<研究ノート>不確実性の下における企業の最適生産量

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 前田, 英昭 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00002227

不確実性の下における企業の最適生産量

前　田　英　昭

1. 序

競争的市場にある企業の直面する不確実性 (uncertainty) としてはいろいろのものが考えられる。たとえば，生産物に対する需要，生産物価格に関する不確実性，あるいは生産要素の価格，生産函数の exact な形に関する不確実性などはそのいくつかの例である。不確実性の下における企業の生産量決定にかかわるいくつかの局面については，多くの研究がなされている（たとえば Mills〔1〕, Nelson〔2〕など）。

ここでとり上げる問題は，生産物価格に関して不確実性が存在する場合における最適な生産量決定の問題であって，以下のノートはこの問題を，Raiffa and Schlaifer〔3〕によって，一般的な内容について展開された統計的決定理論の枠組の中で説明しようとするものである。

Section 2 では企業の行動原理と，効用函数を定義し，効用の評価に必要ないくつかの probabilily measures について説明すると共に，それらの諸点に関する仮定を明らかにする。Section 3 では，必要な probability measures を計算し，それを効用の評価に結びつけるための技術的な問題について概説する。Section 4 では Section 3 の結果を用いて最適生産量を決定する。

2. 効　用　の　評　価

ここで我々は分析の対象として下のような企業を考えよう。

この企業の生産物の市場は完全に競争的であって，この企業は 1 種

類の nonstorable な生産物を，その市場で相当に長い期間にわたって販売しているものとする。この生産物の価格は，極言すれば日々変動しそれに関する不確実性が存在するものと考える。そしてこの企業は下に定義するような効用函数に基いて，期待効用（expected utility）を最大にするような行動（生産量の決定）をするものと想定しよう。

企業の効用は "money" に関して線型であると仮定し，[1] 第 t 期における効用函数を

$$u_t = q_t x_t - \phi(x_t) \tag{1}$$

によって定義する。[2] ここで q_t は t 期において実現する生産物価格で，x_t は生産量である。又，$\phi(x_t)$ は生産量 x_t にかかわる（production）cost funition である。

効用函数(1)から明らかなように，生産と販売との間に lag はなく，t 期における生産物はその期に販売されるものと考えている。更に，簡単化のために，企業は生産要素の市場，生産の技術的諸条件などについては完全な知識をもっており，cost function $\phi(x_t)$ に関する不確実性は存在しないものと仮定する。生産物価格 q_t が現実にどの値をとるかについては企業は完全な知識をもたないものと考える。又その価格は競争的市場における価格であるから，企業の control から独立である。

そこで生産物価格を一つの確率変数と考えて，それが密度函数 $f(q_t|\Theta)$ をもつものと仮定しよう。ここにΘは parameters の（overtime に同一の）集合である。もし企業が密度函数 $f(q_t|\Theta)$ の parameters について知っていれば，すなわち，生産物価格の分布について完全な

（1） この企業は von Neumann and Morgenstern 〔4〕による cardınal utility の aaxioms に従うものとする。

（2） このような効用函数の形から見て，ここでことさら第 t 期の効用函数という言い方をする必要はないが，後において第（$t-1$）期までの生産物価格を先験的確率の基礎にしたときの議論をするので，そのためにこのような言い方をしておく。

知識をもっていれば，期待効用最大の生産量は，効用函数(1)を q_t の全域 Q について平均することによって得られる

$$\int_Q u_t f(q_t|\Theta)dq_t=\mu x_t-\phi(x_t) \qquad (2)$$

によって，簡単に求めることができる。ここで μ は q_t の平均値である。

ところが，問題は企業が parameters の集合 Θ について完全には知っていない場合であって，このような場合には，企業は(2)を用いることによって直ちに最適生産量を決定するというわけにはいかない。このノートはその様な場合における最適生産量決定の問題を扱うものである。

そこで parameters の集合 Θ についての知識を得ることが問題となるが，(3) そのために有効な一つの方法は，大雑把な言い方をすれば，過去における経験と（新しい）実験による information から Θ に関する知識を得ることである。(4)

企業は同種の生産物を過去相当の期間にわたって同一の市場で販売して来ており，生産物価格に関して第 t 期までに $(t-1)$ 回の経験を積んでいるものとしよう。このようにして得られた過去の生産物価格を $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{t-1}$ で表わす。

企業は又 t 期の生産量を決定するに際して新たに生産物市場について調査を行ない，生産物価格の密度函数の parameters に関して size n の sample を集めることができるものとし，n はあらかじめ決定された数であると仮定する。

これらの過去の経験と市場調査による sample から，それぞれ parameters の集合 Θ に関する知識が得られるはずである。

今 Θ に関して過去の経験から得られた知識を $w_t \epsilon W_t$ で表わし，市場調査による sample から得られた情報を $z \epsilon Z$ で表わすことにす

（3） 厳密にいえば，Θ のうち効用の評価に関係するものだけについての知識を得ればよい。

（4） 実験による information の得られない場合については後に述べる。

る。我々の問題は先ず第 1 に，w_t を基礎にして得られる parameters の prior distribution と sample distribution から posterior distribution を求めることである。

この種の問題においては，一般に，Cartesian product space $\Theta \times Z$ に対して joint probability $P_{\theta,z}$ が何らかの形で付与されることが必要である（ここで$\theta \epsilon \Theta$）。この joint probability が直接的に付与できれば，それから Θ の上のprior margnial probability $P_{\theta,z}$ が与えられたときの Θ の上の posterior conditional probability $P_{\theta|z}$, Z の上の marginal probability P_z, および conditional probability $P_{z|\theta}$ を決定することができるが，ここでは，先ず Θ に対して marginal probability を付与し，$\theta \epsilon \Theta$ なるそれぞれの θ に対して Z に conditional probability を付与することによって，joint probability を求め，その後で Z の上の marginal probability と Θ の上の conditional pro bability を求めるという方法をとればよい。(5)

今，parameters の集合 Θ のうち μ 以外のものは効用の評価に無関係であると考えて，(2)の右辺を $u(x_t, z^1, \mu)$ と表わせば，我々の問題は

$$E_{\mu|z^1}u(x_t, z^1, \mu)$$

を最大にするような生産量 x_t を production possibility set X_t の中から選ぶ問題となる。ここで $E_{\mu|z^1}$ は posterior conditional probability $P_{\mu|z^1}$ に関するもので sample information のうち μ に関する information z^1 が観察された後でのすべての μ に対する conditional expection を表わす。

かくして，我々の必要とする probability measure は $P_{\mu|z^1}$ であり，そのためには prior marginal probability P_μ と conditional prbability $P_{z^1|\mu}$ とが付与できればよいことになる。

（5） joint probability $P_{\theta,z}$ と P_θ, $P_{\theta|z}$, P_z, $P_{z|\theta}$ の間の計算の順序は逆にすることが可能であって，最初に P_z と $P_{\theta|z}$ から $P_{\theta,z}$ を求め，次に P_θ と $P_{z|\theta}$ を求めることもできる。

3. 確率の付与と充足統計量

上に述べたように，効用を評価するためには，先ず prior marginal probability P_{μ} と conditional probability $P_{z^1|\mu}$ を付与することが必要であって，それらが与えられれば posterior conditional probability $P_{\mu|z^1}$ を得ることができる。ここでは企業の μ に関する judgement を表わす prior probabiltiy P_{μ} が与えられたとき posterior probability $P_{\mu|z^1}$ の計算に便利な sufficient statistic を用いる問題を考えよう。(6)

さて，確率変数 μ の prior distribution が密度函数 $D'(\mu)$ をもち，与えられた μ に対する確率変数 z^1 の conditional distribution が密度函数をもつならば μ の posterior distibution は，Bayes の定理によって，下の条件(4)が成立するとき密度函数 D'' をもち，それは与えられた z^1 に対して μ において

$$D''(\mu|z^1)=D'(\mu)\cdot l(z^1|\mu)N(z^1) \tag{3}$$

の値をとる。(7) このように書くことのできる条件は，与えられた prior density $D'(\mu)$ に対する z^1 の marginal likelihood が正なること，すなわち

$$\int_M l(z^1|\mu)D'(\mu)d\mu>0 \tag{4}$$

である。尚(3)，(4)における $l(z^1|\mu)$ は z^1 の条件付密度函数の likelihood であり，(7)における M はすべての μ の集合である。又(3)における $N(z^1)$ は定数であって，条件

$$\int_M D''(\mu|z^1)d\mu=N(z^1)\int_M D'(\mu)l(z^1|\mu)d\mu=1 \tag{5}$$

によって定められる。

今 $K'(\mu)$ を，μ と共に変動する $D'(\mu)$ の一つの kernel とすると，(3)は次のように変形することができる。すなわち

(6) この section で用いる技術的な議論は Raiffa and Schlaifer〔3〕に負っている。

(7) 証明は後の Appendix (I).

$$D''(\mu|z^1)=D'(\mu)\cdot l(z^1|\mu)N(z^1)$$
$$=K'(\mu)\cdot\left[\int_M K'(\mu)d\mu\right]^{-1}\kappa(z^1|\mu)\rho(z^1)N(z^1) \quad (6)$$

ここで $\kappa(z^1|\mu)$ は与えられた μ に対する z^1 の likelihood の kernel であって，$l(z^1|\mu)$ は

$$l(z^1|\mu)=\kappa(z^1|\mu)\cdot\rho(z^1) \quad (7)$$

である。

(6)から，生産物価格の平均値 μ の posterior conditional densty $D''(\mu|z^1)$ の kernel は $K'(\mu)\cdot\kappa(z^1|\mu)$ であることがわかる。(6)の右辺のうち μ と共に変動しない部分，すなわち $\left[\int_M K'(\mu)d\mu\right]^{-1}\cdot\rho(z^1)N(z^1)$ の値は，与えられた z^1 に対して

$$\int_M D''(\mu|z^1)d\mu=1 \quad (8)$$

によって決定される。

以上によって，生産物価格の平均値 μ の posterior density を知るためには，prior density の kernel $K'(\mu)$ と，与えられた μ に対する z^1 の likelihood の kernel $\kappa(z^1|\mu)$ を知ればよいことが判明した。

次に，利用可能な sample information z_1 の「完全な」記述を用いた時と同じ μ の posterior distribution を導く sufficient statistic について考えよう。

今 y を r 次の Euclidean space Y の点と仮定し，すべての sample information z^1 の集合 Z^1 を Y へ移す mapping (又は random variable) を考える。(8) そのとき Z^1 の上の conditional probability $P_{z^1|\mu}$は，与えられた μ に対して Y の上の conditional probability を決定し，かくして，M の上の任意の与えられた prior density $D'(\mu)$ と，与えられた任意の y に対して，μ の posterior density function が Bayes の定理を用いることによって得られる。これを $D''(\mu|y)$ で表わす。

y は利用可能なすべての sample informations z^1 を集約したもの

(8) Z_1 は n 次元である。

であるが，もし二つの posterior density $D''(\mu|z^1)$ と $D''(\mu|y)$ とが，すべての z^1 について idential ならば，そのとき y は z^1 の sufficient description であるということができる。又 Y に含まれる任意の y が sufficient ならば，上の mapping そのものが sufficient であるということができる。ある mapping が sufficient であるかどうかは $Z^1 \times M$ の上の likelihood function が $Y \times M$ の上の kernel function k と Z^1 の上の residue function $\rho(z^1)$ との積として表わされるかどうかによって定まる。(9)

さて企業は市場調査によって確率変数 μ に関する size n の information を集めるものと想定したが，そのとき得られる観測値を $z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n$ とする。この data-generating process において，確率変数 $z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n$ は互いに独立であって，同一の分布をするものと考え，任意の大きさをもつ任意の sample に対して，sample size に依存しない固定された dimensionality をもつ sufficient statistic が存在する場合を考える。(10) このとき，sample $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ に関する sufficient statistic を y とし，二つの samples $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_a)$ と $(z^1{}_{a+1}, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ に関する sufficient statistic をそれぞれ $y^{(a)}$, $y^{(a')}$ とすると y は $y^{(a)}$ と $y^{(a')}$ とから求めることができ sample $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ の conditional likelihood の kernel は $k(y^{(a)}|\mu)\cdot k(y^{(a')}|\mu)$ となることが示される。(11) そして $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ の共通の密度函数が exponential な形のものであれば（又その時に限り） suffiicient statistic y

(9) Appendix (II) を参照。

(10) このことは，任意の二つの samples $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_a)$ と $(z^1{}_{a+1}, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ との joint conditional likelihood はその二つの sample の conditional likelihood の積となること，与えられた任意の size をもつ任意の sample $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ に対してその conditional likelihood の kernel が $k(y|\mu)$ となるような sufficient statistic が存在し，その dimensionality が sample size に依存しないことを意味する。我々の問題についてはこのような場合だけを考えればよい。

(11) Appendix (III)

は $y^{(a)}$ と $y^{(a')}$ の各 compoment を加え合わせることによって得られる。

ところで $k(y|\mu)$ は $Y\times M$ の上の kernel function であったが，これを parameter μ をもつ Y の上の函数と考えるかわりに，parameter y をもつ M の上の函数と考えて，y を parameser とする，M の上の密度函数 $g(\mu|y)$ を

$$g(\mu|y)=N(y)k(y|\mu) \tag{9}$$

によって定義する。このような M の上の密度函数は，kernel function $k(y|\mu)$ の，parameter y をもつ natural conjugate function と呼ばれる。ただし，函数 $g(\mu|y)$ が M の上で定義された密度函数であるためには，$g(\mu|y)$ がいたるところで非負であり，かつ M の全域にわたる積分が 1 でなければならない。(12)

さて前に述べたように，μ の prior density が $D'(\mu)$ で，y が，sufficient statistic $k(y|\mu)$ が与えられた μ に対する z^1 の likelihood の kernel ならば，与えられた y に対する確率変数 μ の posterior density の kernel は $D'(\mu)\,k(y|\mu)$ となる。又 y の dimensionality が固定的ならば sample $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ の distribution の kernel $k(y^{(a)}|\mu)$ と $k(y^{(a')}|\mu)$ とから得られる。

したがって，もし prior desity $D'(\mu)$ が parameter y' をもつ k の natural conjugate であって，すなわち，$y'\in Y$ に対して $k(y'|\mu)$ が $D'(\mu)$ の kernel であって，かつ y が sample の sufficient statistic ならば，先に二つの sample の conditional likelihood について述べた関係が prior density と sample の間について成立し，posterior density $D''(\mu|y)$ の kernel は，二つの kernel $k(y'|\mu)$ と $k(y|\mu)$

(12) k はすべての $\mu\in M$ に対する Y の上の kernel function であるからすべての $(y,\mu)\in Y\times M$ に対して非負，従って N が非負ならば $g(\mu|y)$ も非負である。又 k の M にわたる積分が存在して $[N(y)]^{-1}=\int_M k(y|\mu)d\mu$ ならば $\int_M g(\mu|y)d\mu=1$

の積となる。かくして normal prior density からは normal posterior density が結果し，与えられた prior density と sample とに対する posterior density が容易に得られる。

以上のように sample information z^1 に対して fixed dimensionality をもつ sufficient statistic y が存在し，M の上の prior probability P_μ が，Y の上の conditional probability $P_{y|\mu}$ に対して conjugate である場合には効用の評価は比較的容易に行うことができる。

4. 最 適 生 産 量

sample information z^1 の sufficient statistic y が存在するときには

$$E_{\mu|z^1}u(x_t, z^1, \mu)$$

は

$$E_{\mu|y}u(x_t, y, \mu) \tag{10}$$

と書きかえることができる。(10)を最大にする最適生産量 $x_t \in X_t$ を求めるための効用の評価は Section 3 に述べたことから次のような手順で行うのが便利である。

i) 先ず第1に prior probability P_μ と conditional probability $P_{y|\mu}$ を用いて，与えられた y に対する確率変数 μ の posterior density を計算する。この posterior density は prion density に対して conjugate であって，それと同じ数学的な形をしている。posterior density の parameters は prior density の parameters と sample statistic とから比較的容易に計算することができる。

ii) 確率変数 μ の posterior density を用いて，$x_t \in X_t$ なる各々の output decision の期待効用を計算する。

iii) 最後に期待効用を最大にする最適生産量を選択すればよい。

さて以下において確率変数の分布の型を特定し，実際に最適生産量を求めて見よう。

生産物価格は先に述べたように確率変数であって密度函数 $f(q_t|\Theta)$ をもつが，その parameters のうち，平均値 μ のみが未知の確率変数であって，効用の評価に関係し，他の parameters は企業にとって既知であって効用の評価に無関係であるとしよう。したがって問題は先ず μ の posterior density を求めることである。

市場調査によって μ に関する n 個の観測値$(z^1{}_1, z^1{}_2, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ が得られたとする。これらの z^1 を確率変数と考えるとき，それらは互に独立で，parameters (μ, h) をもつ同一の正規分布をするものと仮定する。ここで，μ は平均値，h は precision (分散の逆数) であって，h は既知であると仮定する。この正規分布の密度函数を $f_N(z^1|\mu, h)$ で表わせば，

$$f_N(z^1|\mu, h)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}h(z^1-\mu)^2\right]h^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

である。このような独立の normal process が n 個の観測値$(z^1{}_1, \cdots\cdots z^1{}_n)$ をとる sample likelihood は(11)から

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\exp\left[-\frac{1}{2}nh\Sigma(z^1{}_i-\mu)^2\right]h^{\frac{1}{2}n} \tag{12}$$

で与えられる。

ここで統計量mを

$$m\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z^1{}_i \tag{13}$$

によって定義すると (12)は

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\exp\left[-\frac{1}{2}h\Sigma(z^1{}_i-m)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}nh(m-\mu^2\right]h^{\frac{1}{2}n} \tag{14}$$

と書くことができる。(14)において h は既知であるから μ と共に変動する sample likelihood の kernel function $k(y|\mu)$ は

$$\exp\left[-\frac{1}{2}nh(m-\mu)^2\right] \tag{15}$$

である。(15)から明らかに sufficient statistic y は (m, n) である。

一方(15)の natural conjugate function は(m, nh) を parameter とする正規分布 $f_N(\mu|m, nh)$ であって，その kernel は

$$\exp\left[-\frac{1}{2}nh(\mu-m)^2\right] \tag{16}$$

で与えられる。企業が競争市場における過去の経験 w_t から，(m', n')

を sufficient statistic とする上のような密度函数を確率変数 μ に対して付与することができるならば，μ の prior density は

$$D'(\mu)=f_N(\mu|m', n'h)$$

と書くことができて，その kernel function は

$$\exp\left[-\frac{1}{2}n'h(\mu-m')^2\right] \tag{17}$$

となる。

かくして μ の posterior density は下の様に求められる parameters $(m'', n''h)$ をもつ normal density $f_N(\mu|m'', n''h)$ であって，その kernel は

$$\exp\left[-\frac{1}{2}n''h(\mu-m'')^2\right] \tag{18}$$

である。但し (m'', n'') は (m, n) と (m', n') とから次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} m''&=\frac{m'n'+mn}{n'+n} \\ n''&=n'+n \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

効用を最大にする x_t を選ぶために次に為すべきことは

$$\int_M f_N(\mu|m'', n''h)[\mu x_t-\phi(x_t)]d\mu \tag{20}$$

を求めることである。(20)を計算すると，

$$m''x_t-\phi(x_t) \tag{21}$$

が得られる。ここでは m'' (19)の様に決定される。cost function $\phi(x_t)$ が連続で少くとも 2 回微分可能ならば，最適生産量 x_t は

$$\frac{d^2\phi(x_t)}{dx_t^2}>0$$

のとき，(21)をゼロとおいた方程式

$$mx_t-\phi(x_t)=0 \tag{22}$$

を x_t について解いて得られる。

最後に，以上においては市場調査によって sample が得られるという仮定の下で議論して来たが，それが不可能な場合についてふれておきたい。このような場合においては利用できる情報は過去の経験によるものしかないので，μ の prior density $f_N(\mu|m', n'h)$ だけで効

用を評価せざるを得ない。そのとき，(20)および(22)に対応して

$$\int_M f_N(\mu|m', n'h)[\mu x_t - \phi(x_t)]d\mu \tag{23}$$

$$m'x_t - \phi(x_t) = 0 \tag{24}$$

が得られ，最適生産量は(24)を x_t について解くことによって求められる。

Appendix

(I)　$l(z^1|\mu)$ が連続の場合だけについて述べる。すべての μ の集合を M, その任意の部分集合を M_0 とする。又すべての z^1 の集合を Z^1, その部分集合を $Z^1{}_0$ とする。$Z^1{}_0$ が interval (z^1, z^1+dz^1) にあることを $Z^1{}_0(dz^1)$ で表わす。

Bayes の定理により，与えられた $Z^1{}_0$ に対する M の上の posterior conditional probability $P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\}$ は $M\times Z^1$ の上の joint probability $P_{\mu,z^1}\{M_0, Z^1{}_0\}$ と Z の上の marginal probability $P_{z^1}\{Z^1{}_0\}$ によって，

$$P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\} = \frac{P_{\mu,z^1}\{M_0, Z^1{}_0\}}{P_{z^1}\{Z^1{}_0\}} \tag{1}$$

と表わされる。M の上の prior probability P_θ と，与えられた M_0 に対する Z^1 の上の conditional probability $P_{z^1|\mu}$ が共に密度函数をもてば，

$$P_{\mu,z^1}\{M_0, Z^1{}_0\} = \int_{M_0}\int_{Z^1{}_0} D'(\mu)l(\xi|\mu)d\xi d\mu$$

となり，これは平均値の定理によって

$$P_{\mu,z^1}\{M_0, Z^1{}_0\} = \int_{M_0} D'(\mu)l(z^{1\prime}|\mu)|dz^1|d\mu \tag{2}$$

と書ける。ここで $z^{1\prime}$ は $Z^1{}_0(dz^1)$ に属するある z^1 で，$|dz^1|$ は $Z^1{}_0(dz^1)$ の volume である。

同様にして $P_{z^1}\{Z^1{}_0\}$ は

$$P_{z^1}\{Z^1{}_0\} = \int_M D'(\mu)l(z^{1\prime\prime}|\mu)|dz^1|d\mu \tag{3}$$

と書くことができる。ここで $z^{1\prime\prime}\in Z^1{}_0(dz^1)$。(2)，(3)を(1)に代入すると

$$P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\}=\frac{\int_{M_0}D'(\mu)l(z^{1\prime}|\mu)|dz^1|d\mu}{\int_{M}D'(\mu)l(z^{1\prime\prime}|\mu)|dz^1|d\mu} \tag{4}$$

(4)において $dz^1\to 0$ なる極限をとれば，$z^{1\prime}$ $z^{1\prime\prime}$ が共に z^1 に収束するから，

$$\lim_{dz^1\to 0} P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\}=\frac{\int_{M_0}D'(\mu)l(z^1|\mu)d\mu}{\int_{M}D'(\mu)l(z^1|\mu)d\mu}$$

が得られる。

(Ⅱ)　Z^1 から Y への mapping を $\tilde{y}$ で表わす。

$$l(z^1|\mu)=k[\tilde{y}(z^1)|\mu]\rho(z^1) \tag{1}$$

ならば $\tilde{y}$ は sufficient である。

今 $Z^1{}_0=\tilde{y}^{-1}(y)$ となるような Z^1 の subset $Z^1{}_0$ をとる。このとき $Z^1{}_0$ が与えられたときの M の上の posterior probabilty $P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\}$ は $P_{\mu|y}\{M_0|\tilde{y}=y\}$ となる。一方 z^1 を確率変数と考えてそれを明示するために $\tilde{z}^1$ と書けば

$$P_{\mu|z^1}\{M_0|Z^1{}_0\}=EP_{\mu|z^1}\{M_0|\tilde{z}^1\}$$

となる。ここで記号 E は $Z^1{}_0$ が与えられたときの Z^1 上の probability に関する expection である。

(1)が成立しているとき $P_{\mu|z^1}\{M_0|z^1\}$ の kernel は $\int_{M_0}D'(\mu)k[\tilde{y}(z^1)|\mu]d\mu$ となり，これはすべての $z^1\in\tilde{y}^{-1}(y)$ に対して（すなわち $\tilde{y}(z^1)=y$ なるすべての z^1 に対して）同一である。したがって

$$P_{\mu|y}\{M_0|\tilde{y}=y\}=P_{\mu|z^1}\{M_0|z^1\},\quad z^1\in\tilde{y}^{-1}(y)$$

となり，これは $\tilde{y}$ が sufficient であることを示している。

(Ⅲ)　sample $(z_1{}^1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ の conditional likelihood が $l_n(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n|\mu)$ のとき，任意の二つの samples $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_a)$ と $(z^1{}_{a+1}, \cdots\cdots z^1{}_n)$ の joint likelihood は $l_a(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_a|\mu)\cdot l_{a^1}(z^1{}_{a+1}, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ となること，および，与えられた任意の n と任意の sample $(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ に対して，$l_n(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)$ の kernel が $k(y|\mu)$ となるような，函数 k と $\tilde{y}_n(z^1{}_1, \cdots\cdots, z^1{}_n)=y=(y_1, \cdots\cdots, y_s)$ なる y が

存在することを仮定する。尚 s は n に依存しない数である。

$y^{(a)}=\tilde{y}_a(z^1{}_1,\cdots\cdots,z^1{}_a)$, $\tilde{y}^{(a')}=y_{a1}(z^1{}_{a+1},\cdots\cdots,z^1{}_n)$ とすれば，上の仮定の下で次のような binary operation * を見つけることができる。すなわち

$$y^{(a)} * y^{(a')}=y^*\equiv(y_1{}^*,\cdots\cdots,y_s{}^*)$$

そしてこれは $l_n(z^1{}_1,\cdots\cdots,z^1{}_n|\mu)$ の kernel が $k(y^*|\mu)$ で，$k(y^*|\mu)$ の kernel が $k(y^{(a')}|\mu)\cdot k(y^{(a)}|\mu)$ となる性質をもっている。

References

〔1〕 Mills, E. S., "Expectations, Uncertainty and Inventory Fluctuations," Review of Economic Studies, 1954-55, pp. 15-22

〔2〕 Nelson, R. R., "Uncertainty Prediction and Competitive Equilibrium," Quarterly Journal of Economics, Feb. 1961

〔3〕 Raiffa, H. and R. Schlaifer, Applied Statistical Decision Theory, Harvard Univ. 1961

〔4〕 von Neumann, J. and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, 2nd ed. Princeton Univ. 1947