



<研究ノート>2変数動態システムについてのノート

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 和田, 貞夫 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24729/00001971">https://doi.org/10.24729/00001971</a>

## 2変数動態システム

### についてのノート

和田 貞 夫

経済変動の状態を二つの変数をもつ動態システムによって表示し、図示によって説明するという手法はしばしば用いられる。単に演算によってその結果を述べる方法に比べて、図示による方法は問題の要点と帰結を直截的に表わすという利点をもっている。経済分析において広くこの方法が用いられるのもそのためであろう。

本稿はこのような動態システム、特にそれが微分方程式で表示される場合についての覚え書きであり、異質的な二つの部分からなっている。その第一はそれを図示する場合に時としてみられる型の誤謬について述べ、第二は均衡の安定性についての Olech ([8]) の定理の図示的な説明を行ったものである。

### I

この節では、便宜上、線型システムを取り上げる。しかしその結果は非線型システムにも妥当する。

[A] 2変数の定係数線型微分方程式のシステムは次のように表わされる。

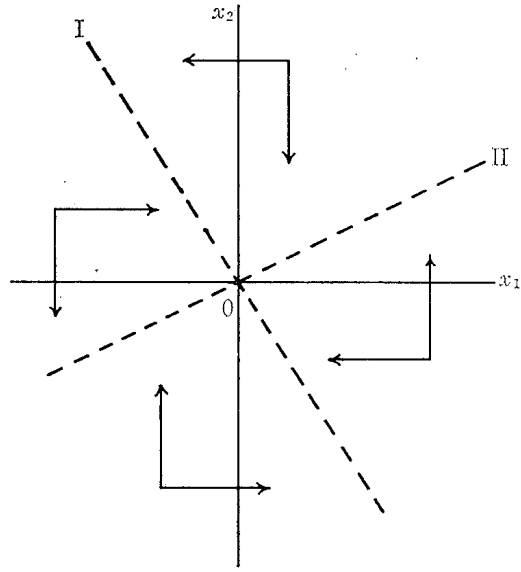
$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

$x_i (i=1, 2)$  は変数、 $a_{ij} (i, j=1, 2)$  は定数であり、 $\cdot$  は時間的変化率 ( $d/dt$ ) を意味する。

いま、(1)式の係数が

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11} < 0, \quad a_{12} < 0, \\ a_{21} > 0, \quad a_{22} < 0 \end{aligned}$$

をみたすとしよう。そのとき、 $\dot{x}_1=0$ をみたす  $(x_1, x_2)$  の集合は  $x_1 \cdot x_2$  平面において右下りの直線で表わされる。第1図の直線 I はこれであって、それを  $x_1$  の停止線と呼ぶことにする。同様に  $x_2$  の停止線 II を描くことができる。(2)式によってこれは右上りとなる。これらの直線によって  $x_1 \cdot x_2$  平面は四つの領域に分けられる。そして(2)式の条件のもとでは、直線 I の右方では、時間の経過とともに、 $x_1$  は減少し、左方では増加する。



第 1 図

また直線 II の上方では  $x_2$  は減少し、下方では増加する。したがって、それぞれの領域での各変数の変動方向は図の矢線で示される。

(2)式のなりたつとき、原点  $((x_1, x_2) = (0, 0))$  は体系(1)の均衡点 (equilibrium point) もしくは特異点 (singular point) であって、それは (漸近的に) 安定 (asymptotically stable) である。そしてこのシステムは

$$(3) \quad (a_{11} - a_{22})^2 > -4a_{12}a_{21}$$

である場合を排除しない。いま(3)式がなりたつものとし、また、便宜上、

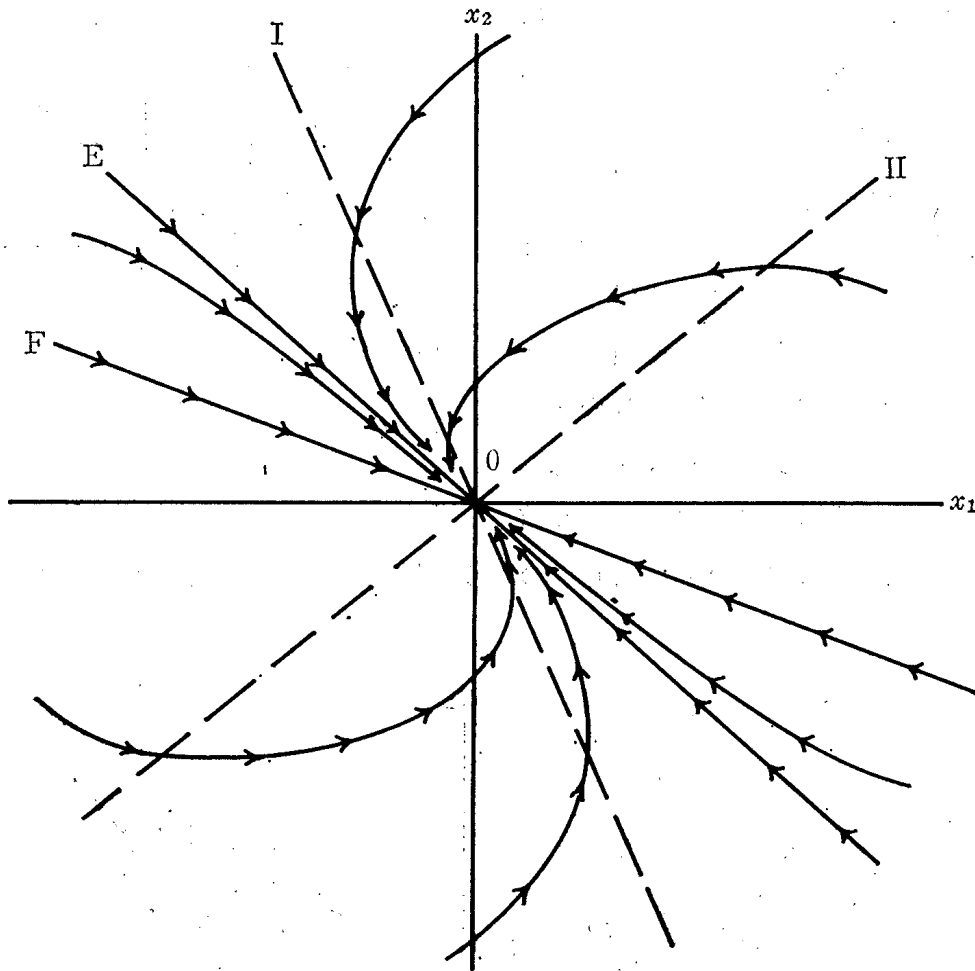
$$(4) \quad a_{11} < a_{22}$$

であるとしよう。このとき(1)式の位相図 (phase diagram) は第2図のようになる。したがって原点は安定な結節点 (node) <sup>(1)</sup> である。

第1図の矢印から、直観的に、動点  $(x_1, x_2)$  の軌道が左廻りの (counterclockwise) 螺旋状であり、原点が安定な渦状点 (focal point) であると考えられるかも知れない。上述の説明はこのことが必ずしも正しくないことを示している。したがってこのような直観的な直断は誤りである。このような例は、たとえば、Branson [1], p. 66, にみられる。<sup>(2)</sup>

(1) 位相図については Coddington・Levinson [3], Lefschets [7], Hurewicz [5], Struble [12], Sansone・Conti [11] などに詳しい説明がある。

(2) Patinkin [10], p. 233, 243, 249, にも第1図のような場合の説明があるが、それも正確なものではない。



第 2 図

[B] 次のようなシステムを考えよう。

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(z_1 - z_2) \\ \dot{x}_2 &= bz_1 \end{aligned}$$

そして

$$(6) \quad \begin{aligned} z_1 &= \alpha x_1 \\ z_2 &= \beta x_1 - \gamma x_2 \end{aligned}$$

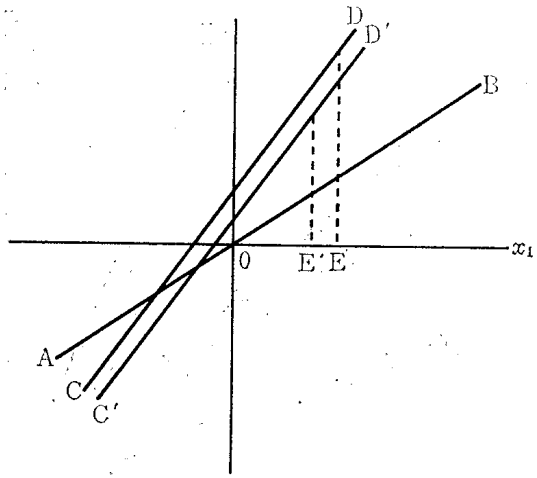
ただし、 $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  は正の定数であり、

$$(7) \quad \alpha < \beta$$

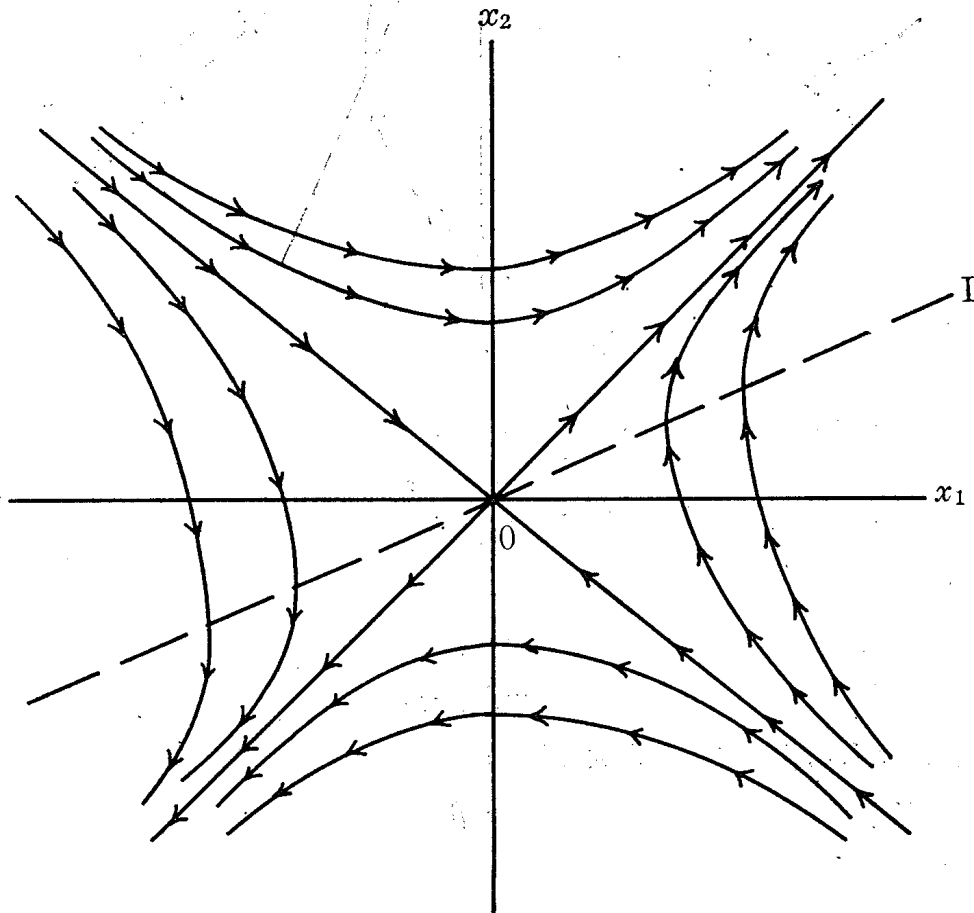
とする。

第3図は横軸に  $x_1$  をとり、(6)式のグラフを描いたものである。直線  $AB$  は第1式右辺のグラフであり、 $CD$  は  $x_2$  がある負の値をもつときの第2式右辺

のグラフである。いま  $x_2$  がこの値であるのに対して  $x_1$  は  $OE$  の値をもつとしよう。図から分かるように、 $z_1 < z_2$ ,  $z_1 > 0$  であるから、 $\dot{x}_1 < 0$ ,  $\dot{x}_2 > 0$ , つまり  $x_1$  は減少し、 $x_2$  は増加する。それゆえ直線  $CD$  は下にシフトして  $C'D'$  のようになる。このとき  $x_1$  の値は  $OE'$ 。それゆえ上述と同様に  $x_1$  の減少と  $x_2$  の増加が続き、二つの変数はいずれも均衡値ゼロに向うように見える。もしこのような推論が一般に正しければ、このシス



第 3 図



第 4 図

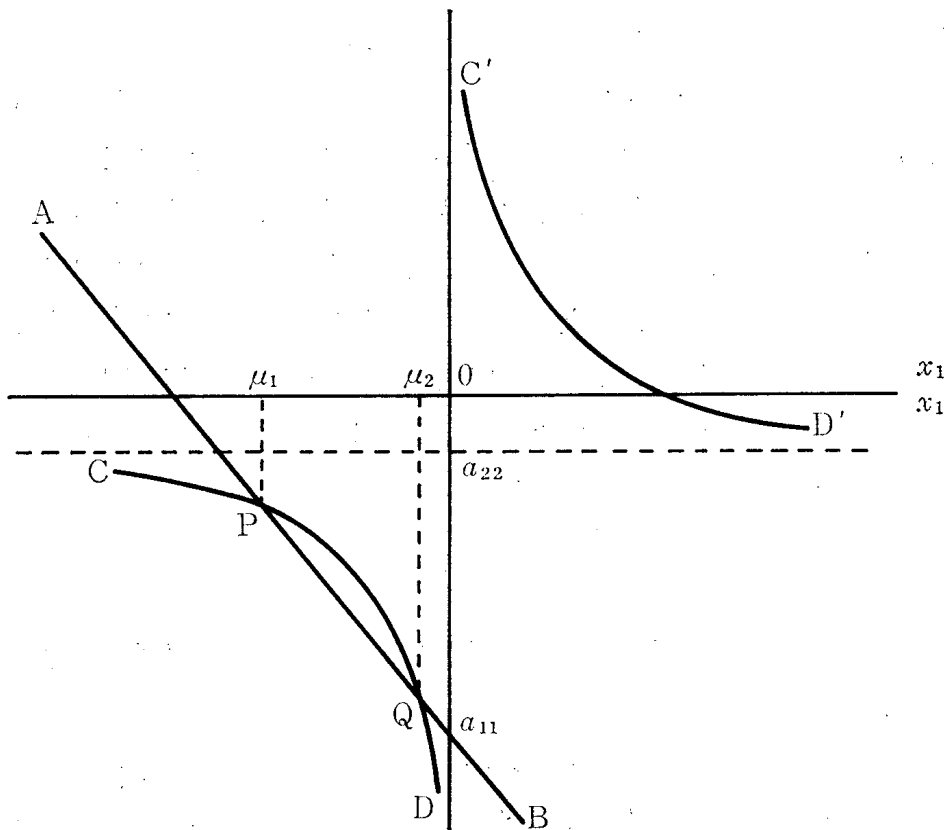
テムの均衡は安定であると解されるかも知れない。

上述の推論はある特殊な初期条件から出発したものであった。変数  $x_1, x_2$  の一般的動向を知るには位相図を描く必要がある。当面のモデルの位相図は第4図のようになる。直線 I は  $x_1$  の停止線であり、 $x_2$  の停止線は縦軸に一致する。均衡点は鞍点 (saddle point) であり、安定ではない。特殊な初期条件がみたされる場合に限って  $x_1, x_2$  が均衡に収束するにすぎない。

上の例は動態分析のために第3図のような図による分析が必ずしも正しい結果をもたらさないことを物語っている。Chang, Smyth ([2]) が明らかにしたように、Kaldor の景気循環の分析 ([6]) にもこの種の欠陥がみられる。<sup>(3)</sup>

[C] (1)の各式を  $x_1$  および  $x_2$  で割れば

$$(8) \quad \frac{\dot{x}_1}{x_1} = a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1} \quad (x_1 \neq 0)$$



第 5 図

(3) Kaldor のモデルでは、パラメーターの値が異なれば均衡点は安定であることも不安定であることもありうる。

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2} = a_{21} \frac{x_1}{x_2} + a_{22} \quad (x_2 \neq 0)$$

を得る。それゆえ(2), (3), (4)式の条件のもとでは(8)式は第5図によって示しうる。図の横軸は  $x_2/x_1$  であり, 直線 AB は第1式右辺のグラフ, 曲線 CD および C'D' は第2式右辺のグラフである。AB と CD の交点 P, Q の横座標を  $\mu_1, \mu_2$  としよう。それぞれは第2図の直線 OE, OF の勾配に等しい。<sup>(4)</sup>  $x_2/x_1$  が  $\mu_1$  または  $\mu_2$  に等しければ,  $(\dot{x}_1/x_1) = (\dot{x}_2/x_2)$  であるから,  $x_2/x_1$  は変化しない。また  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$  のとき

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{x_2}{x_1} \right) = \frac{x_2}{x_1} \left( \frac{\dot{x}_2}{x_2} - \frac{\dot{x}_1}{x_1} \right)$$

であり,  $x_1 \neq 0, x_2 = 0$  のとき

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{x_2}{x_1} \right) = a_{21} > 0$$

であるから, 図によってわかるように,  $(x_2/x_1) > \mu_2$  および  $(x_2/x_1) < \mu_1$  のとき  $x_2/x_1$  は増加し,  $\mu_1 < (x_2/x_1) < \mu_2$  のときそれは減少する。したがって, 図によって推察する限りでは,  $(x_2/x_1) < \mu_2$  であればそれは  $\mu_1$  に収束するけれども,  $(x_2/x_1) > \mu_2$  であれば,  $x_2/x_1$  は上昇をつづけるように見えるかも知れない。

第5図の  $x_2/x_1$  は第2図の  $(x_1, x_2)$  の点と原点とを結ぶ線分の勾配に等しい。そしてそれは, もし  $\mu_2$  より大きいならば, 増加し, やがて  $+\infty$  に達して非連続的に  $-\infty$  となり, 増加して  $\mu_1$  に収束する。このことは第2図によれば明らかであり, したがって第5図による上述の結論は正しくない。<sup>(5)</sup> このような型の誤りはたとえば Gschwendtner [4] にみられる。

## II

最近の動態的経済分析にしばしば利用される Olech の定理は次のようなものである。<sup>(6)(7)</sup>

- (4) 直線 OE, OF は  $a_{ij}$  を元とする行列の固有ベクトルである。  
 (5) この問題, ある意味では Achilles と亀についての Zenon のパラドクスと共通のものをもっている。  
 (6) これは Olech [8] における Theorem 4 である。  
 (7) 和田 [13], 241—254 ページ, において Pasinetti [9] の成長モデルの貯蓄関数の前提を一般化し, 代用の弾力性が 1 より小さくないならば均衡成長

システム

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

において、 $f_i (i=1, 2)$  は  $x_1, x_2$  に関して連続な偏導関数をもつものとする。以下では  $\partial f_i / \partial x_j$  を  $f_{ij}$  と表わす。このとき、もし

$$(a) \quad f_i(0, 0) = 0 \quad (i=1, 2)$$

であり、任意の  $x_1, x_2$  に関して

$$(b) \quad f_{11} + f_{22} < 0$$

$$(c) \quad f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > 0$$

がなりたち、しかも

$$(d_1) \quad f_{11}f_{22} \neq 0$$

$$(d_2) \quad f_{12}f_{21} \neq 0$$

の少なくとも一方がなりたつならば、原点 ( $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ) は大域的に (漸近) 安定な (asymptotically stable in the large) 特異点である。

この定理の厳密な証明は Olech [8] にゆずり、この節では、位相図を利用しながら、これをある程度視覚に訴える方法で説明する。

いま  $x_1 \cdot x_2$  平面上に任意の一点 P を選ぼう。この点において  $f_i (i=1, 2)$  は特定の値  $\alpha_i$  をもつ。そして、条件 (d<sub>1</sub>), (d<sub>2</sub>) によって、 $f_{11}, f_{12}$  の少なくとも一方はゼロでない。それゆえ、P の近傍にあって、それより水平方向または垂直方向にある他の点のうち的一方の上では  $f_i$  は  $\alpha_i$  に等しくない。つまり  $x_1 \cdot x_2$  平面上において集合  $S_i = \{(x_1, x_2) | f_i(x_1, x_2) = \alpha_i\}$  は内点をもたない。したがって  $S_i$  は曲線で表わされる。特に  $\alpha_i = 0$  のとき、 $S_i$  は  $x_i$  の停止 (曲) 線である。条件 (a), (c) によって原点は二つの変数の停止曲線の交点である。<sup>(8)</sup>

条件 (b), (c) は当然特異点の近傍においてもなりたつ。それゆえシステム (1) を特異点の近傍で線型近似した場合の体系の特性根の実部は負である。

が (相対的に) 大域的安定性をもつことを論証したが、山谷 [14] にみられるように、Olech の定理を利用すれば、代用の弾力性の値の如何にかかわらずそれが大域的に安定であることが証明される。したがってこのモデルにおいては和田 [13], 251—252 ページ、で述べたような極限循環の径路は存在しない。

(8) 条件(c)によって二つの停止曲線が切することはありえない。



つまり特異点は、もしそれが存在すれば、局所的に (in the small) 安定な結節点または渦状点でなければならない。

また条件 (b) によって、 $x_1 \cdot x_2$  平面の任意の点において  $f_{11}, f_{22}$  の少なくとも一方は負である。もし  $f_{11} < 0$  であれば、 $x_1$  の停止曲線の右 (左) 方の点では  $x_1$  は減少 (増加) し、 $f_{22} < 0$  であれば、 $x_2$  の停止曲線の上 (下) 方の点において  $x_2$  は減少 (増加) する。この意味で動点  $(x_1, x_2)$  は二つの変数の停止曲線の少なくとも一方に「吸引」されるということが出来る。また (b) がなりたてば、動点  $(x_1, x_2)$  の閉軌道 (closed path) は存在しない。<sup>(9)</sup>

以上の考察を通じて、もし原点以外に特異点が存在しなければ、原点が大域的に安定な特異点であることがわかる。それゆえ定理の説明のためには、二つの変数の停止曲線が原点以外の点で交わらないことを明らかにすればよい。以下はそのための論述である。

条件 (d<sub>1</sub>), (d<sub>2</sub>) の意味を知るために、それがみたされない場合を考えよう。一般に  $x_i$  の停止曲線の勾配は

$$(2) \quad \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\dot{x}_i=0} = -\frac{f_{i1}}{f_{i2}} \quad (i=1, 2)$$

である。それゆえ、もし (d<sub>1</sub>) がみたされなければ、 $x_1 \cdot x_2$  平面上のある点において、 $x_1$  の停止曲線が水平となるか、または  $x_2$  の停止曲線が垂直となる。<sup>(10)</sup> また (d<sub>2</sub>) がなりたないならば、ある点で  $x_1$  の停止曲線が垂直となるか、または  $x_2$  の停止曲線が水平となる。定理の条件として (d<sub>1</sub>), (d<sub>2</sub>) の少なくとも一方がみたされなければならない。それゆえこのことは次の命題 (i), (ii) がともになりたなければならないことを意味する。

(i)  $x_i (i=1, 2)$  の停止曲線がある点で水平になれば、それは如何なる点においても垂直になりえず、 $x_j (j \neq i)$  の停止曲線はどの点においても水平になることはない。

(ii)  $x_i (i=1, 2)$  の停止曲線がある点において垂直になれば、それは如何な

(9) このことは Bendixson の定理によってわかる。この定理は注 (1) の文献の中で説明されている。

(10) 停止曲線がある点で水平 (垂直) になるというのは、曲線の切線がその点において横軸 (縦軸) に平行となるという意味である。

る点においても水平になりえず、 $x_j(j \neq i)$  の停止曲線はどの点においても垂直になることはない。

なお、ある点において  $x_i$  の停止曲線が水平になるとき、 $f_{i1}=0$  である。それゆえ、条件 (d<sub>1</sub>), (d<sub>2</sub>) によって  $f_{i2}$  は如何なる点においてもゼロとなることなく、したがってその符号の正負が変化することはない。もし  $x_i$  の停止曲線の勾配の正負が、水平となる点をはさんで、変化するならば、 $f_{i1}$  の符号が変化していることになる。同様にもし  $x_i$  の停止曲線が垂直となる点をはさんで右上りの部分と右下りの部分をもつならば、 $f_{i2}$  の符号が変化していなければならない。

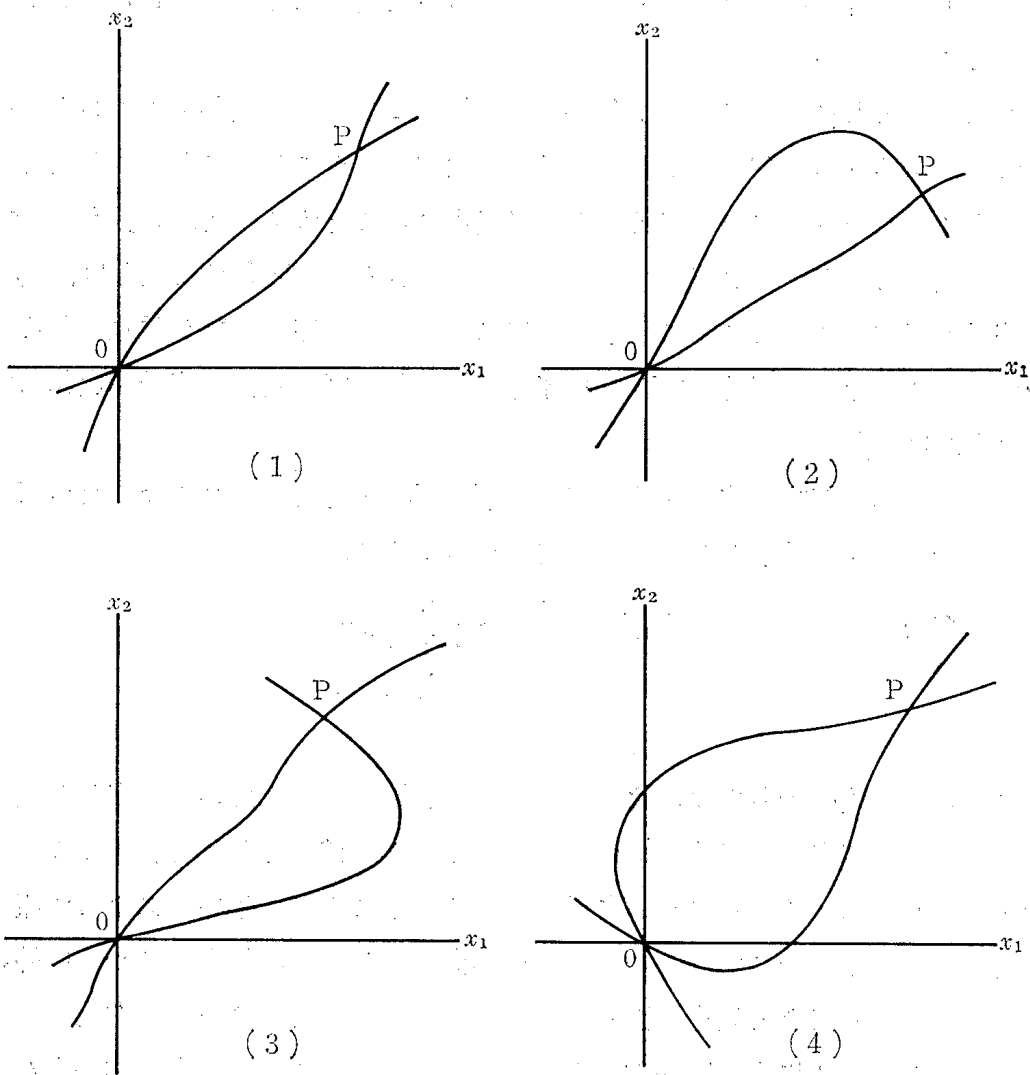
また、二つの変数の停止曲線の交点で  $f_{12}, f_{22}$  がともにゼロでないならば、その点では、条件 (c) と(2)式によってわかるように、

$$(3) \quad f_{12} f_{22} \left( \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{\dot{x}_2=0} - \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{\dot{x}_1=0} \right) > 0$$

である。

これらの諸関係を考慮すれば、二つの停止曲線が原点以外の点で交わりえず、したがって特異点が一意的 (unique) であることが確かめられる。ありうべきケースのうちのいくつかについて説明しよう。ところで、条件(a)によって原点は特異点であり、そこで二つの停止曲線が交わるが、その場合に二つの曲線の (A)双方が右上りである場合、(B)双方が右下りである場合、(C)一方が右上り、他方が右下りである場合、(D)一方が右上り、他方が水平である場合、(E)一方が右上り、他方が垂直である場合、(F)一方が右下り、他方が水平である場合、(G)一方が右下り、他方が垂直である場合、(H)一方が水平、他方が垂直である場合がある。(A)~(D)および(F)の場合には、原点において(3)式がなりたっている。

さて、二つの変数の停止曲線が原点以外の第1象限の点Pにおいても交わりと仮定しよう。点Pで  $f_{12}, f_{22}$  がいずれもゼロでないものとする。上述の(A)のケースであって、もし原点から点Pに至る迄の間でそれぞれの曲線が垂直となり、二つの点でその勾配の符号が変化することがなければ、Pにおける  $f_{12}, f_{22}$  の正負は原点におけるそれと同じでなければならない。他方、この場合の二つの曲線の勾配の大小関係は原点におけるのと点Pにおけるのとでは逆になる。(11)  
このことは第6図(1), (2)の例示によって明らかであろう。したがって点P



第 6 図

では(3)式がなりたたないことになり、前提とされた条件に矛盾する。またもし一方の曲線の勾配の符号が、垂直となる点をはさんで、変化するならば、 $f_{12}$ 、 $f_{22}$  の一方だけの符号が変化する。他方、第6図(3)に示したように、このときのPにおける二つの曲線の勾配の大小関係は原点におけるのと同じようになる。それゆえこのときにも(3)式がみたされなくなる。

(11) もっとも、原点からPに至るまでに二つの曲線が他の点Qで交わるならば、ここでの叙述は妥当しない。しかしその時には点Qにおいて本文でPについて述べたのと同じことがらみられる。この注意は以下ではくり返さない。

次に(B)の場合はどうであろうか。このとき二つの曲線のうち一方はある点で水平となり、他方は他のある点で垂直となって、Pでは双方の勾配は正でなければならない。それゆえ、第6図(4)に示したように、点Pにおける二つの曲線の勾配の大小関係は原点におけるのと同じとなる。しかし他方では $f_{12}$ ,  $f_{22}$ の一方だけの符号が変化していなければならない。つまり(3)式に矛盾する。

(C)~(H)の場合および点Pにおいて $f_{12}$ ,  $f_{22}$ の一方がゼロであるときの(A)~(H)のケースについても同じ論法を用いれば、前提された条件のもとでは二つの停止曲線が原点のほかにも第1象限で交わりえないことが確かめられる。また同様にしてそれらが、他の象限においても交わらないことがわかる。それゆえ(1)式の体系の特異点は一意的であり、前述のように、それは大域的に安定である。

#### 参 考 文 献

- [1] Branson, W. H., *Macroeconomic Theory and Policy*, 1972.
- [2] Chang, W. W. and D. J. Smyth, "The Existence and Persistence of Cycle in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined," *Review of Economic Studies*, Jan., 1971, pp. 37-44.
- [3] Coddington, E. A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, 1955.
- [4] Gschwendtner, H., "Keynesian and Neoclassical Theories of Income, Cycles and Growth: an Integrating Model," *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Juni, 1975, S. 169-189.
- [5] Hurewicz, W., *Lectures on Ordinary Differential Equations*, 1958.
- [6] Kaldor, N., "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal*, March, 1940, pp. 78-92.
- [7] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd. ed., 1963.
- [8] Olech, C., "On the Global Stability of an Autonomous System on the Plane," *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1, No. 3, 1963, pp. 389-400.
- [9] Pasinetti, L. L., "Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Oct., 1962, pp. 267-279.
- [10] Patinkin, D., *Money, Interest, and Prices*, 2nd ed., 1965.
- [11] Sansone, G. and R. Conti, *Non-Linear Differential Equations*, Rev. ed., 1964.

- [12] Struble, R. A., *Nonlinear Differential Equations*, 1962.
- [13] 和田貞夫『経済成長の基礎理論』昭和44年。
- [14] 山谷恵俊「利子率と Pasinetti 均衡」大阪府立大学経済研究, 昭和51年1月, 21—41ページ。

(1976. 6. 26)