# <論説>企業の最適投資政策：その存在と最適条件

# 企業の最適投資政策：その存在と最適条件

前田英昭

この小論は，企業の最適投資政策をいわゆる optimal control theory を用いて検討しようとするものである。許された紙数の制限により，議論の力点は，最適投資政策の存在を証明し，ある投資政策が最適であるための条件を導出することにおかれている。最適径路のシンセシスの問題，最適径路の可能な種々のパターン等についてはあまり多くの議論はなされていない。これらについては別の機会にゆずりたいと思う。尚，optimal control theory について参照した文献は最後にかかげられている（文献〔2〕—〔6〕）。

## 1. モデルの構成

企業は各時点において $n$ 種類の資本ストック $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ を用いて生産を行なっているものと仮定する。そして，これらの資本ストックと可変的生産要素との結合は，常に，各時点における可変的生産要素価格と生産技術に対して最適になるように行なわれ，その上で，生産量は，その時点における生産物価格に対して生産物の販売による収入と生産費用の差（operating profit と呼ぶ）が最大になるように決定されるものと想定する。[(1)] このような意味での operating profit を $\pi$ で表わす。このとき $\pi$ は資本ストック $x(t)$ の関数と考えることができる。ここで，$x(t)'=[x_1(t)\cdots\cdots x_n(t)]$ であり，記号 ′ は行列またはベ

（1） 一度獲得された資本財の再販売は行なわれないものとする。

クトルの転置を表わす。また，上に述べたことにより，$\pi$ は $x(t)$ のみの関数ではなく，生産技術や可変的生産要素価格の関数でもあると考えられるから，operating profit は $\pi[x(t), t]$ と表わすことができる。

ところで，企業による資本財投資を考慮に入れると，純粋な利益を定めるには投資費用を差し引かなければならない。そこで，各時点において，operating profit $\pi[x(t), t]$ から投資費用を差し引いたものを純収入と呼び，$R(t)$ によって表わす。第 $i$ 資本財への粗投資を $I_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ で表わし，投資費用を $S[I(t), t]$ とすると，純収入 $R(t)$ は次のように与えられる。

$$R(t)=\pi[x(t), t]-S[I(t), t] \tag{1.1}$$

ここで，$I(t)$ は $I(t)'=[I_1(t)\cdots\cdots I_n(t)]$ なる $n$ 次元ベクトルであり，また，関数 $S$ に $t$ が含まれているのは資本財価格の変動などを考慮したものである。

企業は，長さ $T$ の計画期間中の純収入全体の現在価値を最大にすることを目的として各時点の投資を決定するものと想定する。簡単化のために，割引率が時を通じて一定の $r(>0)$ であるとすれば，この現在価値は

$$\int_0^T R(t)e^{-rt}dt \tag{1.2}$$

によって与えられる。

ところで，資本ストックが各時点において一定の割合で減耗して行くものとすると，粗投資と純投資との間には，

$$\dot{x}(t)=I(t)-\delta x(t) \tag{1.3}$$

なる関係が成立する。(2) ここで $\delta$ は，$\delta_i(0<\delta_i<1, i=1, \cdots, n)$ を主対角線上の要素とする $n$ 次の対角行列であり，$\delta_i$ は第 $i$ 資本財の減耗率である。また・は時間 $t$ に関する微分を意味する。資本ストックの初期水準を $x_0$ $(x_0'=[x_{01}\cdots x_{0n}])$ とすると，微分方程式体系 (1.3) に対する

(2)　$\delta_i$ が時間の関数であるとしても以下の議論の本質には変わりがない。

境界条件は

$$x(0)=x_0 \tag{1.4}$$

であるから，企業にとっての問題は，(1.3)，(1.4) の制約の下で，(1.2) によって与えられる現在価値を最大にする，あるいは

$$J(I)=-\int_0^T R(t)e^{-rt}dt \tag{1.5}$$

を最小にする $I(t)$ を選ぶことである。以下においては目的汎関数としては (1.5) で与えられる負の現在価値をとり，問題を最小化のそれとして扱うことにする。

このような問題は，周知の如く，$x(t)$，$I(t)$ に，また $\pi[x(t),t]$，$S[I(t),t]$ に課される追加的な制約や仮定に応じて様々な形の問題として定式化される。この小論ではそれらのうちの興味あるいくつかについて検討する。

われわれの問題における粗投資，資本ストックは，制御理論において，それぞれ，制御，状態変数と呼ばれるものに相当し，微分方程式体系 (1.3) は制御プロセスと呼ばれている。

ここで，以下の議論を通じて保持される仮定を述べておく。

(1)　$I(t)$ は $0\leqq t\leqq T$ なる $t$ に対して Lesbegue 可測であり，かつその値は

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{1.6}$$

なる制約を満さなければならないものとする。ここで，$I_{\max}'=[I_{1\max}\cdots I_{n\max}]$ は最大可能な粗投資水準から成るベクトルであり，0はゼロベクトルである。(1.6) を満す $I$ から成る，$n$ 次元ベクトル空間 $R^n$ の集合を $\Omega$ で表わす。$\Omega$ はコンパクトな凸集合である。

このとき，$I(t)$ は区間 $[0,T]$ から $\Omega$ の中への Lesbegue 可測な関数であり，微分方程式体系 (1.3) は，与えられた初期条件の下で，$0\leqq t\leqq T$ の部分区間において唯一つの絶対連続な解 $x(t)$ をもつ。[3] こ

(3)　このことは微分方程式に関する Carathéodory の存在定理の結果である。cf. Coddington & Levinson [1], Lee & Markus [3].

の $x(t)$ を制御関数 $I(t)$ に対応するトラジェクトリと呼ぶ。トラジェクトリ $x(t)$ は連続で，測度ゼロの点を除いて導関数をもち，微分方程式体系 (1.3) はほとんどすべての点で満される。

(2) operating profit $\pi[x(t),t]$ はすべての $x>0$ に対して 2 次までの偏導関数をもち，$\pi[x(t),t]>0$, $\frac{\partial\pi}{\partial x_i}>0$ $(i=1,\cdots,n)$ なる凹関数である。

**1. 1** まず投資費用関数が粗投資と資本財価格の積として表わされる場合について考える。このとき時点 $t$ における第 $i$ 資本財の価格を $w_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ とし，これらから成る $n$ 次の行ベクトルを $w(t)$ とすると，投資費用は

$$S[I(t),t]=w(t)I(t) \tag{1.7}$$

によって表わすことができる。

また，資本ストックの終期状態 $x(T)$ は $n$ 次元の $x$ 空間 $R^n$ のどの点であってもよいとしよう。すなわち，$t=T$ における標的集合は $R^n$ 全体である。そして，$x(t)$ が計画期間中にとらねばならない値についても何も制約を課さないことにする。(4)

かくして，われわれの問題は，資本ストックの初期状態 $x_0$ を，制御プロセス

$$\dot{x}(t)=I(t)-\delta x(t) \tag{1.3}$$

にしたがってある終期状態 $x(T)\in R^n$ に移し，しかも目的汎関数

$$J(I)=\int_0^T\{w(t)I(t)-\pi[x(t),t]\}e^{-rt}dt \tag{1.8}$$

を最小にする制御関数 $I(t)$ を

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \tag{1.6}$$

(4) われわれの問題が経済学的な意味を失わないためには少くとも $x(t)\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq T)$ でなければならないが，variation-of-parameter formula によれば微分方程式(1.3)の解は初期条件 (1.4) の下で $x(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)}I(\tau)d\tau$ となるから，$I(t)\in\Omega$ に対してはこの条件は満されている。cf. Coddington & Levinson [1] ch. 3.

を満すものの中から選ぶことである。

さて，$I(t)\in\Omega$ に対応するトラジェクトリ $x(t)$ のすべての終期状態 $x(T)$ の集合を $x(t)$ の到達可能点集合と呼び，$A(T)$ で表わす。まず，$A(T)$ がコンパクトな凸集合であることを証明する。

**〔定理 1〕** 資本ストックの初期状態 $x_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ資本ストックと粗投資の間の制御プロセス (1.3) の到達可能点集合 $A(T)$ はコンパクトな凸集合である。

〔証明〕 $A(T)$ がコンパクトであることを証明するためには，$A(T)$ の任意の点列 $\{x^{\nu}(T)\}$ $(\nu=1,2,\cdots)$ から，ある極限 $\bar{x}(T)\in A(T)$ に収束する部分列を選べることを示せばよい。そこで，$x^{\nu}(T)$ に対応する解 $x^{\nu}(t)$ と制御関数 $I^{\nu}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を考える。このとき，

$$x^{\nu}(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^{\nu}(\tau)d\tau \tag{1.9}$$

が成立する。

ところで，与えられた有限区間において可測であり，与えられたコンパクトな凸集合にその値をもつすべてのベクトル関数族は点列として弱収束であるから，(5) 制御関数 $I^{\nu}(t)\in\Omega$ の集合は弱コンパクトであり，ある制御関数 $\bar{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に弱収束する部分列 $\{I^{\nu_i}(t)\}$ $(i=1,2,\cdots)$ が存在する。すなわち

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}I^{\nu_i}(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}\bar{I}(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

$\bar{I}(t)$ に対応するトラジェクトリを $\bar{x}(t)$ とすると，(1.9) と (1.10) により

$$\bar{x}(t)=e^{-\delta t}x_0+\int_0^t e^{-(t-\tau)\delta}\bar{I}(\tau)d\tau=\lim_{i\to\infty}x^{\nu_i}(t)$$

$$\lim_{i\to\infty}x^{\nu_i}(T)=\bar{x}(T)\in A(T)$$

よって $A(T)$ はコンパクトである。

次に $A(T)$ が凸集合であることを証明する。そのためには $A(T)$ に属する任意の 2 点 $x^1(T), x^2(T)$ を結ぶ線分 $(1-\mu)x^1(T)+\mu x^2(T)$,

(5) cf. Lee & Markus [4].

$(0 \leqq \mu \leqq 1)$ か $A(T)$ に属することを示せばよい。$x^1(t), x^2(t)$ に対応する制御関数を，それぞれ，$I^1(t), I^2(t)$ とし $I^\mu(t) \in \Omega$ を

$$I^\mu(t) = (1-\mu)I^1(t) + \mu I^2(t) \tag{1.11}$$

によって定義すると $I^\mu(t)$ に対応する $x^\mu(t)$ は

$$x^\mu(t) = e^{-\delta t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)\delta} I^\mu(\tau)\,d\tau$$

によって与えられるから，(1.11) により

$$x^\mu(t) = (1-\mu)\left[e^{-\delta t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} I^1(\tau)\,d\tau\right] + \mu\left[e^{-\delta t}x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} I^2(\tau)\,d\tau\right] = (1-\mu)x^1(t) + \mu x^2(t)$$

となる。よって $A(T)$ は凸集合である。$(Q.E.D.)$

次に粗投資 $I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ が資本ストックの初期状態 $x_0$ を $A(T)$ の境界点集合 $\partial A(T)$ に移す制御関数—これを極値制御関数と呼ぶ—であるための条件について検討する。

そのために，微分方程式 $\dot{x}(t) = -\delta x(t)$ の随伴方程式 $\dot{\eta}(t) = \eta(t)\delta$ を導入する。ここで $\eta(t)$ は $\eta_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ を成分とする $n$ 次行ベクトルである。この方程式は $\eta(t) = \eta_0 e^{t\delta}$ の形の解をもつ。ただし $\eta_0$ は定数ベクトルであって，$\eta_0 \neq 0$ ならばこの $\eta(t)$ は $0 \leqq t \leqq T$ においてゼロならぬトリビアルでない解である。

**〔定理 2〕** 初期状態 $x_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ，粗投資と資本ストックの間の制御プロセス (1.3) を考える。粗投資 $I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ は，$0 \leqq t \leqq T$ のほとんどすべてのところで

$$\eta(t)I(t) = \max_{I \in \Omega} \eta(t)I \tag{1.12}$$

を満す，微分方程式体系

$$\dot{\eta}(t) = \eta(t)\delta \tag{1.13}$$

のトリビアルでない解が存在するとき，またそのときに限って極値制御関数である。

〔証明〕 まず $I(t)$ が極値制御関数であれば，定理の要求するような随伴方程式体系の解が存在することを示す。そこで，$I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t$

$\leqq T$）が極値制御関数で，$x_0$ を終期状態 $x(T) \in \partial A(T)$ に移すものとする。到達可能点集合 $A(T)$ はコンパクトな凸集合であるから，境界点 $x(T)$ において $A(T)$ に対する支持超平面が存在する。$x(T)$ におけるこの超平面に対する外向きの単位法線ベクトルを $\eta(T)$ で表わす。

トリビアルでない随伴トラジェクトリを

$$\eta(t) = \eta_0 e^{t\delta}, \quad \eta(T) = \eta_0 e^{T\delta}$$

によって定義すると，

$$\begin{aligned}\eta(t)x(t) &= \eta_0 x_0 + \int_0^t \eta_0 e^{\tau\delta} I(\tau) d\tau \\ &= \eta_0 x_0 + \int_0^t \eta(\tau) I(\tau) d\tau \qquad (1.14)\end{aligned}$$

ところで，区間〔0, $T$〕の正の長さをもったある部分区間において

$$\eta(t) I(t) < \max_{I \in \Omega} \eta(t) I$$

が成立するものと想定し，$\tilde{I}(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を

$$\eta(t)\tilde{I}(t) = \max_{I \in \Omega} \eta(t) I$$

によって定義すると，$\tilde{I}(t)$ に対応するトラジェクトリを $\tilde{x}(t)$ とするとき，$\tilde{x}(T)$ と $\eta(T)$ との内積は次のようになる。

$$\eta(T)\tilde{x}(T) = \eta_0 x_0 + \int_0^T \eta(\tau)\tilde{I}(\tau) d\tau \qquad (1.15)$$

しかるに，$\tilde{I}(t)$ の定義により

$$\int_0^T \eta(\tau) I(\tau) d\tau < \int_0^T \eta(\tau)\tilde{I}(\tau) d\tau$$

であるから，(1.14) と (1.15) により

$$\eta(T)x(T) < \eta(T)\tilde{x}(T) \qquad (1.16)$$

でなければならない。ところが，$\eta(T)$ は $x(T)$ における $A(T)$ の支持超平面に対する外向き法線ベクトルとして定義したのであるから (1.16) の成立はこのことに反する。(1.16) の成立は点 $\tilde{x}(T)$ が支持超平面によって $A(T)$ から分離されることを意味するが，$\tilde{x}(T) \in \partial A(T)$ であるから，このことは不可能である。よって，区間〔0, $T$〕のほとんどすべてのところで (1.12) が成立しなければならない。

次に，トリビアルでないある随伴トラジェクトリ $\eta(t)=\eta_0 e^{t\delta}$ に対して，$I(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ が $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで (1.12) を満すことを仮定する。このとき $I(t)$ が極値制御関数であることを示すためには，対応するトラジェクトリ $x(t)$ の終期状態が $A(T)$ の内点ではなくその境界点になっていることを示せばよい。

そこで，逆に $x(T)$ が $A(T)$ の内点であるとしよう。指定された特定の随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ に対して，$\eta(T)x(T)<\eta(T)\tilde{\tilde{x}}(T)$ なる点 $\tilde{\tilde{x}}(T)\in A(T)$ を考える。トラジェクトリ $\tilde{\tilde{x}}(t)$ を産み出す制御関数を $\tilde{\tilde{I}}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ とすると，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで次の不等式が成立する。

$$\eta(t)\tilde{\tilde{I}}(t)\leqq\eta(t)I(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

そこで，上と同様に，$\eta(T)x(T)$，$\eta(T)\tilde{\tilde{x}}(T)$ を求めると，$\eta(T)\tilde{\tilde{x}}(T)\leqq\eta(T)x(T)$ なる結論が得られる。しかるに，これは矛盾であるから，資本ストックの終期状態 $x(T)$ は $\partial A(T)$ に属する。(*Q.E.D.*)

さて，上の定理ではある可能な投資政策が資本ストックの初期状態を到達可能点集合の境界点に移す極値制御関数であるための条件が明らかにされた。そこで，次に，$\partial A(T)$ の各点に $x_0$ を移す投資政策はそれぞれ唯一通りであるかどうかについて検討しよう。

**〔定理 3〕** 初期状態 $x_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ，粗投資と資本ストックの間の制御プロセス (1.3) の到達可能点集合の各境界点に $x_0$ を移す極値制御関数はそれぞれ唯一つである。

〔証明〕 $\bar{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を，$\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ に $x_0$ を移す極値制御関数とし，対応する極値トラジェクトリを $\bar{x}(t)$ とする。$A(T)$ はコンパクトな凸集合であるから，$A(T)$ は $\bar{x}(T)$ において支持超平面をもつ。$\eta(t)$ を，$\eta(T)$ が $\bar{x}(T)$ における $A(T)$ の外向き法線ベクトルとなるような随伴トラジェクトリとする。このとき $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで

$$\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が成立する。

さて，$x_0$ を同一の終期状態 $\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ に移す制御関数を $I(t)$ で表わし，対応するトラジェクトリを $x(t)$ とする。以下において，$\bar{I}(t)$ と $I(t)$ とは区間〔0, $T$〕のほとんどすべてのところで一致しなければならないことを示す。

そこで，正の長さをもつ，〔0. $T$〕のある部分区間において

$$\eta(t)I(t)<\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が成立することを仮定しよう。このとき，

$$\eta(T)x(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(t)I(t)dt$$

$$\eta(T)\bar{x}(T)=\eta_0x_0+\int_0^T\eta(t)\bar{I}(t)dt$$

より，次の不等式が成立する。

$$\eta(T)x(T)<\eta(T)\bar{x}(T)$$

しかるに，この不等式の成立は $x(t)$ の終期状態が $\bar{x}(T)$ であるという仮定に反する，よって，$\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ と同じ終期状態をもたらす $I(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，条件

$$\eta(t)I(t)=\eta(t)I(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

を $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで満すものでなければならない。

さらに，上の条件を同一の $\eta(t)$ に対して成立せしめるためには，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべての点において

$$I(t)=\bar{I}(t)$$

でなければならない。$(Q.E.D)$

ところで，この定理3を用いると，定理1の結果を強めることができる。

〔**定理4**〕　初期状態 $x_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ，粗投資と資本ストックの間の制御プロセス (1.3) の到達可能点集合 $A(T)$ は厳密に凸 (strictly convex) であり，内点をもつ。

〔証明〕 帰謬法による。そこで，$A(T)$ が厳密には凸でないことを仮定する。$A(T)$ はコンパクトな凸集合であるから，支持超平面 $p$ が存在する。$p\cap A(T)$ は二つ以上の点を含むものとする。このとき，それらを結ぶコンパクトな線分 $l$ が存在する。そして，$l$ に属する 2 点 $P_a, P_b$ に $x_0$ を移す制御関数を，それぞれ $I^a(t), I^b(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ で表わす。

今，区間 $\boldsymbol{T}: 0\leqq t\leqq T$ の可測な部分集合 $B$ に対して $2n$ 次元の実ベクトル

$$\Gamma(B)=\begin{bmatrix}\int_B e^{\tau\delta}I^a(\tau)d\tau\\ \int_B e^{\tau\delta}I^b(\tau)d\tau\end{bmatrix}$$

を考えると，ベクトル集合関数 $\Gamma(B)$ はある値

$$\Gamma(B)=\begin{bmatrix}\beta_a\\ \beta_b\end{bmatrix},\qquad \Gamma(\phi)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

をとる。ここで $\phi$ は空集合である。測度理論に関する Liapnov の結果によれば，(6)

$$\Gamma(B_{\frac{1}{2}})=\Gamma(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})=\begin{pmatrix}\beta_{\frac{a}{2}}\\ \beta_{\frac{b}{2}}\end{pmatrix}\tag{1.17}$$

となるような $\boldsymbol{T}$ の部分集合 $B_{\frac{1}{2}}$ が存在する。(7) ここで，$P_a$ と $P_b$ とは異なった点であるから，$\beta_a\fallingdotseq\beta_b$ であり，$B_{\frac{1}{2}}$ と $(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})$ とは共に零集合 (null set) ではない。

今，$I^1(t), I^2(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を，それぞれ，

$$I^1(t)=\begin{cases}I^a(t) & t\in B_{\frac{1}{2}}\\ I^b(t) & t\in(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})\end{cases}$$

$$I^2(t)=\begin{cases}I^a(t) & t\in(\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}})\\ I^b(t) & t\in B_{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

(6) cf. Lee & Markus [4] pp. 163–164.

(7) $\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}$ は $\boldsymbol{T}$ と $B_{\frac{1}{2}}$ との差集合を表わす。

によって定義すると，それらに対応するトラジェクトリ $x^1(t)$, $x^2(t)$ の終期状態は，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} x^1(T)&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{B\frac{1}{2}}e^{t\delta}I^a(t)\,dt\\ &\qquad+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}-B\frac{1}{2}}e^{t\delta}I^b(t)\,dt\\ x^2(T)&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{B\frac{1}{2}}e^{t\delta}I^b(t)\,dt\\ &\qquad+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}-B\frac{1}{2}}e^{t\delta}I^a(t)\,dt \end{aligned}\right\}\quad(1.18)$$

によって与えられる。

他方，$P_a, P_b$ は，それぞれ，$I^a(t), I^b(t)$ による終期状態であるから

$$\left.\begin{aligned} P_a&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}}e^{t\delta}I^a(t)\,dt\\ P_b&=e^{-T\delta}x_0+e^{-T\delta}\int_{\boldsymbol{T}}e^{t\delta}I^b(t)\,dt \end{aligned}\right\}(1.19)$$

となる。(1.17) を考慮すると，(1.18)，(1.19) により次の関係式が得られる。

$$x^1(T)=x^2(T)=\frac{1}{2}(P_a+P_b) \qquad (1.20)$$

ところが，定理 3 の結果を考慮すると，(1.20) の左半分の成立は，区間 $\boldsymbol{T}$ のほとんどすべてのところで $I^1(t)=I^2(t)$ であることを意味する。そしてこのことは，$B_{\frac{1}{2}}$ と $\boldsymbol{T}-B_{\frac{1}{2}}$ のほとんどすべてのところで $I^a(t)=I^b(t)$ であることを意味する。しかるに，このことは点 $P_a$ と $P_b$ とが $l$ に属する異なった終期状態であるという先の仮定に反する。よって $A(T)$ は厳密に凸である。$(Q.E.D)$

さて，以上の諸定理においては最小にすべき目的汎関数（負の現在価値）は登場していない。以下においてはこれを考察の中に導入しよう。

そのために新しい状態変数 $x^0(t)$ を

$$x^0(t)=\int_0^t \{w(t)I(t)-\pi[x(t),t]\}e^{-rt}dt \qquad (1.21)$$

$$x^0(0)=0 \qquad (1.22)$$

によって定義し，$(n+1)$ 次のベクトル

$$\hat{x}(t)=\begin{bmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

の到達可能点集合 $\hat{A}(T)\subset R^{n+1}$ について考える。したがって目的汎関数 $J(I)$ は $x^0(t)$ の $t=T$ における値である。

ここで $\hat{x}(t)$ の初期状態は

$$\hat{x}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

である。したがって，$\hat{A}(T)$ は，$\hat{x}_0$ からはじまるトラジェクトリ $\hat{x}(t)$ のすべての終期状態から成る集合であり，$\hat{x}(t)$ は微分方程式体系

$$\dot{x}^0(t)=\{w(t)I(t)-\pi[x(t),t]\}e^{-rt} \tag{1.23}$$

$$\dot{x}(t)=I(t)-\delta x(t) \tag{1.3}$$

の $I(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対する解である。

さて，$I(t)$ の値はコンパクトな制約集合 $\Omega$ に属するから，$\hat{A}(T)$ は $(n+1)$ 次元ベクトル空間 $R^{n+1}$ において有界である。そして，$\hat{A}(T)$ の $x$ 空間 $R^n$ への射影は厳密に凸なるコンパクト集合 $A(T)$ である。われわれは以下において $\hat{A}(T)$ の幾何学的性質を問題にするのであるが，$x^0(T)$ を垂直方向に測るものとすれば，われわれの問題は $x^0(T)=J(I)$ の最小化の問題であるから，$\hat{A}(T)$ の下方境界の形だけが問題である。

さて，ここでは $\hat{x}_0$ を $\hat{A}(T)$ の下方境界の点に移す $I(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を極値制御関数と呼び，$J(I)=x^0(T)$ を最小にする制御関数を最適制御関数と呼ぶ。今，$y^0\leqq x^0$ なる点 $(y^0,x)\in\hat{A}(T)$ が存在するすべての点 $(x^0,x)\in R^{n+1}$ の集合として $\hat{A}_v$ を定義すると[8]，次の定理が成立する。

〔**定理 5**〕 初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ制御プロセス (1.23), (1.3) を考える。このとき集合 $\hat{A}_v$ は $R^{n+1}$ における閉凸集合である。したがって，$\hat{A}_v$ の下方境界は $\hat{A}(T)$ に属

(8) したがって，$\hat{A}_v$ の下方境界の点は $\hat{A}(T)$ の下方境界の点である。

し，それは資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ 上で定義された凸超曲面を形成し，負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする最適制御関数—最適投資政策が存在する。

〔証明〕 まず $\hat{A}_v$ が閉集合であることを示す。そのために，$R^{n+1}$ に属する点 $\hat{\bar{a}}=(\bar{a}^0,\bar{a})$ に収束する点列 $\hat{a}^\nu=(a^{0\nu},a^\nu)$ を考える。$\hat{A}_v$ の定義により，$x^\nu(T)=a^\nu, x^{0\nu}(T)\leqq a^{0\nu}$ なるトランジェクトリ

$$\hat{x}^\nu(t)=\begin{bmatrix} x^{0\nu}(t) \\ x^\nu(t) \end{bmatrix}$$

をもつ制御関数 $I^\nu(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を見つけることができる。さらに，定理1により，制御関数列（の部分列，同じ記号で表わす）$I^\nu(t)$ が $\bar{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に弱収束し，対応するトラジェクトリの列 $x^\nu(t)$ が $\bar{x}(t)$ に弱収束するものと想定することができる。すなわち，

$$\lim_{\nu\to\infty} I^\nu(t)=\bar{I}(t)\in\Omega\ (0\leqq t\leqq T),\quad \lim_{\nu\to\infty} x^\nu(t)=\bar{x}(t)$$

よって，次の不等式が成立する。

$$\lim_{\nu\to\infty} a^{0\nu}=\bar{a}^0\geqq\lim_{\nu\to\infty}\inf x^{0\nu}(T) \tag{1.24}$$

また，$\Omega$ がコンパクトな凸集合であり，$\hat{A}(T)$ が $R^{n+1}$ において有界であることにより，

$$\lim_{\nu\to\infty}\inf x^{0\nu}(T)\geqq\bar{x}^0(T) \tag{1.25}$$

が成立する。したがって（1.24）と（1.25）により，$\bar{I}(t)$ に対応するトラジェクトリ $\hat{\bar{x}}(t)$ の終期状態は

$$\hat{\bar{x}}(T)=\begin{pmatrix} \bar{x}^0(T) \\ \bar{a} \end{pmatrix}\in A(T)$$

である。よって $\hat{\bar{a}}\in\hat{A}_v$，したがって $\hat{A}_v$ は $R^{n+1}$ における閉集合である。

ところで，$\hat{\bar{a}}$ が $\hat{A}(T)$ の下方境界に属するならば，$\bar{x}^0(T)=\bar{a}^0, \bar{x}(T)=\bar{a}$ となり，したがって，$\bar{I}(t)$ は $\hat{x}_0$ を $\hat{\bar{a}}$ に移す。よって $\hat{A}_v$ の下方境界は $\hat{A}(T)$ に属する。

最後に，$\hat{A}(T)$ の（したがって $\hat{A}_v$ の）下方境界は凸であることを示す。二つの制御関数 $I^1(t), I^2(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応する，$\hat{A}(T)$

の下方境界の 2 点を，それぞれ，$\hat{x}^1(T)$, $\hat{x}^2(T)$ とする。今，点 $\hat{P}=(P^0, P)$ を

$$\hat{P}=\mu\hat{x}^1(T)+(1-\mu)\hat{x}^2(T), \quad (0\leqq\mu\leqq1)$$

$$\hat{x}^i(T)=\begin{bmatrix} x^{0i}(T) \\ x^i(T) \end{bmatrix} \qquad (i=1, 2)$$

によって定義すると，$\hat{A}(T)$ の下方境界が凸超曲面であることを示すためには，$\hat{x}_0$ を $\hat{P}$ に移す制御関数が構成できて，$\hat{P}\in\hat{A}(T)$ なることを示せばよい。そこで，対応するトラジェクトリ，$x^{0\mu}(t), x^\mu(t)$ をもつ制御関数 $I^\mu(t)$ を

$$I^\mu(t)=\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t) \qquad (0\leqq\mu\leqq1)$$

によって定義する。このとき，$I^\mu(t)$ による資本ストックの終期状態は，定理 1 の証明で示されたように

$$x^\mu(T)=\mu x^1(T)+(1-\mu)x^2(T)=P$$

である。他方，$J(I^\mu)=x^{0\mu}(T)$ については

$$\begin{aligned} x^{0\mu}(T)&=\int_0^T\{w(t)I^\mu(t)-\pi[x^\mu(t), t]\}e^{-rt}dt \\ &=\int_0^T\{w(t)[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)]-\pi[\mu x^1(t) \\ &\qquad+(1-\mu)x^2(t), t]\}e^{-rt}dt \end{aligned}$$

が成立するが，右辺の被積分関数の第一要素は $I$ について 1 次であり，関数 $\pi$ は $x$ について凹であるから，

$$\begin{aligned} &\int_0^T\{w(t)[\mu I^1(t)+(1-\mu)I^2(t)]-\pi[\mu x^1(t) \\ &\quad+(1-\mu)x^2(t), t]\}e^{-rt}dt \\ &\leqq\mu\int_0^T\{w(t)I^1(t)-\pi[x^1(t), t]\}e^{-rt}dt+(1-\mu)\int_0^T\{w(t)I^2(t) \\ &\quad-\pi[x^2(t), t]\}e^{-rt}dt \\ &=\mu x^{01}(T)+(1-\mu)x^{02}(T)=P^0 \end{aligned}$$

ところで，$I^1(t), I^2(t)$ の値は $0\leqq t\leqq T$ においてコンパクトな凸集合 $\Omega$ に属するのであるから，それらに対応するトラジェクトリ $x^1(t)$, $x^2(t)$ の終期状態 $x^1(T), x^2(T)$ は，共に，資本ストックの到達可能点集合 $A(T)$ に属する。したがって，$P^0$ が $x^{01}(T)$ と $x^{02}(T)$ の非負凸

1次結合として表わされることを考えると，終期状態 $\hat{P}$ は到達可能であることがわかる。

以上により，$\hat{A}(T)$ の下方境界は $A(T)$ 上の凸超曲面であり，$\hat{A}_t$ は $R^{n+1}$ における凸集合である。

$\hat{A}(T)$ の下方境界は凸超曲面であるから，$\hat{A}(T)$ には $x^0(T)$ の値が最小になる点があり，この点は到達可能であるから，$\hat{x}_0$ をこの点に移す最適制御関数—最適投資政策が存在する。$(Q.E.D.)$

このようにして，最適投資政策の存在が証明されたのであるが，最適投資政策は初期状態 $\hat{x}_0$ を $\hat{A}(T)$ の下方境界に移すものでなければならず，したがってそれは極値制御関数でなければならない。そこで，次は，ある制御関数が極値制御関数であるための条件を明らかにしよう。

〔**定理 6**〕 初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ制御プロセス (1.23), (1.3)' を考える。対応するトラジェクトリ $\hat{\bar{x}}(t)$ をもつ制御関数 $\bar{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，微分方程式

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\eta}^0(t)=0, \qquad \eta^0(t)\leqq 0\\&\dot{\eta}(t)=\eta^0\cdot\frac{\partial\pi[\bar{x}(t),t]}{\partial x}e^{-rt}+\eta(t)\delta\end{aligned}\right\}\quad(1.26)$$

を満し，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$\begin{aligned}&\eta^0 w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)\\&\quad=\max_{I\in\Omega}[\eta^0 w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I]\end{aligned}\qquad(1.27)$$

を満すゼロでない $(n+1)$ 次の行ベクトル $\hat{\eta}(t)=[\eta^0\ \eta(t)]$ が存在するとき，またそのときに限って極値制御関数である。

〔証明〕 まず，$\bar{I}(t)$, $\hat{\bar{x}}(t)$, $\hat{\eta}(t)$ が微分方程式体系 (1.23), (1.3) (1.26) を満足し，最大値条件 (1.27) を $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで満すものと仮定し，このとき $\bar{I}(t)$ が極値制御関数であることを証明する。

そのためには任意の $I(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ に対応するトラジェクトリを $\hat{x}(t)$ とするとき

$$\hat{\eta}(T)\hat{\hat{x}}(T) \geqq \hat{\eta}(T)\hat{x}(T) \qquad (1.28)$$

が成立することを証明すればよい。この不等式から，(1) $\eta^0<0$ ならば $\hat{\hat{x}}(T)$ は $\hat{A}(T)$ の下方境界に属し，(2) $\eta^0=0$ ならば $\hat{A}_v$ の "lateral boundary" に属することになる。しかし，$\eta^0=0$ ならば，$\bar{I}(t)$ に対応するプロセス (1.3) のトラジェクトリ $\bar{x}(t)$ は定理2の意味で極値トラジェクトリであり，したがって $\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ である。さらに，$\partial A(T)$ の各点に $x_0$ を移す極値制御関数はそれぞれ唯一つである（定理3）から，$\bar{I}(T)$ は境界点 $\bar{x}(T)$ に $x_0$ を移す唯一つの制御関数である。したがって，$\hat{\hat{x}}(T)$ は $\bar{x}(T)$ の垂直方向にある $\hat{A}(T)$ の下方境界の唯一つの点である。

以上により，$\hat{\hat{x}}(T)$ はいずれの場合にも $\hat{A}(T)$ の下方境界の点であり，$\bar{I}(t)$ は極値制御関数である。

そこで問題は (1.28) の成立を示すことである。$\hat{\eta}(t)\hat{x}(t)$ を $t$ について微分し，$\dot{\eta}^0(t)=0$ を考えると，

$$\frac{d}{dt}[\hat{\eta}(t)\hat{x}(t)]=\eta^0\dot{x}^0(t)+\eta(t)\dot{x}(t)+\dot{\eta}(t)x(t)$$

したがって，(1.23)，(1.3)，(1.26) により，

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(T)-\hat{\eta}(0)\hat{x}_0=\int_0^T\Big\{\Big[\eta^0\frac{\partial\pi(\bar{x},t)}{\partial x}x(t)$$
$$-\pi(x(t),t)\Big]e^{-rt}+\eta^0w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)\Big\}dt \qquad (1.29)$$

ここで，$I(t)$ を $\bar{I}(t)$ に，$x(t)$ を $\bar{x}(t)$ に特定化すると

$$\hat{\eta}(T)\hat{\hat{x}}(T)-\hat{\eta}(0)\hat{x}_0=\int_0^T\{\eta^0\Big[\frac{\partial\pi(\bar{x},t)}{\partial x}\bar{x}(t)$$
$$-\pi(\bar{x}(t),t)\Big]e^{-rt}+\eta^0w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)\}dt \qquad (1.30)$$

ところで，$\bar{I}(t)$ は $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.27) を満すことを仮定したから，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで

$$\eta^0w(t)I(t)e^{-rt}+\eta(t)I(t)\leqq\eta^0w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t) \qquad (1.31)$$

また $\pi$ は $x$ の凹関数であることにより

$$\frac{\partial\pi[\bar{x}(t),t]}{\partial x}\cdot\bar{x}(t)-\pi[\bar{x}(t),t]\leqq\frac{\partial\pi[\bar{x}(t),t]}{\partial x}x(t)$$
$$-\pi[x(t),t] \tag{1.33}$$

である。$\eta^0\leqq 0$ を考慮すると (1.29), (1.30), (1.31), (1.32) によって不等式 (1.28) の成立が示される。

今度は逆に，$\bar{I}(t)$ が極値制御関数であることを仮定する。

そこで，$\hat{\eta}(T)=[\eta^0\ \eta(T)]$ を $\hat{A}_v$ に対する $\hat{\bar{x}}(T)$ における外向き法線ベクトルとする。このとき明らかに $\eta^0\leqq 0$ であり，$\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ のときには $\eta^0=0$ である。今，$\hat{\eta}(t)$ を，$t=T$ における終期条件 $\hat{\eta}(T)$ の下での (1.26) の解として定義すると，証明すべきことは，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.27) が成立することである。

$\eta^0=0$ の場合には $\eta(T)$ は $\bar{x}(T)\in\partial A(T)$ における $A(T)$ の外向き法線ベクトルであり，このとき

$$\eta(t)\bar{I}(t)=\max_{I\in\Omega}\eta(t)I$$

が $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで成立することは定理2において示されている。

次に $\eta^0<0$ の場合について証明する。この場合 $\eta^0=-1$ としても一般性を失わないからそのように仮定する。さて，$\bar{I}(t)$ が $0\leqq t\leqq T$ の正の長さをもつある部分区間で最大値条件 (1.27) を満さないものと仮定し，制御関数 $\tilde{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ を次のように定義する。

$$-w(t)\tilde{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\tilde{I}(t)=\max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt}+\eta(t)I]$$

$D$ を，区間 $(0,T)$ の正の長さをもつコンパクトな部分区間であって，その上で $\bar{I}(t)$ と $I(t)$ とが共に連続で，かつある定数 $\gamma>0$ に対して



$$-w(t)\bar{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\bar{I}(t)<-w(t)\tilde{I}(t)e^{-rt}+\eta(t)\tilde{I}(t)-\gamma$$

であるような区間とする。集合 $D\cap(t_1,t_1+\varepsilon)$ がすべての小さい $\varepsilon>0$ に対して測度 $\varepsilon[1+0(\varepsilon)]$ (ここで $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}0(\varepsilon)=0$) をもつような時点 $t_1$

$\in D$ をとり出す。そして制御関数 $I^{\varepsilon}(t)$ を次のように定義する。

$$I^{\varepsilon}(t)=\begin{cases}\tilde{I}(t) & t\in D\cap(t_1, t_1+\varepsilon)\\ \bar{I}(t) & [0,T] \text{ のその他 } t \text{ のに対して}\end{cases}$$

このとき，$0\leqq t\leqq T$ において，充分に小さい $\varepsilon>0$ とある $k>0$ に対して

$$|\hat{x}^{\varepsilon}(t)-\hat{\bar{x}}(t)|<k\varepsilon$$

である。$\dfrac{\partial\pi[x(t),t]}{\partial x}e^{-rt}$ は連続であるから

$$\left|\frac{\partial\pi[\bar{x}(t),t]}{\partial x}[x^{\varepsilon}(t)-\bar{x}(t)]e^{-rt}-\pi[x^{\varepsilon}(t),t]e^{-rt}\right.$$
$$\left.+\pi[\bar{x}(t),t]\right|<\varepsilon 0(\varepsilon)$$

この定理の説明の前半における計算を利用すると，以上により

$$\hat{\eta}(T)\hat{\bar{x}}(T)-\hat{\eta}(T)\hat{x}^{\varepsilon}(T)\leqq\int_0^T\left\{\frac{\partial\pi[\bar{x},t]}{\partial x}[x^{\varepsilon}(t)-\bar{x}(t)]\right.$$
$$\left.-\pi[x^{\varepsilon}(t),t]+\pi[\bar{x}(t),t]\right\}e^{-rt}dt-\gamma\varepsilon[1+0(\varepsilon)]$$

よって，充分に小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$\hat{\eta}(T)\hat{\bar{x}}(T)<\hat{\eta}(T)\hat{x}^{\varepsilon}(T)$$

が成立する。しかるに，$\hat{\eta}(T)$ は $\hat{A}(T)$ の下方境界の点 $\hat{\bar{x}}(T)$ における $\hat{A}(T)$ の外向き法線ベクトルであるから，このことは不可能である。したがって，極値制御関数 $\bar{I}(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，$\hat{\eta}(t)$ の下で最大値条件 (1.27) を $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで満すものでなければならない。　$(Q.E.D)$

最適制御関数―最適投資政策は極値制御関数でなければならないから，それはまた定理 6 の諸条件を満すものでなければならない。そこで，次に，ある制御関数が最適制御関数であるための一つの充分条件を明らかにしよう。

**〔定理 7〕**　初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，粗投資に関する制約 (1.6) をもつ制御プロセス (1.23), (1.3) を考える。対応するトラジェクトリ $\hat{x}^*(t)$ をもつ制御関数 $I^*(t)\in\Omega$ $(0\leqq t\leqq T)$ は，随伴トラジェクトリ $\eta(t)$ が微分方程式体系

$$\dot{\eta}(t) = -\frac{\partial\pi[x^*(t), t]}{\partial x}e^{-rt} + \eta(t)\delta, \quad \eta(T) = 0 \qquad (1.33)$$

のトリビアルでない解であり，かつ $0 \leqq t \leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件

$$-w(t)I^*(t)e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I\in\Omega}[-w(t)Ie^{-rt} + \eta(t)I] \qquad (1.34)$$

が成立するならば最適制御関数―最適投資政策である。

〔証明〕 $I^*(t), \hat{x}^*(t)$ および $\hat{\eta}(t) = [-1\ \eta(t)]$ は (1.33)，(1.34) を満すものとし，トラジェクトリ $\hat{x}(t)$ をもつ任意の制御関数を $I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ とする。定理6における計算と同様にして $\hat{\eta}(T)\hat{x}^*(T) - \hat{\eta}(T)\hat{x}(T)$ をつくると，$\eta(t)$ の $t=T$ のにおける境界条件が $\eta(T) = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
&\hat{\eta}(T)\hat{x}^*(T) - \hat{\eta}(T)\hat{x}(T) \\
&= -x^{0*}(T) + x^0(T) \\
&= \int_0^T \Big\{ \frac{\partial\pi[x^*(t), t]}{\partial x}[x(t) - x^*(t)]e^{-rt} + [\pi(x^*(t), t) \\
&\quad - \pi(x(t), t)]e^{-rt} + [-w(t)I^*(t)e^{-rt} + \eta(t)I^*(t)] \\
&\quad - [-w(t)I(t)e^{-rt} + \eta(t)I(t)] \Big\} dt
\end{aligned}$$

となる。この右辺は関数 $\pi$ が $x$ の凹関数であることと，$I^*(t)$ が $0 \leqq t \leqq T$ のほとんどすべてのところで最大値条件 (1.34) を満すことにより非負である。よって

$$x^{0*}(T) \leqq x^0(T)$$

すなわち，$I^*(t)$ は目的汎関数 $J(I) = x^0(T)$ を最小にする最適制御関数である。　　(*Q.E.D*)

さて，以上の諸定理により，最適投資政策が存在すること，[9] そしてそれはどのようなものでなければならず，またどのようなものであればよいかが明らかにされた。

九七

そこで，最適な $I^*(t)$ に対応して，$\hat{x}^*(t), \eta(t)$ がどのように決定

（9） ただし，最適投資政策が唯一つであるということまでも証明されたわけではない。

されるかを簡単に述べておく。

まず，最大値条件（1.34）によって $I^*(t)$ が $\eta(t)$ の関数として決定されると，微分方程式体系（1.23），（1.3）は初期条件 $\hat{x}(0)=\hat{x}_0$ の下で解くことができて，$x^*(t)$ と $x^{0*}(t)$ とが $\eta(t)$ の関数として得られる。そして，これらの関数を $\eta(t)$ についての微分方程式体系（1.33）に代入すると，終期条件 $\eta(T)=0$ をもつ個の線型微分方程式が得られ，それらを解くことによって $\eta(t)$ が決定される。

ところで

$$\varphi(t)=\eta(t)e^{rt}$$

によって定義されるベクトル関数 $\varphi(t)$ を導入すると，$\varphi(t)$ は $I(t)$ の帰属価格ベクトルと解釈され，微分方程式体系（1.33）と最大値条件（1.34）はそれぞれ下のように変形される。

$$\dot{\varphi}(t)=-\frac{\partial\pi[x^*(t),t]}{\partial x}+\varphi(t)[rE+\delta],\quad \varphi(T)=0$$

$$-w(t)I^*(t)+\varphi(t)I^*(t)$$

$$=\max_{I\in\Omega}[-w(t)I+\varphi(t)I] \tag{1.35}$$

ここで $E$ は $n$ 次の単位行列である。

このとき最大値条件（1.35）を満す $I(t)$ は次のように求められる。

(1) $\varphi(t)>w(t)$ なる $t\in[0,T]$ に対しては $I^*(t)=I_{\max}$,

(2) $\varphi(t)=w(t)$ なる $t\in[0,T]$ に対しては $0\leqq I^*(t)\leqq I_{\max}$ なる任意の値。

(3) $\varphi(t)<w(t)$ なる $t\in[0,T]$ に対しては，$I^*(t)=0$。

(4) 上のいずれでもない $t\in[0,T]$ に対しては

(a) $\varphi_j(t)>w_j(t)$ なる $j$ については $I_j^*(t)=I_{j\max}$,

(b) $\varphi_k(t)=w_k(t)$ なる $k$ については $0\leqq I_k^*(t)\leqq I_{k\max}$ なる任意の値。

(c) $\varphi_l(t)<w_l(t)$ なる $l$ については $I_l^*(t)=0$。

粗投資，資本ストックの最適径路のシンセシスは上のことを軸として構成されるのであるが，ここでは紙数の関係により，この問題には

立ち入らないことにする。

**1. 2**　前節では $t=T$ における資本ストックの標的集合が $R^n$ 全体である場合について考えた。ここでは資本ストックの終期状態 $x(T)$ が $R^n$ のあらかじめ指定されたコンパクトな凸集合に属することが要求されている場合について考える。ただし，モデルを構成する諸要因は，このことを除けば前節におけるものと同一であるものとする。

さて，企業は資本ストックの終期状態について，あらかじめ

$$x_{\min} \leqq x(T) \leqq x_{\max} \tag{13.6}$$

なる制約をもうけているものとする。ここで $x_{\min}$, $x_{\max}$ は，それぞれ，有限かつ正なる $x_{i\min}$, $x^i{}_{\max}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ を成分とする列ベクトルである。(1.36) を満す $x$ 空間の集合を $X$ で表わす。$X$ はコンパクトな凸集合である。

かくして，ここでの問題は，資本ストックの初期状態 $x_0$ を制御プロセス (1.3) にしたがって集合 $A(T) \cap X$ の点に移し，しかも負の現在価値 $J(I)=x^0(T)$ を最小にする $I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ を選ぶことである。[10]

ところで，$A(T) \cap X$ が空集合ならば，資本ストックの初期状態 $x_0$ を $t=T$ における標的集合 $X$ に属する終期状態に移す可能な投資政策は存在しないことになるから，企業は

$$A(T) \cap X \neq \phi \tag{1.37}$$

なるように標的集合 $X$ を定めているものとする。

さて，ここでのモデルでは，標的集合を除けば，モデルの構成は前節におけるものと同一であるから，先の定理１～４はそのまま成立する。そして，初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，$I(t) \in \Omega$ $(0 \leqq t \leqq T)$ に対応するトラジェクトリ $\hat{x}(t)$ の到達可能点集合 $\hat{A}(T)$ の下方境界は $A(T)$ の上で定義された凸超曲面である。そこで，$(x^0, x)$ 空間 $R^{n+1}$ における集合 $\hat{X}$ を

(10)　$A(T)$, $J(I)$, $x^0(T)$ の定義は前節の場合と同じである。

$$\hat{X}=R^1\times X$$

によって定義すると，仮定（1.37）によって

$$\hat{X}\cap\hat{A}(T)\neq\phi$$

であり，しかも $\hat{A}(T)$ の下方境界点集合と $\hat{X}$ との共通部分は $R^{n+1}$ における凸超曲面である。企業にとっての問題は $J(I)=x^0(T)$ を最小にすることであるから，われわれは $\hat{A}(T)$ の下方境界点集合と $\hat{X}$ との共通部分に注目すればよく，その共通部分が凸超曲面であることにより，その部分に $x^0(T)$ が最小になる点の存在することは容易に判明する。

ところで，$x^0(T)$ が最小になるのには二つの場合がある。その第一は $x^0(T)$ 最小の最適点が $\hat{X}$ の内側にある場合であり，他の一つは最適点が $\hat{X}$ の境界点になっている場合である。最適点が $\hat{X}$ の内側の点であれば，明らかに，ここでの問題は前節でのそれと結果的には同じ問題となってしまう。

最適点が$\hat{X}$の境界点となっている場合は最適投資政策を規定する定理は，先の定理 6 と 7 に対応した形で得られるが，$t=T$ における横断条件が違った形で入ってくる。すなわち，ここでは，$t=T$ における横断条件は $\eta(t)$ の終期状態 $\eta(T)$ が境界点 $x^*(T)$ における集合 $X$ の内向き法線ベクトルであるという形になる。最適投資政策を規定する定理の叙述とその証明は省略する。

**2.** 以上においては投資費用関数が資本財価格と粗投資水準の積として表わされることを仮定してきた。ここでは投資費用関数 $S[I(t),t]$ が $I$ の厳密な凸関数であることを仮定する。[11] そして，モデルを構成する他の諸要因は **1.1** におけるものと同じであるとする。

関数 $S$ が $I$ の厳密に凸なる関数であると仮定することによって生じる最も重要な変化は目的汎関数 $J(I)$ が最小になる最適点が唯一点で



(11) $S$ が $I$ の（単なる）凸関数である場合には最適投資政策の存在とその性格づけに関する議論は，本質的には，前の議論と同じものになる。

あり，しかも最適投資政策が唯一つであるということである。

さて，目的汎関数が議論の中に登場しない定理1～定理4はここでもそのまま成立する。

今，$x^0(t)$ を

$$x^0(t)=\int_0^t \{S[I(t),t]-\pi[x(t),t]\}e^{-rt}dt$$
$$x^0(0)=0$$

によって定義すると，

$$\dot{x}^0(t)=\{S[I(t),t]-\pi[x(t),t]\}e^{-rt} \tag{2.1}$$

が得られる。目的汎関数は $J(I)=x^0(T)$ である。また，粗投資と資本ストックの間の制御プロセスは，前と同じく

$$\dot{x}(t)=I(t)-\delta x(t) \tag{2.2}$$

で与えられ，資本ストックの初期状態は $x_0$ である。粗投資に関する制約も前と同じく

$$0\leqq I(t)\leqq I_{\max} \qquad (0\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

で表わされる。

このとき，負の現在価値と資本ストックの到達可能点集合 $\hat{A}(T)$ と集合 $\hat{A}_v$ を前と同じように定義すると，定理5は，ここでは，より強い形で成立する。すなわち，初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，制約 (2.3) をもつ制御プロセス (2.1)，(2.2) を考えると，$\hat{A}_v$ は $R^{n+1}$ における閉凸集合であり，$\hat{A}_v$（したがって $\hat{A}(T)$）の下方境界は $A(T)\subset R^n$ 上で定義された厳密に凸なる超曲面を形成し，その唯一点で目的汎関数 $J(I)=x^0(T)$ が最小になる。

このことを証明するに際して注意すべきことは，$x^{0\mu}(t)$ $(0<\mu<1)$ と終期状態 $\hat{P}$ を定理5の場合と同様に定義すると，$x^{0\mu}(T)<P^0$ となり，$\hat{P}$ が $\hat{A}(T)$ の内点となっていることである。

定理6に対応してはここでもそれと同じ内容のものが成立する。ただし制御プロセスがここでは (2.1)，(2.2) であるから，最大値条件 (1.27) は次のようになる。

$$\eta^0 S[\bar{I}(t), t]e^{-rt} + \eta(t)\bar{I}(t) = \max_{I\in\Omega}[\eta^0 S[I, t]e^{-rt} + \eta(t)I]$$

最適性の充分条件を与える定理7も，ここで同じように成立する。ただし，最大値条件（1.34）は制御プロセスの違いにより，

$$-S[I^*(t), t]e^{-rt} + \eta(t)I^*(t) = \max_{I\in\Omega}[-S[I, t]e^{-rt} + \eta(t)I]$$

となる。

さて，ここでの問題には，$J(I) = x^0(T)$ が最小になる最適点が到達可能点集合 $\hat{A}(T)$ の下方境界に唯一点だけ存在することを述べたが，最適投資政策が唯一つであることを示すためには，初期状態 $\hat{x}_0$ を $\hat{A}(T)$ の下方境界に属する各点に移す極値制御関数がそれぞれ唯一つであることを示せばよい。そこで次の定理が成立することを証明しておく。

**〔定理8〕** 初期状態 $\hat{x}_0$ から始まり，粗投資に関する制約（2.3）をもつ制御プロセス（2.1），（2.2）を考える。$\hat{x}_0$ を $\hat{A}(T)$ の下方境界の同一の点に移す任意の二つの極値制御関数—極値投資政策は $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで一致する。

〔証明〕 $\hat{x}_0$ を $\hat{A}(T)$ の下方境界の同一の点 $\hat{\hat{x}}(T)$ に移す二つの極値制御関数 $I^1(t)$ と $I^2(t)$ を考える。そしてそれらに対応するトラジェクトリを $\hat{x}^1(t), \hat{x}^2(t)$ とする。

もし $\eta^0=0$ なる随伴トラジェクトリの終期状態 $\hat{\eta}(T) = [0\ \eta(T)]$ が $\hat{\hat{x}}(T)$ における $\hat{A}(T)$ の外向き法線ベクトルを定めるならば，$A(T)$ の各境界点に $x_0$ を移す極値制御関数はそれぞれ唯一つである（定理3）から，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで $I^1(t) = I^2(t)$ である。

次に $\eta^0<0$ の場合について考える。この場合は $\eta^0=-1$ としても一般性を失わないからそのように仮定する。

さて，$\hat{\eta}^1(T)$ が $\hat{\hat{x}}(T)$ における $\hat{A}(T)$ の外向き法線ベクトルであるような，$I^1(t)$ に対応する随伴トラジェクトリを $\hat{\eta}^1(t) = [-1\ \eta^1(t)]$ とする。

$I^1(t)$ は極値制御関数であるから，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのと

ころで最大値条件

$$-S[I^1(t),t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^1(t)$$
$$=\max_{I\in\Omega}[-S(I,t)e^{-rt}+\eta^1(t)I]\equiv M(t)$$

を満足する。もし $I^2(t)$ が随伴トラジェクトリ $\hat{\eta}^1(t)$ に対して，$0\leqq t\leqq T$ の正の長さをもつある部分区間で最大値条件を満さないならば，

$$\int_0^T\{-S[I^1(t),t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^1(t)\}dt$$
$$>\int_0^T\{-S[I^2(t),t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^2(t)\}dt \tag{2.4}$$

が成立する。

ここで，定理6の証明で用いたのと同じ方法によって $\hat{\eta}^1(T)\hat{\hat{x}}(T)-\hat{\eta}^1(T)\hat{x}^2(T)$ をつくると，(2.4) と $\pi$ が $x$ の凹関数であることにより，次の不等式が成立しなければならない。

$$\hat{\eta}^1(T)\hat{\hat{x}}(T)>\hat{\eta}^1(T)\hat{x}^2(T) \tag{2.5}$$

しかるに，$I^2(t)$ は $\hat{x}_0$ を $\hat{\hat{x}}(T)$ に移すことを仮定したから，(2.5) は矛盾である。よって，$\hat{x}_0$ を同一の終期状態 $\hat{\hat{x}}(T)$ に移す二つの極値制御関数 $I^1(t)$ と $I^2(t)$ とは $0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで同一の最大値条件を満すものでなければならない。すなわち，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで

$$-S[I^1(t),t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^1(t)$$
$$=-S[I^2(t),t]e^{-rt}+\eta^1(t)I^2(t)=M(t)$$

でなければならない。

次に，$\frac{1}{2}[I^1(t)+I^2(t)]$ によって定義される制御関数を考えると，関数 $S$ が $I$ の厳密な凸関数であることにより，$I^1(t)\neq I^2(t)$ ならば

$$-S\left[\frac{1}{2}I^1(t)+\frac{1}{2}I^2(t),t\right]e^{-rt}+\eta^1(t)\left[\frac{1}{2}I^1(t)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}I^2(t)\right]>\frac{1}{2}M(t)+\frac{1}{2}M(t)$$



となる。

以上により，$0\leqq t\leqq T$ のほとんどすべてのところで $I^1(t)=I^2(t)$ でなければならない。　　　$(Q.E.D)$

$x^0(T)$ が最小になる点が唯一点であることと上の定理を考え合わせると，最適投資政策が唯一つであることが判明する。

以上において，われわれは，企業による最適投資政策の問題を，主としてその存在と最適条件について考察してきた。紙数が尽きたので最適径路のシンセシスの問題は別の機会にゆずりたいと思う。

## 参　照　文　献


〔1〕 Coddington, E. A. & N. L. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.

〔2〕 LaSalle, J. P., "The Time Optimal Contral Problem," in *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations Vol. V* (Cesari,. L. et al. eds.), pp. 1–24, Princeton Univ. Press, 1959.

〔3〕 Lee, E. B. & L. Markus, "Optimal Control for Nonlinear Processes," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 8 (1961), pp. 36–58.

〔4〕 Lee. E. B. & L. Markus, *Foundations of Optiomal Control Theory*, Wiley, 1967.

〔5〕 Pontryagin, L. et. al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1967.

〔6〕 Schmaedeke, W. W., "The Existence Theory of Optimal Control Systems," in *Advances in Control Systems*, Vol. 3 (Leondes, C. T. ed.), pp. 111–149, Academic Press, 1966.