<研究ノート>非協力一般ゲームの均衡解に関するDebreuの存在定理について

研究ノート

非協力一般ゲームの均衡解に関する Debreu の存在定理について

洲　浜　源　一

目　次

序

非協力 n 人ゲームにおける均衡解の定義とその存在定理は Nash [8] によってあきらかにされた。その解はゼロ和2人ゲームにおける minimax 解の一般化である。他方，Debreu [3] は，ゲームがしばしば制約された戦略 (strategy) のもとでおこなわれることに注目し，Nash 型の非協力ゲームの一般化をはかった。この一般化されたゲームを非協力一般ゲームと呼ぶことにする。Arrow and Debreu [1] は，この非協力一般ゲームを用いて「競争経済における均衡の存在」を証明した。(1)

そこでこの報告は，まず非協力一般ゲームの均衡解に関する Debreu の存在定理を検討し，つづいて経済理論においてしばしばみられるようなコンパクトで凸性の制約集合の場合をとりあげ，Debreu の存在定理を簡単にする。

(1)　以上の諸ゲームの解説は，Burger [2]，鈴木 [10] を参照されたい。

1. 非協力ゲームと Nash の均衡解

非協力ゲームにおいては，プレイヤー相互間に結託 (coalitions) あるいは取引は存在しない。各プレイヤーは与えられた条件のもとで単独に行動する。いまゲームに参加するプレイヤーの数を n とし，第 i 番目のプレイヤーの戦略集合を X_i とする。そこで全プレイヤーの戦略集合の全体を直積 X および第 i 番目以外のすべてのプレイヤーの戦略集合の全体を直積 $\bar{X}_i$ で表わし，それぞれ

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_n$$

$$\bar{X}_i = X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots\cdots \times X_n$$

とする。また個々のプレイヤーのとる戦略を x_i (ただし $x_i \in X_i$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$) とし，その全体を x (ただし $x \in X$) で表わし

$$x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

$$= (x_i, \bar{x}_i) \quad (\text{ただし } \bar{x}_i \in \bar{X}_i)$$

としておく。ここで上式における $\bar{x}_i$ は第 i 番目以外のすべてのプレイヤーのとる戦略の全体を表わしている。すなわち

$$\bar{x}_i = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots\cdots, x_n)$$

である。そこで各プレイヤーの行動は，他のすべてのプレイヤーの戦略 $\bar{x}_i$ を所与として，それぞれの戦略集合のなかから適当な戦略 x_i を選び，その利得関数 $f_i(x_i, \bar{x}_i)$ を最大にすることである。

ここで上述の戦略集合および利得関数に対して次の基本仮定を設定しておく。

A 1　戦略集合 X_i はユークリッド空間 (R^{h_i}) における，空でないコンパクトな凸部集合である。

A 2　利得関数 $f_i(x_i, \bar{x}_i)$ は直積 X において定義された実数値連続関数である。

A 3　利得関数は，あらゆる $\bar{x}_i$ に対して，x_i の擬凹関数 (quasi-concave function) である。

以上の諸仮定は各プレイヤーについて成立するものとする。そこでかかる基本仮定を満足する非協力ゲームを次のように略記する。

$$(X_i, f_i) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ところで，このような非協力 n 人ゲームに関する均衡解は Nash [8] によって次のごとく定義された。すなわち，X の点 $x^* = (x_1^*, \cdots\cdots, x_n^*)$ $(x_i^* \in X_i$, $i=$

$1, 2, \cdots\cdots, n$）が次の条件を満足するとき，x^* はゲーム（X_i, f_i）の均衡点である。

$$f_i(x^*) = \underset{x_i \in X_i}{\mathrm{Max}}\ f_i(x_i, \bar{x}_i^*) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \qquad (1, 1)$$

つまりどのプレイヤーも，他のプレイヤーの戦略が与えられていると考えて，自己の利得を最大にする戦略を選び，かくしてどのプイレヤーもその戦略を変更しないときゲーム（X_i, f_i）は均衡する。

さてゲーム（X_i, f_i）が少なくとも一つの均衡解を持つことの証明は Nash [8] においてあきらかにされている。Nash のとりあげた戦略集合は，いわゆる混合戦略を示す単体 (Simplex) である。またその利得関数は各要素 x_i について線型である。なお前述の仮定A 1～3を満たすより一般的なゲームについては，たとえば Nikaido and Isoda [9] において証明されている。

ところで，非協力ゲームにおけるプレイヤーの行動にはクールノー的寡占市場における企業の行動と共通な点がある。事実，戦略集合を供給可能量とすれば，上述の Nash の均衡点は寡占市場に関するクールノーの均衡点となる。(2)

2.　Debreu による一般化

前節の Nash 型の非協力ゲームは Debreu [3] によって一般化された。Nash 型のゲームにおいては，第 i 番目のプレイヤーの行動は他のすべてのプレイヤーの戦略（$\bar{x}_i$）を一定と考えて，自己の戦力集合（X_i）の全域から適当な戦略を選ぶことであった。しかし多くのゲームにおいては，各プレイヤーの選択可能な戦略の範囲が他のプレイヤーの選んだ戦略から独立ではなく，しばしば他のプレイヤーの戦略によって制約される場合が多い。すなわち，他のプレイヤーの戦略（$\bar{x}_i$）が与えられれば，第 i 番目のプレイヤーはその戦略を，$\bar{x}_i$ によって制約された戦略集合（$A_i(\bar{x}_i) \subset X_i$）のなかから選ぶと想定される。

そこで前節の仮定A 1～3を満たし，さらに上述のような制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ を持ったゲームを非協力一般ゲームと呼び，

$$(X_i, f_i, A_i) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

と表わすことにする。もちろん，任意の x_i に対して制約集合 $A_i(x_i)$ が常に存在するとはかぎらない。なお，任意の $\bar{x}_i$ に対して $A_i(\bar{x}_i) = X_i$ のとき，非協力

（2） Frank and Quandt [5].

一般ゲームは Nash 型の非協力ゲームとなる。

さて，非協力一般ゲームの均衡解は Nash の均衡解 (1,1) 式に準じて次のように定義される。すなわち，Xの点 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_n^*)$ $(x_i^*\in A_i(\bar{x}_i^*)$, $i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が次の条件を満足するとき，x^* は一般ゲームの均衡点である。

$$f_i(x^*)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i^*)}{\mathrm{Max}}\ f_i(x_i, \bar{x}_i^*) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{2,1}$$

ところで，このような均衡解の存在は Debreu [3] によって証明された。

定理（Debreu の存在定理）

「次の条件を満足する非協力一般ゲームは少なくとも一つの均衡解を持つ。

B 1　第 i プレイヤーの制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ は，任意の $\bar{x}_i\in\bar{X}_i$ に関して X_i の空でない凸部分集合である。

B 2　同 $A_i(\bar{x}_i)$ のグラフ G_i は直積集合Xの閉部分集合である。

B 3　同 $A_i(\bar{x}_i)$ は，x_i の下半連続な多価関数 (Multi-valued function) である。

以上の各条件は，各 i について成立するものとする。(3)」

ここで上記の定理について二，三の説明を加えておく。

(1)　制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ のグラフ G_i は次のように定義される。

$$G_i=((x_i, \bar{x}_i)\,|\,x_i\in A_i(\bar{x}_i),\ \bar{x}_i\in\bar{X}_i) \tag{2,2}$$

(2)　同 $A_i(\bar{x}_i)$ の下半連続 (lower semicontinuous) の定義は次の通りである。「$\bar{x}_i$ の関数 $A(\bar{x}_i)$ は次のことが成立すれば $\bar{x}_i^0$ で下半連続であるという。すなわち，$\bar{x}_i^0$ に収束するすべての系列 $(\bar{x}_i^l, l=1,2,\cdots\cdots)$ と $A_i(\bar{x}_i^0)$ に属するすべての点 x_i^0 に対して，この x_i^0 に収束する一つの系列 (x_i^l, ただしすべての l に関して $x_i^l\in A_i(\bar{x}_i^l)$ とする）が存在することである。(4)」

---

(3)　この存在定理は Arrow and Debreu [1] における lemma (274 ページ) である。これは Debreu [3] における定理の特殊な場合である。［1］の lemma のゲームと［3］のゲームとの主な相異はA 1が［3］で

A1′　戦略集合 (X_i) はユークリッド空間における可縮な (contractible) 多面体である。

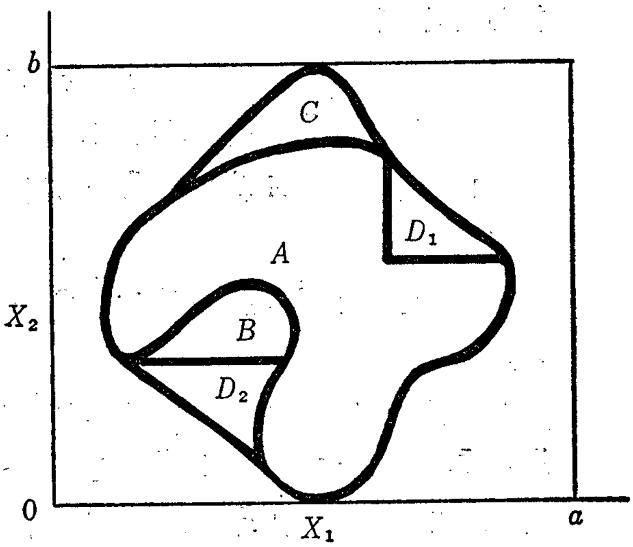
となることである。A 1における戦略集合（R^{h_i} における凸部分集合）は可縮であり，かつ多面体と同位相である。従ってA 1での結論はA1′のもとでの結論に含まれる。

(4)　この定義は Arrow and Debreu [1] 274, Debreu [3] 889 を参照する。

ところで定理の条件B 2は，$A_i(\bar{x}_i)$ がXにおいて上半連続 (upper semicontinuous) であることを表わしている。従ってB 3の下半連続と合せて，制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ はXにおいて連続であることが要求される。

(3) 定理における条件B 1，B 3は次の第1図のように理解することができる。いま戦略集合 X_1 を横軸上の閉区間 (0, a) および同 X_2 を縦軸上の閉区間 (0, b) とする。このとき直積集合 $X=X_1\times X_2$ における一つの閉集合Aをとれば，これに仮定B 1によって領域B（凸性）と領域C（非空）が加わり，さらにB 3の下半連続によって領域 D_1, D_2 が加わる。なお，仮定B 2のため $A_1(x_2)$ のグラフ $G_1=A\cup B\cup C\cup D_1\cup D_2$ は，Xにおいて閉部分集合であるとしておく。

第1図　$A_1(x_2)$ のグラフ G_1



以上の Debreu の定理の証明は最後の補注1において述べてある。

さて，この Debreu の存在定理における条件B 1，B 3は，いずれもかなり厳しいものであるが，なかでも条件B 1はこの定理の適用を限定する。つまり条件B 1によると，他のプレイヤーのいかなる戦略に対しても，当該プレイヤーはこれに対抗する何らかの戦略を保持しなければならないことになる。しかし，当該プレイヤーの潜在的能力いかんによっては，このような対抗戦略の一部が存在しない場合もあろう。事実，補注2でかかる対抗戦略の一部が存在しないために Debreu の定理が適用できない（しかし均衡解が存在する）例を説明する。従って，部分的に対抗する戦略が存在しなくても適用できるように，Debreu の定理を拡張しなければならない。つまり，第1図における集合Cが存在しない場合をも含めて，適用可能な定理を導出しなければならない。

ただしこれらの二論文においては下半連続でなく単に連続となっている。しかし後年の Debreu [4] 27, notes 3. で指摘されている通り，下半連続とするのが適切である。また同［4］では $A_i(\bar{x}_i)$ を関数と呼ばないで correspondence と呼んでいる。しかし本報告では同［3］に従って関数 (function) とする。

しかしこの問題は別稿において検討する。

3. 制約集合のグラフがコンパクトな凸集合の場合

本節の問題は Debreu の存在定理の条件B 3に関連する。つまり条件B 3は制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ が下半連続であることを要求する。しかしこの制約集合のグラフ G_i が凸集合の場合，その下半連続は常に成立することが示される。また同グラフがコンパクトであれば条件B 2も当然成立する。

補助定理 1

「制約集合のグラフ G_i が凸集合であれば，次のことが成立する。

(a) 任意の $\bar{x}_i \in \bar{X}_i$ に対して，制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ は凸集合である。

(b) 制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ は $\bar{x}_i$ の下半連続関数である。」

証明

(a) 制約集合 $A_i(\bar{x}_i)$ のグラフ G_i が凸集合であるから，これは明らかである。

(b) 下半連続の説明については，122ページを参照されたい。いま任意の一点 $\bar{x}_i^0 \in \bar{X}_i$ に対して，$x_i^0 \in A_i(\bar{x}_i^0)$ となる任意の点 x_i^0 をする。グラフ G_i の定義より，明らかに $(x_i^0, \bar{x}_i^0) \in G_i$ である。次に G_i における他の任意の一点 $(x_i, \bar{x}_i) \in G_i$ をとる $(x_i \in A_i(\bar{x}_i))$。さて，

$$0 \leqq \lambda^l \leqq 1 \quad , \quad \lim_{l \to \infty} \lambda^l = 1$$

なる系列 $(\lambda^l)(l=1, 2, \cdots\cdots)$ に対して

$$\bar{x}_i^l = (1-\lambda^l)\bar{x}_i + \lambda^l \bar{x}_i^0 \tag{3, 1}$$

$$x_i^l = (1-\lambda^l)x_i + \lambda^l x_i^0 \tag{3, 2}$$

をつくれば，G_i は凸集合だから $(x_i^l, \bar{x}_i^l) \in G_i$ となり，G_i の定義より明らかに

$$x_i^l \in A_i(\bar{x}_i^l) \qquad (l=1, 2, \cdots\cdots) \tag{3, 3}$$

が成立する。さて (3, 1) 式において l を大きくすれば，$\bar{x}_i^l$ は $\bar{x}_i^0$ に収束する。しかも点 $(x_i, \bar{x}_i) \in G_i$ は任意だから，系列

$$(\bar{x}_i^l) \qquad (l=1, 2, \cdots\cdots)$$

は $\bar{x}_i^0$ に収束する任意の系列である。さらに（3，2）式において l を大きくすれば x_i^l は x_i^0 に収束する。ゆえに，（3，3）式を考慮して，かかる系列

$$(x_i^l) \qquad (l=1, 2, \cdots\cdots)$$

を求める一つの系列とすればよい。　(証明終)

以上の補助定理1を用いて，次のようなDebreuの存在定理の系が得られる。

系1　(Debreuの定理の系)

「各プレイヤーの制約集合のグラフが凸集合である非協力一般ゲームは，次の条件を満たすとき，均衡解を持つ。

B1′　第iプレイヤーの制約集合$A_i(\bar{x}_i)$は，任意の$\bar{x}_i$に対して，X_iの空でない部分集合である。

B2　同$A_i(\bar{x}_i)$のグラフG_iは直積集合Xの閉部分集合である。

以上は各iについて成立するものとする。」

すなわち，もとの定理における条件B1はB1′となり，条件B3はあらかじめ満たされている。

さらに制約集合のグラフG_iがXにおいてコンパクトであれば，そのグラフはXの閉部分集合となるから，次の系が成立する。

系2　(Debreuの定理の系)

「各プレイヤーの制約集合のグラフが，直積Xにおいてコンパクトな凸部分集合である非協力一般ゲームは，次の条件を満たすとき，均衡解を持つ。

B1　第iプレイヤーの制約集合$A_i(\bar{x}_i)$は，任意の$\bar{x}_i$に対して，X_iの空でない部分集合である。

以上は各iについて成立するものとする。」

以　上

補注1　(本文5ページ)

Debreuの存在定理の証明(5)

仮定A1によって戦略集合X_iは空間R^{h_i}におけるコンパクトな凸集合であるから，その直積集合Xも$R^{\Sigma h_i}$のコンパクトな凸集合である。そこで，Xの点xに対してその成分x_iをそれぞれ$u_i(x_i)\in X_i$に移す写像$U(x): X\to X$を次のように定義する。

$$U(x)=u_1(\bar{x}_1)\times\cdots\cdots\times u_n(\bar{x}_n) \qquad (4, 1)$$

ただし

$$u_i(\bar{x}_i)=(x_i \mid x_i\in A_i(\bar{x}_i),\ f_i(x_i, \bar{x}_i)=v_i(\bar{x}_i)) \qquad (4\ 2)$$

(5)　この証明は非協力ゲームに関するFriedman [6] の方法を非協力一般ゲームのそれに拡張したものである。

$$v_i(\bar{x}_i)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i)}{\mathrm{Max}}\ f_i(x_i,\bar{x}_i) \tag{4, 3}$$

とする。

ここで仮定B 2によって $A_i(\bar{x}_i)$ のグラフ G_i はXの閉集合であるから，その各点における像 $A_i(\bar{x}_i)$ はコンパクトである。また仮定A 2より f_i は連続関数である。以上より $u_i(\bar{x}_i)$ は存在する。さらに，仮定A 3から $f_i(x_i,\bar{x}_i)$ は擬凹関数である。従って $u_i(\bar{x}_i)$ は凸集合である。この結果，（4，1）式で定義された像は集合Xの空でない凸部分集合となる。従って写像$U:X\to X$が上半連続であれば，Kakutani [7] の不動点定理が適用できる。そして写像Uの不動点が一般ゲームの均衡点となる。以下，Uが上半連続であることを示す。

ところで $u_i(\bar{x}_i)$ は写像 $u_i:\bar{X}_i\to X_i$ による像とみることができる。ゆえに写像 u_i が閉写像であれば，その直積写像Uも閉写像である。従って写像Uは上半連続となる。そこで写像 $u_i(\bar{x}_i)$ が閉写像であることを示せばよい。まず系列 $(\bar{x}_i^l)(\in\bar{X}_i, l=1,2,\cdots\cdots)$ が $\bar{x}_i^0$ に収束し，これに対して系列 $(x_i^l)(\in u_i(\bar{x}_i^l), l=1,2,\cdots\cdots)$ が x_i^0 に収束するものとする。このとき $x_i^0\in u_i(\bar{x}_i^0)$ が成立すれば，写像 u_i は閉写像である。そこでいま $x_i^0\notin u_i(\bar{x}_i^0)$ とする。このとき $f_i(x_i^0,\bar{x}_i^0)<v_i(\bar{x}_i^0)$ が成立する。そこで，ε を任意の正数として

$$v_i(\bar{x}_i^0)-f_i(x_i^0,\bar{x}_i^0)=\varepsilon \tag{4, 4}$$

とおく。ここで $v_i(\bar{x}_i)$ の連続性を仮定すれば，$v_i(\bar{x}_i^l)=f_i(x_i^l,\bar{x}_i^l)(x_i^l\in u_i(\bar{x}_i^l))$ を考慮して $l\geqq l(\delta)$ ($l(\delta)$ は有限とする）に対して

$$v_i(\bar{x}_i^0)-\delta<f_i(x_i^l,\bar{x}_i^l)<v_i(\bar{x}_i^0)+\delta$$

となる任意の $\delta>0$ が存在する。従って $\delta<\varepsilon$ とすれば，これは上の式（4，4）に矛盾する。ゆえに $x_i^0\in u_i(\bar{x}_i^0)$ である。これより，写像 u_i は閉写像となる。このことはすべての i について成立する。この結果，（4，1）で定義される写像Uは上半連続である。従って，それは少なくとも一つの不動点を持つ。その一つの不動点を $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots\cdots,x_n^*)\in U(x^*)$ とすると $x_i^*\in u_i(\bar{x}_i^*)$ となり，（4，2），（4，3）式より

$$f_i(x^*)=\underset{x_i\in A_i(\bar{x}_i^*)}{\mathrm{Max}}\ f_i(x_i,\bar{x}_i^*) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

となる。これは前述の（2，1）式にほかならない。従って，点 x^* は非協力一般ゲームの均衡点である。

さて，以上の証明において，$v_i(\bar{x}_i)$ の連続性を仮定したが，これはその定義

式（4，3）からわかるように，f_i の連続性および $A_i(\bar{x}_i)$ の連続性によって導かれる。(6) ところで，ここでとりあげている一般ゲームは，仮定A 2によって f_i の連続性を持ち，さらに Debreu の定理の条件B 2およびB 3より $A_i(\bar{x}_i)$ は連続性を持っている。従って $v_i(\bar{x}_i)$ の連続性は成立する。　（証明終）

補注 2　（本文 5 ページ）

Debreu の定理の適用不可能な例

以下，Debreu の存在定理は適用できないが，解の存在する例をあげる。まず，ゲーム (X_i, f_i, A_i) を次のようなある商品市場における参入阻止モデルと解釈する。つまり，新企業の参入を阻止するという制約の下で，二つの既存企業がクールノー的行動をとり，それぞれの利潤を最大にする。しかるとき，はたして均衡点が存在するかどうかを検討する。

そこで記号を次のように定める。

X_i	：第 i 企業の生産可能域（以下，$i, j=1, 2$）
x_i	：同上生産量 $(x_i \in X_i)$
$p(x_1+x_2)$	：生産物価格
$C_i(x_i)$	：第 i 企業の総費用関数
$f_i(x_i, x_j)$	：第 i 企業の利潤関数 $(i \neq j)$

これらに次のような関数，数値をあてはめる。(7)

$X_1=(0, 100)$（閉区間を示すものとする。）

$X_2=(0,\ \ 70)$（同上）

$$p(x_1+x_2)=100-0.5(x_1+x_2)$$

$$C_1(x_1)=5x_1$$

$$C_2(x_2)=0.5x_2^2$$

$$f_1(x_1, x_2)=(100-0.5(x_1+x_2))x_1-5x_1$$

$$f_2(x_2, x_1)=(\qquad〃\qquad)x_2-0.5x_2^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=95-x_1-0.5x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}=-1<0$$

（6）$v_i(\bar{x}_i)$ の連続性に関する詳しい証明は，Debreu [3] 889–890 を参照されたい。

（7）以下の数値例の大半は，ヘンダースン，クォント「現代経済学」第 6 章のクールノー・モデルを利用している。

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=100-0.5x_1-2x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2{}^2}=-2<0$$

以上のモデルは $\frac{\partial f_1}{x_1\partial}=0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0$ より次の反応関数を持っている。

第１企業の反応関数　　$x_1=95-0.5x_2$

第２企業の　〃　　　$x_2=50-0.25x_1$

これを解いて，均衡点（クールノー解）$x_1=80, x_2=30, p=45$ を得る。

しかし既存の二つの企業は，共に新企業の参入を阻止するために，市場価格をある水準以下に保持しようとする。その価格つまり最高参入阻止価格を $p=50$ とすれば，両企業の生産量に次の制約が加わる。

すなわち

$$50\geqq 100-0.5(x_1+x_2)$$

あるいは

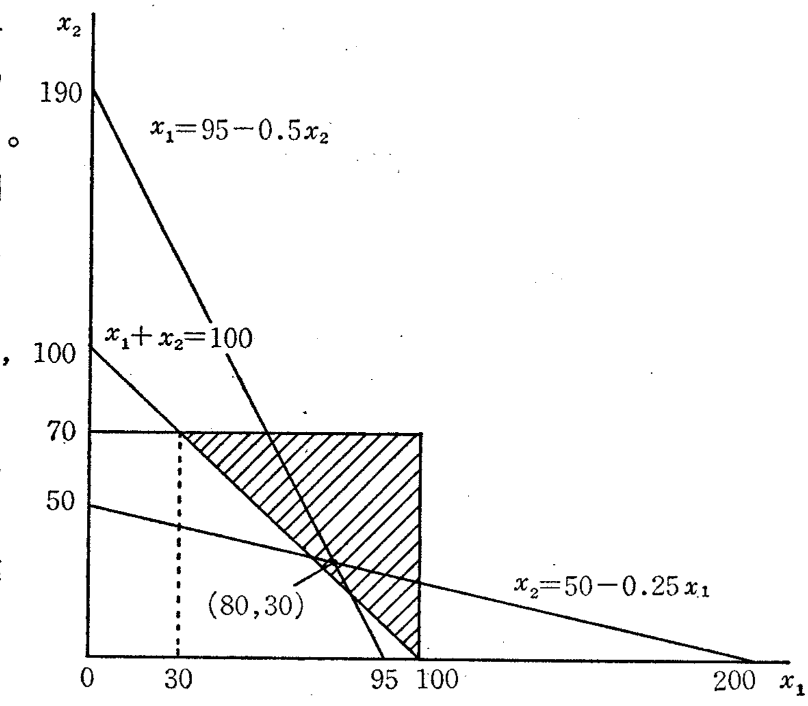
$$100\leqq x_1+x_2$$

この結果，両企業の制約集合は

$$A_1(x_2)=(x_1|x_1\in X_1, 100\leqq x_1+x_2, \text{ for any } x_2\in X_2)$$

$$A_2(x_1)=(x_2|x_2\in X_2, 100\leqq x_1+x_2, \text{ for any } x_1\in X_1)$$

となる。従って，両企業の制約集合のグラフは下図の斜線部分となり，このゲームでは共に等しい（$G_1=G_2$）。ところで，上述のクールノー解はこの斜線領域にあり，あきらかにこの参入阻止モデルの均衡点にもなっている。しかし，第２企業の制約集合 $A_2(x_1)$ は $0\leqq x_1<30$ において，あきらかに空である。従って，このゲームは Debreu の存在条件B１（本文122ページ参照)をみたさない。しかし，上述のように均衡解を持っている。



参考文献

[1] Arrow, J.K. and G. Debreu, "Existence of an Equiliblium for a Competitive Economy," *Econometrica* Vol. 22 No. 3 265–90, 1954.

[2] Burger, E., *Introduction to the Theory of Games*, translated by J. E. Freund, Prentice-Hall, 1963 (original 1959).

[3] Debreu, G., "A Social Equiriblium Existence Theorem," *Proceedings of the National Academy of Science*, Vol. 38, 886–93, 1952.

[4] ——, *Theory of Value*, John Wiley and Sons, Inc. 1959.

[5] Frank, C.R. and R.E. Quandt, "On the Existence of Cournot Equiriblium," *International Economic Review*, Vol. 4 No. 1, 92–96, 1963.

[6] Friedman, J.W., "A Non-Cooperative Equiliblium for Supergames," *The Review of Economic Studies*, 1–12, January 1971.

[7] Kakutani, S., "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem," *Duke Mathematical Journal*, 457–59, 1941.

[8] Nash, J., "Non-Cooperative Games," *Annals of Mathematics*, 286–95, 1951.

[9] Nikaido, H. and K. Isoda, "Note on Noncooperative Convex Games," *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 5, 807–15, 1955.

[10] 鈴木光男「ゲームの理論」 勁草書房 1959