B\left(\frac{1}{2}+k, \frac{r}{2}-k\right)$	$\frac{r}{r-2}$	$\frac{3r^2}{(r-2)(r-4)}$
$r^{k/2} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} B\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}, \frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right)$	0	$\frac{r}{r-2}$

定理　変量Fが自由度$1, r$ のF分布をもつとき，$T=F^{1/2}$ はつぎの密度をもち，自由度rのt分布 $t(r)$ をもつといわれる。

$$f_T(t)=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)} r^{-1/2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2} \qquad -\infty<t<\infty$$

証明　自由度 r_1, r_2 のF分布の密度関数において，$r_1=1, r_2=r$ とおき，つぎの変換を施す。

$$t=f^{1/2}, \quad f=t^2, \quad df/dt=2t$$

$t>0$ のときつぎのものをえる。

$$h^*(t)=2\mathrm{B}_0^{-1}r^{-1/2}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2} \qquad t>0$$

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{r}{2}\right)$$

$t<0$ のときにも同じ結果をえる。ここで $h^*(t)=h^*(-t)$ に注目すると定理に述べた密度をえる。

定理　自由度 r の t 分布の k（k は偶数）次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_k'=r^{k/2}\mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2},\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right), \qquad r>k$$

証明

$$\begin{aligned}\mu_k'&=\mathrm{B}_0^{-1}r^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}t^k dt\\&=2r^{-1/2}\mathrm{B}_0^{-1}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}t^k dt\\&=r^{-1/2}\mathrm{B}_0^{-1}\int_0^{\infty}(1+v)^{-(r+1)/2}r^{k/2}v^{k/2}r^{1/2}v^{-1/2}dv\\&=r^{k/2}\mathrm{B}_0^{-1}\int_0^{\infty}\frac{v^{(k+1)/2-1}}{(1+v)^{(r+1)/2}}dv\\&=r^{k/2}\mathrm{B}_0^{-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2},\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right) \qquad r-k>0\end{aligned}$$

ここでつぎの変数変換を施した。

$$t^2=v/r,\quad dt=\frac{1}{2}r^{1/2}v^{-1/2}dv,\ t^k=r^{k/2}v^{k/2}$$

k が奇数のときにはつぎのものをえる。

$$\begin{aligned}\mu_k'=&\mathrm{B}_0^{-1}r^{-1/2}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}t^k dt\\&+\mathrm{B}_0^{-1}r^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}t^k dt=0\end{aligned}$$

定理　自由度 r の t 分布の1次，2次のモーメントはつぎの通りである。

$$\mu_1'=0$$

$$\mu_2'=r/(r-2)$$

補　　論

定理　統計的に独立の正のランダム変数，Y，Zの商 $V=Y/Z$ の密度はつぎのもので与えられる。

$$f_V(v)=\int_0^\infty z f_Z(z) f_Y(zv)\,dz$$

証明　独立のY，Zの結合密度は $f_Y(y)f_Z(z)$ とあらわされる。集合 (y,z) はつぎのようにあらわされる。

$$\{(y,z)\,|\,0<y<\infty,\ 0<z<\infty,\ y<z\leq v\}$$
$$=\{(y,z)\,|\,0<y<zv,\ 0<z<\infty\}$$

このとき商の分布関数はつぎのようにしてもとめられる。

$$F_V(v)=\int_0^\infty\int_0^{zv} f_Z(z)f_Y(y)\,dy\,dz$$
$$=\int_0^\infty f_Z(z)\{|F_Y(y)|_0^{zv}\}\,dz$$
$$=\int_0^\infty f_Z(z)[F_Y(zv)-F_Y(0)]\,dz$$

これをvについて微分してつぎのものをえる。

$$f_V(v)=\frac{dF_V(v)}{dv}=\int_0^\infty f_Z(z)zf_Y(zv)\,dz$$