<論説>回帰係数の仮説検定 : VIA ANOVA

回帰係数の仮説検定

— VIA　ANOVA —

今　川　正

ここで回帰係数の最小２乗推定量の仮説検定の方法について述べる。とくに分散分析表 ANOVA を利用して種々の検定方法を統一的にながめそれらの性質を明確にすることを企てる。

1.最小２乗法と古典的モデル

最小２乗法

ここではつぎの形の多元回帰式に注目する。

$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_kX_k+u$$

ここに Y の変動のうち $\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_kX_k$ が系統的に説明される部分であり，Y のうちそのように説明されない部分が u であらわされている。

この多元回帰式には k 個の独立変数がある。しかし β_0 を定数１の値をとる変数 X_0 についているパラメーターと考えることができる。このようにみるときには，Y は $k+1$ 個の変数に依存しており，その依存の仕方あるいは度合がパラメーター β_i によって示されているということができる。

いま，この関係を研究するためにサイズ n のサンプルをとると，この関係にしたがう全サンプル観測をつぎのように書くことができる。

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u} \tag{1}$$

ここに $\mathbf{y}, \mathbf{u}$ はそれぞれ $n\times1$ のベクトル，$\mathbf{X}$ は $n\times(k+1)$ の行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $(k+1)\times1$ のベクトルである。

いま1組のデータが与えられていると仮定する。そして関心をいだいていることが1つの変数の他の変数に対する依存関係についての情報を要約して表現することであるとする。この場合には (1) をモデルと考えないでデータを記述する式と考えるのが適当である。この形で回帰方程式がしばしば用いられており，そこでは最小2乗法が適している。

最小2乗法によって係数の推定量をもとめるには，はじめに (1) をつぎのように書き改めておく。

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{b}+\hat{\mathbf{u}}$$

ここに係数 $\mathbf{b}$ の値はなお未知であり，

$$S=\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$$

の最小化によって決められるものである。$\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{b}$ は計算された偏差，最小2乗残差である。S はつぎのように書き改められる。

$$\begin{aligned}S&=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{b})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{b})\\&=\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\mathbf{b}\mathbf{X}'\mathbf{y}+\mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}\end{aligned}$$

S の $\mathbf{b}$ に関するベクトル微分をもとめ，その結果をゼロとおくことによってつぎの方程式がえられる。ここに $\mathbf{0}$ は $(k+1)\times1$ のゼロベクトルである。

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{b}}=-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b}=\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{2}$$

$\mathbf{b}$ はこの正規方程式を満足するように決められる。これを解くと

$$\mathbf{b}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} \tag{3}$$

がえられる。ただし，行列 $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ がフル・ランクをもつものとする。

係数推定量を最小2乗の基準によって選択するといろいろの結果がえられる。それが残差平方和の最小化以外には何の仮定も設けないでえられているにもかかわらず，それは興味ある性質をもっている。こ

こではとくにつぎのものについて述べておく。

$\mathbf{y}$ の最小2乗推定量は (3) の係数推定量に説明変数のすべてのサンプル観測を組合せて

$$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{Xb}$$

としてえることができる。これをつぎのようにあらわしておく。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}&=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\\&=(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}\end{aligned}\tag{4}$$

ここに

$$\mathbf{I}-\mathbf{M}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

をあらわす。この $\mathbf{I}-\mathbf{M}$ には対称行列，ベキ等行列という重要な性質がある。

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{M})'&=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\\&=\mathbf{I}-\mathbf{M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{M})^2&=[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'][\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\\&=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\\&=\mathbf{I}-\mathbf{M}\end{aligned}$$

この行列のトレイスは $k+1$ である。

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{I}-\mathbf{M})&=\mathrm{tr}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\\&=\mathrm{tr}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\\&=k+1\end{aligned}\tag{5}$$

また行列 $\mathbf{M}$ を用いると最小2乗残差は

$$\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{My}\tag{6}$$

とあらわされる。このように $\hat{\mathbf{u}}$ は $\mathbf{y}$ を $\mathbf{M}$ で変換することによってえられる。この $\mathbf{M}$ も対称行列，ベキ等行列である。そしてそのトレイスは $n-k-1$ である。

$$\mathbf{M}'=\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M}^2=\mathbf{M}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{M}=n-k-1$$

この $\mathbf{M}$ はつぎの性質をもっている。

$$\mathbf{MX}=[\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\mathbf{X}$$
$$=\mathbf{X}-\mathbf{X}$$
$$=\mathbf{0} \tag{7}$$
$$\mathbf{M}(\mathbf{I}-\mathbf{M})=\mathbf{M}-\mathbf{M}^2$$
$$=\mathbf{0} \tag{8}$$

そして最小2乗残差については，つぎの関係が成立する。

$$\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{0} \tag{9}$$
$$\boldsymbol{\iota}'\hat{\mathbf{u}}=0 \tag{10}$$
$$\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{u}}=0$$

第1に，説明変数の任意の1つについての観測と残差との積和はゼロである。すなわち

$$\mathbf{X}'\mathbf{u}=\mathbf{X}'\mathbf{My}$$
$$=\mathbf{0}'\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

が成立する。ここで(6),(7)を用いた。

つぎに，これの特別の場合に注目する。$\mathbf{X}$ の列1は n 個の1よりなるので，これを列ベクトル $\boldsymbol{\iota}$ であらわすと，連立方程式(9)の最初のものは $\boldsymbol{\iota}'\hat{\mathbf{u}}=0$ である。これはまた

$$\boldsymbol{\iota}'\hat{\mathbf{y}}=\boldsymbol{\iota}'\mathbf{y}$$

とあらわすことができる。

第3に，(9)の左より $\mathbf{b}'$ を掛けると $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{Xb}$ であるから

$$\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{b}'\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}}$$
$$=\mathbf{b}'\mathbf{0}=0$$

をえる。すなわち従属変数の推定値と残差との積和はゼロである。

古典的モデルの仮定

ANOVA I　最小2乗超平面のまわりの変動

	SS, $\mathbf{y}$ のターム	SS, $\mathbf{u}$ のターム
$\hat{\mathbf{y}}$	$\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}$	$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}$
$\hat{\mathbf{u}}$	$\mathbf{y}'\mathbf{My}$	$\mathbf{u}'\mathbf{Mu}$
$\mathbf{y}$	$\mathbf{y}'\mathbf{y}$	$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u}$

ここでは独立変数が固定されているか，あるいはコントロール可能の古典的回帰モデルについて述べる。ここで用いる仮定はつぎの通りである。

1. $\mathbf{X}$ は $X_0, X_1, \cdots, X_k$ の固定値の行列である。ここに $X_0=1$ が恒等的に成立している。
2. 変数 $X_i, i=0,1,\cdots,k$ は線型独立である。$\rho(\mathbf{X})=k+1$.
3. $E(\mathbf{u})=\mathbf{0}$, $E(\mathbf{uu}')=\sigma^2\mathbf{I}$, ここに $\mathbf{I}$ は n 次の単位行列である。

なお，次節で述べる仮説検定の方法は攪乱項の正規性の仮定に依存している。この仮定と仮定3とをあわせてつぎのようにあらわしてお

3.′ $\mathbf{u}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$

最小2乗超平面のまわりの変動

最初に $\mathbf{y}$ の変動を最小2乗推定量 $\hat{\mathbf{y}}$ と最小2乗残差 $\hat{\mathbf{u}}$ との2つに分割しておく。

$$\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{u}} \tag{11}$$

これよりつぎの平方和恒等式をもとめる。

$$\mathbf{y}'\mathbf{y}==\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} \tag{12}$$

ここで $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{u}}=0$ の関係を用いた。

この右辺の各項を $\mathbf{y}$ のタームであらわすとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}&=[(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}]'[(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}]\\&=\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}\\&=\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}\\\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}&=(\mathbf{My})'(\mathbf{My})\\&=\mathbf{y}'\mathbf{My}\end{aligned}$$

したがって(12)はつぎのようにあらわすことができる。

その期待値

$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\sigma^2(k+1)$

$\sigma^2(n-k-1)$

$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\sigma^2(n)$

$$\mathbf{y}'\mathbf{y}=\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}+\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}$$

この各項を $\mathbf{u}$ のタームであらわし，後者について仮定されている統計的性質を利用しうるようにしておく。

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'\mathbf{y}&=(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})\\&=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}&=\mathbf{y}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{y}\\&=\mathbf{u}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{u}\\&=\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}\end{aligned}$$

ここでは $\mathbf{M}\mathbf{y}=\mathbf{M}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})=\mathbf{M}\mathbf{u}$ の関係を用いた。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}&=\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}\\&=(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})'(\mathbf{I}-\mathbf{M})(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})\\&=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\\&\quad+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}+\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}\\&=\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}\end{aligned}$$

この結果を ANOVA I にまとめておいた。そこで SS は平方和 Sum of Squares をあらわす。

$\mathbf{u}$ に関する 2 次形式の部分の期待値はつぎの通りである。

$$\begin{aligned}E(\mathbf{u}'\mathbf{u})&=E\mathrm{tr}(\mathbf{u}\mathbf{u}')\\&=\sigma^2\mathrm{tr}\mathbf{I}\\&=\sigma^2(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}]&=E\mathrm{tr}[\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}]\\&=E\mathrm{tr}(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}\mathbf{u}'\\&=\sigma^2\mathrm{tr}(\mathbf{I}-\mathbf{M})\\&=\sigma^2(k+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u})&=E\mathrm{tr}(\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u})\\&=E\mathrm{tr}(\mathbf{M}\mathbf{u}\mathbf{u}')\\&=\mathrm{tr}[\mathbf{M}E(\mathbf{u}\mathbf{u}')]\\&=\sigma^2\mathrm{tr}\mathbf{M}\\&=\sigma^2(n-k-1)\end{aligned}$$

こうしてσ^2の不偏推定量として

$$s^2=\frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k-1}$$

をえる。

2. 回帰係数の仮説検定

つづいて係数の有意検定について述べる。これを (1) 単1係数（スカラー）の検定，(2) 係数ベクトルの検定，(3) 部分ベクトルの検定，(4) 構造安定性の検定，(5) 一般線型仮説の検定にわけて述べる。

単1係数の検定

この議論に入ってゆくまえに，係数の最小2乗推定量の特徴とくにその平均，共分散についてみておこう。そのために$\mathbf{b}$をつぎのように書き改めておく。

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})\\&=\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

これの期待値をもとめると

$$E(\mathbf{b})=\boldsymbol{\beta}$$

をえる。このように$\mathbf{b}$が$\boldsymbol{\beta}$の不偏推定量である。

つぎに$\mathbf{b}$の共分散行列をもとめる。はじめにそのサンプリング誤差をもとめておく。

$$\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

それで$\mathbf{b}$の共分散行列はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}V(\mathbf{b})&=E(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})'\\&=E(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\\&=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned}$$

ここで用いられている逆行列は定数であり，σ^2の不偏推定量はs^2であるので，

$$s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

が$\mathbf{b}$の共分散行列の不偏推定量である。

検定の問題にもどろう。ここでは係数iについての仮説

$$H_0: \beta_i = d_i$$
$$H_a: \beta_i \neq d_i$$

の検定について考える。推定量b_iは平均d_i（帰無仮説のもとで），分散$\sigma^2 c^{ii}$（モデルの仮定のもとで）の正規分布をもつので，推定値と仮説値との平方偏差とその推定分散$s^2 c^{ii}$との比率を検定統計量として用いる。

$$F = \frac{(b_i - d_i)^2}{s^2 c^{ii}}$$

ここにc^{ii}は$(\mathbf{X'X})^{-1}$の対角要素iをあらわす。この比率はもし偏差がサンプリング変動のみにもとづいているときには，自由度 1, $n-k-1$ のF分布をもつ[1)]。そして，b_iが仮説値と異なっているとF統計値は大きくなる傾向がある。それで右側検定が用いられる。

係数ベクトルの検定

これからの展開の基礎に用いる平方和恒等式を最初に述べておこう。まえには $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{y}}$ (11) よりはじめた。ここで任意の推定量$\mathbf{y}^*$をこの両辺より差引いた

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}^* = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^* \qquad (13)$$

よりはじめる。ここに用いた$\mathbf{y}$はつぎのように定義されるものである。

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{Xb} \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{Xd} \end{aligned} \qquad (14)$$

ここに$\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$はパラメーター，最小２乗推定量，任意の線型推定量である。これを用いると各偏差はつぎのようにあらわされる。

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}^* = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{d}) + \mathbf{u}$$
$$\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^* = \mathbf{X}(\mathbf{b} - \mathbf{d})$$

これを用いて (13) に対応する平方和恒等式

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)'(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*)'(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^*) \qquad (15)$$

の各項を書き改めておこう（なお，交叉積は $\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ を用いて消える

ことを示すことができる)。

$$\begin{aligned} Q &= (\mathbf{y}-\mathbf{y}^*)'(\mathbf{y}-\mathbf{y}^*) \\ &= [(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'+\mathbf{u}'][\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}] \\ &= (\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$Q_2 = (\mathbf{b}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{b}-\mathbf{d})$$

また, $\mathbf{b}=\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$ したがって $\mathbf{X}\mathbf{b}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}$ の関係を使用すると

$$\mathbf{X}(\mathbf{b}-\mathbf{d})=\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}$$

と変形できるから, Q_2 はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} Q_2 &= (\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*)'(\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*) \\ &= [\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}]'[\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}] \\ &= (\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &\quad +\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u} \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{M}'\mathbf{X}=\mathbf{0}$ の関係を用いた。

いま考察している帰無仮説が, 係数ベクトルがある指定された値のベクトル $\mathbf{d}$ (これはゼロベクトルであってもよい) に等しい $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{d}$ というものであるとしよう。この帰無仮説のもとでは各平方和はつぎのようになる。

$$Q=\mathbf{u}'\mathbf{u}$$

$$Q_1=\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$$

$$Q_2=\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}$$

そして $\mathbf{M}(\mathbf{I}-\mathbf{M})=\mathbf{0}$ (8) により Q_1 と Q_2 は互に独立である。なお, この2次形式の行列のトレイス, したがって自由度は前節におけると同じようにしてもとめることができる。

ここにえた結果を ANOVA II に示しておいた。ここで $\mathbf{d}=\mathbf{0}$ とおくと ANOVA I をえることはいうまでもない。なお, ANOVA II の最初の行と最後の行については ANOVA I をみよ。

それでいまの仮説検定にとって適当な検定統計量は

$$F=\frac{Q_2/DF_2}{Q_1/DF_1} \tag{16}$$

である。ここに DF_i は Q_i の自由度をあらわす。仮定 3′ により $\mathbf{u}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$ であるから，帰無仮説のもとではこの比率は自由度 $k+1$, $n-k-1$ の F 分布をもつ。この F 値が大きければ帰無仮説を棄却する。すなわち Q_2 が Q_1 にくらべて大きいと，この回帰関係はトリビアルでない。すなわち，サンプル値 $\mathbf{b}$ は仮説値 $\mathbf{d}$ と非常に異なっているので，この帰無仮説を採択しえないとわれわれは信じる。

係数の部分ベクトルの検定

方程式の係数のすべてについてではなく，数個の係数の同時検定について考えることがある。そのときにはベクトル $\boldsymbol{\beta}$ より一部をとり，帰無仮説 $\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{d}_2$ について検定するものとする。このとき，注目している係数にもとづいてベクトルを 2 分する。

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}$$

ここに $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ はそれぞれ $l\times1$, $m\times1$ のベクトルである。 $l+m=k+1$.

この係数の分割に対応するようにモデルをつぎのようにあらわしておく。

$$\mathbf{y}=[\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}+\mathbf{u}$$

$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2$ はそれぞれ $n\times l$, $n\times m$ の行列である。しかし $\mathbf{y},\mathbf{u}$ はこれま

ANOVA II 帰無仮説 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{d}$ の検定

偏差		SS
$\hat{\mathbf{y}}$		
$\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*$	Q_2	$(\mathbf{b}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{b}-\mathbf{d})$
$\hat{\mathbf{u}}$	Q_1	$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$
$\mathbf{y}-\mathbf{y}^*$	Q	$(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u}$
$\mathbf{y}$		

で通り $n \times 1$ である。ここでは全観測を $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ の 2 つに分割している。このとき最小 2 乗推定量はつぎのようになる[2)]。

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{y}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{y}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{y}\\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{y}\end{bmatrix}$$

ここに

$$\mathbf{N}=\mathbf{I}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{X}_2$$

をあらわす。このとき，$\mathbf{b}_2$ はつぎのように書き改めることができる。

$$\mathbf{b}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{u}$$

したがって，この推定量のサンプリング誤差は

$$\mathbf{b}_2-\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{u}$$

とあらわされる。

ここでは (13) に対応する偏差恒等式としてつぎの 2 組の式よりはじめる。

$$\mathbf{y}-\mathbf{y}^*=\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}} \qquad +\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^* \tag{17}$$

$$\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}} \tag{18}$$

ここでも (14) で定義された $\hat{\mathbf{y}}$ を用いる。ただしここに新しく導入される $\tilde{\mathbf{y}}$ としてはつぎのものを用いる。

$$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{X}_1\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1+\mathbf{X}_2\mathbf{d}_2$$

ここで用いる推定量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ の導出方法についてはあとで述べる。これを

帰無仮説のもとでの SS	DF
$\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{u}$	$k+1$
$\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$	$n-k-1$
$\mathbf{u}'\mathbf{u}$	n

用いると (17), (18) の各偏差はつぎのようにあらわされる。なお，$\check{\mathbf{u}}$ を3つ目の式で定義しておいた。

$$\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*=\mathbf{X}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{d}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{X}_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{d}_1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}-\mathbf{u}=\check{\mathbf{u}}$$

これを用いてえる (17), (18) それぞれの平方和を ANOVA III に示しておいた。この交叉積の項の消えることについてはつぎに述べる脚注をみよ。なお，ここでは帰無仮説 $\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{d}_2$ に注目している。偏差恒等式においてこれに関連のあるものは(18)の部分である。ANOVA III においては2行より4行までにこの平方和を記しておいた。

うえで述べたベクトル $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ としては，任意に与えられた係数 $\mathbf{d}_2$ 所与のもとに，関連の残差平方和を最小化するように決められるものを用いる。これをもとめるにはつぎのようにする。最初にモデルを

$$\mathbf{y}-\mathbf{X}_2\mathbf{d}_2=\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{u} \tag{19}$$

とあらわしておく。この左辺の要素を新しい従属変数とみる。帰無仮説のもとで $\mathbf{d}_2$ が既知のところではこれは観測可能である。この式の $\boldsymbol{\beta}_1$ の最小2乗推定量をもとめるには，この式の左辺に左から $(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'$ を掛ければよい。こうしてえる値が $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ である。

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1=(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'(\mathbf{y}-\mathbf{X}_2\mathbf{d}_2)$$

ANOVA III 帰無仮説 $\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{d}_2$ の検定

偏差		SS
$\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*$		$(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{d}_1)'\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\mathbf{d}_1)$
$\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q_2	
$\hat{\mathbf{u}}$	Q_1	
$\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q	
$\mathbf{y}-\mathbf{y}^*$		$(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u}$

これに (19) を代入してえられるサンプリング誤差

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\boldsymbol{\beta}_1=(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{u}$$

を用いると，$\check{\mathbf{u}}$ をつぎのように攪乱のタームであらわすことができる[3)]。

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{u}}&=\mathbf{u}+\mathbf{X}_1(\boldsymbol{\beta}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1)\\&=[\mathbf{I}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1']\mathbf{u}\\&=\mathbf{N}\mathbf{u}\end{aligned}$$

これを用いるとこれの平方和をつぎのようにあらわすことができる。

$$Q=\check{\mathbf{u}}'\check{\mathbf{u}}=\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{u}$$

ここでは $\mathbf{N}$ がベキ等行列であることを用いた。これのトレイスをもめとると

$$\mathrm{tr}\mathbf{N}=n-l$$

をえる。

つぎに Q_2 に注目する。はじめにつぎのサンプリング誤差をもとめておく。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{y}-\mathbf{d}_2)\\\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{y}-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{u}\\\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{u}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\\\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{u}\end{aligned}$$

ここで第2の等号において関係 (19) を用いた。

	帰無仮説のもとでの SS	DF
$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}$	$\mathbf{u}'\mathbf{W}\mathbf{u}$	m
$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$	$n-l-m$
$\check{\mathbf{u}}'\check{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{u}$	$n-l$

これの左より $\mathbf{X'X}$ を掛けると

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\\ \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{X}_2'\mathbf{Nu}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{X}_2'\mathbf{Nu}$$

をえる。これの左より $[\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1)'(\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2)']$ を掛けて Q_2 をえる。

$$\begin{aligned}Q_2&=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}'\mathbf{X}_1'\mathbf{X}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2\end{bmatrix}\\ &=[(\mathbf{b}_1-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1)'\ \ (\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2)']\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{X}_2'\mathbf{Nu}\\ &=(\mathbf{b}_2-\mathbf{d}_2)'\mathbf{X}_2'\mathbf{Nu}\\ &=\mathbf{u}'\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{Nu}\\ &=\mathbf{u}'\mathbf{Wu}\end{aligned}$$

ここに

$$\mathbf{W}=\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}$$

であり，これはベキ等行列である。

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^2&=\mathbf{N}_1\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\\ &=\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}=\mathbf{W}\end{aligned}$$

また，$\mathbf{W}$ のトレイスは m である。

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{W}&=\mathrm{tr}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\mathbf{X}_2\\ &=\mathrm{tr}\mathbf{I}\\ &=m\quad(=DF_1)\end{aligned}$$

この結果を用いると，帰無仮説のもとでの平方和，自由度の分割をつぎのようにあらわすことができる。

$$\mathbf{u}'\mathbf{Nu}=\mathbf{u}'\mathbf{Wu}+\mathbf{u}'\mathbf{Mu}$$

$$n-l=(n-l-m)+m\qquad\qquad l+m=k+1$$

そして $\mathbf{MW}=\mathbf{0}$ であることを示すことができるから，右辺の 2 つの 2 次形式は独立である。

なお，$\mathbf{MW}=\mathbf{0}$ を証明するのにつぎの関係よりはじめる。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' &= \mathbf{X}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\\ \mathbf{X}_2'\end{bmatrix}\\ &= [\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2]\begin{bmatrix}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{I}-\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N})\\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{I}-\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N})+\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\\ &= \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1+[\mathbf{I}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1]\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\\ &= (\mathbf{I}-\mathbf{N})+\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}\\ &= \mathbf{I}-\mathbf{N}+\mathbf{W}\end{aligned}$$

左辺は $\mathbf{I}-\mathbf{M}$ であるから

$$\mathbf{M}=\mathbf{N}-\mathbf{W}$$

の関係をえる。これの両辺に右より $\mathbf{W}$ を掛けると

$$\mathbf{MW}=\mathbf{NW}-\mathbf{W}^2=\mathbf{W}-\mathbf{W}=\mathbf{0}$$

をえる。ここでつぎの関係を用いた。

$$\begin{aligned}\mathbf{NW} &= [\mathbf{I}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1']\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{N}\\ &= \mathbf{W} \qquad\qquad \mathbf{NX}_1=\mathbf{0}\ \text{による。}\end{aligned}$$

したがって，帰無仮説 $\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{d}_2$ の検定統計量として (16) を用いる。ここに $DF_1=m$, $DF_2=n-k-1=n-l-m$ である。これは帰無仮説が真のとき，自由度 $m, n-l-m$ の F 分布をもっている。そして $m=k+1$ のときには係数ベクトルの検定のところでえた結果に合致する。

構造安定性の検定

モデル (1) に注目する。そして $\boldsymbol{\beta}$ が時間上あるいは地域上の 2 つの点にわたって一定か否かについて考える。2 つの点においてそれぞれれサンプがとられると仮定する。そしてそのサンプルがこのモデルの成立している同一の母集団よりとられたということを検定する。第 1 のサンプル・サイズを n_{I} とする。

そのときには

$$\mathbf{y}_{\mathrm{I}}=\mathbf{X}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}+\mathbf{u}_{\mathrm{I}}$$

が成立する。$\mathbf{y}_{\mathrm{I}}, \mathbf{u}_{\mathrm{I}}$ はそれぞれ $n_{\mathrm{I}}\times 1$ のもの，$\mathbf{X}_{\mathrm{I}}$ は $n_{\mathrm{I}}\times(k+1)$, $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}$

は $(k+1)\times 1$ のものである。同じように，サイズ n_{II} の第2のサンプルについてはつぎのものをえる。

$$\mathbf{y}_{\mathrm{II}}=\mathbf{X}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}+\mathbf{u}_{\mathrm{II}}$$

ここに $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}$ は $(k+1)\times 1$ のものである。

ここで検定するのはつぎの帰無仮説である。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}$$

ここに $\mathbf{d}$ は $(k+1)\times 1$ の先決された定数のベクトルである。

ここで用いる $\mathbf{y}$ 値をつぎのようにあらわしておく。なお，混乱のおそれのないところではゼロ行列の記載を省いておいた。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{y}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{I}}\\ \hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathrm{I}}^*\\ \mathbf{y}_{\mathrm{II}}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}$$

ここに $\boldsymbol{\beta},\mathbf{b},\mathbf{d}$ はパラメーター，最小2乗推定量，任意の定数ベクトルをあらわす[4]。

ここでも偏差恒等式 (13) よりはじめる。これをつぎのようにあらわしておく。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\mathrm{I}}-\mathbf{y}_{\mathrm{I}}^*\\ \mathbf{y}_{\mathrm{II}}-\mathbf{y}_{\mathrm{II}}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{I}}\\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{I}}-\mathbf{y}_{\mathrm{I}}^*\\ \hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{II}}-\mathbf{y}_{\mathrm{II}}^*\end{bmatrix}$$

この左辺はつぎのように書き改められる。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

これの平方和はつぎの通りである。

$$\begin{aligned}Q=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

また，右辺第２項およびその平方和はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix}$$

$$Q_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix}$$

なお，

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

の関係を用いると，この平方和はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{II}}=&\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに，

$$\mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{I}}=\mathbf{X}_{\mathrm{I}}(\mathbf{X}_{\mathrm{I}}'\mathbf{X}_{\mathrm{I}})^{-1}\mathbf{X}_{\mathrm{I}}'$$

$$\mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{II}}=\mathbf{X}_{\mathrm{II}}(\mathbf{X}_{\mathrm{II}}'\mathbf{X}_{\mathrm{II}})^{-1}\mathbf{X}_{\mathrm{II}}'$$

をあらわす。また，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{I}}&=\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{I}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{I}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{M}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であることはいうまでもない。

したがって，帰無仮説のもとでは各平方和はつぎのようになる。

$$Q=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$Q_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{M}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$Q_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

ここに Q_{I} と Q_{II} が独立であることは容易に示すことができる。

また，この2次形式のトレイスをもとめるとつぎのようになる。

	トレイス
Q	$n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}$
Q_{I}	$n_{\mathrm{I}}+n_{\mathrm{II}}-2(k+1)$
Q_{II}	$2(k+1)$

ここにえた結果を ANDVA IV にまとめておいた。これが ANOVA II の拡張であることは容易に認められる。ここに用いる検定用統計量が (16) であることはいうまでもない。(ただし添字1,2をI,IIに変える)。

一般の線型仮説の検定

ここでも2組の偏差恒等式 (17),(18) よりはじめる。ただしここでは従属変数の値として (14) に追加してつぎの定義を用いる。

$$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$$

これらを用いて偏差をつぎのようにあらわしておく。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*&=\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})\\ \hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}&=\mathbf{X}(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})\\ \mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}&=\hat{\mathbf{u}}\\ \mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}&=\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

ANOVA IV 帰無仮説 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}$ の検定

	SS
Q_{II}	$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}$
Q_{I}	
Q	$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}-\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'$

$$\mathbf{y}-\mathbf{y}^{*}=\mathbf{u}+\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})$$

ここで用いた記号の意味は $\tilde{\mathrm{B}}$ 以外には既知である。$\tilde{\mathrm{B}}$ は $p\times(k+1)$ の行列 $\mathbf{R}$ を用いてつくられた制約条件

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$$

のもとに

$$S=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

を最小化するところに定められる推定量である[5)]。

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{b}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\mathbf{b}) \qquad (20)$$

ここで (18) の各項の偏差平方和を攪乱のタームであらわしておこう。まず (20) において $\mathbf{b}$ を左辺へ移し，残りを攪乱のタームであらわすと

$$\tilde{\mathbf{B}}-\mathbf{b}=-(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

をえる。これを用いて偏差 $\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}$ を $\mathbf{u}$ のタームであらわすと

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}&=\mathbf{X}(\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta})\\&=\mathbf{H}\mathbf{u}\end{aligned}$$

をえる。ここに

$$\mathbf{H}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

はベキ等行列である。

これを用いると

$$\begin{aligned}Q_2&=(\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}})'(\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}})\\&=\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}\end{aligned}$$

	帰無仮説のともでの SS	DF
	$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{I}-\mathbf{M}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$	$k+1$ $+k+1$
$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{I}}\\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{I}}\\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{M}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$	$n_{\mathrm{I}}-k-1$ $+n_{\mathrm{II}}-k-1$
$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}} & \\ & \mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$	n_{I} $+n_{\mathrm{II}}$

とあらわされる。また

$$\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}$$
$$=(\mathbf{M}+\mathbf{H})\mathbf{u}$$

を用いると

$$Q=\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{u}'(\mathbf{M}+\mathbf{H})'(\mathbf{M}+\mathbf{H})\mathbf{u}$$
$$=\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}$$

をえる。ここで

$$\mathbf{MH}=\mathbf{0}$$

のために交叉積の項は消えている。こうして，帰無仮説のもとでの平方和の分割はトリビアルな形

$$\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}=\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}$$

となる。

ここにえた結果を ANOVA IV にまとめておいた。

ここに用いた行列 $\mathbf{H}$ のトレイスは p である。

$$\mathrm{tr}\mathbf{H}=\mathrm{tr}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$
$$=\mathrm{tr}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'$$
$$=p$$

そして $\mathbf{u}$ が平均ゼロ，共分散 $\sigma^2\mathbf{I}$ の規準正規変量のベクトルであるので，帰無仮説 $\mathbf{R\beta}=\mathbf{r}$ の検定統計量は (16) である。ここに $DF_1=p$ である。

この一般の線型仮説の検定の性質について説明するために，線型制約条件の特別の形に注目しよう。最初に係数ベクトルの検定について

ANOVA V 帰無仮説 $\mathbf{R\beta}=\mathbf{r}$ の検定

偏差		SS
$\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^*$		$(\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{d})$
$\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q_2	
$\hat{\mathbf{u}}$	Q_1	
$\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q	
$\mathbf{y}-\mathbf{y}^*$		$(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+\mathbf{u}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{d})'\mathbf{X}'\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{u}$

述べる。それで $\mathbf{R}=\mathbf{I}$, $\mathbf{r}=\mathbf{d}$, とおく，ここに $\mathbf{I}$ は $(k+1)\times(k+1)$ の単位行列，$\mathbf{d}$ は $k+1$ 要素ベクトルである。これを用いると

$$\mathbf{H}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}=\mathbf{I}-\mathbf{M}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{H}=k+1 \qquad \text{（すなわち } p=k+1\text{）}$$

となり

$$\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}=\mathbf{u}'\mathbf{u}$$

がえられる。この結果は ANOVA II に述べたものと同じである。

つぎに部分ベクトルの検定について述べる。そのため $\mathbf{R}=[\mathbf{0}\ \mathbf{I}]$, $\mathbf{r}=\mathbf{d}$ とおく。ここに $\mathbf{0}$ は $m\times l$ のゼロ行列，$\mathbf{I}$ は $m\times m$ の単位行列である。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\\
&=[\mathbf{0}\ \mathbf{I}]\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\\ \mathbf{X}_2'\end{bmatrix}\\
&=\mathbf{D}^{-1}[\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'+\mathbf{X}_2']\\
&=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'[\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'+\mathbf{I}]\\
&=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}
\end{aligned}$$

これを用いると $\mathbf{H}$ はつぎのようになる。

$$\mathbf{H}=\mathbf{N}'\mathbf{X}_2\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{N}=\mathbf{W}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{H}=m \qquad \text{（すなわち } p=m\text{）}$$

この結果が ANOVA III に示されているものと同じであることがわかる。

つぎに単1係数の検定に注目する。ここで用いる $\mathbf{R}$ は i 番目の要

	帰無仮設のもとでの SS		DF
$(\mathbf{b}-\tilde{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{b}-\tilde{\boldsymbol{\beta}})$	$\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}$		p
$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$		$\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$	$n-k-1$
$\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u}'\mathbf{H}\mathbf{u}+\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$		$n-k-1+p$

素が 1，他は 0 の $(k+1)\times 1$ のベクトル，$\mathbf{r}$ はスカラー d_i である。

$$\mathbf{R}=[0\cdots 1\cdots 0]$$
$$\mathbf{r}=d_i$$

このときには ANOVA V は ANOVA VI のように書き改められる。それを示すのに推定量 (20) よりはじめる。

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{b}&=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{Rb})\\&=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{b})\\&=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'(\beta_i-b_i)/c^{ii}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\mathbf{b}-\tilde{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{b}-\tilde{\boldsymbol{\beta}})\\&\quad=\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}(\beta_i-b_i)^2/(c^{ii})^2\\&\quad=(\beta_i-b_i)^2/c^{ii}\end{aligned}$$

また，これを $\mathbf{u}$ のタームであらわしたものが $\mathbf{u}'\mathbf{Hu}$ である。

そして，いまの条件のもとでの $\mathbf{H}$ のトレイスは 1 である。

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathbf{H}&=\mathrm{tr}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{R}]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}\\&=\mathrm{tr}\mathbf{I}=1 \qquad\qquad (\text{すなわち } p=1)\end{aligned}$$

この結果を ANOVA VI に示しておいた。単 1 係数の検定についての議論と比較してみよ。

最後に，構造安定性の検定においては $\mathbf{R}=\mathbf{I}$, $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\\mathbf{d}\end{bmatrix}$ とおく。ここに $\mathbf{I}$ は $2(k+1)$ 次の単位行列，$\mathbf{d}$ は $(k+1)\times 1$ のベクトルをあらわす。

このときには (20) より

$$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}\\\mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}}&\\&\mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\mathrm{I}}&\\&\mathbf{X}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\mathrm{I}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{I}}\\\mathbf{b}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

ANOVA VI 帰無仮説 $\beta_i=d_i$ の検定

偏差		SS	帰無仮説のもとでの SS	DF
$\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q_2	$(\beta_i-b_i)^2/C^{ii}$	$\mathbf{u}'\mathbf{Hu}$	1
$\hat{\mathbf{u}}$	Q_1	$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u}'\mathbf{Mu}$	$n-\mathrm{k}-1$
$\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}$	Q	$(\beta_i-b_i)^2/C^{ii}+\mathbf{u}'\mathbf{Mu}$	$\mathbf{u}'\mathbf{Hu}+\mathbf{u}'\mathbf{Mu}$	$n-\mathrm{k}$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\rm I}-\mathbf{d}\\ \mathbf{b}_{\rm II}-\mathbf{d}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\rm I} & \\ & \mathbf{X}_{\rm II}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{\rm I} & \\ & \mathbf{X}_{\rm II}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\rm I}-\mathbf{d}\\ \mathbf{d}_{\rm II}-\mathbf{b}\end{bmatrix}$$

をえる。そして，ここで

$$\mathrm{tr}\mathbf{H}=2(k+1) \qquad (\text{すなわち } p=2(k+1))$$

をもとめることが容易にできる。

1） これの平方根は自由度 $n-k-1$ の t 分布をもっている。

2） 分割された（対称）行列の逆行列はつぎの通りである。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{F}\\ \mathbf{F}' & \mathbf{K}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{F}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{E}) & -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}^{-1}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{E} & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}$$

ここに $\mathbf{D}$ はつぎのものをあらわす。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}&=\mathbf{K}-\mathbf{F}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\\ &=\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\end{aligned}$$

最後の式においては $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ の分割行列の要素を用いた。

3） この関係を用いて ANOVA III における交叉積の 項の消えることを示すことができる。そこでは

$$\check{\mathbf{u}}'\mathbf{X}=\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{X}=\mathbf{O}$$

の性質を使用する。

4）最小2乗権定量はつぎのようにあらわされる

$$\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{\rm I}\\ \mathbf{b}_{\rm II}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\mathbf{X}_{\rm I}'\mathbf{X}_{\rm I})^{-1}\mathbf{X}_{\rm I}' & \\ & (\mathbf{X}_{\rm II}'\mathbf{X}_{\rm II})^{-1}\mathbf{X}_{\rm II}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{\rm I}\\ \mathbf{y}_{\rm II}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{\rm I}\\ \boldsymbol{\beta}_{\rm II}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\mathbf{X}_{\rm I}'\mathbf{X}_{\rm I})^{-1}\mathbf{X}_{\rm I}' & \\ & (\mathbf{X}_{\rm II}'\mathbf{X}_{\rm II})^{-1}\mathbf{X}_{\rm II}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_{\rm I}\\ \mathbf{u}_{\rm II}\end{bmatrix}$$

5） ラクランジュ乗数のベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を導入してつくったラグランジュ関数

$$L=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})-2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{r})$$

を $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda}$ に関して最小化する。

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\beta}}=-\mathbf{X}'\mathbf{y}+\mathbf{X}\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}-\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{r}=0$$

第1の条件よりつぎの関係をえる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}\\ &=\mathbf{b}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{R}\mathbf{b}+\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}$$

ここで第２の条件を用いる。

$$\mathbf{r}=\mathbf{Rb}+\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{Rb})$$

これを用いると推定量として (20) をえる。

文　献

CHIPMAN, J.S. and RAO, M.M. 1964
"The Treatment of Linear Restrictions in Regression Analysis"
Econometrica, 32 No. 1—2 pp. 198—207

GOLDERGER, A. S. 1964
Econometric Theory

GRAIBILL, F. A. 1961
An Introdnction to Linear Statistical Models vol. 1

HUANG, D. S. 1970
Regression and Econometic Methods

KEMPTNE, O. 1952
The Design and Analysis of Experiments

THEIL, H. 1970
Principles of Econometsics