



## 一つの動学的企業モデル

|       |  |
|-------|--|
| メタデータ | 言語: jpn<br>出版者:<br>公開日: 2009-08-25<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者: 前田, 英昭<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="https://doi.org/10.24729/00002195">https://doi.org/10.24729/00002195</a>                  |

# 一つの動学的企業モデル

前田英昭

0. 以下の稿は、企業の最適な価格、産出量および資本政策について論じたものである。このような問題を論じたものとしては、たとえば、資本政策については、Arrow [1], Arrow, Beckman & Karlin [2], Eisner & Strotz [4], Manne [5] などがあり、<sup>(1)</sup> 産出量と投資の問題を扱ったものとしては Smith [9], Zabel [10] などがある。また、Nerlove & Arrow [7] は価格と宣伝投資の問題を、Dhrymes [3] はそれらに資本ストックへの投資の問題を加えて論じている。

ここでは、何種類かの資本財を用いて生産を行う寡占的企業は、その生産物価格、産出量および投資をいかに決定すべきであるかを考える。

1. ここでとりあげる企業は下にのべるような性格をもつものである。すなわち、この企業は生産のための投入物として  $n$  種類の資本財と  $m$  種類の可変的生産要素を用いて、一種類の貯蔵不可能な生産物を生産しているものとする。

時点  $t$  における第  $i$  資本財のストックを  $x_i(t)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 第  $j$  可変的要素の量を  $y_j(t)$ , ( $j=1, 2, \dots, m$ ) とし、これらを成分とする  $n$  次、 $m$  次の列ベクトルを、それぞれ、 $x(t)$ ,  $y(t)$  で表わす。以下においては、表現の簡単化のために、混乱の恐れのないかぎり、 $x(t)$ ,  $y(t)$  その他の諸変数についている  $t$  は省略して、単に、 $x$ ,  $y$  等と表わす。

二二八

(1) また、Arrowによる一つのモデルが村田氏[6]によって紹介されている。

さて、時点  $t$ において企業が第  $i$  資本財のストックに  $I_i$  だけの粗投資を行うものとすると、償却される部分の比率を  $\delta_i (i=1, 2, \dots, n)$  とするとき

$$\dot{x}_i = I_i - \delta_i x_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

が成立する。ここで  $\text{dot}(\cdot)$  は変数の時間に関する微分を表わし、 $\delta_i$  は時を通じて一定であると仮定する。 $\delta_i$  を対角要素とする  $n$  次の対角行列を  $\delta$  とすると、(1)により

$$\dot{x} = I - \delta x \quad (2)$$

が成立する。 $I$  は時点  $t$ における粗投資の  $n$  次列ベクトル、 $\dot{x}$  は  $t$  における純投資の  $n$  次列ベクトルである。

また、企業の出発点における資本ストックの保有量のベクトルが  $x^0$  であったとすると、

$$x(0) = x^0 \quad (3)$$

でなければならない。

われわれは企業の生産関数が下のように要約されるものと想定する。

$$z = g(x, y, t) \quad (4)$$

ここで  $z$  は  $t$  における产出量を表わす。 $t$  が含まれているのは、生産過程における投入物の有効性が時間に依存することを意味し、技術変化を明らかにするためである。

技術変化が生産関数(4)を次のような形で表わすことを可能ならしめるようなものであるとしよう。すなわち、生産関数が、特に、

$$z = h(t)f(x, y) \quad (5)$$

$$h(t) = h^0 e^{\alpha t}, \quad h^0 > 0, \alpha > 0 \quad (6)$$

と表わされるものと仮定する。ここで  $h^0, \alpha$  は定数である。 $\alpha$  は技術変化の速さを表わす。

また、企業の収入関数については次のように想定する。企業が時点  $t$  において生産物価格を  $p$  に設定すると、この企業の生産物に対する需要量  $d$  は次の方程式(7), (8)で与えられるものとし、この関係は企業

にとって既知であると仮定する。更に、この需要は企業によって常に満されなければならないものとしよう。

$$p = a(t) - bd, \quad b > 0 \quad (7)$$

$$a(t) = a^0 e^{\beta t}, \quad a^0 > 0, \beta > 0 \quad (8)$$

ここで、 $b, a^0, \beta$  は定数である。(8)は需要関数が時と共に上方に移動することを表わしている。

需要関数は既知であって、需要は常に満されなければならず、しかも生産物の貯蔵は不可能であると仮定されているから、企業は需要量に等しいだけの生産物を生産しなければならない。したがって

$$z = d \quad (9)$$

でなければならない。

更に、企業の費用関数については下のように考える。第  $j$  可変的要素の価格を  $w_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) とし、これは時を通じて一定であると仮定する。 $w$  から成る  $m$  次の列ベクトルを  $w$  で表わす。粗投資  $I(t)$  にかかる投資費用を  $v[I(t)]$  とする。また、第  $i$  資本財 1 単位の維持費用が単位時間当り  $l_i$  (一定) であるとし、その  $n$  次列ベクトルを  $l$  とする。このとき企業にとっての総費用は  $w'y + l'I + v(I)$  によって与えられる。ここで prime (,) は行列またはベクトルの転置を意味する。

かくして、企業が時点  $t$  において価格を  $p$  に設定し、 $I$  の粗投資を行うとき、収入の支出に対する超過分は  $pz - [w'y + l'I + v(I)]$  によって与えられる。企業にとっての問題は、計画期間の長さが  $T$  で、利子率が  $r$  (一定) であるとき、汎関数

$$\int_0^T \{pz - [w'y + l'I + v(I)]\} e^{-rt} dt$$

を極大にする価格政策、投資政策を求ることである。

2. 企業は各時点において生産物価格と粗投資の水準を決定しなければならないのであるが、このうち、価格の決定は、先にもうけた諸

仮定の下では比較的容易に行うことができる。

先に仮定したように、生産物に対する需要関数は既知で、企業は常に需要を満さなければならず、*inventory* は常にゼロでなければならぬから、企業は産出量と需要量が等しくなるように価格を決定しなければならない。そして、時点  $t$  における価格の決定は過去および将来における価格の決定から独立に行うことができ、しかも  $t$  における価格はその時の *operating profit* が極大になるように決定すればよいことになる。ところで、産出量水準が決定されると、価格は(7), (8), (9)によって一義的に決定されるから、価格決定の問題は産出量決定の問題におきかえることができる。

時点  $t$  における *operating profit* を  $R$  で表わすと、 $R$  は

$$R = p(z)z - w'y - l'x \quad (10)$$

によって定義することができる。したがってここでの問題は、(10)を生産関数の制約の下で極大にすることである。この場合時点  $t$  における<sup>(2)</sup> 資本ストックの水準は所与であることに注意すべきである。

*operating profit* が極大になるような産出量の決定の問題を、通常のやり方と同じように二つの段階に分けて説明する。はじめに、与えられた産出量を生産するための可変的要素の「最小費用結合」を求める。今、関数  $f$  が与えられた任意の資本ストックに対して、すべての正の  $y$  に関する連続な 2 階までの偏導関数をもつことを仮定し、 $\frac{\partial f}{\partial y_j} = f_j > 0 (j=1, 2, \dots, n)$  とすると、与えられた任意の産出量を生産するに必要な費用が、与えられた資本ストックの下で極小になる第 1 次条件は、*Lagrangean multiplier* を  $\lambda$  として得られる

$$G = w'y + l'x + \lambda [h^0 e^{\alpha t} f(x, y) - z] \quad (11)$$

を  $y$  と  $\lambda$  に関して偏微分してゼロとおいた方程式が成立することである。すなわち、

(2) したがって、(10)における  $l'x$  の項は最適産出量の決定には影響を与えないことになる。

$$w_j + \lambda h^0 e^{\alpha t} f_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (12)$$

$$h^0 e^{\alpha t} f(x, y) - z = 0 \quad (13)$$

である。一方、縁付きの行列式

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} & f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mm} & f_m \\ f_1 & \cdots & f_m & 0 \end{vmatrix}$$

を考えると、極小の第2次条件は、 $D$  の $(k+1)$  次 ( $2 \leq k \leq m$ ) の首座小行列式を  $D^{(k+1)}$  とすると、

$$(h^0 e^{\alpha t})^{k+1} \lambda D^{(k+1)} < 0 \quad (14)$$

が  $2 \leq k \leq m$  なるすべての  $k$  について成立することである。ところで第1次条件(12)から  $\lambda < 0$  であるから、(14)は  $D^{(k+1)}$  が  $k=2$  からはじまって順番に正、負、正、負、……の符号をとることである。

以下においてはこの条件が満されていることを仮定する。このとき、与えられた資本ストックの下で、与えられた産出量の生産物を生産する生産費用が極小になる可変的要素の組合せは、 $(m+1)$  個の方程式(12), (13)を  $(m+1)$  個の  $y$  と  $\lambda$  について解くことによって得られる。

この解は、 $x, z, w, t$  の関数として得られるはずである。しかしながら、ここで、それらのうち  $z$  を除くすべてを固定したままで、 $z$  のみを変動させると、与えられた資本ストック、可変的要素価格の下で、 $t$  における operating profit が極大になる産出量を決定することができる。

そこで、このような最小費用結合の下での費用関数を

$$C = c(z, x, w, t) + l'x$$

と表わす。このとき operating profit  $R$  は

$$R = p(z)z - c(z, x, w, t) - l'x \quad (15)$$

と表わされる。 $R$  が  $z$  について極大になるための第1次条件は

$$z \cdot \frac{\partial p(z)}{\partial z} + p(z) - \frac{\partial}{\partial z} c(z, x, w, t) = 0 \quad (16)$$

である。条件(16)は、(7), (8), (9)により次のように書きかえられる。

$$a^0 e^{\beta t} - 2bz - \frac{\partial}{\partial z} c(z, x, w, t) = 0 \quad (17)$$

極大の第 2 次条件は

$$2b + \frac{\partial^2}{\partial z^2} c(z, x, w, t) > 0 \quad (18)$$

が成立することである。

(18)の成立を仮定して(17)を  $z$  について解くと, operating profit を極大にする産出量が得られる。この産出量は  $x, w, t$  の関数である。そこで, このような産出量を

$$z = z(x, w, t) \quad (19)$$

と表わす。

このとき, operating profit 極大の生産物価格は (7), (8), (9) から  $z(x, w, t)$  に応じて

$$\begin{aligned} p &= a^0 e^{\beta t} - bz(x, w, t) \\ &= p(x, w, t) \end{aligned} \quad (20)$$

と決定される。

かくして, 時点  $t$  における極大の operating profit は

$$R = \pi(x, w, t) - l'x \quad (21)$$

の形に表わされる。

3. 前節でのべたことにより, 今や企業にとっての問題は, 汎関数

$$J = \int_0^T [\pi(x, w, t) - l'x - v(I)] e^{-rt} dt \quad (22)$$

を

$$\dot{x} = I - \delta x \quad (23)$$

$$x(0) = x^0 \quad (24)$$

の制約の下に極大にするような投資政策を求めることがとなる。

この問題は変分法の問題であるが, Pontryagin 等によって開発された maximum principle [8] にしたがえば下のように定式化することができる。

資本ストックのベクトル  $x(t)$  は maximum principle でいうところの state variables のベクトルであり, 粗投資のベクトル  $I(t)$  は control

vector である。

われわれは  $t=T$  における資本ストックについては何も制約を与えていないから、この問題は、いわゆる fixed time で free right-hand endpoint の nonautonomous system の問題として扱われる。<sup>(3)</sup>

ここでは粗投資が非負である場合について考える。すなわち

$$I(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (25)$$

そして  $I(t)$  が piecewise continuous であることを仮定する。<sup>(4)</sup>

今、新しい state variable として

$$x_0 = \int_0^t [\pi(x, w, t) - l'x - v(I)] e^{-rt} dt \quad (26)$$

を導入する。このとき

$$\dot{x}_0 = [\pi(x, w, t) - l'x - v(I)] e^{-rt} \quad (27)$$

$$x_0(0) = 0 \quad (28)$$

である。

更に、新しいもう一つの state variable として、

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad (29)$$

であって、初期条件

$$x_{n+1}(0) = 0 \quad (30)$$

を満足する変数  $x_{n+1}$  を導入する。(29)と(30)とから、明らかに、 $x_{n+1} \equiv t$  である。

このとき、極大化さるべき汎関数  $J$  は

$$J = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x_i(T) \quad (31)$$

と変形される。ただし、

$$a_i = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i=1, 2, \dots, n+1 \end{cases} \quad (32)$$

である。

(3) 以下の議論は主として Pontryagin 等[8]の定理 7 によっている。

(4) 不連続点  $\tau$  で finite limits が存在すること、

$$I(\tau-0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t < \tau}} I(t), \quad I(\tau+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t > \tau}} I(t).$$

かくして、問題は、(32)の条件の下にある(31)を、(23), (24), (27), (28), (29), (30)の制約の下で極大にする  $I(t)$  を領域(25)から求めることがある。

今、ゼロでない連続な補助変数  $\varphi_i(t)$  の  $(n+2)$  次元の列ベクトルを  $\varphi(t)$  で表わし、関数  $H$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H[\varphi(t), x(t), x_{n+1}(t), I(t)] \\ = & \varphi_0 [\pi(x, w, x_{n+1}) - l'x - v(I)] e^{-rx_{n+1}} \\ & + \sum_{i=1}^n \varphi_i (I_i - \delta_i x_i) + \varphi_{n+1} \end{aligned} \quad (33)$$

このとき、補助変数  $\varphi(t)$  は次の方程式を満足しなければならない。

$$\dot{\varphi}_0 = 0 \quad (34)$$

$$\dot{\varphi}_i = - \left[ \varphi_0 \left( \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - l_i \right) e^{-rt} - \delta_i \varphi_i \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

$$\dot{\varphi}_{n+1} = - \varphi_0 \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} - r [\pi - l'x - v(I)] \right) e^{-rt} \quad (36)$$

$$\varphi_i(T) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i=1, 2, \dots, n+1 \end{cases} \quad (37)$$

ところで(34)と(37)から、

$$\varphi_0(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq T \quad (38)$$

したがって、(33), (35), (36)はそれぞれ次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} H = & [\pi(x, w, x_{n+1}) - l'x - v(I)] e^{-rx_{n+1}} \\ & + \sum_{i=1}^n \varphi_i (I_i - \delta_i x_i) + \varphi_{n+1} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\dot{\varphi}_i = - \left[ \left( \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - l_i \right) e^{-rt} - \delta_i \varphi_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

$$\dot{\varphi}_{n+1} = - \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} - r [\pi - l'x - v(I)] \right) e^{-rt} \quad (41)$$

maximum principle にしたがえば、 $I(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  が条件(25)を満す piecewise continuous なベクトル関数であるとき、(31)で与えられる  $J$  が初期条件(24), (28), (30)から出発して(23), (27), (29)の経路をとって極大になるためには、次の条件が成立することが必要である。 すなわち、 $J$  が極大になるためには、(34), (35), (36), (37)を満足するゼロでない連続なベクトル関数  $\varphi(t)$  が存在すること、および(33)で与えられる関数が  $0 \leq t \leq T$  なるそれぞれの  $t$  に対して極大になるような control vector

$I(t)$  が選ばれることが必要である。

最適な control vector が求められて、それが  $I^*(t)$  であったとする。もし  $I^*(t)$  が(25)で与えられる可能な control の集合の内点ならば、 $J$  が  $I(t)$  に関して極大であるための必要条件は

$$\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \quad (42)$$

なることである。最適な control vector  $I^*(t)$  は(42)を  $I(t)$  について解くことによってか、あるいは上の集合の境界点の中から探すことによって得られる。

さて、条件(42)は(39)を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial I_i} &= -e^{-rt} \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} + \varphi_i = 0 \\ \varphi_i &= e^{-rt} \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (43)$$

が得られる。

方程体系(23), (40), (43)と境界条件(24), (37)を用いて  $\varphi_i(t)$ ,  $x_i(t)$ ,  $I_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を求めれば、最適投資  $I_i^*(t)$  とそれに応じる最適資本ストック  $x_i^*(t)$  が得られる。

ところで(43)の両辺を  $t$  について微分すると

$$\dot{\varphi}_i = \left[ \sum_{j=1}^n \dot{I}_j \frac{\partial^2 v(I)}{\partial I_i \partial I_j} - r \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} \right] e^{-rt}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

が得られる。(43)と(44)を(40)に代入すると、

$$\sum_{j=1}^n \dot{I}_j \frac{\partial^2 v(I)}{\partial I_i \partial I_j} - (r + \delta_i) \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} = l_i - \frac{\partial \pi(x, w, t)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (45)$$

が成立し、特に  $i \neq j$  に対して  $\frac{\partial^2 v(I)}{\partial I_i \partial I_j} = 0$  ならば、

$$\dot{I}_i \frac{\partial^2 v(I)}{\partial I_i^2} - (r + \delta_i) \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} = l_i - \frac{\partial \pi(x, w, t)}{\partial x_i}$$

であるから、

$$\dot{I}_i = \left[ (r + \delta_i) \frac{\partial v(I)}{\partial I_i} + l_i - \frac{\partial \pi(x, w, t)}{\partial x_i} \right] / \frac{\partial^2 v(I)}{\partial I_i^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

となる。

最適投資政策  $I^*(t)$  は(45)または(46)を満足する。

4. 投資費用関数  $v[I(t)]$  が次のような形で与えられる場合を考えよう。

$$v[I(t)] = \sum_{i=1}^n v_i I_i(t) \quad (47)$$

ここで  $v_i$  は第  $i$  資本財への投資 1 単位当たりの費用であって、時を通じて一定であると仮定する。このとき関数  $H$  は  $I_i$  の 1 次関数となるから、 $\varphi_i - v_i e^{-rt}$  がある  $i$  について正となるとき、 $H$  はその  $i$  に対応する  $I_i$ <sup>(5)</sup> を増大せしめると、どこまでも増大する。したがってこの場合は  $H$  の  $I(t)$  に関する極大値は存在しないことになる。

そこで、時点  $t$ において  $H$  の極大値が存在するためには

$$\varphi_i - v_i e^{-rt} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

でなければならない。

(48)がすべての  $i$  に対して等号で成立するときには、 $H$  は  $I(t)$  の値のいかんにかかわらず一定値をとる。

また、すべての  $i$  に対して(48)が不等号で成立するときには、 $H$  は  $I(t)=0$  に対して極大になる。

更に、 $i$  の中に(48)を等号で成立せしめるものと、不等号で成立せしめるものとがある場合には、すなわち、

$$\begin{aligned} \varphi_i - v_i e^{-rt} &< 0 & \text{for } i = 1, 2, \dots, s \\ \varphi_i - v_i e^{-rt} &= 0 & \text{for } i = s+1, \dots, n \end{aligned} \quad (49)$$

が成立するときには、 $H$  は  $I_i(t)=0$ , ( $i=1, 2, \dots, s$ ) のとき極大になる。このとき、 $I_i(t)$ , ( $i=s+1, \dots, n$ ) は非負の任意の値をとることができる。

先ず(48)がすべての  $i$  について等号で成立する場合について考える。

このとき  $\varphi_i = v_i e^{-rt}$  であるから、 $\dot{\varphi}_i = -rv_i e^{-rt}$  である。これらの関係を(40)に代入すると

---

(5)  $I(t)$  に関する制約が  $I(t) \geq 0$  であることによる。

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} - l_i = (r + \delta_i)v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

が得られる。したがって(50)が成立するような時点  $t$  における最適資本ストックは(50)を解いて得られる。これを  $x^*(t)$  とすると、 $t$  における粗投資は資本ストックを  $x^*(t)$  ならしめるように定めればよいことになる。

ただし、 $t=0$ において  $x^*(0) > x^0$  ならば、 $t=0$ における最適投資政策は各々の資本ストックの水準をその最適水準に直ちに引きあげることである。

またある  $i$  に対して  $x_i^*(0) < x_i^0$  ならば、最適投資政策は、その資本ストックの余剰がなくなるまで粗投資をゼロとすることである。

(48)がすべて不等号で成立するような  $t$  における最適投資政策は  $I(t) = 0$  とすることである。

(49)が成立するような場合には上の二つの場合を混合したような投資政策が最適になる。

### 参考文献

- [1] K. J. Arrow; "Optimal Capital Adjustment," in Arrow, Karlin & Scarf (eds): *Studies in Applied Probability and Management Science*, Stanford Univ. P. 1962.
- [2] K. J. Arrow, M. Beckmann & S. Karlin; "Optimal Expansion of the Capacity of the Firm," in Arrow, Karlin & Scarf (eds): *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford Univ. P. 1958.
- [3] P. J. Dhrymes; "On Optimal Advertising Capital and Research Expenditures under Dynamic Conditions," *Economica*, August, 1962.
- [4] R. Eisner & R. H. Strotz; "Determinants of Business Investment," in Suits et al: *Impacts of Monetary Policy*, Prentice-Hall, 1963.
- [5] A. S. Manne; "Capacity Expansion and Probabilistic Growth," *Econometrica*, October, 1961.
- [6] 村田安雄: 企業の最適資本政策——Arrow 教授の所見, 商大論集40年10月。
- [7] M. Nerlove & K. J. Arrow; "Optimal Advertising Policy Under Dynamic Conditions," *Economica*, May, 1962.

- [ 8 ] L. S. Pontryagin et al.; *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1962.
- [ 9 ] V. L. Smith; *Investment and Production*, Harvard Univ. P. 1961.
- [10] E. Zabel; "Efficient Accumulation of Capital of the Firm," *Economica*, January–April, 1963.