<論説>回帰係数の検定統計量の導出

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 今川, 正 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00001988

回帰係数の検定統計量の導出

今　川　　正

0 はじめに

ここで回帰係数の仮説検定において慣用されているすべての統計量を尤度比法 likelihood ratio test procedure によって統一的に導出する。それをなすにあたってここではガウス・ジョーダン掃き出し法 Gauss-

Jordan elimination を使用する。これは普通，スカラー要素の行列について数値計算の方法として用いられているが，ここではそれを理論分析の用具として用いる。そして行列を要素にもつ行列にそれを適用する。

こうしてもとめている統計量を導出できるが，取扱う行列が特異のときには困難におちいる。とくに予測についての検定統計量の導出，多重共線性のもとでの統計量の導出にあたって，観測行列の特殊性のためにこの困難におちいる。しかしながら，この困難は一般化逆行列 generalized inverse を用いて克服することができる。

この予測の問題が，経済学者によく知られているジョンストン〔10〕，タイル〔13〕，チョウ〔4〕によってどのように取扱われているかについてみておこう。予測を2回帰モデルで取扱っているか否か，予測を検定の枠組において取扱っているか否かに注目してその取扱いをつぎのように区分しておく。

ジョンストン	1回帰モデル	推定の枠組
タイル	2回帰モデル	推定の枠組
チョウ	2回帰モデル	検定の枠組

ジョンストンは予測を1回帰モデルにおける問題として取扱い，タイルとチョウは2回帰モデルにおける問題として取扱っている。そしてそれを検定の枠組において取扱っているのは3人のうちではチョウのみである。われわれはチョウによって設けられた路線にそって進むが，つぎの点が異なっている。すなわち，チョウは最小2乗法に基礎をおき，検定統計量を列挙し，それらのあいだの関係について述べているけれども，それを統一原理より導出することはしていない。われわれはそれを尤度比原理により統一的に導出する。

このようにわれわれは予測を2個の回帰モデルにおける問題として取扱う。しかもそれを検定の枠組において取扱う。また多くの文献は

多重共線性の成立している場合を推定の枠組において取扱い，推定の不能性を指摘するにとどまっているが，われわれはそれを検定の枠組において取扱う。

こうして観測行列がフル列ランクのものでない場合の検定統計量の導出を中心に議論するが，われわれは行列が非特異のときの検定統計量の導出——これは原理的によく知られている——もあわせて述べ，すべての統計量を統一的に導出する。

本論に入るまえにここで展開の方法として用いるためにつぎの回帰モデルの係数の最尤推定量をガウス・ジョーダン掃き出し法によってもとめておこう。

$$y_i=\alpha+\beta(x_i-\bar{x})+\gamma(z_i-\bar{z})+\varepsilon_i \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

ここで用いる対数尤度関数はつぎの通りである。

$$\log L=-\frac{n}{2}\log\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum[y_i-\alpha-\beta(x_i-\bar{x})-\gamma(z_i-\bar{z})]^2$$

これをパラメーターに関して微分する。

$$\sigma^2\frac{\partial\log L}{\partial\alpha}=\sum[y_i-\alpha-\beta(x_i-\bar{x})-\gamma(z_i-\bar{z})]$$

$$\sigma^2\frac{\partial\log L}{\partial\beta}=\sum[y_i-\alpha-\beta(x_i-\bar{x})-\gamma(z_i-\bar{z})](x_i-\bar{x})$$

$$\sigma^2\frac{\partial\log L}{\partial\gamma}=\sum[y_i-\alpha-\beta(x_i-\bar{x})-\gamma(z_i-\bar{z})](z_i-\bar{z})$$

これをゼロに等置してえる連立方程式の係数にもとづいてつぎの拡大行列を準備する。(ゼロ行列の記載を省略する)。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota} & & & \boldsymbol{\iota}'\mathbf{y} \\ & \mathbf{x}'\mathbf{x} & \mathbf{x}'\mathbf{z} & \mathbf{x}'\mathbf{y} \\ & \mathbf{z}'\mathbf{x} & \mathbf{z}'\mathbf{z} & \mathbf{z}'\mathbf{y} \\ \mathbf{y}'\boldsymbol{\iota} & \mathbf{y}'\mathbf{x} & \mathbf{y}'\mathbf{z} & \mathbf{y}'\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

ここに観測行列をあらわすのにつぎの記号を用いる。

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1-\bar{y} \\ y_2-\bar{y} \\ \vdots \\ y_n-\bar{y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 & x_1-\bar{x} & z_1-\bar{z} \\ 1 & x_2-\bar{x} & z_2-\bar{z} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n-\bar{x} & z_n-\bar{z} \end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\iota}\quad \mathbf{x}\quad \mathbf{z}]$$

$$\bar{y}=\sum y_i/n,\quad \bar{x}=\sum x_i/n,\quad \bar{z}=\sum z_i/n$$

列1を掃き出す。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a \\ & \mathbf{x}'\mathbf{x} & \mathbf{x}'\mathbf{z} & \mathbf{x}'\boldsymbol{y} \\ & \mathbf{z}'\mathbf{x} & \mathbf{z}'\mathbf{z} & \mathbf{z}'\boldsymbol{y} \\ & \boldsymbol{y}'\mathbf{x} & \boldsymbol{y}'\mathbf{z} & \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

ここに

$$a=\frac{1}{n}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{y}=\frac{1}{n}\sum y_i$$

$$\mathbf{x}'\boldsymbol{y}=\mathbf{x}'\mathbf{y}$$

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=\mathbf{y}'\mathbf{y}-\frac{1}{n}\mathbf{y}'\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{y}=\sum(y_i-\bar{y})^2$$

である。つづいて列2を掃き出す。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a \\ & 1 & c & b \\ & & \mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z} & \mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \\ & & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z} & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

ここに

$$b=(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\boldsymbol{y}$$

$$c=(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{z}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{I}+\mathbf{x}(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'$$

をあらわす。つぎに列3を掃き出す。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a \\ & 1 & & b-c\hat{\gamma} \\ & & 1 & \hat{\gamma} \\ & & & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z}\hat{\gamma} \end{pmatrix}$$

ここにつぎの記号を用いた。

$$\hat{\gamma}=(\mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z})^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$

ここに掃き出しにより4行4列の要素はつぎのように変化している。

$$\mathbf{y}'\mathbf{y},\ \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z}(\mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z})^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$

これは順に従属変数の原点のまわりの変動，平均のまわりの変動，回帰直線のまわりの変動，回帰平面のまわりの変動をあらわしている。これからの展開の基礎として注目するのはこの大きさの変化である。

尤度関数の最大化にあたって制約条件のついている場合にも同じ方法を用いることができる。最初に準備する拡大行列が少し改められるだけである。ここでは簡単な制約条件 $\gamma=\gamma_0$ を用いる場合について述べておこう。つぎのラグランジュ関数よりはじめる。

$$F=\sum[y_i-\alpha-\beta(x_i-\bar{x})-\gamma(z_i-\bar{z})]^2+2\lambda(\gamma_0-\gamma)$$

これをパラメーターおよびラグランジュ乗数 λ に関して微分し，その結果をゼロに等置してえる連立方程式の係数にもとづいて拡大行列を準備する。その列１，列２を掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & a \\ & 1 & c & & b \\ & & \mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z} & -1 & \mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \\ & & -1 & & -\gamma_0 \\ & & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z} & -\gamma_0 & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

記号 $a, b, c, \mathbf{M}$ はまえと同じものをあらわす。列３，列４を掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & a \\ & 1 & & & b-cd \\ & & 1 & & \hat{\gamma}+d \\ & & & 1 & -d/D \\ & & & & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z}\hat{\gamma}+d^2/D \end{pmatrix}$$

ここに

$$D=(\mathbf{z}'\mathbf{M}\mathbf{z})^{-1}$$
$$\hat{\gamma}=D\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$
$$d=\hat{\gamma}-\gamma_0$$

をあらわす。そして制約条件を考慮したあとでの残差平方和として，

$$\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\mathbf{z}\hat{\gamma}+d^2/D$$

をえる。ここに d^2/D は制約条件があるために低下したあてはまりの

度合をあらわす。そして $\gamma_0=0$ 特別の場合には $d=D\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$ となり，残差平方和は $\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$ となる。この結果は列1，列2の掃き出しによってえるものと同じである。

I　回　帰　直　線

I.1　勾配 β の検定 $H_0:\beta=\beta_0$

この節で用いるモデルはつぎの通りである。

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\epsilon},\quad \boldsymbol{\epsilon}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$$

ここに従属変数，説明変数の観測行列，パラメーター・ベクトル，攪乱項ベクトルをつぎのようにあらわしている。

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & x_1-\bar{x} \\ 1 & x_2-\bar{x} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n-\bar{x} \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\epsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

このとき対数尤度関数は

$$\log L=-\frac{n}{2}\log\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

とあらわされる。ここでは勾配の有意性に関する帰無仮説 $H_0:\beta=\beta_0$，対立仮説 $H_1:\beta\neq\beta_0$ について検定する[(1)]。注目するパラメーター空間はつぎのように定義される。

$\Omega:\ -\infty<\alpha<+\infty,\ \ -\infty<\beta<+\infty,\ \ 0<\sigma^2<+\infty$

$\omega:\ \Omega$ の条件および $\beta=\beta_0$

この節で用いるパラメーター空間 Ω はこの項後段で用いる単純化モデルのものを除いてすべて同じであるので，くりかえし述べることを省く（なお ω における「および」は積集合の意味でつかう)。いま $\mathbf{R}'=[0\ \ 1]$ とおくと帰無仮説は制約条件 $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\beta_0$ であらわすことができる。ここで条件つき最大(小)化の問題を取扱うためにつぎのラグランジュ関数をつくる。

$$F=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})+2\lambda(\beta_0-\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta})$$

これを $\boldsymbol{\beta},\lambda$ に関して微分してつぎのものをえる。

（1）　われわれは帰無仮説における等号を不等号に変えたものを対立仮説として用いるので今後は対立仮説の記述を省く。

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad -\lambda\mathbf{R} \quad -\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta} \qquad\qquad +\beta_0$$

これをゼロに等しいとおいてえる連立方程式の係数にもとづいてつぎの拡大行列をつくる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} & -\mathbf{R} & \mathbf{X}'\mathbf{y} \\ -\mathbf{R}' & & -\beta_0 \\ \mathbf{y}'\mathbf{X} & -\beta_0 & \mathbf{y}'\mathbf{y} \end{bmatrix} \qquad [0]$$

この行列を要素とする行列についてガウス・ジョーダン掃き出し法を適用する。列1を掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ & -\mathbf{D} & \mathbf{d} \\ & \mathbf{d}' & Q \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{I}]$$

ここに記号はつぎのものをあらわす。

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \beta_0$$

$Q = \mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}$ (Ω のもとでの残差平方和)

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

列2を掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & Q_0 \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{II}]$$

$Q_0 = Q + \mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$ (ω のもとでの残差平方和)[2]

この第2項はωにおいて付加されている制約条件のために，Ω のときにくらべてあてはまりの度合が低下している大きさをあらわす。

　こうしてつぎのものがえられる。

---

(2)　以下，この記号をくりかえし述べることは省略する。

$$\mathbf{D}=1/\sum(x_i-\bar{x})^2$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}-\beta_0=\hat{\beta}-\beta_0$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

尤度比よりつぎのものがえられる。

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{V[\beta-\hat{\beta}_0]}=\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\sigma^2/\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

分散が未知のときにはそれを推定しなければならない。その推定量を用いるときにはつぎのものがえられる。

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-2}\ \frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}=\frac{1}{n-2}\ \frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\hat{V}[\hat{\beta}-\beta_0]}$$

$$=\frac{1}{n-2}\ \frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{s^2/\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

原点を通るとき $H_0:\beta=\beta_0$

ここで原点を通る回帰直線について勾配を検定する。そのため，回帰直線が原点を通るという条件を考慮して，あらかじめ上述の対数尤度関数をつぎのように単純化して用いる。

$$\log L=-\frac{n}{2}\log\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i-\beta x_i)^2$$

ここで検定する帰無仮説はまえと同じ $H_0:\beta=\beta_0$ であり，パラメーター空間はつぎのように定義される。

$$\Omega:\ -\infty<\beta<+\infty,\ \ 0<\sigma^2<+\infty$$

$$\omega:\ \Omega\ \text{の条件および}\ \beta=\beta_0$$

ここで $\mathbf{R}=[1]$ とおくと制約条件は $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\beta_0$ とあらわすことができる。これを用いてつぎのものをえることができる。

$$\mathbf{D}=1/\sum x_i^2$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}-\beta_0=\hat{\beta}-\beta_0$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{V[\hat{\beta}-\beta_0]}=\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\sigma^2/\sum x_i^2}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-1}\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}=\frac{1}{n-1}\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\hat{V}[\hat{\beta}-\beta_0]}=\frac{1}{n-1}\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{s^2/\sum x_i^2}$$

I.2　係数 α の検定 H_0：$\alpha=\alpha_0$

ここで帰無仮説 H_0：$\alpha=\alpha_0$ について検定する。そして用いるパラメーター空間 ω はつぎのように定義される。

$$\omega：\Omega \text{ の条件および } \alpha=\alpha_0$$

いま $\mathbf{R}'=[1\ 0]$ とおくと，この帰無仮説は制約条件 $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\alpha_0$ であらわされる。まえと同じ方法によってつぎのものをえる。

$$\mathbf{D}=1/n$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}-\alpha_0=\hat{\alpha}-\alpha_0$$

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum y_i}{n}=\bar{y}$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{V[\hat{\alpha}-\alpha_0]}=\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{\sigma^2/n}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-2}\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}=\frac{1}{n-2}\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{\hat{V}[\hat{\alpha}-\alpha_0]}$$

$$=\frac{1}{(n-2)s^2}\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{1/n}$$

I.3　両係数の結合検定 H_0：$\alpha=\alpha_0$，$\beta=\beta_0$

ここで用いるパラメーター空間はつぎのように定義される。

$$\omega：\Omega \text{ の条件および } \alpha=\alpha_0,\ \beta=\beta_0$$

ここで $\mathbf{R}=\mathbf{I}$（$\mathbf{I}$ は2次の単位行列），$\boldsymbol{\beta}_0{}'=[\alpha_0\ \beta_0]$ とおくと帰無仮説は制約条件 $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$ であらわすことができる。

まえと同じようにしてつぎの結果をえることができる。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{n} & \\ & \dfrac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\bar{y}\\ \sum(x_i-\bar{x})y_i/\sum(x_i-\bar{x})^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0=[\hat{\alpha}-\alpha_0\quad \hat{\beta}-\beta_0]$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}&=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}\\ &=\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{V[\hat{\alpha}-\alpha_0]}+\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{V[\hat{\beta}-\beta_0]}\\ &=\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{\sigma^2/n}+\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\sigma^2/\sum(x_i-\bar{x})^2}\ 。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_0-Q}{Q}&=\frac{1}{n-2}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}\\ &=\frac{1}{n-2}\left[\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{\hat{V}[\hat{\alpha}-\alpha_0]}+\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{\hat{V}[\hat{\beta}-\beta_0]}\right]\\ &=\frac{1}{(n-2)s^2}\left[\frac{(\hat{\alpha}-\alpha_0)^2}{1/n}+\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)^2}{1/\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]\end{aligned}$$

I.4　係数の線型結合の検定

ここでは2つの特別の場合について考える。

(1)　直線が原点を通ることの検定 $H_0:\alpha-\beta\bar{x}=0$

まえには回帰直線が原点を通るという条件のもとで帰無仮説 H_0：$\beta=\beta_0$ を検定した（I.1節）。ここでは回帰直線が原点を通っているか，否かについて，すなわち帰無仮説 $H_0:\alpha-\beta\bar{x}=0$ について検定す

る。

ここで注目するパラメーター空間ωはつぎの通りである。

$$\omega : \Omega \text{ の条件および } \alpha-\beta\bar{x}=0$$

いま $\mathbf{R}'=[1\ \bar{x}]$ とおくと帰無仮説は制約条件 $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=0$ であらわされる。ここではつぎの結果をえる。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}=\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x}$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x})^2}{V[\hat{\alpha}-\hat{\beta}x]}$$

$$=\frac{(\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x})^2}{\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-2}\ \frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}=\frac{1}{n-2}\ \frac{(\hat{\alpha}-\hat{\beta}x)^2}{\hat{V}[\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x}]}$$

$$=\frac{1}{(n-2)s^2}\ \frac{(\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x})^2}{\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$

(2)　yの期待値の検定 $H_0 : \alpha+\beta(x_0-\bar{x})=\eta$

説明変数が母集団内の１つの値 x_0 をとるとき，それに対応する従属変数の期待値がある値ηに等しいということを帰無仮説 $H_0 : \alpha+\beta(x_0-\bar{x})=\eta$ とする検定について考える。ここで用いるパラメーター空間 ω はつぎのように定義される。

$$\omega : \Omega \text{ の条件および } \alpha+\beta(x_0-\bar{x})=\eta$$

ここで $\mathbf{R}'=[1\ x_0-\bar{x}]$ とおくと制約条件は $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\eta$ とあらわされ，前と同じようにしてつぎの結果をえる。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}-\eta=\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]^2}{V[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]}$$

$$=\frac{[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]^2}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{n}+\dfrac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-2}\,\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}=\frac{1}{n-2}\,\frac{[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]^2}{\hat{V}[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]}$$

$$=\frac{1}{(n-2)s^2}\,\frac{[\hat{\alpha}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x})-\eta]^2}{\left[\dfrac{1}{n}+\dfrac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$

ここに x_0 はわれわれの母集団内の1つの観測値でなければならない。この母集団外のものであるときはII.6節でとりあげる。

II 2個の回帰直線

II.1 勾配 β の均等性の検定 $H_0: \beta_1=\beta_2$

ここで新しいサンプル観測を追加する。そして新しいサンプルがもとのサンプルと同じ母集団からのものであるか，否かについて考える。$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ を従属変数の $n_1\times 1$, $n_2\times 1$ の観測ベクトル，$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ を説明変数の $n_1\times 2$, $n_2\times 2$ の観測行列とする。$\boldsymbol{\beta}_1'=(\alpha_1, \beta_1)$, $\boldsymbol{\beta}_2'=(\alpha_2, \beta_2)$ である。ここにモデル

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix}\sim N\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \sigma^2\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right\}$$

において，帰無仮説 $H_0: \beta_1=\beta_2$ について検定する。

ここで用いる対数尤度関数をつぎのようにあらわしておく。

$$\log L \doteq -\frac{n_1+n_2}{2}\log 2\pi-\frac{n_1+n_2}{2}\log\sigma^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}\right\}'\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}\right\}$$

パラメーター空間はつぎのようにあらわされる。

Ω：$-\infty<\alpha_i<+\infty,\ -\infty<\beta_i<+\infty,\ (i=1,2),\ 0<\sigma^2<+\infty$

ω：Ω の条件および $\beta_1=\beta_2$

ここで $\mathbf{R}'=[0\ \ 1\ \ 0\ \ -1]$ と定め制約条件 $\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ を用いてつぎのラグランジュ関数をつくる。

$$F=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}\right\}'\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}\right\}-2\lambda\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}$$

これをパラメーターおよびラグランジュ乗数に関して微分し，ゼロに等しいとおくことによって連立方程式をえる。その係数を用いてつぎの拡大行列を準備する。

$$\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix} & -\mathbf{R} & \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}\\ -\mathbf{R}' & & \\ \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}\end{pmatrix}$$

列1を掃き出すと〔I〕をえる。ただし，ここでは記号の意味はつぎのように変っている。

$$\mathbf{C}=-\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\mathbf{R}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{R}'\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\\mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\\&\mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1&\\&\mathbf{X}_2\end{bmatrix}$$

列2を掃き出して〔II〕をえる。こうしてつぎのものがえられる。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\frac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}$$

$$\mathbf{d}=\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{V[\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2]}$$

$$=\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\dfrac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1+n_2-4}\ \frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}$$

$$=\frac{1}{(n_1+n_2-4)s^2}\ \frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{\left[\dfrac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\dfrac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]}$$

II.2 係数αの均等性の検定 H_0：$\alpha_1=\alpha_2$

ここで検定する帰無仮説は H_0：$\alpha_1=\alpha_2$, 用いるパラメーター空間 ω はつぎの通りである。

$$\omega:\Omega \text{ の条件および } \alpha_1=\alpha_2$$

ここでは $\mathbf{R}'=[1\ \ 0\ \ -1\ \ 0]$ でありつぎのものをえる。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

$$\mathbf{d}=\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{V[\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2]}=\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{\sigma_2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1+n_2-4}\ \frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}$$

$$=\frac{1}{(n_1+n_2-4)s^2}\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

II.3 両係数の均等性の検定 H_0：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$

ここで帰無仮説 H_0：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$ の検定について考える。ここで用いるパラメーター空間 ω はつぎのようにあらわされる。

$$\omega：\Omega \text{ の条件および } \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$$

ここでは $\mathbf{R}'=[\mathbf{I}\ \ -\mathbf{I}]$（$\mathbf{I}$ は2次の単位行列）であり，つぎの結果がえられる。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2} & \\ & \frac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\frac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$=\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{V[\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2]}+\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{V[\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2]}$$

$$=\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}+\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{\sigma_2\left(\frac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\frac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right)}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1+n_2-4}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$=\frac{1}{(n_1+n_2-4)s^2}\left\{\frac{(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2}{\left(\frac{1}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}+\frac{1}{\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right)}\right\}$$

II.4　予測による検定

前節におけると同じように第1の母集団のパラメーター $\boldsymbol{\beta}_1$ が第2の母集団の $\boldsymbol{\beta}_2$ と同じか否かに注目する。

(1)　y_2 の予測 $H_0: \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$

ここでは第2のサンプルにおける観測個数が $n_2=1$ とする。このため $\mathbf{X}_2=[1\ x_2-\bar{x}_1]$ はフル列ランクのものでなく $\boldsymbol{\beta}_2$ は推定，検定不能である。しかしそれの左より $\mathbf{X}_2$ を掛けると推定，検定が可能のものがえられる。それでここでは

$$H_0: \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

を帰無仮説として用いる。すなわち，第2のサンプルにおいて観測された説明変数 $\mathbf{X}_2$ のところにおける従属変数の計算値が第1の母集団と第2の母集団において同じか否かに注目している。いま，

$$\mathbf{R}'=[\mathbf{X}_2\ \ -\mathbf{X}_2]$$

とおくと，ここで用いる制約条件は $\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ とあらわされる。これを用いてラグランジュ関数をつくり，それよりつぎの拡大行列をもとめる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & & -\mathbf{X}_2' & \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\ & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_2' & \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \\ -\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_2 & & \\ \mathbf{y}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{y}_2'\mathbf{X}_2 & & \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$

これはII.1節で用いたものと基本的に同じである。ただし，ここでは第1のサンプルと第2のサンプルのものとを区別して述べておいた。こうして，列2の掃き出しにおいて $\mathbf{X}_2$ がフル列ランクのものでなく，$\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ が特異行列であるために，その一般化逆行列を使用することを明示しうるようにしておいた。列1，列2，列3を掃き出してつぎのものをえる。(3)

（3）　一般化逆行列についてはたとえば〔12〕をみよ。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & & \hat{\boldsymbol{\beta}}_1+(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & \boldsymbol{\beta}_2^o-\mathbf{G}\mathbf{X}_2^1\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & Q_0 \end{pmatrix}$$

ここにつぎの記号を用いた。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1=(\mathbf{X}_1'{}_1\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{X}_2[(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+\mathbf{G}]\mathbf{X}_2'$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^o=\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-y_2$$

これが y_2 の予測誤差をあらわす。この項の標題を y_2 の予測による検定とした理由はこれで明らかであろう。

$$\boldsymbol{\beta}_2^o=\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2$$

$$Q=\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1'\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$$

ここに $\mathbf{G}$ は $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ の１つの一般化逆行列である。そして $\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'=1$ は $\mathbf{G}$ のもとで不変量である。また $\boldsymbol{\beta}_2^o$ は第２のサンプルの正規方程式の無数の解の１つであり，$\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^o(=y_2)$ は $\boldsymbol{\beta}_2^o$ のもとで不変量である。(4) そしてここで掃き出しにあたって

$$\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$$

の関係を用いた。

われわれの掃き出しによってつぎの結果がえられる。

（4） $\mathbf{G}$ が $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ の１つの一般化逆行列であり $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ が成立しているとき $\mathbf{G}\mathbf{X}_2'$ が $\mathbf{X}_2$ の一般化逆行列であり

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2$$

となることはつぎのように示される。

$$\begin{aligned}\mathbf{O}&=(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'-\mathbf{I})'\\&=(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'-\mathbf{X}_2')\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'-\mathbf{I})\\&=(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2')(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}'\mathbf{X}_2'-\mathbf{X}_2')'\end{aligned}$$

この結果よりつぎのものがえられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^0&=\mathbf{y}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^0\\&=(\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^0)'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^0=\mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^0=\mathbf{y}_2$$

$$\mathbf{D}=1+\frac{1}{n_1}+\frac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}$$

$$\mathbf{d}=\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-y_2 \quad (y_2=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2{}^{\circ})$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}^{(5)}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-y_2]^2}{V[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-y_2]}$$

$$=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x})-y_2]^2}{\sigma^2\left[1+\frac{1}{n_1}+\frac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_2-2}\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}$$

$$=\frac{1}{(n_2-2)s^2}\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-y_2]^2}{\left[1+\frac{1}{n_1}+\frac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}$$

(2)　y_2 の平均の予測　$H_0:\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$

前節におけると同じく説明変数の値を1点に固定しておく。そしてそのところで従属変数の値を n_2 回観測する。それでその観測行列は行ベクトル $[1\ x_2-\bar{x}_1]$ を n_2 行ならべたものとなる。ここではパラメーター $\boldsymbol{\beta}_2$ の推定値をえることはできない。したがってそれについて検定することもできない。しかしそれの左より $\mathbf{X}_2$ を掛けたものは推定，検定することができる。ここではつぎの帰無仮説について検定しよう。

$$H_0:\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$$

ここに $\boldsymbol{\iota}$ は n_2 個の1よりなる列ベクトルをあらわす。いま

$$\mathbf{R}'=[\mathbf{R}_1'\ \mathbf{R}_2']=\left[\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\ \ -\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\right]$$

---

(5)　ここではつぎの関係を用いる。

$$\mathbf{d}=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\boldsymbol{\epsilon}_1-\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\epsilon}_2$$

ジョンストンには $\boldsymbol{\epsilon}_2$ の分布のスペシフィケーションがない。タイルにはそれがある。

とおき制約条件を $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=[\mathbf{R}_1' \ \mathbf{R}_2']\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ のとあらわす。こうしてつぎの拡大行列を準備する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & & -\mathbf{R}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\ & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & -\mathbf{R}_2 & \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \\ -\mathbf{R}_1' & -\mathbf{R}_2' & & \\ \mathbf{y}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{y}_2'\mathbf{X}_2 & & \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$

これから先はこれまでと同じように進む。列1，列2，列3を掃き出してつぎのものをえる。ここでは $\mathbf{X}_2$ がフル列ランクのものでなく行列 $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ が特異であるために，それの一般化逆行列 $\mathbf{G}$ をつかう。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & \hat{\boldsymbol{\beta}}_1-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{R}_1'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & & \boldsymbol{\beta}_2^{\circ}+\mathbf{G}\mathbf{R}_2'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & & Q_0 \end{pmatrix}$$

ここに $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \boldsymbol{\beta}_2^{\circ}, Q$ は前節と同じものをあらわす。しかし，つぎの記号の意味は変っている。

$$\mathbf{D}=\mathbf{R}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{R}_1$$
$$\mathbf{d}=\mathbf{R}_1'\hat{\boldsymbol{\beta}}_1+\mathbf{R}_2'\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}$$

$\mathbf{G}$ は $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$ の1つの一般化逆行列であり，$\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\boldsymbol{\iota}=n_2$ は $\mathbf{G}$ のもとで不変量である。また $\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}$ は第2のサンプル観測の正規方程式の1つの解であり，$\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}$ は $\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}$ のもとで不変量である。また掃き出しにあたってつぎの関係を用いた。

$$\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2\mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$$
$$\mathbf{y}_2=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}$$

こうしてつぎの結果がえられる。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{(\bar{x}_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{d}&=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'[\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\circ}]\\ &=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'[\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{y}_2]\\ &=\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\bar{y}_2\end{aligned}$$

これが y_2 の平均の予測誤差をあらわす。

$$\bar{y}_2=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'\mathbf{y}_2$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}^{(6)}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}}{V[\mathbf{d}]}=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\bar{y}_2]^2}{V[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\bar{y}_2]}$$

$$=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\bar{y}_2]^2}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1-2}\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}$$

$$=\frac{1}{(n_2-2)s^2}\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\bar{y}_2]^2}{\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}$$

(3) y_2 の期待値の予測 $H_0: \alpha+\beta(x_2-\bar{x}_1)=\eta_2$

まえのII.4(1)節で取扱ったモデルにおいて $\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2=\eta_2$ とおく。すなわち $\mathbf{X}_2$ に対応する従属変数 y_2 の期待値を η_2 とおく。 $E[y_2]=E[\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\epsilon}_2]=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2=\eta_2$. このとき帰無仮説は

$$H_0: \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1=\eta_2$$

とあらわすことができる。これはまえにI.5節で考察したものと同じようにみえるが, $\mathbf{X}_2, y_2$ が第1の母集団のものでない点がそれと異なっている。ここで

$$\mathbf{R}'=[\mathbf{X}_2\ \ \mathbf{0}]$$

とおくと制約条件は $\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\eta_2$ とあらわされる。ここで用いる拡大行列はつぎのようになる。

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & & -\mathbf{X}_2' & \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\
 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & & \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \\
-\mathbf{X}_2 & & & -\eta_2 \\
\mathbf{y}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{y}_2'\mathbf{X}_2 & -\eta_2 & \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2
\end{pmatrix}$$

(6) $\mathbf{d}=\frac{1}{n_2}\boldsymbol{\iota}'(\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\boldsymbol{\epsilon}_1-\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\epsilon}_2)$ を用いる。

ここではじめから3つの列を掃き出すとつぎのものをえる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & \hat{\boldsymbol{\beta}}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & & \boldsymbol{\beta}_2^{\circ} \\ & & \mathbf{I} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & & Q_0 \end{pmatrix}$$

これをII.4(1)節でえた結果と比較してみよ。ここに記号は $\mathbf{D}$ を除くとそこで用いたものと同じものをあらわす。$\mathbf{D}$ の意味はつぎのように変り $\mathbf{G}$ は含まれなくなる。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}&=\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_2\\ &=\frac{1}{n_1}+\frac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\end{aligned}$$

さらにつぎのものをえる。

$$\mathbf{d}=\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\eta_2$$

これは y_2 の期待値の予測誤差をあらわす。

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}&=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\eta_2]^2}{V[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\eta_2]}\\ &=\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\eta_2]^2}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_0-Q}{Q}&=\frac{1}{n_1-2}\,\frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}\\ &=\frac{1}{(n_1-2)s^2}\,\frac{[\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1(x_2-\bar{x}_1)-\eta_2]^2}{\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{(x_2-\bar{x}_1)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}\right]}\end{aligned}$$

ここでえた検定統計量の形はI.5節のものと同じである。しかし統計量の導出の過程には説明変数の観測値が第1の母集団のものか第2の母集団のものかによって大きな差異があることに注意を払っておか

ねばならない。

この点をジョンストンの取扱いを手がかりにして説明しよう。つぎのように述べられている。「ここでやはりモデルは2変数の場合としてXのある特定の値，たとえば X_0 に対応するYの平均値を予測する問題をとりあげることにしよう。ここに X_0 は標本観測 X_1 から X_n の範囲のなかにあってもよいし，あるいはそれからはずれた値であってもよい」。(43ページ)

ジョンストンの設けているモデルはつぎの通りである。(141—142ページ，なお15—16ページをみよ)。

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{u}$$

$$E(\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

$$E(\mathbf{uu}')=\sigma^2\mathbf{I}_n$$

$\mathbf{X}$ は固定された数の集合

$\mathbf{X}$ の階数$=k<n$

このようにジョンストンはサンプルとして観測されたサイズnのものについてモデルを設定するにとどまっている。これにもかかわらず，「標本としては観測されない，あるXの値の組に対応したその期待値の予測を可能とする」(175ページ) と，観測外したがってモデル（母集団）外のXのところで予測することを述べているのは不適当である。

予測はモデル内のものに限定されねばならない。ジョンストンの述べたモデルを用いるときには，予測はⅠ.5節で述べたものとなる。他方，ジョンストンの述べているような（狭義）予測をするためには，モデルを拡大しておかねばならない。この拡大を2段に分けて述べる。

1つは推定の枠組において取扱うものである。そして母集団（これのサイズはサンプル・サイズを越えている）についてモデルを設定しておき，ジョンストンの上述の式がこのモデルとサンプル観測との共通部分（積集合）をあらわしているものとすると，サンプル観測よりえられた結果を用いて，サンプル内にないが母集団内にある要素につ

いて予測をすることができる。これが普通に用いられている予測の内容である。これを明確に述べているものにたとえば，ファング〔9〕がある。pp. 56–57, 67–68, 79. この場合にも母集団外の要素について予測できないことはいうまでもない。

このように設定した1つのモデル（母集団）外の要素について予測できるか否かは検定の枠組において取扱われる。この場合には，新しく第2のモデル（母集団）を設定し，それの要素について予測をすることについて考える。ここでこの節でとりあげたのはこの問題である。

II.5　平行な2直線の均等性の検定 $H_0:(\alpha_1-\alpha_2)-\beta(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=0$

ここで平行な2直線が均等なものであるか否か，すなわちそれが重なっているか否かの検定に進む。ここで平行な2直線を

$$\eta_1=\alpha_1+\beta(x-\bar{x}_1)$$
$$\eta_2=\alpha_2+\beta(x-\bar{x}_2)$$

とあらわしておく。この2直線が均等なものであると，すべての x について $\alpha_1+\beta(x-\bar{x}_1)=\alpha_2+\beta(x-\bar{x}_2)$ すなわち

$$(\alpha_1-\alpha_2)-\beta(\bar{x}_1-\bar{x}_0)=0$$

が成立する。ここでこれを帰無仮説として用いる。このときパラメーター空間 ω はつぎのようにあらわすことができる。

$$\omega:\Omega \text{ の条件および } (\alpha_1-\alpha_2)-\beta(\bar{x}_1-\bar{x}_0)=0$$

ここで勾配が均等であるという条件を考慮して単純化した尤度関数をつかう。このため観測行列，パラメーター・ベクトルをつぎのように変えておく。

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_{11}\\ \vdots\\ y_{1n_1}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{2n_2}\end{pmatrix}\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & & x_{11}-\bar{x}_1\\ \vdots & & \cdots\cdots\\ 1 & & x_{1n_1}-\bar{x}_1\\ & 1 & x_{21}-\bar{x}_2\\ & \vdots & \cdots\cdots\\ & 1 & x_{2n_2}-\bar{x}_2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \bar{x}_1-\bar{x}_2\end{bmatrix}$$

ここに制約条件は $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=0$ であるから，ラグランジュ関数をつぎのよ

うにあらわしておく。

$$F=(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})-2\lambda\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}$$

これをパラメーターおよびラグランジュ乗数に関して微分してつぎのものをえる。

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{X'X\beta}-\mathbf{R}\lambda-\mathbf{X'y}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=-\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}$$

これをゼロとおいてえられる方程式の係数を用いてつくる拡大行列は〔0〕において $\beta_0=0$ とおいたものとなる。これまでと同じ方法によってつぎのものをえることができる。ここでは $\mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{R}$ の内容がこれまでのものと変っている点に注意を払いさえすればよい。

$$\mathbf{D}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}'=\left[\bar{y}_1\quad \bar{y}_2\quad \frac{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)\,y_i+\sum(y_{2i}-\bar{x}_2)\,y_i}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]$$

$$\mathbf{d}=(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)-\hat{\beta}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}^2/\mathbf{D}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{d}^2}{V[\mathbf{d}]}=\frac{[(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)-\hat{\beta}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}{V[(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)-\hat{\beta}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)]}$$

$$=\frac{[(\alpha_1-\alpha_2)-\hat{\beta}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)]^2}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1-n_2-3}\ \frac{\mathbf{d}^2}{\hat{V}[\mathbf{d}]}$$

$$=\frac{1}{(n_1+n_2-3)\,s^2}\ \frac{[(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)-\hat{\beta}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)]^2}{\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]}$$

Ⅲ 多元回帰

Ⅲ.1 新変数の効果の検定 $H_0: \gamma=0$

1変数xに関する回帰よりも2変数x, zに関する回帰のほうがあてはまりがよいのでなければ新変数zを使用してもえるところはない。ここでパラメーター α, β をもつ回帰式をあてはめることができるという帰無仮説の，付加的パラメーターγが必要であるという対立仮説のもとでの検定に，尤度比法を適用する。ここでのパラメータ空間はつぎの通りである。

$$\Omega: -\infty<\alpha, \beta, \gamma<+\infty, \quad 0<\sigma^2<+\infty$$

$$\omega: \Omega \text{ の条件および } \gamma=0$$

ここでのモデルについて用いる計算は第1節で述べておいた。Ωのもとでの残差平方和は，列3の掃き出しよりえられる

$$Q=\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\mathbf{Mz}(\mathbf{z}'\mathbf{Mz})^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$

である。そしてωのもとでの残差平方和は列4の掃き出しの結果に$\gamma_0=0$ を代入してえられる

$$Q_0=\boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$

である（これは列1，2の掃き出しによってえられるものに等しい)。それで

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{y}'\mathbf{Mz}(\mathbf{z}'\mathbf{Mz})^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{r_{zy}^2}{1-r_{zy}^2}$$

をえる。ここに r_{zy} は（多元）相関係数をあらわす。(7)

(7) つぎの記号をつかうと相関係数の意味は明瞭であろう。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{Mz} & \mathbf{z}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}'\mathbf{Mz} & \boldsymbol{y}'\mathbf{M}\boldsymbol{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\mathbf{z}-\mathbf{xc})'(\mathbf{z}-\mathbf{xd}) & (\mathbf{z}-\mathbf{xc})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{xb}) \\ (\boldsymbol{y}-\mathbf{xc})'(\mathbf{z}-\mathbf{xd}) & (\boldsymbol{y}-\mathbf{xb})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{xb}) \end{bmatrix}$$

$$r_{zy}^2=\frac{\{(\mathbf{z}-\mathbf{xc})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{xb})\}^2}{\{(\mathbf{z}-\mathbf{xc})'(\mathbf{z}-\mathbf{xc})\}\{(\boldsymbol{y}-\mathbf{xb})'(\boldsymbol{y}-\mathbf{xb})\}}$$

Ⅲ.2　係数の全集合の検定 $H_0:\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$

ここで用いるモデルをつぎのようにあらわしておく。

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\epsilon},\quad \boldsymbol{\epsilon}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$$

ここに $\mathbf{y},\mathbf{X}$ は $n\times 1, n\times k$ の観測行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $k\times 1$ パラメーター・ベクトル，$\boldsymbol{\epsilon}$ は $n\times 1$ 攪乱項ベクトルをあらわす。

ここでつぎのパラメーター空間を用いる。

Ω：$-\infty<\boldsymbol{\beta}$ の各要素$<+\infty$，$0<\sigma^2<+\infty$

ω：Ω の条件および $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$

いま $\mathbf{R}=\mathbf{I}$（$\mathbf{I}$ は k 次の単位行列）とおくと帰無仮説を $\mathbf{R}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$（$\boldsymbol{\beta}_0$ は定数要素の k 次ベクトル）という制約条件であらわすことができる。この制約条件もとで尤度関数を最大化するためにラグランジュ関数をつくり，パラメーター，ラグランジュ乗数に関して微分し，その式の係数を用いて拡大行列をつくる。その形はⅠ.1節のものと同じであり，そこのものと同じ結果をえることができる。

$$\mathbf{D}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{d}=\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}_0]'\mathbf{X}'\mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}_0]$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{(n-k)s^2}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}_0]'\mathbf{X}'\mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}_0]$$

多重共線性の成立しているとき　$H_0:\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0$

多重共線性 multi-colineality が成立しているときには $\mathbf{X}$ はフル列ランクのものでなく，$\mathbf{X}'\mathbf{X}$ がランク $p(<k)$ の特異行列であり，$\boldsymbol{\beta}$ を推定，検定することはできない。しかし $\boldsymbol{\beta}$ の左より $\mathbf{X}$ を掛けたものは推定，検定することができる。1つの場合としてここでは帰無仮説

$$H_0 : \boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\eta \quad (\eta=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0) \quad \boldsymbol{\iota}'=[1\ 0\cdots0]$$

に注目する。すなわち，サンプルの第1の観測の従属変数の期待値がηに等しいという帰無仮説の検定について考える。このとき拡大行列はつぎの通りである。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} & -\mathbf{X}'\boldsymbol{\iota} & \mathbf{X}'\mathbf{y} \\ -\boldsymbol{\iota}'\mathbf{X} & & -\eta \\ \mathbf{y}'\mathbf{X} & -\eta & \mathbf{y}'\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

これは前項のものと同じ形のものであるが，ここでは特異である行列 $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の取扱いに注意しなければならない。列1，列2を順に掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{GX}'\mathbf{X} & & \boldsymbol{\beta}^{o}-\mathbf{GX}'\boldsymbol{\iota}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & Q_0 \end{bmatrix}$$

ここにつぎの記号，関係を用いた。

$\mathbf{G}$ は $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ の1つの一般化逆行列

$\boldsymbol{\beta}^{o}=\mathbf{GX}'\mathbf{y}$ は正規方程式の1つの解

$\mathbf{X}=\mathbf{XGX}'\mathbf{X}$

$Q=\mathbf{y}'\mathbf{y}-\mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{o}$ (Ω のもとての残差平方和)

こうしてつぎの結果をえる。

$$\mathbf{D}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{XGX}'\boldsymbol{\iota}$$

$$\mathbf{d}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{XGX}'\mathbf{y}-\eta_1$$

$$V[\mathbf{d}] \overset{(8)}{=} \sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-p}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d} \quad (p \text{ は } \mathbf{X}'\mathbf{X} \text{ のランク})$$

---

(8) $\mathbf{d}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{XGX}'(\mathbf{XGX}'(\mathbf{XG}+\boldsymbol{\epsilon})-\eta_1$
$\quad =E[\mathbf{d}]+\boldsymbol{\iota}'\mathbf{XGX}'\boldsymbol{\epsilon}$

を用いる。

Ⅲ.3 係数の部分集合の検定

$h\times 1$ パラメーター・ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ を追加してつぎのモデルをとりあげる。

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\epsilon},\quad \boldsymbol{\epsilon}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$$

ここに $\mathbf{Z}$ は $n\times h$ 観測行列である。

ここで用いるパラメーター空間をつぎのように定義しておく。

Ω：$-\infty<\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$の各要素$<+\infty$，$0<\sigma^2<+\infty$

ω：Ω の条件および $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0$

いま $\mathbf{R}=\mathbf{I}$（$\mathbf{I}$ は h 次の単位行列）とおくと帰無仮説は制約条件式 $\mathbf{R}'\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0$ であらわされる。ここではつぎの拡大行列を準備する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{Z} & & \mathbf{X}'\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{Z}'\mathbf{y} \\ & -\mathbf{I} & & -\boldsymbol{\gamma}_0 \\ \mathbf{y}'\mathbf{X} & \mathbf{y}'\mathbf{Z} & -\boldsymbol{\gamma}_0 & \mathbf{y}'\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

列1，2，3を順に掃き出してつぎのものをえる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & \hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{C}\mathbf{d} \\ & \mathbf{I} & & \hat{\boldsymbol{\gamma}}_0-\mathbf{d} \\ & & \mathbf{I} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d} \\ & & & Q_0 \end{pmatrix}$$

こうしてつぎの結果をえる。

$Q=\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}-\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$（$\Omega$ のもとでの残差平方和）

$\mathbf{M}=\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

$\hat{\boldsymbol{\gamma}}=\mathbf{D}\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{y}$

$\mathbf{D}=(\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{Z}')^{-1}$

$\mathbf{d}=\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}_0$

$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$

$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}_0)'\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{Z}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}_0)$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n-k-h}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$
$$=\frac{1}{(n-k-h)s^2}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}_0)'\mathbf{ZMZ}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}-\boldsymbol{\gamma}_0)$$

Ⅲ.4　2個の回帰係数の全集合の均等性の検定

ここではつぎのモデルを使用する。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix}\sim N\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\sigma^2\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\right\}$$

ここに $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ は順に $n_1\times 1, n_2\times 1, n_1\times k, n_2\times k$ の観測行列, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ は $k\times 1, k\times 1$ のパラメーター・ベクトル, $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ は $n_1\times 1, n_2\times 1$ の攪乱項ベクトルをあらわす。とくに $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ はいずれもフル列ランクのものとする。

ここでパラメーター空間はつぎのように定義される。

Ω：$-\infty<\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ の各要素$<+\infty$，$0<\sigma^2<+\infty$

ω：Ω の条件および $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$

ここで $\mathbf{R}'=[\mathbf{I}\ \ -\mathbf{I}]$, $\mathbf{I}$ はいずれも k 次単位行列，とおくと，帰無仮説 H_0：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$ は制約条件式で

$$\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

とあらわされる。ここで用いる拡大行列はつぎのようになる。

$$\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix} & -\mathbf{R} & \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\\ -\mathbf{R}' & & \\ \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\end{pmatrix}$$

〔0〕と比較してみよ。列1，列2を掃き出すと〔Ⅱ〕をえる。ただしここでは記号はつぎのものをあらわす。

$$\mathbf{C}=-\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\mathbf{R}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1\\ (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{R}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\mathbf{R}$$

$$=(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\beta}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\quad(\Omega\text{ のもとでの残差平方和})$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)'[(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}](\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{n_1+n_2-2k}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]\mathbf{d}$$

$$=\frac{1}{(n_1+n_2-2k)s^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)'[(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}$$

$$+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}](\hat{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)$$

Ⅲ.5　2個の回帰の係数の部分集合の均等性の検定

ここでパラメーター・ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$（いずれも $h\times 1$）を追加的に含むつぎのモデルについて考える。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \boldsymbol{\epsilon}_2\end{bmatrix}\sim N\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\ \sigma^2\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\right\}$$

ここに $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ は $n_1\times h, n_2\times h$ の観測行列をあらわす。

パラメーター空間はつぎのようにあらわされる。

Ω：$-\infty<\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ の各要素$<+\infty$，$0<\sigma^2<+\infty$

$\omega : \Omega$ の条件および $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_2$

検定すべき帰無仮説はつぎの制約条件であらわされる。

$$\mathbf{R}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{bmatrix}=0,\quad \mathbf{R}'=[\mathbf{I}\ \ -\mathbf{I}]\quad \mathbf{I}\ \text{は}\ h\ \text{次単位行列}$$

つぎの拡大行列よりはじめる（〔Ⅲ〕と比較してみよ）。

$$\left(\begin{array}{cccc}
\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-\mathbf{I}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}\\
 & \begin{bmatrix}-\mathbf{I}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}' & & \\
\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}
\end{array}\right)$$

列1，２，３を掃き出してつぎの結果をえる（〔Ⅳ〕と比較してみよ）

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}\mathbf{W}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-\mathbf{I}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}'\mathbf{W}\begin{bmatrix}-\mathbf{I}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}=-\begin{bmatrix}-\mathbf{I}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}'\mathbf{W}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}'\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \\ & \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \\ & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \\ & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}'$$

$$V[\mathbf{d}]=\sigma^2\mathbf{D}$$

$$Q_0-Q=\mathbf{d}'\mathbf{D}^{-}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{\sigma^2}=\mathbf{d}'V[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

$$\frac{Q_0-Q}{Q}=\frac{1}{(n_1+n_2-2k)}\mathbf{d}'\hat{V}[\mathbf{d}]^{-1}\mathbf{d}$$

文　献

〔1〕 ANDERSON, R. L. and T. A. BANCROFT. 1952. *Statistical Theory in Research.*

〔2〕 ANDERSON, T. W. 1958. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.*

〔3〕 BROWNLEE, K. A. 1965. *Statistical Theory and Methodology. In Science and Engineering.*

〔4〕 CHOW, G. 1964. Tests of Equality Between Sets of Coefficients in two Linear Regressions, *Econometrica,* Vol. 28 October pp. 532–553.

〔5〕 FISHER, F. M. 1970. Tests of Equality Between Sets of Coefficiento in two Linear Regressions: An Expostory Note. *Econometrica,* Vol. 38, No, 2 March pp. 361–366.

〔6〕 GRAYBILL, F. A. 1961, *An Introduetion to Linear Statistical Models,* vol, 1.

〔7〕 HEMMERLE, W. J. 1967. *Statistical Computations on a Digital Computer.*

〔8〕 HOEL, P. G. 1962. *Introduction to Mathematical Statistis* 3rd ed.

〔9〕 HUANG, D. S. 1970. *Regression and Econometric Methods.*

〔10〕 JOHNSTON, J. 1972. *Econometric Methods,* 2nd ed., 竹内，関谷，栗山，美添，舟岡共訳『計量経済学の方法』全訂版上，1975。

〔11〕 MOOD, A. M. and F. A. GRAYBILL. 1963. *Introduetion to the Theory of Statistis,* 2nd ed.

〔12〕 SEARLE, S. R. 1971. *Linear Models.*

〔13〕 THEIL, H. 1971. *Principles of Econometrics.*