



<研究ノート>連立定差方程式の位相

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2009-08-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 和田, 貞夫 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24729/00002297">https://doi.org/10.24729/00002297</a>

## 連立定差方程式の位相

和田 貞 夫

## I は じ め に

本稿は2つの変数をもつ定係数の連立線型1階定差方程式のシステムにおける変数の変動を位相平面 (phase plane) で表示する方法を述べたものである。2変数の連立1階微分方程式のシステムでの同じような問題は古くから知られていて、たとえば文献 [1], chap. 5, [4], pp. 172-6, [5], § 16 に精しく説明されている。これに対して Baumol [2] は1変数の2階定差方程式の位相図 (phase diagram) の描き方を精細に述べたが、一般に連立定差方程式のシステムの位相図を説いたものは見当たらないようである。もちろん2変数を含むシステムは多変数のそれのもっとも簡単なものに過ぎず、したがってその適用範囲も限られたものではあるが、なおそれ<sup>(1)</sup>を明らかにすることは pedagogic な目的に役立つに止まらないと思われる。

与えられた紙数が極めて限られているために、以下の説明は出来るだけ簡略にし、証明を要する事項についても完全な論証を省略し、またただ1つの適用例をあげるに止めた。

## II 連立定差方程式の一般解

以下においてわれわれが取上げる定差方程式は次のようなものである。

$$(2 \cdot 1) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t+1)} \\ x_{2(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix}$$

(1) 本稿は文献 [7], [8] で用いた位相図の補足的説明のためのものであって、第 III ~ V 節の叙述は [2] に負うところが大きい。なお連立定差方程式システムの位相図を用いた例は [3], p. 334, [6], p. 89 ff. にもみられる。

ただし  $x_{i(t)}$  ( $i=1, 2$ ) は  $t$  の実函数, その定義域は  $t=0, 1, 2, \dots$  とし, また係数行列  $[a_{ij}]$  の元は実数であるとする。1変数の2階定差方程式

$$(2 \cdot 2) \quad y_{(t+2)} + ay_{(t+1)} + by_{(t)} = 0$$

は

$$(2 \cdot 3) \quad \begin{bmatrix} y_{(t+2)} \\ y_{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{(t+1)} \\ y_{(t)} \end{bmatrix}$$

と同等であり, (2・3) は (2・1) の1つのケースに他ならない。またもとの連立定差方程式が非同次の場合にも適当な変数変換によってそれは (2・1) の型に変形され得る。

さて (2・1) の係数行列  $[a_{ij}]$  の固有値を  $\lambda_i$  ( $i=1, 2$ ) とすれば, いうまでもなく,

$$(2 \cdot 4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right] \end{aligned}$$

であるが, その値に応じて (2・1) の一般解の性質を次のように分けることができる。

(Case A)  $\lambda_1, \lambda_2$  が相異なる実数のとき

(2・1) の一般解は

$$(2 \cdot 5) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \lambda_1^t \\ c_2 \lambda_2^t \end{bmatrix}$$

ただし  $c_1, c_2$  は初期条件によって定まる定数であり,  $[v_{ij}]$  の列は  $\lambda_1, \lambda_2$  に対応する  $[a_{ij}]$  の固有ベクトルで各列の少なくとも1つの元は1であるとする。

(Case B)  $\lambda_1 (= \lambda), \lambda_2$  が共軛複素数のとき

一をもって共軛複素数をあらわせば, (2・1) の一般解は

$$(2 \cdot 6) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \bar{v}_1 \\ v_2 & \bar{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \lambda^t \\ \bar{c} \bar{\lambda}^t \end{bmatrix}$$

$c, \bar{c}, v_i, \bar{v}_i$  の意味は (2・5) と同様である。よく知られているように

この解は三角函数を用いて表現されるが, これは後に示すことにする。

(Case C)  $\lambda_1 (= \lambda), \lambda_2$  がひとしいとき

このとき  $a_{12} = a_{21} = 0$  であれば, 一般解は

$$(2 \cdot 7) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \lambda^t \\ c_2 \lambda^t \end{bmatrix}$$

また  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  の少くとも1つがゼロでないならば, それは

$$(2 \cdot 8) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_1 + t c_2) \lambda^t \\ c_2 \lambda^t \end{bmatrix}$$

右辺の行列の第1列は  $[a_{ij}]$  の固有ベクトルであり, 第2列は

$$(2 \cdot 9) \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

をみtas。一般的な表現を用いれば Case C は  $\lambda$  の algebraic multiplicity が2である場合であるが, そのうち geometric multiplicity が2であれば

(2・7) が, またそれが1であれば (2・8) が成立する。

以下ではそれぞれの場合の位相図について述べるが, 便宜上,  $[a_{ij}]$  は正則であるとする。これがみたされない場合にはシステムは単一の方程式であらわされる。

### III Case A の位相

(2・5) に対して

$$(3 \cdot 1) \quad \begin{bmatrix} y_{1(t)} \\ y_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \lambda_1^t \\ c_2 \lambda_2^t \end{bmatrix}$$

としよう。さらに

$$(3 \cdot 2) \quad \alpha = \frac{\log \lambda_2^2}{\log \lambda_1^2}$$

とすれば,

$$(3 \cdot 3) \quad \frac{y_{2(t)}^2}{y_{1(t)}^{2\alpha}} = k^2 \left( \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^{2\alpha}} \right)^t = k^2, \quad \left( k = \frac{c_2^2}{c_1^\alpha} \right)$$

であるから

$$(3 \cdot 4) \quad y_{2(t)} = \pm k y_{1(t)}^\alpha$$

いま

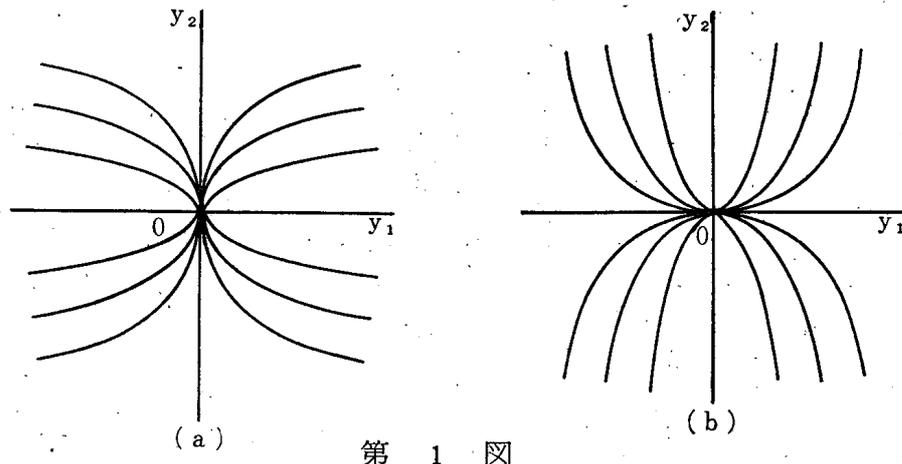
$$(3 \cdot 5) \quad \operatorname{sgn}(|\lambda_1| - 1) = \operatorname{sgn}(|\lambda_2| - 1)$$

とすれば  $\alpha > 0$  である。それゆえ一応  $y_{1(t)}$ ,  $y_{2(t)}$  が連続性をもつものと

(2) 以下に示す位相図はハンド・ライティングによるものであって正確ではなく, 大体の性質をあらわすに止まる。

(3)  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  である場合は後述 (Case C) から推察されるので, ここでは省略する。そうすれば  $|\lambda_1|$ ,  $|\lambda_2|$  の一方は1でない。(3・2) においては  $|\lambda_1| \neq 1$  としておく。

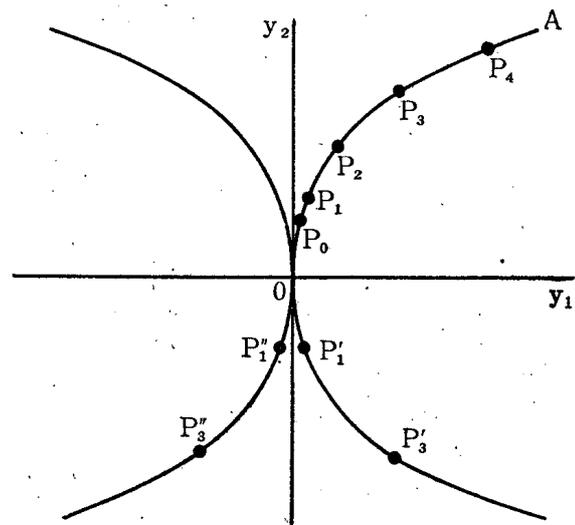
してこれらの変数についての位相図を描けば第1図のようになる。第1図の(a)は  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  したがって  $\alpha < 1$  の場合であり、(b)は  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  すなわち  $\alpha > 1$  のものである。図の原点は結節点 (node) であって、もし



第 1 図

$|\lambda_i| > 1$  ( $i=1, 2$ ) であれば  $y_1(t), y_2(t)$  は  $t$  の変化と共にこれから遠ざかり、 $|\lambda_i| < 1$  ( $i=1, 2$ ) の場合にはこれに収束する。ところで注意しなければならないのは、実は  $y_i(t)$  は離散的であって、たとえ  $y_1(t), y_2(t)$  の変動が1つの軌跡 (trajectory, orbit) の上をたどるとしても、 $(y_1(t), y_2(t))$  の点は飛び飛びにあらわされるということである。たとえば  $|\lambda_i| > 1$  で変数の運動が第2図のOA上をたど

る場合にそれは  $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots$  のようにあらわされる。この点が微分方程式システムの位相図と根本的に異なる点であり、そのため(2・3)のような特殊なケースを除けば  $t=t^0$  の位置によって  $t=t^0+1$  の点の位置を知ることができない。(4) それだけではない。 $\lambda_1, \lambda_2$  のうちの少なくとも一方が負であれば変数の変動は1つの軌跡では



第 2 図

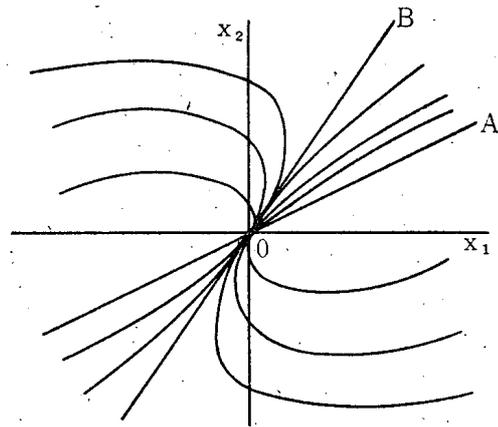
(4) (2・3) の場合にはこれは  $45^\circ$  線の利用によって知られるのである。これについては [2] 参照。

あらわされない。たとえば  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  の場合には運動は  $P_0 \rightarrow P'_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P'_3 \rightarrow \dots$  のようになり、また  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  であればそれは  $P_0 \rightarrow P_1'' \rightarrow P_2 \rightarrow P''_3 \rightarrow \dots$  となるであろう。このような注意は以下ではくり返さないが、これは定差方程式システムの位相図が微分方程式システムのそれに対してもつ欠点と考えられる。

(2・5) の固有ベクトルの行列  $[v_{ij}]$  によって  $y_1(t), y_2(t)$  を変換すれば  $x_1(t), x_2(t)$  が得られる。このことを第1図についていえば次のようになる。いまたとえば  $a_{12} \neq 0$  としよう。そうすれば (2・5) において

$$(3 \cdot 6) \quad \begin{aligned} v_{1i} &= 1 \\ v_{2i} &= \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

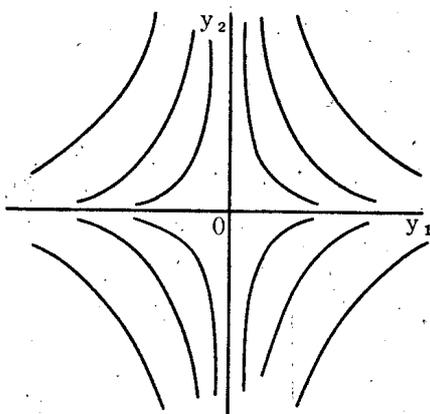
とおくことができる。そこで第1図の  $y_1$  軸および  $y_2$  軸を横軸に対する勾配が上の  $v_{21}, v_{22}$  であるような直線 OA, OB に回軸させ、それに応じて  $y_1 \cdot y_2$  平面上の各点を移動させるならば、出来上った図が  $x_1(t), x_2(t)$  の位相図である。たとえば第1図(a)からは第3図のようなものが得られるであろう。  $a_{12} = 0$  であってもこれと同様の変換法が



第 3 図

用いられる。

次に (3・5) がなりたたない場合には第1図に対して第4図のような図が得られる。それは  $a < 0$  であるからである。このとき原点は鞍点 (saddle point) であって、たとえば  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  であれば、 $y_1(t)$  の増加、 $y_2(t)$  の減少の変動が生じる。 $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  の場合は逆である。(5) 第4図の  $x_1 \cdot x_2$  平面への変換は上述と同様にすればよい。



第 4 図

(5)  $[a_{ij}]$  の固有値の1つが1にひとしいときには  $y_1 \cdot y_2$  平面における位相図は一方の軸に平行な直線群であらわされる。

## IV Case B の位相

このケースでは (2・6) において  $v_1 \neq 0$  であるから

$$(4 \cdot 1) \quad v_1 = 1 \\ v_2 = \beta + i\gamma \quad (i = \sqrt{-1})$$

とおくことができる。ただし  $\beta, \gamma$  は実数である。このとき簡単な計算の結果

$$(4 \cdot 2) \quad x_{1(t)} = K\rho^t \cos(\theta t + \omega) \\ x_{2(t)} = K\rho^t [\beta \cos(\theta t + \omega) - \gamma \sin(\theta t + \omega)]$$

をみちびき出すことが出来る。ただし  $\rho, \theta$  は  $\lambda$  の絶対値と偏角であり、 $K, \omega$  は初期条件より定まる定数である。(4・2) より明らかなように

$$(4 \cdot 3) \quad x_{2(t)} = \beta x_{1(t)} - \gamma K\rho^t \sqrt{1 - \cos^2(\theta t + \omega)} \\ = \beta x_{1(t)} - \gamma \sqrt{(K\rho^t)^2 - x_{1(t)}^2}$$

であるから、

$$(4 \cdot 4) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)}^* \\ x_{2(t)}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix}$$

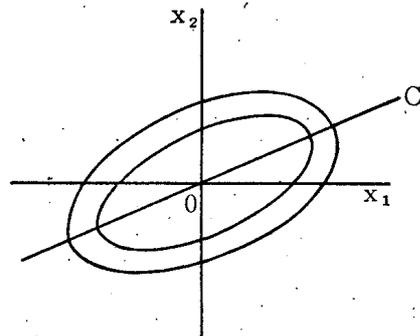
とすれば、

$$(4 \cdot 5) \quad x_{1(t)}^{*2} + x_{2(t)}^{*2} = (A\rho^t)^2 \quad (A = \gamma K)$$

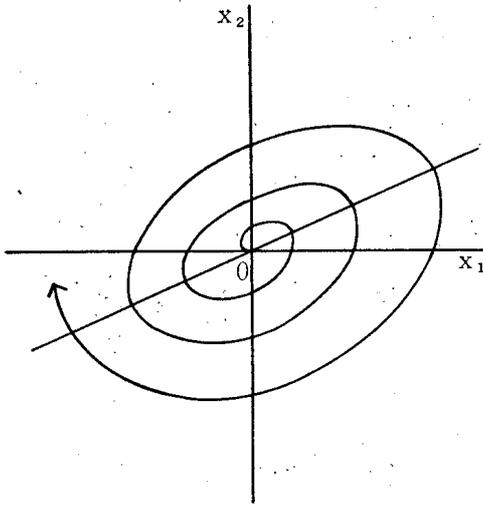
それゆえ  $\rho = 1$  であれば  $x_1^* \cdot x_2^*$  平面での位相図は円となり、それは

$$(4 \cdot 6) \quad \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\gamma & 0 \\ \beta/\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(t)}^* \\ x_{2(t)}^* \end{bmatrix}$$

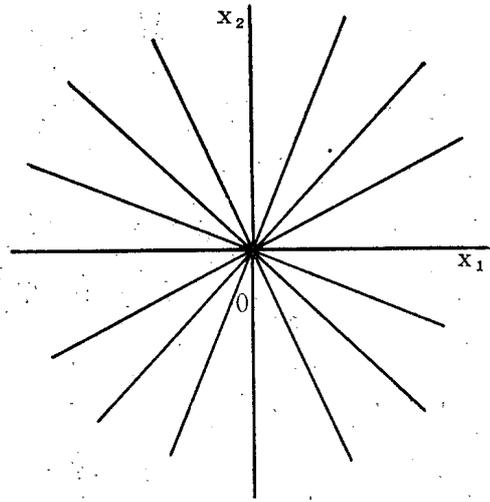
によって  $x_1 \cdot x_2$  平面にうつされる。したがって  $x_1^*$  軸はスケールが変化すると共に  $x$  軸に対する勾配が  $\beta$  の直線 OC となる (第 5 図参照)。この場合の原点は中心 (center) である。これに対して  $\rho$  が 1 より大または小であれば原点は渦心点 (focus) となり、軌跡は遠心的または求心的な螺旋状を示す。第 6 図は  $\rho$  が 1 であるような 1 つのケースを描いたものであるが、運動の方向が clockwise であるかそうでないかは  $\theta$  の値<sup>(6)</sup> によって定まる。



第 5 図



第 6 図



第 7 図

## V Case C の位相

(2・7) のみたされる場合には

$$(5 \cdot 1) \quad c_2 x_1(t) = c_1 x_2(t)$$

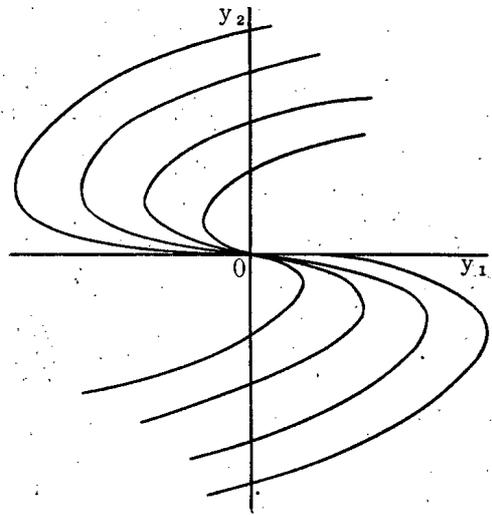
であるから、そのときの位相図が第 7 図のようになることは説明を要しないであろう。また (2・8) の場合には、

$$(5 \cdot 2) \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 + t c_2) \lambda^t \\ c_2 \lambda^t \end{bmatrix}$$

とすると、

$$(5 \cdot 3) \quad y_1(t) = \left( \frac{c_1}{c_2} + t \right) y_2(t) \quad (c_2 \neq 0)$$

であるから、第 8 図が得られる。第 7、8 図の原点は結節点である。



第 8 図

(6) (4・5) によって  $x_1^*/\rho^t \cdot x_2^*/\rho^t$  平面において位相図は同心円で示される。いまその第 1 象限の 1 点をとれば、そこでは  $\text{sgn} \gamma K = \text{sgn} \cos(\theta t + w) = \text{sgn} \sin(\theta t + w)$  である。そこで一応  $x_i^*(t)$  が連続であるとすれば、

$$\text{sgn} \frac{d}{dt} \left( \frac{x_1^*(t)}{\rho^t} \right) = -\text{sgn} \theta, \quad \text{sgn} \frac{d}{dt} \left( \frac{x_2^*(t)}{\rho^t} \right) = \text{sgn} \theta$$

それゆえ運動方向は  $\theta < 0$  ならば clockwise,  $\theta > 0$  ならばその逆となる。これから  $x_1 \cdot x_2$  平面の運動方向が知られる。

## VI 2部門動態 Leontief モデル

この節では

$$(6 \cdot 1) \quad \mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(t)} + \mathbf{B}[\mathbf{x}_{(t+1)} - \mathbf{x}_{(t)}]$$

であらわされるモデルの位相図を上述の方法によって求める。ただし産出ベクトル  $\mathbf{x}$ , 投入係数行列  $\mathbf{A}$  および資本係数行列  $\mathbf{B}$  はいずれも 2 次であって非負とする。さらに以下では

$$(6 \cdot 2) \quad \mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}$$

をみたす  $\mathbf{x}$  が存在し, また  $\mathbf{B}$  が正則であると仮定しよう。

さて (6・1) から

$$(6 \cdot 3) \quad \mathbf{x}_{(t+1)} = [\mathbf{I} + \mathbf{C}^{-1}]\mathbf{x}_{(t)}$$

が得られる。ただし

$$(6 \cdot 4) \quad \mathbf{C} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

であり,  $\mathbf{C}$  のすべての元  $c_{ij}$  は非負である。 $\mathbf{C}$  の固有値を  $\mu_1, \mu_2$  とすれば, そのうちの少なくとも 1 つは正の実数である。これは Frobenius 根と呼ばれる。 $\mu_1$  がそのような根であるとしよう。簡単な計算の結果分かるように,  $c_{11} \neq c_{22}$  か  $c_{12}c_{21} \neq 0$  の少なくとも一方がなりたつ限り,  $\mu_1 > |\mu_2|$  であり, また

$$(6 \cdot 5) \quad \text{sgn } \mu_2 = \text{sgn } |\mathbf{C}|$$

である。ただし  $|\mathbf{C}|$  は  $\mathbf{C}$  の行列式とする。 $\mu_1, \mu_2$  に対応する  $\mathbf{C}$  の固有ベクトルは,  $c_{12} \neq 0$  であれば,

$$(6 \cdot 6) \quad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ v_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

そして

$$(6 \cdot 7) \quad v_1 \geq 0, \quad v_2 \leq 0$$

である。次に容易に知られるように, 行列  $[\mathbf{I} + \mathbf{C}^{-1}]$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  は

$$(6 \cdot 8) \quad \lambda_i = 1 + \frac{1}{\mu_i} \quad (i=1, 2)$$

そしてそれに対応する固有ベクトルは (6・6) の  $\mathbf{v}_i$  にひとしい。

以上の考慮にもとづく簡単な計算の結果は次のように要約される。

(7)  $c_{12} = 0$  のときにも適当な修正をほどこせば以下の議論はなりたつ。

(A)  $|C| > 0$  のとき  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$  であって、第9図が得られる。

(B)  $|C| < 0$  のとき  $\lambda_2 < 1$  であり、

(1)  $-|C| > 1 + c_{11} + c_{22}$  ならば  $\lambda_2 > 0$  であるから第10図が得られ、

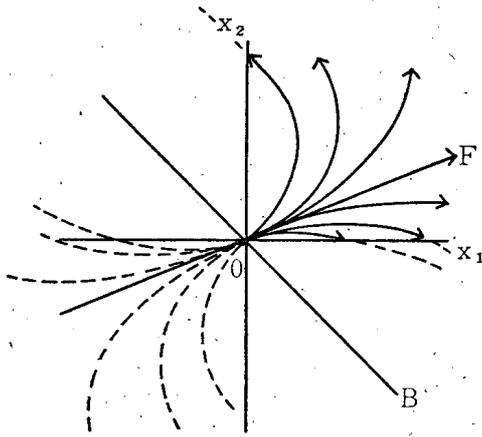
(2)  $-|C| = 1 + c_{11} + c_{22}$  ならば  $\lambda_2 = 0$  であるから第10図の  $OF$  線上の径路だけが有効となり、

(3)  $-|C| < 1 + c_{11} + c_{22}$  ならば  $\lambda_2 < 0$ 、

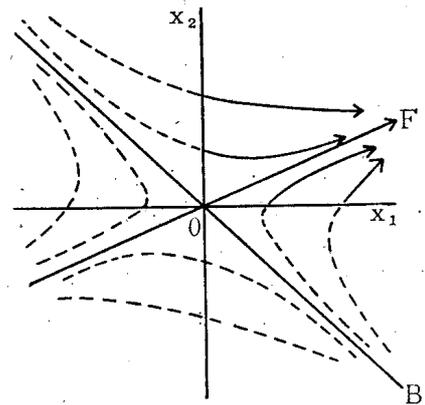
(a)  $-2|C| > c_{11} + c_{22}$  であれば  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ 、

(i)  $-4|C| > 1 + 2(c_{11} + c_{22})$  の場合には  $\lambda_2 > -1$  となり、第11図が、

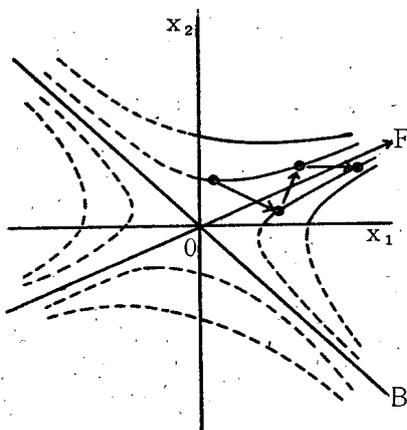
(ii)  $-4|C| = 1 + 2(c_{11} + c_{22})$  の場合には  $\lambda_2 = -1$ 、したがって第12



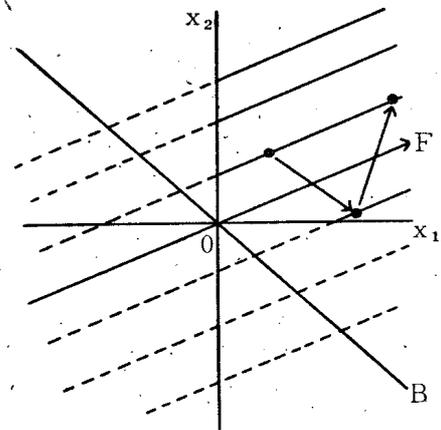
第 9 図



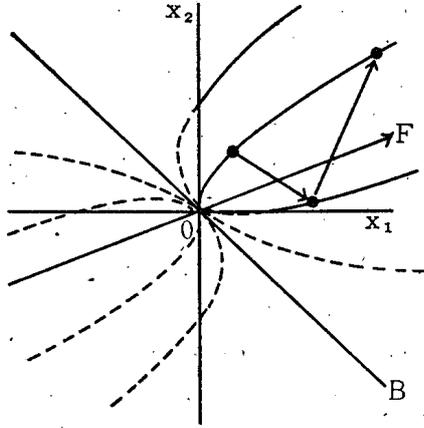
第 10 図



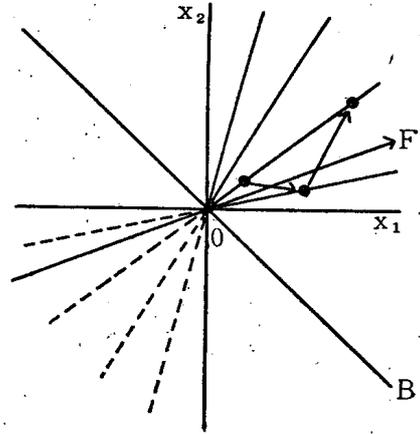
第 11 図



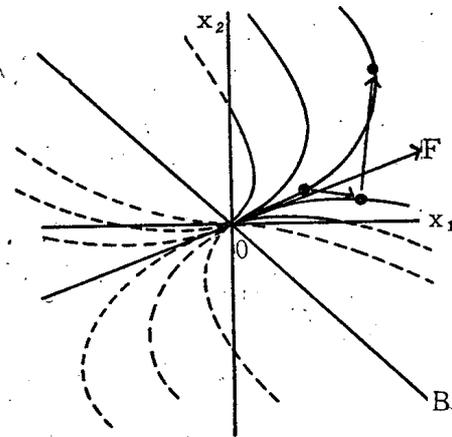
第 12 図



第 13 図



第 14 図



第 15 図

図が、

(iii)  $-4|C| < 1 + 2(c_{11} + c_{22})$  の場合には第13図が、また

(b)  $-2|C| = c_{11} + c_{22}$  であれば  $\lambda_1 = |\lambda_2|$  であるから第14図が、

(c)  $-2|C| < c_{11} + c_{22}$  であれば  $\lambda_1 < |\lambda_2|$  であって第15図がなりたつ。

これらの図で OF, OB 線は横軸に対する勾配が  $v_1, v_2$  である直線である。

$$(6 \cdot 9) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \lambda_1^t$$

の成長径路を Frobenius path と呼ぶならば, OF はそのような径路を示

している。<sup>(8)</sup> Frobenius path に充分近い点から出発した運動における  $x_1$  と  $x_2$  の比が  $t$  の増加と共に Frobenius path のそれに収束するとき, Frobenius path は (局所的に) 相対的安定性 (relative stability) をもつという。第10, 11, 12, 13図の場合がこれにあたる。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Andronow, A. A. and C. E. Chaikin, *Theory of Oscillation*, 1949.
- [ 2 ] Baumol, W. J., "Topology of Second Order Linear Difference Equations with Constant Coefficients," *Econometrica*, April 1958, pp. 258-85.
- [ 3 ] Dorfman, R., P. A. Samuelson and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958.
- [ 4 ] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, 1957.
- [ 5 ] Понтрягин, Л. С., *Обыкновенные Дифференциальные уравнения*, 1961.
- [ 6 ] Schwartz, J. T., *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, 1961.
- [ 7 ] Wada, S., "The 'Instability Principle' in Dynamic Economics," *Bulletin of University of Osaka Prefecture*, Series D., Vol. VII, forthcoming.
- [ 8 ] 和田貞夫, 「動態理論における均衡と安定」, 大阪府立大学経済究, 昭和37年9月, 1-23頁。

(この論文は昭和37年度文部省科学研究費にもとづく総合研究「産業連関分析の理論と応用」の一部として書かれたものである。)

(8)  $x_1, x_2$  が非負でなければならないから, 図の点線の部分は実現しない。