企業の最適な生産・投資政策

企業の最適な生産・投資政策

前　田　英　昭

1　序

この小論は，生産物市場にある種の不確実性が存在する場合における企業の最適な生産・投資政策を Arrow-Harriş-Marschak 型の最適在庫政策（Arrow, Harris & Marschak〔4〕, Arrow, Karlin & Scarf〔2〕）の最も簡単なものと同じような形で求めようとしたものであって，Arrow, Beckman & Karlin〔3〕, Arrow〔1〕, Smith〔8〕,〔9〕,〔10〕Zabel〔11〕, Holt, Modigliani & Muth〔6〕, Modigliani & Hohn〔7〕等の分析の一つの variant である。

不確実性の下における投資・生産政策を総合的に分析するためには，生産物，投入物の市場における価格，需要量，供給量等に関する不確実性，生産技術の変化，利用可能な資金の制約等多くの要因を考慮に入れなければならないが，ここではその一部だけを考慮しているにすぎない。したがって以下の小論は今後の展開への一つの方向を探ったものにすぎず，多くの問題を残したままである。

2　定義と仮定

ここでは次のような企業を考える。すなわち，この企業は1種類の生産物を生産し，それを販売して得られる利潤を，いくつかの費用と需要条件の下で最大化しようとしているものと仮定する。この最大化は多段階にわたるものである。この企業は各段階の初めに次の2種類の決定を行なうものとする。計画期間全体にわたる利潤を最大化するためにその段階において生産すべき産出量と購入すべき資本の大きさである。これらの決定は即座に達成されるものと仮定する。この仮定は現実的には稍きびしい仮定で

あるが簡単化のために，先ずこのように仮定しておく。したがって，各段階における生産にはその段階の初めになされた投資決意によって獲得された資本も又利用可能となる。以下における目的は利潤を最大にするために最適な生産政策，投資政策を explicitly に表わすことである。

簡単なモデルを中心として，いくつかの一般化の方向が示される。

分析の tool としては dynamic programming を用いるがその場合の定式化が high dimensional なものとなるのを防ぐために高々 2 種類の資本を考える。これらの資本はそれぞれ同一の type のものから成るとし，年令のみが異なると考えよう。種々の年齢をもつ資本財を用いて生産を行う場合の生産費と，それらの維持費は年齢から独立であると仮定する。したがって，利用可能な資本ストックは種々の年齢をもつ資本財の和として表わすことができる。又一度購入した資本財はその耐用年齢中に廃棄することはできないものとし，各 stage の終りに一定部分だけが摩滅するものと考える。この部分の salvage value はゼロである。又生産物についても無償の廃棄は行われず，生産物は各 stage の終りに一定の disposal value で処分されるか，又は inventory として次の stage に持ちこされるものとする。

ある stage の出発点において企業が既に保有している資本ストックを x とし，この stage の初めにおける購入の結果利用可能な資本ストックが y になったとしよう。購入された資本財は $(y-x)$ で表わされる。この購入のための費用は購入量に比例するものと仮定し，a を正の定数として $a(y-x)$ で表わす。企業は利用可能な資本ストック y を用いてこの stage における生産を行なうわけであるが，そのとき企業は与えられた各々の y と産出量に対して生産量が最小になるような生産方法を採用するものと考える。そのような生産費用函数を $g(y,v)$ で表わす。ここで v は産出量である。y 単位の資本ストックを 1 stage 維持するための費用――維持費は m を正の定数として my で表わされるものと仮定する。各 stage の終りに摩擦する資本ストックの部分を λy, $(0<\lambda<1)$ とすると，次の stage に持ちこされる資本ストックは $(y-\lambda y)$ となる。

生産物については，ある stage で売れ残った部分が次の stage 又はそれ

以後まで inventory として保持されると考えるかどうかに問題の複雑さが大きく影響される。以下における基本的なモデルでは，売れ残りの生産物は stage の終りにおいてある disposal value で処分されてしまうものと考え，その disposal value を d としている。一般化したモデルでは後に見るように生産物の inventory としての持ちこしを認めている。生産物の次期以後への持ちこしを認めない場合には，次の stage の initial inventory はゼロとなり，ある stage における産出量の決定は将来における生産，投資の決定から独立となって問題が非常に扱い易いものになる。

もし生産物の持ちこしを認めるならば，initial inventory が z のとき，販売可能な生産物は全体で $(z+v)$ となる。

需要については次のように考える。すなわち需要量は確率変数であって，その密度函数は既知であるものと仮定する。各 stage における密度函数を $\varphi(s)$ で表わし，これは各 stage において同一で，互に独立であると仮定する。$\varphi(s)ds$ は需要量 S が s と $(s+ds)$ の間にある確率である。密度函数 $\varphi(s)$ については次のことを仮定する。

$$\varphi(s)>0,\quad \int_0^\infty \varphi(s)ds=1,\quad \int_0^\infty s\varphi(s)ds<\infty$$

生産物を inventory として 1 stage の間保持するためには保管費用がかかり，又利用可能な生産物の量以上の需要量がある場合には penalty cost がかかるものと考える。1 stage 当りの v 単位の保管費用と penalty cost はそれぞれ次のように表わされるものと仮定する。すなわち，$h\cdot v$, $p\cdot v$ である（h, p は正の定数）。

生産費，資本の購入費，維持費，保管費，penalty cost の諸函数は毎期同一であると仮定する。又超過需要は backlog されないものと考える。

生産物の価格は w とし毎期同一であると仮定する。

最後に利潤は total revenue と total cost の差であると定義する。

二八五

3 Single-Stage Model

最適投資政策を求めるモデルとしては single stage model は不適当であるが，先ずこれを分析の手はじめとしよう。尚，single stage の問題は，計画期間が多数期間，例えば n 期間にわたるものであるようなときの最後

の期間に関する問題であると解釈することが可能である。

（I） 利用可能な生産物の売れ残りが生じた場合には disposal price d で処分する場合を先ず考える。使用される資本は1種類であるとする。資本が1種類である場合の生産費用函数 $g(y,v)$ に関して，一貫して次の性質を仮定する。

$$g(y,0)=0 \qquad \text{for all } y>0$$
$$g_v(y,v)>0,\ g_{vv}(y,v)>0,\ g_y(y,v)<0,\ g_{yy}(y,v)>0$$
$$g_{vy}(y,v)=g_{yv}(y,v)<0 \qquad \text{for all } y>0,\ v>0$$

さて資本の initial stock か x であるとすると，期待利潤の最大値は x の函数となる。これを $\pi(x)_I$ と表わす。この場合生産物の initial inventoryはゼロであると考えればよい。

産出量を v とする決定がなされたとすると期待収入は，生産物価格が w であるから

$$w\int_0^v s\varphi(s)ds+wv\int_v^\infty \varphi(s)ds+d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds \tag{3.1}$$

となり，一方期待費用は，資本ストックの水準が y に引きあげられたとするとき

$$a(y-x)+my+g(y,v)+h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds$$
$$+p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds \tag{3.2}$$

となる。

企業は(3.1)と(3.2)との差を最大にするような $y\geqq x, v\geqq 0$ を選択しようとするわけである。この差が最大になったときの期待利潤の値が $\pi(x)_I$ であり，それを与える y, v が最適な生産，投資政策を規定する。(3.1)と(3.2)の下で $\pi(x)_I$ は次の様に表わされる。

$$\pi(x)_I=\underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[w\int_0^v s\varphi(s)ds+wv\int_v^\infty \varphi(s)ds+d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds$$
$$-a(y-x)-my-g(y,v)-h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds$$
$$-p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds\Big] \tag{3.3}$$

(3.3) の右辺の括弧の中を v で偏微分してゼロとおくと，

$$w\int_v^\infty \varphi(s)ds+d\int_0^v \varphi(s)ds-g_v(y,v)$$
$$-h\int_0^v \varphi(s)ds+p\int_v^\infty \varphi(s)ds=0$$

書きかえると，

$$(w+p)-(w+p+h-d)\int_0^v \varphi(s)ds-g_v(y,v)=0 \tag{3.4}$$

一方，(3.3)の右辺の括弧の中を y で偏微分してゼロとおけば，

$$-(a+m)-g_y(y,v)=0 \tag{3.5}$$

最適な生産，投資政策は，もしそれが存在するならば，(3.4)，(3.5)を連立させて解いた根として与えられるか，又は y, v の限界値によって与えられるはずである。

(3.4)を v に関して解いて(3.5)に代入するという手順をとることにする。

$v=0$ のとき g_v はすべての $y>0$ に対してゼロであると仮定すれば，任意の与えられた $y>0$ に対して(3.4)は $v>0$ の範囲に根をもち，それは y の増加函数となる。この根を

$$v=v(y) \tag{3.6}$$

とする。

この根は $\lim_{y\to+0} v(y)=0$ で，$d-h\geqq 0$ ならば $\lim_{y\to\infty} v(y)=\infty$，$d-h<0$ ならば $\lim_{y\to\infty} v(y)=\tilde{v}$ となる。ここで $\tilde{v}$ は

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^v \varphi(s)ds=0 \quad (d-h<0) \tag{3.7}$$

の根である。尚 $y=x$ のときの $v(y)$ を $v(x)$ とする。勿論 $v(x)>0$ である。

(3.6)を(3.5)に代入すると，

$$-(a+m)-g_y(y,v(y))=0$$

この方程式は，

$$\lim_{y\to\infty} g_y(y,v(y))>-(a+m),\ \lim_{y\to+0} g_y(y,v(y))<-(a+m) \tag{3.8}$$

ならば $y>0$ の範囲に唯一つの根をもつ。それを $\bar{y}$ とする。$\bar{y}$ に対応する $v(y)$ の値を $\bar{v}$ とする。これらの y, v の値の組 $\bar{v}, \bar{y}$ は，(3.3)の右辺の括弧内の函数の2次導函数に関して適当な条件が成立するとき，$y>0, v\geqq 0$

における唯一の最大値を与える。[1]

したがってこの場合の最適政策は一組の critical numbers によっ次のように与えられる。

$x \leqq \bar{y}$ ならば

$$\begin{cases} y=\bar{y} & (\text{資本の購入量 } \bar{y}-x) \\ v=\bar{v} & (\text{産　出　量 } \bar{v}) \end{cases}$$

$x > \bar{y}$ ならば

$$\begin{cases} y=x & (\text{資本の購入量 ゼロ}) \\ v=v(x) & (\text{産　出　量 } v(x)) \end{cases}$$

これらの最適政策を採用した場合の期待利潤の最大値は次のようになる。

$x \leqq \bar{y}$ ならば

$$\begin{aligned} \pi(x)_I = & w\int_0^{\bar{v}} s\varphi(s)ds + w\bar{v}\int_{\bar{v}}^{\infty}\varphi(s)ds + d\int_0^{\bar{v}}(\bar{v}-s)\varphi(s)ds \\ & -a(\bar{y}-x)-m\bar{y}-g(\bar{y},\bar{v})-h\int_0^{\bar{v}}(\bar{v}-s)\varphi(s)ds \\ & -p\int_{\bar{v}}^{\infty}(s-\bar{v})\varphi(s)ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

$x > \bar{y}$ ならば

$$\begin{aligned} \pi(x)_I = & w\int_0^{v(x)} s\varphi(s)ds + wv(x)\int_{v(x)}^{\infty}\varphi(s)ds \\ & +d\int_0^{v(x)}(v(x)-s)\varphi(s)ds \\ & -mx-g(x,v(x))-h\int_0^{v(x)}(v(x)-s)\varphi(s)ds \\ & -p\int_{v(x)}^{\infty}(s-v(x))\varphi(x)ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

（Ⅱ）次に資本は1種類で，期末の生産物の在庫水準は正になり得る場合を考えよう。期末における正の在庫水準については一応それからは revenue は発生しないものとする。この場合（3.3）に対応する式は次のようになる。すなわち，資本の initial stock x，生産物の initial inventory z のとき，期待利潤の最大値を $\pi(x,z)_{II}$ とすると，利用可能な生産物の量は $(v+z)$ であるから，

（1）（3.3）の右辺の括弧内を v, y でそれぞれ2回偏微分して得られる函数は常に負であるから2次条件の一部が満されることはただちに判明する。

$$\pi(x,z)_{II}=\underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[w\int_0^{v+z}s\varphi(s)ds+w\int_{v+z}^{\infty}(v+z-s)\varphi(s)ds$$
$$-a(y-x)-my-g(y,v)-h\int_0^{v+z}(v+z-s)\varphi(s)ds$$
$$-p\int_{v+z}^{\infty}(s-v-z)\varphi(s)ds\Big] \tag{3.11}$$

となる。右辺の括弧の中を v, y で偏微分してゼロとおけばそれぞれ

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds-g_v(y,v)=0 \tag{3.12}$$

$$-(a+m)-g_y(y,v)=0 \tag{3.13}$$

これを連立させて解く。(Ⅰ)の場合と同様にして(3.12)を v について解き，それを(3.13)に代入して根を求めればよい。

(3.12)は

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^{z}\varphi(s)ds\geqq 0 \tag{3.14}$$

を満足するような範囲に z があるとき，任意の $y>0$ に対して $v\geqq 0$ の範囲に唯一つの根をもつ。以下においては z は(3.14)を満足する範囲にあるものと仮定する。[2] その時 (3.12) の根は y, z の函数となる。それを $v=v(y;z)$ とする。そしてこの $v(y;z)$ は，与えられた z に対して y の増加函数となるが，$\lim_{y\to+0}v(y;z)=0, \lim_{y\to\infty}v(y;z)=\tilde{v}(z)$ である。ここで $\tilde{v}(z)$ は

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds=0$$

の根である。$v(y;z)$ を(3.13)に代入すると，条件 (3.8) に相当する条件に成立するとき y について解ける。これは z の函数となる。それを $\bar{y}(z)$ とし，$\bar{y}(z)$ に対応する v の値を $\bar{v}(z)$ とするならば，(3.11) の右辺の括弧内の函数について適当な 2 次条件が成立するとき $y=\bar{y}(z)$, $v=\bar{v}(z)$ は $y>0, v\geqq 0$ における唯一の最大値を与える。[3]

以上により，この場合にも最適生産，投資政策は一組の critical numbers によって規定される。

(2) (3.14)はそれほどきつい仮定ではないように思われる。(3.14)が満されないときには (3.12) の根はどのような $y>0$ に対しても $v\geqq 0$ の範囲に存在しない。

(3) (3.11)の右辺の括弧内を v, y でそれぞれ 2 回偏微分したものは常に負である。

$x \leqq \bar{y}(z)$ ならば

$$\begin{cases} y=\bar{y}(z) & (\text{資本財の購入量 } \bar{y}(z)-x) \\ v=\bar{v}(z) & (\text{産出量 } \bar{v}(z)) \end{cases}$$

$x > \bar{y}(z)$ ならば

$$\begin{cases} y=x & (\text{資本財の購入量 ゼロ}) \\ v=v(x;z) & (\text{産出量 } v(x;z)) \end{cases}$$

以上によって明らかなようにこの場合は生産物の initial inventory が投資政策にも影響を与える。尚 $v(x;z)$ は

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds-g_v(x,v)=0$$ の根である。

$\pi(x,z)_{II}$ は上の $\bar{v}, \bar{y}$ 等を (3.11) に代入することによって得られる。

(Ⅲ) 資本財を2種類結合して使用する場合を簡単に sketch しておく。売れ残った製品は d の disposal price で処分されるものとしよう。生産費用函数を $g(y_1, y_2, v)$ とする。y_1, y_2 は利用可能な2種類の資本である。$g(y_1, y_2, v)_{III}$ に関して，(Ⅰ)(Ⅱ)の場合と同様な適当な性質を仮定する。

2種類の資本財の初期保有量を x_1, x_2 とすると，期待利潤の最大値 $\pi(x_1, x_2)_{III}$ は

$$\begin{aligned} \pi(x_1,x_2)_{III} = \underset{\substack{y_1 \geqq x_1,\, y_2 \geqq x_2 \\ v \leqq 0}}{\mathrm{Max}} \Bigg[& w\int_0^v s\varphi(s)ds + wv\int_v^\infty \varphi(s)ds \\ & + d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - \sum_1^2 a_i(y_i-x_i) \\ & - \sum_1^2 m_i y_i - g(y_1,y_2,v) - h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds \\ & - p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds \Bigg] \end{aligned} \tag{3.15}$$

この場合の critical numbers は，もし存在するならば，(3.15)の右辺の括弧の中を y_1, y_2, v でそれぞれ偏微分してゼロとおいて得られる方程式を解いて得られるはずである。それらの方程式は，

$$(w+p)-(w+p+h-d)\int_0^v \varphi(s)ds - g_v(y_1,y_2,v)=0 \tag{3.16}$$

$$-(a_i+m_i)-g_{y_i}(y_1,y_2,v)=0 \qquad i=1,2 \tag{3.17}$$

である。(Ⅰ)の場合の (3.8) その他に相当する諸条件の下で得られた

critical numbers によって規定される最適な生産，投資政策は，

$(x_1 \leqq \bar{y}_1, x_2 \leqq \bar{y}_2)$，$(x_1 \leqq \bar{y}_1, x_2 > \bar{y}_2)$，$(x_1 > \bar{y}_1, x_2 \leqq \bar{y}_2)$

$(x_1 > \bar{y}_1, x_2 > \bar{y}_2)$ の四つの場合に分けられるはずである。

4 Multi-Stage Model

Multi-stage の問題は有限段階の最適化の問題としても又，無限段階の問題としても扱うことができる。ここでは主として無限段階の問題として扱うことにしよう。

(Ⅰ) section 3 における(Ⅰ)の dynamic version を考えよう。

全体で n stages にわたる最適化をはからんとしているものとする。今企業は第 n stage（stage は日付と逆に順番をつける）にあるものとし，資本ストックの初期保有量が x で，この stage の初めにそれが y に引きあげられ，産出量は v であるとする。この第 n stage に対する期待利潤の最大値は最適政策をとりつづけるとき x と n の函数となる。これを $R_n(x)$ と表わす。そして第 n stage に対する期待利潤は，第 n stage だけの部分と将来の期待利潤に分けられる。第 n stage だけの期待利潤は，

$$w\int_0^v s\varphi(s)ds + w\int_v^\infty v\varphi(s)ds + d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - a(y-x)$$
$$-my - g(y, v) - h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds$$

であり，一方，$(n-1)$ stage 以後最適政策をとりつづけたとすると将来の期待利潤は

$\alpha R_{n-1}(y-\lambda y)$　　(α discount factor)

で表わされる。

したがって，

$n=1$ に対して[4]

$$R_1(x) = \underset{y \geqq x, v \geqq 0}{\text{Max}} \Big[w\int_0^v s\varphi(s)ds + wv\int_v^\infty \varphi(s)ds$$
$$+d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - a(y-x) - my - g(y, v)$$

(4) Section 3 の(Ⅰ)のモデルを dynamic model の一部と解釈するときには，それは，この場合に相当する。

$$-h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds\Big] \tag{4. 1}$$

$n\geqq 2$ に対して

$$R_n(x) = \underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[w\int_0^v s\varphi(s) + wv\int_v^\infty \varphi(s)ds + d\int_0^v (s-v)\varphi(s)ds$$
$$-a(y-x) - my - g(y, v) - h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds$$
$$-d\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds + \alpha R_{n-1}(y-\lambda y)\Big] \tag{4. 2}$$

これは有限な計画期間の問題であるが，ここで $n\to\infty$ とすると下のような無限段階の函数方程式が得られる。(5)

$$R(x) = \underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[w\int_0^v s\varphi(s)ds + wv\int_v^\infty \varphi(s)ds + d\int_0^v (s-v)\varphi(s)ds$$
$$-a(y-x) - my - g(y, v) - h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds$$
$$-d\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds + \alpha R(y-\lambda y) \tag{4. 3}$$

$R(x)$ は資本本ストックの初期水準 x から出発して最適な政策をとりつづけた場合の期待利潤の最大値である。このモデルでは，各 stage の終りに売れ残った製品は disposal price d で処分され，次の stage に持ちこされないと仮定しているから，ある stage における産出量の決定は次の stage の決定に影響を与えない。

さて最適政策を求めよう。(4. 3)の右辺の括弧の中を v, y でそれぞれ偏微分してゼロとおくと，

$$(w+p) - (w+p+h-d)\int_0^v \varphi(s)ds - g_v(y, v) = 0 \tag{4, 4}$$

$$-(a+m) - gy(y, v) + \alpha\cdot\frac{\partial R(y-\lambda y)}{\partial y} = 0 \tag{4. 5}$$

が得られる。ここで (4. 4) は (3. 4) と同じ方程式であって，$g_v(y, v)$ が $v=0$ のときゼロであるという仮定の下では任意の $y>0$ に対して $v>0$ の範囲に根 $v=v(y)$ をもつ。

一方 $y>x$ に対して (4. 5) は次のように書きかえられる。すなわち，

$$-(a+m) - g_y(y, v) + \alpha a = 0$$

(5) 一般的な存在，一義性に関する証明は Bellman 〔5〕。

$$-[(1-\alpha)a+m]-g_y(y,v)=0 \tag{4.6}$$

(4.4)を v について解いた根 $v=v(y)$ を(4.6)に代入して得られる方程式

$$-[(1-\alpha)a+m]-g_y(y,v(y))=0 \tag{4.7}$$

は,

$$\lim_{y\to +x} g_y[y,v(y)]<-[(1-\alpha)a+m],$$
$$\lim_{y\to\infty} g_y[y,v(y)]>-[(1-\alpha)a+m]$$

ならば, $y>x$ の範囲に唯一の根 $\bar{y}$ をもつ。この $\bar{y}$ に対応する v の値は $v>0$ の範囲に必ず存在し, それを $\bar{v}$ とすると, この場合の最適政策は(6)

$x<\bar{y}$ ならば

$$\begin{cases} y=\bar{y} & (\text{資本の購入}\quad \bar{y}-x) \\ v=\bar{v} & (\text{産　出　量}\quad \bar{v}) \end{cases}$$

$x\geqq\bar{y}$ ならば

$$\begin{cases} y=x & (\text{資本購入せず}) \\ v=v(x) & (\text{産　出　量}\quad v(x)) \end{cases}$$

の形で与えられる。尚, $v(x)$ は $y=x$ に対する (4.4) の解である。

ところで (4.4) (又は (4.3)) は与えられた正の資本ストックに対して (短期の) 期待利潤を最大にするための産出量決定の方程式と考えることができる。このような考え方を押し進めて, 投資がモデルにとって完全に外生的に決定されると仮定すると, 次のような plausible なモデルを考えることができる。

(I-1) 企業は各 stage における投資 (外生的に与えられ, 決定変数ではない) で, 各 stage の利潤を割ったものとして定義される, 投資に対する収益率を最大にするような産出量を決定しようとするものと考える。各 stage における製品の initial stock は正であり得るものとする。(7) 製品の initial stock z から出発して, 以後最適政策をとりつづけた場合の期待収益率の最大値を $R(z)_1$ とすれば,

$$R(z)_1=\operatorname*{Max}_{v\geqq 0}\left[\frac{1}{I}\left\{w\int_0^{v+z}s\varphi(s)ds+w(v+z)\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds-l\cdot v\right.\right.$$

(6) 勿論, $y=\bar{y}, v=\bar{v}$ において最大のための2次条件が満足されているとしてである。

$$-h\int_0^{v+z}(v+z-s)\varphi(s)ds-p\int_{v+z}^{\infty}(s-v-z)\varphi(s)ds\Big\}$$
$$+\alpha R(0)_1\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds+\alpha\int_0^{v+z}R(v+z-s)_1\varphi(s)ds\Big]\quad(4.8)$$

尚，ここで I は最初の stage における投資，$l\cdot v$ は v 単位の生産費（$l>0$ は定数）である。

最大の期待収益率をもたらす政策を規定する critical number は (4.8) の右辺の括弧の中を v で微分してゼロとおくことによって得られる。その方程式は，

$$\frac{1}{I}\Big\{w\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds-l-h\int_0^{v+z}\varphi(s)ds+p\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds$$
$$+\alpha\int_0^{v+z}R'(v+z-s)_1\varphi(s)ds=0$$
$$\frac{1}{I}\Big\{(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds\Big\}$$
$$+\alpha\int_0^{v+z}R'(v+z-s)_1\varphi(s)ds=0$$

である。

（II） 次に section 3 の（II）に対する dynamic model を考える。

資本の initial stock x，製品の initial inventory z の下で最適政策をとりつづけた時の期待利潤の最大値 $R(x,z)_{II}$ は次のような函数方程式を満足する。

$$R(x,z)_{II}=\max_{y\geqq x,z\geqq 0}\Big[w\int_0^{v+z}\varphi(s)ds+w(v+z)\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds$$
$$-a(y-x)-my-g(y,v)-h\int_0^{v+z}(v+z-s)\varphi(s)ds$$
$$-p\int_{v+z}^{\infty}(s-v-z)\varphi(s)ds+\alpha R(y-\lambda y,0)_{II}\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds$$
$$+\alpha\int_0^{v+z}R(y-\lambda y,v+z-s)_{II}\varphi(s)ds\Big]\qquad(4.9)$$

(4.9)の最後の 2 項は，将来の stage が製品の在庫水準ゼロ，$(v+z-s)$ から始まる場合に対応する。尚，λ は資本ストックのうち摩滅する部分の割合である。

最大の期待利潤をもたらす最適政策を規定する critical numbers は，も

（7） 生産物の持ちこしが不可能であるようなモデル，利潤額最大化のモデルをここで考えても，これまでの分析につけ加えられるものはない。

しそれが存在するならば，(4. 9)の右辺の括弧の中を v, y で偏微分してそれぞれゼロとおいた方程式を解いて得られる。

$$
\begin{aligned}
&(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds-g_v(y,v)\\
&\qquad+\alpha\int_0^{v+z}\frac{\partial R(y-\lambda y,\,v+z-s)_{II}}{\partial v}\varphi(s)ds=0
\end{aligned}
\tag{4. 10}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(a+m)-g_y(y,v)+\alpha\frac{\partial R(y-\lambda y,0)_{II}}{\partial y}\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds\\
&\qquad+\alpha\int_0^{v+z}\frac{\partial R(y-\lambda y,\,v+z-s)_{II}}{\partial v}\varphi(s)ds=0
\end{aligned}
\tag{4. 11}
$$

critical numbers を求めれば，x, z と critical numbers との大小によって前のように最適政策が定められる。

このモデルを n stages の有限期間の問題として考えれば，

$n=1$ に対して

$$
\begin{aligned}
R_1(x,z)_{II}=\underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[\, & w\int_0^{v+z}s\varphi(s)ds+w(v+z)\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds\\
&-a(y-x)-my-g(y,v)-h\int_0^{v+z}(v+z-s)\varphi(s)ds\\
&-p\int_{v+z}^{\infty}(s-v-z)\varphi(s)ds\Big]
\end{aligned}
\tag{4. 12}
$$

$n\geqq 2$ に対して

$$
\begin{aligned}
R_n(x,z)_{II}=\underset{y\geqq x, v\geqq 0}{\mathrm{Max}}\Big[\, & w\int_0^{v+z}s\varphi(s)ds+w(v+z)\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds\\
&-a(y-z)-my-g(y,v)-h\int_0^{v+z}(v+z-s)\varphi(s)ds\\
&-p\int_{v+z}^{\infty}(s-v-z)\varphi(s)ds\\
&+\alpha R_{n-1}(y-\lambda y,0)_{II}\int_{v+z}^{\infty}\varphi(s)ds\\
&+\alpha\int_0^{v+z}R_{n-1}(y-\lambda y,\,v+z-s)_{II}\varphi(s)ds\Big]
\end{aligned}
\tag{4. 13}
$$

なる函数方程式が得られる。(3. 11)は dynamic model における(4. 12)に相当する。(4. 12)，(4. 13)の様なモデル（(4. 1)，(4. 2)の場合も同様である）については，先ず $n=1$ の場合について critical number を求め（これはある条件の下で存在することが section 3 で示されている），そのときの最大期待利潤を計算して，それを $n=2$ の場合の critical numbers を求め

るのに用いる。[8] 以下このような process を続けて行けばよい。計画の最終期における最適政策を先ず決定し，次にその前の期間に対する最適政策を求め，最後に計画の最初の期間の最適政策を決定する。このようにして得られた政策は計画全体から見ても又最適なものとなっている（最適性原理 —— Bellman〔5〕）

（Ⅲ）最後に，2種類の資本を用いて，non storable な生産物を作っていると想定した場合の最大利潤の期待値は x_1, x_2 を資本の initial stock とすると，

$$R(x_1, x_2)_{III} = \max_{y_i \geqq x_i, v \geqq 0} \Big[w\int_0^v s\varphi(s)ds + wv\int_v^\infty \varphi(s)ds + d\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - \sum_1^2 a_i(y_i - x_i) - \sum_1^2 m_i y_i - g(y_1, y_2, v) - h\int_0^v (v-s)\varphi(s)ds - p\int_v^\infty (s-v)\varphi(s)ds + \alpha R(y_1-\lambda_1 y_1, y_2-\lambda_2 y_2)_{III} \Big]$$

の形の函数方程式を満たす。critical numbers を求める方程式は，

$$(w+p)-(w+p+h-d)\int_0^v \varphi(s)ds - g_v(y_1, y_2, v)=0$$

$$-(a_i+m_i)-g_{y_i}(y_1, y_2, v)+\alpha\frac{\partial R(y_1-\lambda_1 y_1, y_2-\lambda_2 y_2)_{III}}{\partial y_i}=0,$$

$$i=1, 2$$

で与えられる。

References

〔1〕Arrow, K. J. "Optimal Capital Adjustment," in Studies in Applied Probability and Management Science; Arrow, Karlin & Scarf (eds) 1962.

---

(8) $n=2$ のとき critical numbers を求める方程式は (4. 13) から，

$$(w+p)-(w+p+h)\int_0^{v+z}\varphi(s)ds - g_v(y, v) + \alpha\int_0^{v+z}\frac{\partial R_1(y-\lambda y, v+z-s)_{II}}{\partial v}\varphi(s)ds=0$$

$$-(a+m)-g_y(y, v)+\alpha\frac{\partial R_1(y-\lambda y, 0)_{II}}{\partial y}\int_{x+z}^\infty \varphi(s)ds + \alpha\int_0^{v+z}\frac{\partial R_1(y-\lambda y, v+z-s)_{II}}{\partial y}\varphi(s)ds=0$$

である。

〔2〕 Arrow, Karlin & Scarf (eds), Studies in Mathematical Theory of Inventory and Production, 1958.

〔3〕 Arrow, Beckman & Karlin, "The Optimal Expansion of the Capacity of a Firm" in [2].

〔4〕 Arrow, Harris & Marschak, "Optimal Inventory Policy" Econometrica 1951 pp. 250–72.

〔5〕 Bellman, R., Dynamic Programming, 1957.

〔6〕 Holt, Modigliani & Muth, "Derivation of a Linear Decision Rule for Production and Employment," Management Science, Jan. 1956.

〔7〕 Modigliani & Hohn, "Production Planning Over Time and the Nature of the Expectation and Planning Horizon," Econometrica, Jan. 1955.

〔8〕 Smith, V. L., "The Theory of Investment and Production," Quarterly Journal of Economics, Feb. 1959.

〔9〕 Smith, V. L., "Problems in Production-Investment Planning Over Time," International Economic Review, Sep. 1960.

〔10〕 Smith, V. L., Investment and Production, 1961.

〔11〕 Zabel, E., "Efficient Accumulation of Capital for the Firm," Econometrica, Jan–Apr. 1963.