<論説>生産,移出のセルフ：双対クァドラティック・プログラミングモデル

生産，移出のセルフ-双対クァドラティック・プログラミング　モデル

今　川　　正

クァドラティック・プログラミングのウォルフの計算方法
プライマル－双対線型計画モデル
セルフ-双対　クァドラティック・プログラミング　モデル

クァドラティック・プログラミングのウォルフの計算方法

ここでクァドラティック・プログラミングの計算方法，とくにウォルフによって展開された方法について説明しておく．こうして次節以下での展開のための準備をしておこう．なおここでの説明にあたって線型計画，とくにそのシンプレックス法は既知とする．

はじめに，線型計画問題を(a)プライマル問題，(b)双対問題，(c)プライマル-双対問題の順に述べる．そしてそれにもとづいてクァドラティック・プログラミング問題へ入ってゆく．(1)

つぎの簡単な線型計画問題を例として用いる．

制約となる資源が２種類ある．その存在量が10，９であるとする．資源を使用する生産活動が２種類ある．その水準を x_1, x_2 とする．活動１はその１単位あたりについて，これらの資源はそれぞれ１，１単位投入し，活動２は２，１単位を投入する．スラック変数を y_1, y_2 と記す．各活動よりえられる単位あたりの収益はそれぞれ10，25である．全収益を最大化する活動水準の組合せをもとめよう．

この問題は

(1)　ここでは Hutton [7] の方法に即して述べる．

最大化　　$10x_1+25x_2$

条件　　$x_1+2x_2+y_1 \quad =10$

$x_1+\ x_2 \quad +y_2=\ 9$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$

とあらわされる。(2)

この線型計画問題は，シンプレックス表においてはつぎのように述べることができる。

Coeff		Value	10	25	0	0
BV	*BV*	*BV*	x_1	x_2	y_1	y_2
0	y_1	10	1	2	1	0
0	y_2	9	1	1	0	1
		0	−10	−25	0	0

シンプレックス・ルールを適用するとこの表をつぎのように変えることができる。

Coeff		Value	10	25	0	0
BV	*BV*	*BV*	x_1	x_2	y_1	y_2
25	x_2	5	0.5	1	0.5	0
0	y_2	4	0.5	0	−0.5	1
		125	2.5	0	12.5	0

ここに述べたものは線型計画のプライマル定式化といわれている。制約条件のもとで収益を最大化している。この問題はまた双対の形で述べることができる。そこでは資源の帰属価値（費用）を最小化している。いまの例についてはつぎのように述べられる。(3)

（2）　参照の便のためにこれをつぎのようにあらわしておく。

MAX　　$AX+OY$

SUB　　$CX+IY=D$

ここでは行列演算の記法にしたがわないで，コンピューター・アウトプットの形を用いた。

（3）　MIN　　$DU+DV+MZ$

SUB　　$*CU-IV+IZ=A$

Coeff		Value	10	9	0	0	M	M
BV	BV	BV	u_1	u_2	v_1	v_2	z_1	z_2
M	z_1	10	1	1	-1	0	1	0
M	z_2	25	2	1	0	-1	0	1
		$35M$	$3M-10$	$2M-9$	$-M$	$-M$	0	0

v_1, v_2 は双対定式化においてスラック変数の役割りを果している．しかしながら（制約条件の不等号のむきを考慮すると），-1 の係数をもつ変数 v_1, v_2 を基底変数にするときには，その値を負としなければならない．これは非負性制約条件を侵害する．この不都合をさけるために，人為変数 z_1, z_2 を追加して初期基底解をつくる．しかも，これは可能な限り基底解よりはき出しておきたいので，目的関数において z の係数は大きい正の値M（罰金）としておく．(4)

この問題を解くためにはシンプレックス・ルールを少し改めなければならない．すなわち各ステップにおいて最大正値（負値でない）をもつものを基底解へ導入するようにする．そして底の横行要素がすべて非負となるとき最適解に到達することになる．

この不便をさけ，同じルールを用いうるようにするために，双対の述べ方を少し変えておく．すなわち目的関数に -1 を掛けて最大化の問題に変えておく（シンプレックス表の一番上の横行の数値の符号を変えておく）．こうしておけば，普通のシンプレックス・ルールをそのまま適用できる．いうまでもなく，この最適解における目的関数の値は，双対プログラムにおける値（したがってプライマル問題の値）の負値である．というのは，いまの目的関数をつくるにあたって，もとの双対問題の目的関数に -1 を掛けているからである．新しい定式化による双対問題はつぎのようになる．(5)

（4） 問題によっては z_1, z_2 の係数を $M_1, M_2 (M_1 \neq M_2)$ と区別しなければならないことが起るが，ここではこれに立入らず，同じMを用いることにする．

（5） MAX　$-DU-DV-MZ$

SUB　$*CU-IV+IZ=A$

Coeff		Value	-10	-9	0	0	$-M$	$-M$
BV	BV	BV	u_1	u_2	v_1	v_2	z_1	z_2
$-M$	z_1	10	1	1	-1	0	1	0
$-M$	z_2	25	2	1	0	-1	0	1
		$-35M$	$-3M+10$	$-2M+9$	M	M	0	0

この双対定式化とプライマル定式化との対応に注目しておこう．この双対の縦列 Value BV の要素にはプライマルの目的関数の係数（スラックのものを除く）が入っている．双対 u_1, u_2（これは影の価格とよばれているものをあらわす）の縦列の上端の価値ウエイトは資源量に -1 を掛けたものである．双対の横行1の要素はプライマルの縦列1に関連のもの，横行2は縦列2に関連のものである．ここで順序は重要でないが，プライマルの（非スラックの）活動のそれぞれに，双対の1つの制約条件がある．またプライマルの制約条件のそれぞれに双対の1つの活動がある．

ここに定式化した新しい双対問題はつぎのように解くことができる．

Coeff		Value	-10	-9	0	0	$-M$	$-M$
BV	BV	BV	u_1	u_2	v_1	v_2	z_1	z_2
-10	u_1	10	1	1	-1	0	1	0
$-M$	z_2	5	0	-1	2	-1	-2	1
		$-5M-100$	0	$M-1$	$-2M-10$	M	$3M-10$	0
-10	u_1	12.5	1	0.5	0	-0.5	0	0.5
0	v_1	2.5	0	-0.5	1	-0.5	-1	0.5
		-125	0	4	0	5	M	$M-5$

この解とプライマルの解との対応に注目しておこう．全収入はプライマルにおいて125，双対において-125となっている（絶対値が同じで，符号が反対）．双対の v_1 の値2.5は，プライマルにおいては x_1 を追加的に導入するために失なう収入である．v_1 はプライマルの x_1 に関連の双対のスラック変数である．u_1 の水準12.5はプライマルに

おいては資源の価値を反映している．そしてプライマルにおける底の横行の y_1 の要素と同じである．y_1 はプライマルの資源のスラックである．双対における底の横行の v_2 の要素5はプライマルの解の x_2 の値と同じである．

プライマル解と双対解とのあいだのこの対応関係は重要であるので，つぎのようにまとめて述べておこう．

(a)　プライマル解においてある資源がフルに用いられておらなければ（制約条件式がバインディングでなければ），双対において，その資源に対応の活動（影の価格）の水準はゼロである（基底解に入っていない）．例においては，y_2 がプライマルの基底解に入っているが，このとき u_2 か双対の基底解に入っておれば（非ゼロであれば）斉合的でない．

(b)　プライマルにおいて，ある（非スラックの）活動が解に入っていると，双対において，その活動に対応のスラックは解に入らない．例において，x_2 がプライマルの基底解に入っているが，このとき v_2（影の価格で評価した資源投入の価値と資源存在量の価値の差）が双対の基底解に入ることは斉合的でない．

うえではプライマルと双対とを別々に定式化して考えたが，ここでこの両者をプライマル-双対の形に一括して定式化しておこう．こうしてクァドラティック・プログラミングの展開の準備をしておく．

表1

Coeff		Value	0	0	0	0	0	0	0	0
BV	BV	BV	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2
0	y_1	10	1	2	1					
0	y_2	9	1	1		1				
$-M$	z_1	10					1	1	-1	
$-M$	z_2	25					2	1		-1
		$-35M$					$-3M$	$-2M$	M	M

プライマル-双対の制約条件は単にプライマルと双対の制約条件を

いっしょにしたものである．いまの例のものをうえに述べておいた．スペースの都合で人為プロセス z_1, z_2 は書いてないが，最初の基底解としては，それと y_1, y_2 とを用いる（これもうえと同じである）．目的関数の係数は z_1, z_2 のものが $-M$，その他のものがゼロである．(6)

うえに述べたことからわかるように，このモデルにおいて決められる目的関数の値はゼロである．プライマルの収入が双対の費用をちょうど埋める．

プライマル-双対の形で定式化されている問題についてもシンプレックス法を適用できる．そのうえに，上記のルール (a), (b) にもしたがわねばならない．ここで，このルールを一般化して述べておこう．そのために，プライマルの活動水準と双対のスラック変数（z は除く）とは対応物 counterpart である，プライマルのスラック変数と双対の資源評価（影の価格）の変数もそうである，とよぶことにする．いまの例においては，x_1 と v_1, x_2 と v_2 とは対応物である．また y_1 と u_1, y_2 と u_2 もそうである．これを用いると，このルールをつぎのように一般的に述べることができる．プライマル-双対の解においては，ある変数とその対応物とが同時にゼロとなることはない．これはまえにプライマルと双対とを対比して述べた条件 (a), (b) がプライマル-双対においても成立していると述べているだけである．

これを処理するためにはつぎのようにする．すなわち，表の底の横行要素のうち最大負値をもつ変数を選んで，それを基底変数に導入するにあたって，つぎの点を追加的に吟味する．その対応物が基底解に入っていない．あるいは入っていても，新変数を基底へ導入するとき，その対応物が基底解より出てゆく．これを確認してはじめて基底解へ導入する．

われわれの例においては表1，2においてこれが起っている．表1

(6)

$$\begin{array}{lll} \text{MAX} & OX+OY-OU-OV-MZ & \\ \text{SUB} & CX+IY & =D \\ & \qquad\qquad *CU-IV+IZ & =A \end{array}$$

表2

Coeff		Value			(−M)					
BV	BV	BV	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2
$-M$	y_1	10	1	2	1					
	y_2	9	1	1		1				
$-M$	z_1	10					1	1	−1	
$-M$	z_2	25					2	1		−1
		$-45M$	$-M$	$-2M$	0	0	$-3M$	$-2M$	M	M

表3

					(−M)	(−M)				
$-M$	y_1	10	1	2	1					
$-M$	y_2	9	1	1		1				
$-M$	z_1	10					1	1	−1	
$-M$	z_2	25					2	1		−1
		$-54M$	$-2M$	$-3M$	0	0	$-3M$	$-2M$	M	M

表4

	x_2	5	0.5	1	0.5					
	y_2	4	0.5		−0.5	1				
$-M$	z_1	10					1	1	−1	
$-M$	z_2	25					2	1		−1
		$-35M$	0	0	0	0	$-3M$	$-2M$	M	M

表5

	x_2	5	0.5	1	0.5					
	y_2	4	0.5		−0.5	1				
	u_1	10					1	1	−1	
$-M$	z_2	5						−1	2	−1
		$-5M$	0	0	0	0	0	M	$-2M$	M

表6

	x_2	5	0.5	1	0.5					
	y_2	4	0.5		−0.5	1				
	u_1	12.5					1	0.5		−0.5
	v_1	2.5						−0.5	1	0.5
		0	0	0	0	0	0	0	0	0

において，u_1 が最大負値をもっている．しかしそれの対応物 y_1 が基底解に入っている．このため y_1 の目的関数の係数の値を一時的にMとおき，表をつくりなおす．

つぎの表2においては u_1 以外のところで最大負値をもとめる．(同じ値のものがあるときには，ここではあとのものをとることにしておく)．u_2がそれであるが，対応物 y_2が基底解に入っている．表1についてと同じ手続きをくりかえす．

表3においては，u_1, u_2 以外のものについて最大負値をもとめる．それで x_2 を基底解へ入れる(一時的に目的関数の係数をMと変えていた y_1, y_2 の欄の値を0にもどす)．

表4においては u_1 を入れる．

表5においては v_1 を入れる．

表6において最適解に到達している．

$$x_1=0,\quad x_2=5,\quad y_1=0,\quad y_2=4,$$
$$v_1=2.5,\quad v_2=0,\quad u_1=12.5,\quad u_2=0.$$

クァドラティック・プログラミングもうえのプライマル-双対とまったく同じ方法で解く．スタートの表の準備にあたって1つの点に注意しておけばよい．すなわち，最大化すべきクァドラティック目的関数を行列を用いて $a'x-\frac{1}{2}x'Bx$ とあらわしたときの，係数行列Bを，シンプレックス表の左下部へ含めておく．この点について少し説明を加えておこう．

つぎの例を用いる[7]（いままではこの問題の目的関数において2次の項の係数がゼロの場合について考えた)．

最大化　$10x_1+25x_2-10x_1^2-x_2^2-4x_1x_2$

条　件　$x_1+2x_2+y_1=10$

$x_1+x_2+y_2=9$

$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0$

$y_1\geq 0,\quad y_2\geq 0$

(7)　ここで数値例として [8] pp. 128–130 を利用する．

ラグランジュ関数をつくり，キューン・タッカーの条件をもとめる．そしてウォルフにしたがって，人為変数 z_1, z_2 を導入し，つぎの線型計画問題をつくる．

最大化　$-z_1-z_2$

条件

$$x_1+2x_2+y_1=10$$
$$x_1+x_2+y_2=9$$
$$20x_1+4x_2+u_1+u_2-v_1+z_1=10$$
$$4x_1+2x_2+2u_1+u_2-v_2+z_2=25$$
$$v_1x_1=0,\quad v_2x_2=0$$
$$y_1u_1=0,\quad y_2u_2=0$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, u_1, u_2, z_1, z_2\geq 0$$

これを行列を用いてあらわすと，つぎのようになる．(8)

最大化　$-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$

条件

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}20&4\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\25\end{bmatrix}$$

表1に問題の数値をシンプレックス表の様式で記入する．以下プライマル-双対についてと同じように進む．x_1 を基底解へ入れる．

表2において u_1 を入れることはできない．対応物が基底解に入っているからである．x_2を基底解へ入れる（y_1の目的関数の係数を$-M$と改めて表をつくりなおすのであるが，このステップは省略する）．

表3において u_1 を入れることはできない．v_1 を基底解へ入れる．（同じ値のものは後よりとることにする）．

---

(8)　MAX　$-MZ$

SUB　$CX+IY=D$

$BX+{}^*CU-V+IZ=A$

これと線型計画のプライマル 双対定式化と比較すれば，制約条件に BX が新しく追加されている点のみが異なっていることがみられる．

表1

Coeff		Value								
BV	BV	BV	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v_1	v_2
	y_1	10	1	2	1					
	y_2	9	1	1		1				
$-M$	z_1	10	20	4			1	1	-1	
$-M$	z_2	25	4	2			2	1		-1
		$-35M$	$-24M$	$-6M$	0	0	$-3M$	$-2M$	M	M

表2

	y_1	9.5		1.8	1		-0.05	-0.05	0.05	
	y_2	8.5		0.8		1	-0.05	-0.05	0.05	
	x_1	0.5	1	0.2			0.05	0.05	-0.05	
$-M$	z_2	23		1.2			1.8	0.8	0.2	-1
		$-23M$	0	$-1.2M$	0	0	$-1.8M$	$-0.8M$	$-0.2M$	M

表3

	y_1	5	-9		1		-0.5	0.5	0.5	
	y_2	6.5	-4			1	-0.25	-0.25	0.25	
	x_1	2.5	5	1			0.25	0.25	-0.25	
$-M$	z_2	20	-6				1.5	0.5	0.5	-1
		$-20M$	6	0	0	0	$-1.5M$	$-0.5M$	$-0.5M$	M

表4

	v_1	10	-18		2		-1	-1	1	
	y_2	4	0.5		-0.5	1				
	x_2	5	0.5	1	0.5					
$-M$	z_2	15	3		-1		2	1		-1
		$-15M$	$-3M$	0	M	0	$-2M$	$-M$		M

表5

	v_1	17.5	-16.5		2			-0.5	1	-0.5
	y_2	4	0.5		-0.5	1				
	x_2	5	0.5	1	0.5					
	u_1	7.5	1.5		-0.5		1	0.5		-0.5
		0	0	0	0	0	0	0	0	0

表4において x_1 を入れることはできない．v_1 が入っているからである．u_1 を基底解へ入れる．

表5において，つぎの最適解に到達した．

$$x_1=0,\ x_2=5,\ y_1=0,\ y_2=4,$$
$$v_1=17.5,\ v_2=0,\ u_1=7.5,\ u_2=0.$$

目的関数の値は100である．

プライマル-双対線型計画モデル

ここではじめに簡単な線型生産関数をとりあげて，プライマル-双対モデルを定式化しておく．つぎの形の周知の生産計画の問題が与えられているとする．(9)

プライマル

最大化　$-c'x$

条件　$-Ax \geq -b$

$x \geq d$

ここに記号はつぎのものをあらわす．(10)

x　産出量　n-要素ベクトル

c　単位あたり費用　n-要素ベクトル

b　資源の利用可能の限度　m-要素ベクトル

d　需要数量　n-要素ベクトル（正値）

A　技術係数　$m \times n$ の行列

この双対問題はつぎのように定式化される．

双対

最大化　$-b'u+d'u$

条件　$A'u-v \geq -c$

$u, v \geq 0$

(9)　ここで明示的にとりあげていない「経済のその他のところ」で生産される投入物は既知の固定的価格でいくらでも入手可能であるとする．

(10)　前節と記号法は変っている．

ここに記号はつぎのものをあらわしている.

u　資源の影の価格　　m-要素ベクトル

v　生産物の影の価格　　n-要素ベクトル

いま，うえの2つの問題，プライマルおよび双対の問題にもとづいて，つぎのプライマル-双対問題を定式化する.

プライマル-双対

最大化　$-c'x-b'u+d'v$

条件

$$\begin{aligned} A'u-v &\geq -c \\ -Ax \qquad &\geq -b \\ x \qquad &\geq d \\ x, u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

ここに述べたことは，行列を用いるとつぎのように表現できる.

プライマル

最大化　$-c'x$

条件

$$\begin{bmatrix} -A \\ I \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} -b \\ d \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

双対

最大化　$\begin{bmatrix} -b \\ d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

条件

$$[A' \ \ -I] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq -c$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

プライマル-双対

最大化　$\begin{bmatrix} -c \\ -b \\ d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & A' & -I \\ -A & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -c \\ -b \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これよりプライマル-双対モデルがつぎの特徴をもっていることがわかる．制約条件はプライマルと双対のものとをあわせたものである．これはうえのように，歪対称形 skews-ymmetric のものに配列することができる．また，この目的関数は2つの目的関数の差である．このために，この目的関数の値は非正であり，その最適値はゼロである．

つぎに周知の輸送問題についてプライマル-双対問題を定式化しておこう．はじめに輸送量 s^{ij}，需要量 d^j，供給量 k^i をつぎの表に述べておく．

	輸送量				供給量
	s^{11}	s^{12}	$\cdots$	s^{1H}	k^1
	s^{21}	s^{22}		s^{2H}	k^2
	$\cdots$			$\cdots$	$\cdots$
	s^{J1}	s^{K2}	$\cdots$	s^{KH}	k^K
需要量	d^1	d^2	$\cdots$	d^H	

そして，輸送量のベクトル s，それに対応する輸送費用のベクトル t をつぎのように定義しておく．

$$s=(s^{11},\cdots,s^{1H},s^{2}{}_{1},\cdots,s^{2H},\cdots,s^{K1},\cdots,s^{KH})=(s^1,\cdots,s^K)$$

$$t=(t^{11},\cdots,t^{1H},\ t^{21},\cdots,t^{2H},\ \cdots,t^{K1},\cdots,t^{KH})=(t^1,\cdots,t^K)$$

また I で $H\times H$ のオーダーの単位行列，$E(j)$ で j 番目の縦列に1，他のところに0をもつ $H\times K$ のオーダーの矩形の行列をあらわす．そして両者を配列して行列 TR をつくる．

$$E(j)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\cdots1\cdots0\\0\cdots1\cdots0\\\cdots\cdots\cdots\\0\cdots1\cdots0\end{bmatrix}\\1\cdots j\cdots K\end{array}\quad(H\times K)$$

$$TR=\begin{bmatrix}I & I & \cdots & I\\-E(1)' & -E(2)' & \cdots & -E(K)'\end{bmatrix}$$

九八

これを用いると，輸送問題のプライマル，双対，プライマル—双対定式化はつぎのようにあらわされる．

プライマル

最大化　$-t's$

条件　$TR\cdot s \geq \begin{bmatrix} -r \\ -k \end{bmatrix}$

$s \geq 0$

双対

最大化　$\begin{bmatrix} -r \\ -k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

条件　$TR'\cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \leq t$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

プライマル-双対

最大化　$\begin{bmatrix} -t \\ -r \\ -k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} s \\ u \\ v \end{bmatrix}$

条件　$\begin{bmatrix} 0 & -TR' \\ TR & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -t \\ -r \\ -k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} s \\ u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

うえで1地域の生産活動について考え，つづいてK地域間の輸送活動について考察した．ここで生産活動の行なわれているのがK個の地域のそれぞれにおいてであるとし，そのすべての地域が輸送活動によって結びつけられているものとする．

K個の地域における所与の需要 $d^j(j=1, \cdots, K)$ の充足を，それぞれの地域での生産のみでなく（どの地域においても同種の投入物，産出物をもっており，どの地域においても前者はm種，後者はn種あるとする），移出入によってなす．そしてシステム全体としての生産，輸送の費用合計が最小であるパターンでそれが行なわれる．この問題はつぎのように定式化できる．

最大化　$-\sum_{k}(c^k)'x^k-\sum_{j}\sum_{k}(t^{jk})'(s^{jk})$ $(j\neq k)$

条件　$A^kx^k \leq b^k$

$$x^k+\sum_{j}(s^{jk}-s^{kj})\geq d^k \quad (j\neq k)$$

$$x^k,\ s^{jk}\geq 0$$

$$k=1,\cdots,K$$

ここに記号はつぎのものをあらわす.

x^k　生産水準　n-要素ベクトル

b^k　生産要因の利用可能限度　m-要素ベクトル

d^k　需要数量　n-要素ベクトル

c^k　単位あたりの生産費用　n-要素ベクトル

s^{jk}　地域 j より k への移出　n-要素ベクトル

$s^k=\{s^{jk}\}$

t^{jk}　単位あたりの輸送費用　n-要素ベクトル

$t^k=\{t^{jk}\}$

A^k　技術行列　$n\times n$ 行列

これは周知のタイプの線型計画の問題である. この定式化は多数地域間均衡においてしばしば用いられている. これについて立入って説明する必要はない. ここで $x^k=0$ とおくと周知の輸送問題をえ $s^{jk}=0$ $(k=1)$ とおくと生産問題をえることができる.

これについてのプライマル-双対問題をつくるための便宜上, はじめにこの問題を行列を用いて述べておこう.

最大化

$$-\left[\begin{bmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^K \end{bmatrix}\right]'\left[\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^K \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^K \end{bmatrix}\right]$$

条件
$$\begin{bmatrix} A^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A^K & \\ -I & & & (-I+E(1))' \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & -I & & & (-I+E(K))' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^K \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^K \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -d^1 \\ \vdots \\ -d^K \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^K \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

あるいは，簡単にはつぎのように述べられる．

プライマル

最大化
$$-\begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & -TR' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ -d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

双対

最大化
$$\begin{bmatrix} b \\ -d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

条件
$$\begin{bmatrix} -A' & I \\ 0 & TR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

プライマル-双対

最大化
$$-\begin{bmatrix} c \\ b \\ -d \\ t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ s \end{bmatrix}$$

条件
$$\begin{bmatrix} & -A' & I & \\ A & & & -TR' \\ -I & & & \\ & & TR & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c \\ b \\ -d \\ t \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ s \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

セルフ-双対 クァドラティック・プログラミング モデル

うえではK個の地域のそれぞれにおいて生産活動が行なわれており，各地域のあいだにおいては輸送活動が行なわれている経済について考えた．けれどもそこではなお，需要数量は固定された数量として取扱われている．ここでは，この需要数量が価格の問題としてあらわされているものについて考える．すなわち前節で作ったプライマル-双対問題の形に定式化された1地域生産モデルにおいて，所与の数量と考えられた需要数量dが価格に関する需要関数として

$$d=e+Dp$$

とあらわされるものについて考える．ここに

e　定数の n-要素ベクトル

p　生産物価格の n-要素ベクトル

D　負値半定符号の $n\times n$ 行列

をあらわす．これを用いて，つぎのクァドラティック・プログラミングを定式化する．当然ここでは価格は内生変数である．ただしここではこの種のもっとも簡単なタイプのクァドラティック・プログラミング，すなわち目的関数がクァドラティック・フォーム（2次形式），制約条件式がリニア・フォーム（1次形式）のものについて考える．しかもうえのセルフ双対性の特性の保存されたものについて考える．

プライマル

最小化　$c'x+b'y-e'p-p'Dp$

$$\begin{aligned} A'y-p &\geq -c \\ -Ax &\geq -b \\ x \qquad -Dp &\geq 0 \\ x,\ y,\ p &\geq 0 \end{aligned}$$

ここにyは生産要素の価格 m-要素ベクトルをあらわす．

この問題に対して解が存在するための必要かつ十分な条件は，こ

れの双対問題に対して解が存在することであるが，ここではこの双対問題自身が，もとのプライマル問題と等価のものである．

ここでこのクァド・ラティック・プログラミング問題について，その双対問題をもとめ，それがセルフ-双対のものであることをみる．そのための準備としてはじめにクァドラティック・プログラミング問題について成立する双対性定理を述べておこう．ここではつぎのタイプのプログラミングを用いる（[2]にもとづく）．

最小化　$f(x)=x'Cx+p'x$

条件　$Ax\geq b$

$x\geq 0$

ここにCは正値半定符号の $n\times n$ の行列である，p, b, x, A は $m\times 1$, $m\times 1$, $n\times 1$, $m\times n$ の行列である．これを問題Ｉとよぶ．Cが正値半定符号であるという条件は $f(x)$ がコンベックスであること，小局的最小点が全域的最小点であることを保証する．

ここで証明にあたって用いるつぎの補助定理を述べておこう．

補助定理

Cが正値半定符号の行列であると，任意のベクトルxについて，つぎの関係が成立する．

$$y'Cy-x'C'x\geq x'(C+C')(y-x)$$

証明

Cが正値半定符号のものであるから，任意のx, yについてつぎの関係が成立する．

$$\begin{aligned}0&\leq(y-x)'C(y-x)\\&=y'Cy-x'(C+C')y+x'Cx\\&=(y'Cy-x'C'x)-x'(C+C')(y-x)\end{aligned}$$

まえの項より差引いた $x'C'x$ をあとの項に加えておいた．

さて，われわれはここで問題Ｉの双対問題に注目するが，それはつぎのようにあらわされる．

最大化　$g(u,v)=-u'Cu+b'v$　　(1)

条件　$A'v-(C+C')u\leq p$　(2)

$v\geq 0$　(3)

ここに u, v は $n\times 1$, $m\times 1$ の行列である．これを問題IIとよぶ．

われわれがここでもとめているものはつぎのように述べられる．

双対性定理[11]

$x=x_0$ が問題Iの最小化の解であるとする．そのときには問題IIについて1つの解 $(u, v)=(x_0, v_0)$ が存在する．

証明

はじめに，$x=x_0$ が問題Iの最小化の解であると仮定する．そしてつぎの線型計画問題について考える．

最小化　$F(x)=-x_0Cx_0+x_0'(C+C')x+p'x$　(4)

条件　$Ax\geq b$　(5)

$x\geq 0$　(6)

ここでは制約条件としては，うえの問題Iと同じものを用いている．これを問題I′とよぶ．

ここで，この制約条件を満足し，かつ

$$F(x^*)<F(x_0) \qquad (7)$$

であるようなものが存在すると仮定すると矛盾におちいることを示しておこう．すなわち

$$(x_0'C+x_0'C'+p')(x^*-x_0)<0$$

とすると矛盾におちいることを示す．このところでは

$$x_1=x_0+k(x^*-x_0),\ 0<k<1$$

も制約条件を満足している（これは容易に示すことができる）．これを用いると，

$$f(x_1)-f(x_0)$$
$$=k[(x_0'C+x_0'C'+p')(x^*-x_0)+k(x^*-x_0)'C(x^*-x_0)]$$

(11)　この定理については，まえに述べたことがあるが，仮定が若干改められたため，および，この論文でこの定理の果す重要性を考慮して，重復する点があるが，ここに述べておく．

となる．ここで，この k の値を（分母が非ゼロとして）

$$k<-\frac{(x_0'C+x_0'C'+p')(x^*-x_0)}{(x^*-x_0)'C(x^*-x_0)}$$

と定めておけば，上式，角カッコ内を負とすることができ，

$$f(x_1)>f(x_0)$$

となる．しかし，x_0 は問題Ｉの最小化の解であるから，$f(x_0)\leq f(x)$ とならねばならない．それで不等式(7)はいかなる x についても成立しえない．すなわち，すべての x について

$$F(x)\geq F(x_0)$$

である．このように，x_0 は $F(x)$ を最小にする，それでそれが問題Ｉ′の最適解である．

線型計画の問題Ｉ′の双対問題はつぎの通りである．

最大化　$G(v)=-x_0'Cx_0+b'v$

条件　$A'v\leq(C+C')x_0+p$

$v\geq 0$

これを問題IIとよぶ．線型計画の双対性定理より

最大 $G(v)=$最小 $F(x)=F(x_0)$

である．もし $v=v_0$ が問題IIの最大化の解であるとすると，この最後の式は(第１項$=-x_0'Cx_0+b'v_0$, 第３項$=-x_0'Cx_0+x_0'(C+C')x_0+p'x_0$ であるから)

$$b'v_0=x_0'(C+C')x_0+p'x_0 \qquad (8)$$

となる．

ここで問題IIの許容可能解 (u, v) について考えよう．とくに (x_0, v_0) は許容可能のものである．(x_0 は問題Ｉの解，v_0 は問題IIの解をあらわしている)．

九一

$$\begin{aligned}
&g(x_0, v_0)-g(u, v)\\
&=-x_0Cx_0+b'v_0+u'Cu-b'v && \text{(1)による}\\
&\geq x_0'(C+C')(u-x_0)+b'v_0-b'v && \text{補助定理による}\\
&\geq x_0'(C+C')u+p'x_0-b'v && \text{(8)による}
\end{aligned}$$

ここで(2), (6)よりの

$$x_0'(C+C')u \geq x_0'(A'v-p)$$

(3), (5)よりの

$$-b'v \geq -x_0'A'v$$

を用いると

$$g(x_0, v_0)-g(u, v) \geq x_0'A'v-x_0'p+p'x_0-x_0'Av=0$$

をえる．このように，(x_0, v_0) が問題Ⅱの最大化の点であることがわかる．(12)

うえの結果を用いて，この節のはじめに述べたクァドラティック・プログラミング問題がセルフ-双対のものであることをみよう．そのため，うえの問題を行列を用いてつぎのようにあらわしておこう．

プライマル

最小化

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ -e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix}$$

条件

$$\begin{bmatrix} 0 & A' & -I \\ -A & 0 & 0 \\ I & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ b \\ -e \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

あるいはもっと簡単につぎのように述べられる．

プライマル

最小化

$$k'w+w'\Pi w \tag{9}$$

$$(\Sigma+\Pi)w+k \geq 0 \tag{10}$$

$$w \geq 0 \tag{11}$$

使用している行列の定義は明白であろう．Σ は制約条件の係数表より要素 D を取り除いたものであり，歪対称のものである．

これは特別の形のものであるというのは，目的関数と制約条件式と

(12)　ここでは[1]にしたがって必要条件のみについて述べておいた．十分条件の成立することも容易に示すことができる．

のあいだに，いわば前者が後者の積に等しい，という関係，すなわち $w'\Pi w+k''w=w'(\Sigma w+\Pi w+k)$ の関係の成立しているからである．ここでは Σ が歪対称 skew-symmetric 行列であるために $w'\Sigma w=0$ という性質を用いている．

また行列 Π は正値定符号のものであるとする．それで，

$$w'\Pi w\geq 0$$

がすべての w_i について成立する．そして等号は $w=0$ のとき，そしてそのときにのみ成立する．しかし Π は必ずしも対称的ではないとする．(13)

ここに述べた問題が有限の解をもつこと，そしてそれがセルフ-双対であることをつぎの定理において示す．そのうえに $F(\ )$ の最小値はゼロである．

定理　最小化問題(9)，(10)，(11)は有限の解をもつ．

証明

ノイマン・モルゲンシュテルンは，Π についてつぎの3つのケースのうちいずれか1つが成立すること，そしてこの3つの場合ですべてが尽されることを示した．([10], p. 142. 定理 E)

(i)　つぎの条件をみたす z, s が存在する．

$$\Pi z\leq 0,\ \ z\geq 0,\ \ i'z=1;\ \Pi s\geq 0,\ \ s\geq 0,\ \ i's=1$$

(ii)　つぎの条件をみたす z が存在する．

$$\Pi z<0,\ \ z\geq 0,\ \ i'z=1$$

(iii)　つぎの条件をみたす z が存在する．

$$\Pi z>0,\ \ z\geq 0,\ \ i'z=1$$

いま (i) が成立していると仮定する．そのときには第1の不等式の左より，第2の不等式式を満たす z を掛けると

八九　$$z'\Pi z\leq 0$$

(13)　双対性定理のところで用いた記号 A, p, x がここでは Π, k, w と変えられている，これは議論の内容にかかわりがない．

をえる．Πに関する仮定（正値定符号のもの）によると，これは $z\equiv 0$ を含意している．しかしながら

$$i'z=1$$

でなければならない．それで (i) を満足する z は存在しない．同じようにして (ii) を満足する z は存在しない．

それで，(iii) よりつぎの性質を満足する z が存在することになる．

$$\Pi z=Q>0$$

$$z\geq 0$$

いま　$w=\lambda z$

とおく．ここに λ を

$$\lambda=\max_{k_i<0}\left\{-\frac{k_i}{q_i},1\right\}$$

と定めておく．このときには

$$w\geq 0$$

$$\Pi w=\lambda\Pi z=\lambda Q\geq -k$$

となる．このように，制約条件(10)，(11)を満足する w を少なくとも1つ見出すことが可能である．

いま(10)，(11)を満足しているすべての w について考えよう．(10)に(11)よりの w をまえより掛けると(9)をえる，すなわち

$$F(\ \ )=w'\Pi w+w'\Pi w+k'w=w'\Pi w+k'w\geq 0 \qquad (13)$$

をえる．このように，$F(\ \ )$ は下から有界であり，制約条件が少なくとも1つの解をもっているから，この最小化問題は有限の解をもっている．

定理　最小化問題(10)，(11)，(12)はセルフ-双対である．

証明

まえに述べた双対性定理を用いて，最小化問題(9)，(10)，(11)の双対問題をつくる．これはつぎのようにあらわされる．

最大化　$G(\ \ )=-u'\Pi u-k'v$　(14)

条件　$-(\Pi+\Pi')u+(\Sigma+\Pi)'v-k\leq 0$　(15)

$$v \geq 0 \qquad (16)$$

また，つぎの関係が成立する．

$$\text{最小 } F(\ \ ) = \text{最大 } G(\ \ ) \qquad (16)$$

(15)に(16)の v をまえより掛けて整理すると，$v'\Sigma v=0$ であるから，

$$-v'k \leq v'(\Pi+\Pi')u - v'\Pi' v$$

をえる．$k'v=v'k$ であるから，これを(14)へ代入すると，

$$G(\ \ ) = \leq -(u-v)'\Pi(u-v) \leq 0 \qquad (17)$$

をえる．ここに最後の不等式はΠが正値定符号のものであることにもとづいている，また(13)より

$$\text{最小 } F(\ \ ) \geq 0$$

をえる．これを(16)と結合すると

$$\text{最大 } G(\ \ ) = \text{最小 } F(\ \ ) = 0 \qquad (18)$$

となる．しかしながら，(17)および Π に関する仮定により，$u \equiv v$ のとき，そしてそのときに限り $G(\ \ )=0$ である．したがって，制約条件

$$u \equiv v \qquad (18)$$

を(14)，(15)へ付加することができる．これを用いてを消去し，まとめると，問題(14)，(15)，(16)，(18)は

$$\text{最大化} \quad G(\ \ ) = -v'\Pi v - k'v = -F(\ \ )$$
$$\Sigma' v - \Pi v - k \leq 0$$
$$v \geq 0$$

とあらわされる．これは $-\Sigma=\Sigma'$ が成立しているので，問題(9)，(10)，(11)そのものである．

なお，目的関数(9)が制約条件(10)に，(11)よりの w を掛けた形になっていることを考慮しておくときには，(18)がそのベクトルのそれぞれの要素について，(10)あるいは(11)が等号で成立していることを含意している．このように，目的関数は(10)，(11)によって定義されているコンベックス集合（許容可能領域）の端点において，その最小値をとる．これは一般のクァドラティック・プログラミングにはみられない特徴である．

うえでは1地域・生産モデルがセルフ-双対のものであることをみ

た．つぎにこれが k 個の地域のそれぞれについて行なわれ，各地域が移出入によって結ばれている場合について考え，つぎのものを決定する．k 地域の生産・移出のプログラミング・モデルを定式化しよう．(a)生産物価格の均衡水準　(b)生産要因価格の均衡水準　(c)各地域の生産水準　(d)生産物の需要数量　(e)使用しない生産要因の所属地域とその数量

これは前節で述べた k 地域モデルにおいて需要数量 d^k がつぎの需要関数とおきかえられているとみることができる．

$e^k+D^kp^k$

e^k　需要関数の定数　n-要素ベクトル

D^k　$n\times n$ 行列．これは定数よりなる負値半定符号のものとする（このため，ここで取扱う目的関数はコンケイブのものである）

p^k　生産物の価格　n-要素ベクトル

u^k　生産要因の価格

これを用いて，つぎのモデルを定式化する．

プライマル

最大化　$-\sum_k(c^k)'x^k+(b^k)'u^k-(e^k+D^kp^k)-\sum_j\sum_{\substack{k\\ j\neq k}}t^{jk}s^{jk}$

条件

$$
\begin{array}{llllll}
 & -(A^k)u^k & & +p^k & & \leq c^k \\
(A^k)x^k & & & & & \leq b^k \\
-x^k & & +D^kp^k & & -(TR^k)'s^k & \leq -e^k \\
 & & (TR^k)p^k & & & \leq t^k \\
 & & & & x^k,\ u^k,\ p^k,\ s^k & \geq 0 \\
 & & & & k=1,\cdots,K &
\end{array}
$$

この問題は行列を用いるとつぎのようにあらわされる．（空欄はゼロ）

プライマル

最大化

$$-\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}c^1\\ \vdots\\ c^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-e^1\\ \vdots\\ -e^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}t^1\\ \vdots\\ t^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}s^1\\ \vdots\\ s^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}s^1\\ \vdots\\ s^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}D^1 & & \\ & \ddots & \\ & & D^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}s^1\\ \vdots\\ s^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

条件

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-(A')' & & \\ & \ddots & \\ & & -(A^K)'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & & \\ & \ddots & \\ & & I\end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix}A^1 & & \\ & \ddots & \\ & & A^K\end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix}-I & & \\ & \ddots & \\ & & -I\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}D^1 & & \\ & \ddots & \\ & & D^K\end{bmatrix} & -TR' \\ & TR & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}s^1\\ \vdots\\ s^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}c^1\\ \vdots\\ c^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-e^1\\ \vdots\\ -e^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}t^1\\ \vdots\\ t^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}p^1\\ \vdots\\ p^K\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}s^1\\ \vdots\\ s^K\end{bmatrix}\end{bmatrix}\geq 0$$

要約して記すとつぎのように示される．

プライマル

八五

$$\text{最大化}\quad -\begin{bmatrix}c\\ b\\ -e\\ t\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}x\\ u\\ p\\ s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ u\\ p\\ s\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\ \ \\ D\\ \ \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\\ p\\ s\end{bmatrix}$$

条件
$$\begin{bmatrix} & -A' & I & \\ A & & & \\ -I & & D & -TR' \\ & & TR & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \\ p \\ s \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c \\ b \\ -e \\ t \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ p \\ s \end{bmatrix} \geq 0$$

ここでの目的関数はクァドラティック・フォームのものであり，全収入より生産費用，輸送費用を差引いた純利潤をあらわしている．この目的関数は，Dが負値半定符号のものであるから，コンケイブである．

制約条件式の第1のものは限界（平均）収益が限界（平均）費用を越えてはならないことをもとめている．第2は生産要因の利用がそ，の利用可能の限度を越えてはならないことをもとめている．そのつぎの制約条件は生産に純移入を加えたものが，需要をみたすのに十分なだけなければならないことをもとめている．これは

$$e^k + D^k p^k \leqq x^k + \sum_{j \neq k}{}_j (s^{ik} - s^{kj})$$

と書き改めれば意味は明白となる．最後の条件は前節でもとめた移出のための条件である．

この問題の制約条件の集合は半空間の共通部分よりなる．したがってコンベックスである．この集合が空でないとする．目的関数がコンケイブであるので，その最適解において，それは大局的に最適である．

このモデルは明らかにセルフ-双対のものであり，したがって，その最適解はつぎの性質をもっている．

(a)　目的関数の値はゼロである．

(b)　生産高が（狭義）正値のあらゆる生産物について，限界費用は価格に等しい．

(c)　価格が（狭義）正値のあらゆる生産物について，供給は需要に等しい．

(d)　移出が（狭義）正値であるところで（現実に移出が行なわれて

いるところにおいて）その対の地域のあいだの価格格差の均衡条件は（狭義）等号で成立する．

参 考 文 献

〔1〕 W. S. Dorn, "Self-Dual Quadratic Programming". *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 9. No. 9, March 1961.

〔2〕 M. A. Hanson, "Duality and Self-Duality in Mathematical Programming". *Journal of the Society for Industrial and Appried Mathematics*, Vol. 12. No. 2, June 1964.

〔3〕 Earl O. Heady, Harry H. Hall, "Linear and Nonlinear Spatial Models in Agricultural Competition, Land Use, and Production Potential". *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 50. No. 5. 1968.

〔4〕 Earl O. Heady, Harry H. Hall, "Application of Linear and Nonlinear Programming Models In Specific Land Use, Spatial Equilibrium and Price for Agriculture". K. A. Fox *etal* ed. *Economic Models, Estimation and Risk Programming. Essays in Honor of Gerhard Tintner*, 1969.

〔5〕 Earl O. Heady, Harry H. Hall, Yakir Plessner, "Quadratic Programming Sotution of Competitive Equilibrium for U. S. Agriculture". *American Journal of Agricultural Economics.* Vol. 50 Aug. 1968. pp. 536–555.

〔6〕 Earl O. Heady, Yakir Plessner, "Competitive Equilibrium Solution with Quadratic Programming" *Metroeconometrica* Vol. XVII, Fasc. 111. Septtembre-Dicembre 1965, pp. 117–130.

〔7〕 Robert F. Hutton, *An Introduction to Quadratic Programming* June 1963. Agricultural Experiment Station. The Pennsylvania State University.

〔8〕 Ronald L. Gue, Michael E. Thomas, *Mathematical Methods in Operations Research*, 1968.

〔9〕 Yakir Plessner, "Activity Analysis, Quadratic Programming. and General Equilibrium". *International Economic Review.* Vol. 8, No. 2. June, 1967. pp. 168–179.

〔10〕 J. Von Neuman, Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1947.