<論説>資本蓄積と線型計画

資本蓄積と線型計画

和田貞夫

線型計画がもともとプランニングの手段としてその研究を開始されて以来、すでに十年に近い歳月が流れている。その間には、計算方法の改善や現実的適用の面で種々の成果が得られたが、それだけではなく、線型計画の用具を経済学の理論的解明に利用することによつて従来の経済理論では充分に解決されなかつたいくつかの基礎的な問題が極めてクリアーに解かれてきたのである。これについての主要な業蹟はクープマンス、サムエルソン、ソロー等[1]によるものである。本稿はこれらにもとづいて、ある時期の生産のプランニングと企業の完全競争均衡との関連を述べ、次いでこれを時間的なひろがりのある場合に拡張し、最後にノイマンの均衡成長のモデル[2]に言及しようとするものである。

〔註〕（1）T. C. Koopmans, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities," in *Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. by him, 1951, pp. 33～97.

P. A. Samuelson, "Linear Programming and Economic Theory," *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, 1955, pp. 251～272.

T. C. Koopmans, "Allocation of Resources and the Price System," in his *Three Essays on the State of Economic Science*, 1957, pp. 1~126.

R. Dorfman, P. A. Samuelson and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958.

（註2） J. von Neumann, "A Model of General Economic Equilibrium," *Review of Economic Studies*, vol. 13, No. 1, 1945~1949, pp. 1~9.

この文献は入手できなかつたので左記を参照した。

N. Georgescu-Roegen, "The Aggregate Linear Production Function and Its Application to von Neumann's Economic Model," in *Activity Analysis* ed. by T. C. Koopmans, pp. 98~115.

D. Gale, "The Closed Linear Model of Production," in *Linear Inequalities and Related Systems* ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, 1956, pp. 285~303.

R. Dorfman and others, *loc. cit.* pp. 300~305. 381~389.

R. M. Solow and P. A. Samuelson, "Balanced Growth under Constant Returns to Scale," *Econometrica*, pp. 412~424.

R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, 1956, pp. 600~607.

I

一社会において n 種の財が消費もしくは生産的に使用され、またそのあるものは産出されるものとしよう。各財の量 a_{1j}、a_{2j}…a_{nj} をもつて b_{1j}、b_{2j}……b_{nj} を生産する生産のプロセス j を

$$\begin{pmatrix} a_{1j}, & a_{2j} \cdots\cdots a_{nj} \\ b_{1j}, & b_{2j} \cdots\cdots b_{nj} \end{pmatrix}$$

または

$$(\boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{b}_j)$$

としてあらわすことができる。[1] いうまでもなく、生産の各プロセスにおいてすべての財が使用、生産されるわけではない。したがつて、当該プロセスにおいて使用または生産されない財に対応する $\boldsymbol{a}_j$、$\boldsymbol{b}_j$ の元はゼロである。特に、第 c 財が純然たる消費財であれば、すべてのプロセスにおいて a_{cj} はゼロであり、第 e 財が本源的生産財であれば、すべてのプロセスの b_{ej} はゼロと考えられる。

さて、二つのプロセス r、s が実行可能ならば、それらを同時におこなうことが可能であり、一つの可能なプロセスの規模を任意に縮少して実行することもまた可能であるとする。この条件がみたされるならば、ある可能なプロセスの規模を任意に拡大しておこなうこともまた可能となる。かくて、

$$(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_r)\in F, \quad (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_s)\in F$$

ならば

$$(\lambda_r \boldsymbol{a}_r + \lambda_s \boldsymbol{a}_s,\ \lambda_r \boldsymbol{b}_r + \lambda_s \boldsymbol{b}_s)\in F$$

$$(\lambda_r \geqq 0,\ \lambda_s \geqq 0)$$

ただし、F は各財の使用量、生産量を座標とする $2n$ 次元空間において、実行可能な各財のその組合せを示す点の集合をあらわす。[2]

右の条件を生産のプロセスの線型性と名付ける。

議論を簡単にするために、有限個の基本プロセスが存在して、すべての可能なプロセスはその非負一次結合としてあらわされうるものとする。この前提のもとでは、すべての可能なプロセスは基本プロセスに還元され、したがつて、もつぱら基本プロセスのみについて議論をすすめることができる。

現実の生産過程においては、何等の財、用役の純投入をともなわずに一つまたはいくつかの財の純産出を得ることは不可能であろう。すなわち、ある可能なプロセスの $\boldsymbol{b}_j$ の元の中にそれに対応する $\boldsymbol{a}_j$ の元より大きいものが存在するならば、必ず他に $\boldsymbol{a}_j$ の対応する元より小さい $\boldsymbol{b}_j$ の元が少くとも一つ存在する。$\boldsymbol{F}$ の点はすべてこの性質をみたすものとしておく。

前に記した非負のスカラー λ_r をプロセス r のレベルと呼ぼう。あるプロセスを実行しないことはそのレベルがゼロであるといつてもよい。同様に、全く生産活動をおこなわないことはすべてのプロセスのレベルがゼロ、したがつてすべての基本プロセスのそれがゼロであることと考えられる。このように、プロセスの非実行をそのレベルの値をゼロとおくことによつてあらわすことにすれば、基本プロセス j においては

（1）　$\boldsymbol{a}_j \geqq 0,\ \boldsymbol{b}_j \geqq 0,$

がなりたつと考えてよい。(3)

もちろん、右の一社会全体としての可能な生産のプロセスの集合はその社会に存在する個々の企業のそれの合成である。したがつて個別企業の技術条件が前提されてはじめて導き出されるものである。しかし、企業 k の生産の可能なプロセスの集合 $\boldsymbol{F}_k$ の点が前述と同様の性質をもち、かつそれが他の企業の生産活動によつて影響をうけないならば、すなわち各企業の技術条件が互に独立ならば、社会全体と個別企業のいずれの側から出発しても議論に差異はない。この場合には、社会において可能なプロセスは少くとも一つの企業で可能でなければならず、またいくつかの企業において可能なプロセスは当然その属する社会において可能であるからである。個別企業の $\boldsymbol{F}_k$ の線型性とその相互独立性から

（２）　$F=\sum_{k} F_k$

がなりたつのである。

社会の生産活動はその社会の使用可能な財の種類と量とに制約される。もつとも、この使用可能な財自体が、少くとも部分的には、過去の生産の結果であり、また、生産活動の状態が将来の使用可能な財を規定する。それゆえ使用可能な財の量は単に外生的な要因とは考えられない。この関連を時間の流れの中にとらえることは後にゆずり、いまは特定の時期の生産活動にのみ注目する。そうすれば

（３）　$A\lambda \leqq s$　，　$\lambda \geqq 0$

ただし、λ はレベル・ベクトル、すなわち F の各基本プロセスのレベルを元とするものであり、A は各基本プロセスの投入量のベクトル a_j を列とするマトリックス、また s は各財の使用可能量を元とするベクトルである。これらの元はすべて非負である。(3)をみたす F の部分集合を生産の可能点集合 H と名付ける。[4] すべての財の使用可能量は有限であるから H はコンパクトな凸集合である。そして、生産可能点集合に属し、少くとも一つの財の産出を減少せしめることなくしては他の一つまたはいくつかの財の産出の増加をもたらし得ないような点を生産の有効点と呼ぼう。[5] 生産の有効点は H の境界点である。

いま仮に、社会全体の生産計画を統べる一つの主体が存在して、何等かの価値規準に照らして生産を最適ならしめるような計画をおこない、個々の企業にその実行を指令するとすれば、その結果、実現されるのは必ずHの有効点でなければならない。[6] 何故ならば、もし生産された各財にポジティヴな評価が与えられ、かつ実現された点が有効点で

ないならば、同一の使用可能の財量の制約のもとで、より良好な生産を実現することが可能であり、したがつて実現された状態が最適ではないからである。各財の評価を示す正のベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすれば、この最適生産の決定は、(3)の条件のもとに

(4)　$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{B}\lambda = max.$

をみたす λ を定めることを意味する。ただし、$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{F}$ の各基本プロセスの産出量のベクトル $\boldsymbol{b}_j$ を列とするマトリックスである。もし、(3)、(4)の解 $\bar{\lambda}$ が $\boldsymbol{H}$ の有効点に対応しないとすれば、(3)をみたし、かつ

$$\boldsymbol{B}\bar{\lambda} \leqq \boldsymbol{B}\bar{\bar{\lambda}}$$

である $\bar{\bar{\lambda}}$ が存在しなければならない。そうすれば(1)の第二式、(3)の第二式および $\boldsymbol{p}$ が正であることによつて

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{B}\bar{\lambda} \leqq \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{B}\bar{\bar{\lambda}}$$

すなわち、$\bar{\lambda}$ が(3)、(4)の解であることに矛循する。

次に、λ が $\boldsymbol{H}$ の一つの有効点に対応するものとしよう。前述のように有効点は $\boldsymbol{H}$ の境界点であるから、その点を含む適当な超平面によつて $\boldsymbol{H}$ が非正の閉半空間に含まれるようにすることができる。いまベクトル $\boldsymbol{p}$ がこの超平面を定めるものとしよう。そうすれば、λ は(3)と(4)の解である。ところでもし $\boldsymbol{p}$ が負の元をもつとすれば、それに対応する $\boldsymbol{B}\lambda$ の元が正であるときには(3)をみたしかつ目的函数の値をより大ならしめる解が存在して、λ が解であることと矛循し、また $\boldsymbol{B}\lambda$ の対応する元がゼロであるときには $\boldsymbol{p}$ のその元を非負にかえた超平面にして右の要件をみたすものが存在することになる。かくて、結局、λ が $\boldsymbol{H}$ の有効点に対応するならば、λ を(3)、(4)の解ならしめるような非負の評価のベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在しなければならない。

生産の統一計画をおこなう仮想的な主体が生産された財のみならず、生産に先立つて保有すべき財に対しても一定の評価 $\boldsymbol{q}$ を附与し、この評価基準での財の純産出が最大になるように生産を定めるとしても結果には大差はない。ただこの場合には目的函数(4)は

$$(5)\quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{B}\lambda-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s}=max.$$

にかわる。

いままで、統一的計画主体の存在という仮想的な前提のもとに、生産の有効点と評価ベクトルとの関係を述べた。ここでこの前提を除いて、その代わりに、完全競争市場を想定し、そこでの企業の行動の総体的な結果に注目しよう。そうすれば、(5)は社会全体としての利潤の大きさをあらわすものと考えられよう。

生産に使用される財、および生産された財の価格、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ が正であつて、[7] この価格条件のもとに総利潤の極大が実現されているものとしよう。もし仮にその結果が $\boldsymbol{H}$ における有効点でないらば、他の状態を不変にとどめつつ、(3)をそこなうことなく、$\boldsymbol{B}\lambda$ の少くとも一つ元を増加せしめ、またはいくつか財の使用量を減少せしめうる。すなわち、総利潤の増加の余地が存在するわけである。したがつて、すべての生産物の価格が正であるならば、総利潤極大化の行動は生産の有効点を実現させる。

次に、ある$\boldsymbol{\lambda}$が $\boldsymbol{H}$ の一つの有効点に対応しているものとする。この場合、前述のように、$\boldsymbol{\lambda}$ に対応して非負のベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在する。これを産出の価格ベクトルとする。そうすれば、完全競争均衡のもとでは使用される財の価格 $\boldsymbol{q}$ は費用法則によつて、より正確には(3)、(4)の問題の双対問題

$$(6)\quad \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{A}\geqq\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{B}\qquad \boldsymbol{q}\geqq 0$$

（7） $q^T s.=min.$

をみたす $\boldsymbol{q}$ によつて与えられる。そして、この均衡のもとではすべてのプロセスは正の純利潤をもたらさず、実行されるプロセスにおいてのみ収支相償う。$\boldsymbol{\lambda}$ はその実行されるプロセスを定めるのである。かくて、それぞれの生産の有効点に対し、総利潤極大の結果として、その点を実現せしめるような各財の非負の価格 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ が存在する。

右の叙述は社会の総利潤の極大化に関連するものである。しかし、完全競争市場においては多数の個別企業が存在して、それぞれ自己の利潤極大をめざして行動し、社会全体の利潤に関心をもつものではない。けれども(2)の前提のもとでは、社会の利潤極大化は個々の企業のそれと必ず相伴うものであり、他方、生産の可能点集合 H の有効点の実現は個別企業の生産可能点 H_k における有効点の実現と同時にのみおこるものである。それゆえ、われわれは個別企業の行動にまで遡る必要はない。

なお、上述の価格ベクトル $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ の元はすべて相対価格として理解される。このことはこれらのベクトルに任意の正数を乗じたものを価格としても議論に変わりのないことから分るであろう。

〔註〕(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_j$、$\boldsymbol{b}_j$ の元はすべて財のストックをあらわす。通常の線型計画でアクティヴィティー・ベクトルの元は財のフローを示すものである。後者は $(\boldsymbol{b}_j-\boldsymbol{a}_j)$ とあらわすことができるであろう。

(2) F は、それが財のストック量についてのものである点を別とすれば、T. C. Koopmans, *Activity Analiysis* における possible point set に該当する。

(3) 本稿ではすべてのベクトルを列ベクトルで定義し、行ベクトルをあらわすときには添字 T をつける。また二つのベクトル $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ の対応する元が悉く相等しいときは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{x}$ のそれぞれの元がそれに対応する $\boldsymbol{y}$ の元より小でないときは $\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{y}$ とし、また $\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{y}$ であつてかつ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ でないときは $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{y}$ とする。

(4) H は、註(2)と同じ限定のもとに、また細部を別として Koopmans, *loc.cit.* の attainable point set にあたる。

(5) クープマンス（*loc. cit.*）は **efficient point** について二種の定義を与えている。一つは生産の **possible point set** における ものであり、他は **attainable point set** についてのものである。本稿の定義は後者に相当する。

(6) すべての財は生産に有効に用いられるか、または消費に用いられて正の効用を生みうる（"goods"）とし、それ自体生産者および消費者にとつて望ましくないもの（"bads"）は存在しないとする。

(7) 生産の前後に時間的なずれがあり、その間に価格は変化しうるものと考える。

Ⅱ

前節では時間的な関係をはなれて、もつぱら特定の時期についての諸連関をとりあげてきたが、ここではそれを時間的にとらえよう。そのため、ある特定の期間においてあらわれる財ではなく、考察の全期間のうちの少くとも一つの期間において出現する財の種類が n であるとし、また各々の期間において前述の要件をみたす生産可能点の集合が存在するものとする。

各期間において期首に存在する使用可能な財の投入によつて企業の生産が開始され、その期の生産物は次期首に販売されるものと考える。しかし、生産が一期間で完成するとは限らない。長期間にわたる生産は各期の生産を中間生産物のストックをもつて開始される過程の連続であるとみなせばよいわけである。けれども、財を消費財、完成生産財、未完成財、本源的生産財等に分類し、それぞれの存在量の組合せに応じて、一々財ベクトクの元の値を考慮することは分析をいちぢるしく煩雑にする。そこで以下ではこのような財の分類をおこなわず、すべての財は生産に用いられるとともに、消費にも用いられ得るものとする。そして各期において生産に用いられない財は消費にむけられるものと考える。この仮定はあるいは非現実的と思われるかも知れないが、これについては後にふれる。

生産における各財の使用量がその使用可能量によつて制約されることは(3)で示した。しかしその際にも述べたように、各期の財の存在量はそれ以前の生産活動の結果であり、与件として与えられる本源的資源を除けば、それは前期のプロセスのレベルによつて決定される。前節の $\boldsymbol{s}$ の定義を変換して、これを各期において外生的に定まる本源的資源を含む諸財の存在量のベクトルであるとすれば(3)は次のようにかえられるであろう。[1]

$$(8)\quad \begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{(t)}\boldsymbol{\lambda}_{(t)} \leqq \boldsymbol{B}_{(t-1)}\boldsymbol{\lambda}_{(t-1)} + \boldsymbol{s}_{(t)} \\ &\lambda_{(t)} \geqq \boldsymbol{o} \\ &\boldsymbol{B}_{(-1)} = \boldsymbol{O} \end{aligned}$$

添字は t 期間をあらわす。今期の財の存在量が前期の生産活動によつて規定される故に、この関連を追跡すれば恐らく無限の過去にまで遡らねばならないだろう。しかしわれわれはこの遡及を第 o 期以前にまでつづけることを止め、それをもつて分析の期間の出発点とする。そして第 o 期首の存在量は与件として $\boldsymbol{s}_0$ によつてあらわす。(8)の第三式はこれを示す。

消費に関する前述の想定によつて

$$(9)\quad \boldsymbol{c}_{(t)} = \boldsymbol{B}_{(t-1)}\boldsymbol{\lambda}_{(t-1)} + \boldsymbol{s}_{(t)} - \boldsymbol{A}_{(t)}\boldsymbol{\lambda}_{(t)}$$

ただし、$\boldsymbol{c}_{(t)}$ は各財の消費量のベクトルであり、(8)によつてそれは非負である。

各期間においてなりたつ(8)、(9)の関係を一括すれば

$$(10)\quad \boldsymbol{M\lambda} \leqq \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{\lambda} \geqq \boldsymbol{o}$$

$$(11)\quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{M\lambda}$$

ここに

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_{(0)}\\ \lambda_{(1)}\\ \lambda_{(2)}\\ \cdots\cdots\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}s_{(0)}\\ s_{(1)}\\ s_{(2)}\\ \cdots\cdots\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_{(0)}\\ c_{(1)}\\ c_{(2)}\\ \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

であり、また

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{(0)} & & & & \\ -\boldsymbol{B}_{(0)}, & \boldsymbol{A}_{(1)} & & & \\ & -\boldsymbol{B}_{(1)}, & \boldsymbol{A}_{(2)} & & \\ & & -\boldsymbol{B}_{(2)}, & \boldsymbol{A}_{(3)} & \\ & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

である。$\boldsymbol{M}$ の空白部分はゼロの元をあらわす。

各期間における財の生産と消費への配分の連続的な過程としての経済発展の時間的な径路はベクトル λ によって一意的にあらわされる。ところで、第 0 期の財の存在量および各期における外生的な財の流入量が一定であるとしても、各期に(8)の条件をみたす数多くの経済発展の時間径路が存在するであろう。そこでいまこれらの可能な発展径路のうちの二つ、G_1 と G_2 とをとりあげ、その消費量の系列 $\boldsymbol{c}^1$ と $\boldsymbol{c}^2$ とを比較する。そしてもし $\boldsymbol{c}^1$ の一つまたはいくつかの元、すなわち、G_1 におけるいくつか期間におけるいくつかの財の消費量がそれに対応する $\boldsymbol{c}^2$ すなわち G_2 の消費量より多く、かつその他の各期のすべての財の消費量の G_1 における値がそれに対応する G_2 の値より小で

ないならば、つまり

$$c^1 \geqq c^2$$

ならば、G^1 を G^2 より良好な発展径路であると呼ぼう。ここに良好というのは必ずしもある価値判断にもとづくものではなく、単に一つの定義に過ぎない。ところで、われわれは各期において生産に使用されないすべての財は消費にむけられると仮定してきた。そして、この仮定との関連において経済の発展径路の良好を定義した。しかしいま前述のベクトル $\boldsymbol{c}$ に特定の意味を与えず、単に演算的に同様の定義をおこなえば容易に分るように、発展径路 G_1 が G_2 より良好であるというのは、実は、G_2 においては G_1 に比べて少くとも一期間において非効率的な生産がおこなわれていることを意味するものなのである。したがつて、厳密にいえば、生産の効率の良否を定める手段として $\boldsymbol{c}$ を導入するのみで、必ずしもそれを通常の意味での消費との関連において理解する必要はない。以下の叙述の基本的な部分においては消費のタームを単に名称として用いるに過ぎないのである。なお、右の良好の比較基準はすべての異つた発展径路の間の比較に適用されうるものではなく、そのうちの特殊なものに対してのみ用いられ得るものであることをつけ加えておく。われわれは、ある期間にはより多くの消費をもたらし、他の期間にはより少い消費を生ぜしめたり、また同じ期間において、ある財についてはより多くの消費を、他の財についてはより少い消費を与えるような二つの発展径路を比較しようとしているのではない。

次に、発展径路 G に対してより良好な可能な発展径路が存在しないとき G を有効な径路と名付けよう。(2) われわれの消費を通常のそれと考えるならば、有効な発展径路とは、各期においてパレートの最適状態の実現されているような径路に他ならない。有効な径路上では各期に生産の有効点が実現せられていることはいうまでもない。

前節で生産の有効点に関連して述べたのと同様に、生産の統一的計画主体が存在し、この主体が、各期の外生的な財の流入量についてのインフォメーションにもとづき、第 o 期首に最適計画を立案するとすれば、その結果実現されるのは有効な発展径路である。この場合、径路を定めるレベル・ベクトルは⑽、⑾および

(12)　$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c}=max.$

をみたす $\boldsymbol{\lambda}$ によつて与えられる。ただし、$\boldsymbol{p}$ はこの場合の計画主体の評価ベクトルであり、

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_{(0)}\\ \boldsymbol{p}_{(1)}\\ \boldsymbol{p}_{(2)}\\ \cdots\cdots\end{pmatrix}$$

とする。

逆に、数多くの可能な発展径路のうちの一つの有効径路を予定する場合、この径路に対応する $\boldsymbol{\lambda}$ を⑽、⑾、⑿の解にならしめるような $\boldsymbol{p}$ が存在する。このことも前節で述べたのと同様である。(3)

さらに、前節の議論の拡張として、各期の各財の価格状態に対応して、完全競争市場における各企業の極大利潤の追求の結果として一つの有効な発展径路が定まり、逆に企業の利潤極大化の結果として特定の有効径路を実現せしめるような各期の価格状態がこの径路に附随していることが証明される。この場合の各期の価格がすべて相対価格を意味することも前節で述べた通りであるが、さらに異つた期間の諸財の価格もまた相対的な値として定まることに注意しなければならない。

〔註〕

(1)　社会において生産されると同種の財が外部から流入する場合にも本稿の分析は全く変らない。この場合はいくつかの $\boldsymbol{B\lambda}$ と $\boldsymbol{s}$

の対応する元がともに正となるだけである。

(2) E. Malinvaud, "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resource," *Econometrica* 1953, pp. 233~268.

(3) 経済発展の径路の有効性を消費の系列にもとづいて定義する以上、厳密にいえば、無限の将来にわたる各期の消費の状態を考慮に入れなければならない。（T. C. Koopmans, *Three Essays* pp. 106~107, E. Malinvaud, *loc. cit.*）しかし本稿ではこの問題をイクスプリシトに取上げげないでおく。

III

一つの有効径路とそれに対応する価格の状態のもとでの他の径路とを比較しよう。すなわちある価格ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対応する一つの有効径路を G_1 とし、それに比較して、いくつかの期間（$\in T_a$）の少くとも一つの財の消費がより少く、他のいくつかの期間（$\in T_b$）の少くとも一つの財の消費がより多く、またそれ以外の各期の消費の状態が同一であるような可能な径路を G_2 とすれば、G_1 が有効径路であるから

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c}^1-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c}^2=\sum_{t\in T_a}\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t)}-\boldsymbol{c}^2_{(t)}\right]+\sum_{t\in T_b}\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t)}-\boldsymbol{c}^2_{(t)}\right]\geqq 0$$

(13) $$\sum_{t\in T_a}\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t)}-\boldsymbol{c}^2_{(t)}\right]\geqq\sum_{t\in T_b}\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^2_{(t)}-\boldsymbol{c}^1_{(t)}\right]$$

この式の左辺はいくつかの期間における G_2 の G_1 に比較しての消費の削減、その意味で投資の価値を示し、右辺はそれによる生産物増加の価値をあらわす。もし、価格 $\boldsymbol{p}$ に対応して二つ以上の有効な径路が存在し G_2 がその一つであればこの式の等号がなりたつ。また可能な径路 G_3 が、G_1 に比べて、いくつかの期間（$\in T_c$）により多い消費を、また他の期間（$\in T_a$）により少い消費を、そしてその他の期間に同一の消費をもたらすならば

$$(14)\quad \sum_{t\in T_c} \boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^3_{(t)} - \boldsymbol{c}^1_{(t)}\right] \leqq \sum_{t\in T_d} \boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t)} - \boldsymbol{c}^3_{(t)}\right]$$

であり、この左辺は G_3 の G_1 に対する負の投資の価値を、右辺はそれによる生産物の減少の価値をあらわす。G_3 が有効な径路ならば等号がなりたつことは前の場合と同様である。(13)、(14)は有効な径路上では投資計画の変更による改善の余地のないことをあらはし、その意味において、そこでは最適の資本蓄積がおこなわれているということができるであろう。

前節で述べたように、一つの有効な経済発展の径路に対応する価格、すなわち各期の一定の企業者均衡と相伴う均衡価格は同時的および異時的に相対比として定まるものであつた。(1) そこで第 m 財の価格が全期間にわたつて正であるとすれば、この財を貨幣財とするときの第 t 期の短期利子率は

$$r_{(t)} = \frac{p_{m(t)}}{p_{m(t+1)}} - 1$$

また、各期における第 m 財の価格を単位とする各財の価格は

$$\bar{\boldsymbol{p}}_{(t)} = \frac{1}{p_{m(t)}}\boldsymbol{p}_{(t)}$$

である。これを各財の貨幣価格と呼ぶことにする。

したがつて、(13)において $T_a = \{t\}, T_b = \{t+1\}$ である場合には、G_2 での貨幣価格であらわした投資の限界生産力を $\rho^2_{(t)}$ とすれば

$$(15)\quad \frac{1+\rho^2_{(t)}}{1+r_{(t)}} = \frac{\boldsymbol{p}^T_{(t+1)}\left[\boldsymbol{c}^2_{(t+1)} - \boldsymbol{c}^1_{(t+1)}\right]}{\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t)} - \boldsymbol{c}^2_{(t)}\right]}$$

また⒁で $T_c=\{t\}$, $T_d=\{t+1\}$ であるとき、G_3 における貨幣価格で計算した負の投資の限界生産力を $\rho^3_{(t)}$ とすれば

$$(16)\quad \frac{1+\rho^3_{(t)}}{1+r_{(t)}}=\frac{\boldsymbol{p}^T_{(t+1)}\left[\boldsymbol{c}^1_{(t+1)}-\boldsymbol{c}^3_{(t+1)}\right]}{\boldsymbol{p}^T_{(t)}\left[\boldsymbol{c}^3_{(t)}-\boldsymbol{c}^1_{(t)}\right]}$$

そして、⒀、⒁、⒂および⒃より

$$(17)\quad \rho^2_{(t)}\leqq r_{(t)}\leqq \rho^3_{(t)}$$

G_2、G_3 がともに有効な径路である場合にこの式の等号がなりたち、この場合には二つの意味での限界生産力と利子率は相等しい。もちろん、何れを貨幣財とするかによつて利子率および投資の限界生産力の値は異なるであろう。(2) しかしどの財をえらんでも⒄の関係はなりたつ。

なお、有効な径路上では各期の企業の利潤の相対的な評価での価値が極大化されているわけである。そして

$$\boldsymbol{p}^T_{(t+1)}\boldsymbol{B}_{(t)}\lambda_{(t)}-\boldsymbol{p}^T_{(t)}\boldsymbol{A}_{(t)}\lambda_{(t)}=p_{m(t+1)}\left\{\overline{\boldsymbol{p}}_{(t+1)}\left[\boldsymbol{B}_{(t)}-\boldsymbol{A}_{(t)}\right]\lambda_{(t)}+\left[\overline{\boldsymbol{p}}_{(t+1)}-\overline{\boldsymbol{p}}_{(t)}\right]\boldsymbol{A}_{(t)}\lambda_{(t)}-r_{(t)}\overline{\boldsymbol{p}}_{(t)}\boldsymbol{A}_{(t)}\lambda_{(t)}\right\}$$

であり、{ }内の第一項は第（$t+1$）期の貨幣価格での純産出量の価値、第二項は資本利得、そして第三項は利子費用をあらわす。ゆえに利潤の極大は貨幣価格のタームでこれらの和の極大であると考えられる。(3)

〔註〕

（1） 第 o 期において将来の生産計画を編成する企業群を仮定すれば、$\boldsymbol{p}$ は第 o 期における各期のそれぞれの財の現在価値をあらわすものと考えられる。

（2） C. f. P. A. Samelson, ***Foundations of Economic Analysis***, 1947, p. 233n

（3） E. Malinvaud, *loc. cit.* p. 253

Ⅳ

(10)、(11)のモデルにおいて、労働その他の存在量が内生的に定まるとし、また土地その他が充分に存在するものとしてこれを考慮外におけば、われわれは外生的に定まる財の使用可能量を無視して、一つのクローズド・モデルを得る。更に各期の生産技術が変化しないとすれば(8)より

(18)　$\boldsymbol{A}\lambda_{(t)} \leqq \boldsymbol{B}\lambda_{(t-1)}$,　$\lambda_{(t)} \geqq \boldsymbol{o}$

またそれと双対的に

(19)　$\boldsymbol{p}^T_{(t)}\boldsymbol{A} \geqq \boldsymbol{p}^T_{(t+1)}\boldsymbol{B}$,　$\boldsymbol{p}_{(t)} \geqq \boldsymbol{o}$

そして前節の記号を用いれば

(20)　$(1+\boldsymbol{r}_{(t)})\bar{\boldsymbol{p}}^T_{(t)}\boldsymbol{A} \geqq \bar{\boldsymbol{p}}^T_{(t+1)}\boldsymbol{B}$,　$\bar{\boldsymbol{p}}_{(t)} \geqq \boldsymbol{o}$

いま、このような前提のもとで、各プロセスが各期に同一比率で変化し、各財の貨幣価格が一定であるような均衡成長の場合を考察しよう。プロセスの変化率を $\boldsymbol{g}$ とすれば[1]、(18)、(20)より

(21)　$(1+g_{(t)})\boldsymbol{A}\lambda_{(t)} \leqq \boldsymbol{B}\lambda_{(t)}$,　$\lambda_{(t)} \geqq \boldsymbol{o}$

(22)　$(1+\boldsymbol{r}_{(t)})\,\bar{\boldsymbol{p}}^T_{(t)}\boldsymbol{A} \geqq \bar{\boldsymbol{p}}^T_{(t)}\boldsymbol{B}$,　$\bar{\boldsymbol{p}}_{(t)} \geqq \boldsymbol{o}$

それゆえ、$\boldsymbol{A}$ の第 i 行および第 j 列を $\bar{\boldsymbol{a}}^T_{(i)}$、$\boldsymbol{a}_{(j)}$ とし、$\boldsymbol{B}$ についても同様の定義をすれば

(23)　$1+g \leqq \dfrac{\bar{\boldsymbol{b}}^T_{(i)}\lambda}{\bar{\boldsymbol{a}}^T_{(i)}\lambda}$　$(i=1,2\ldots)$

(24)　$1+r \geqq \dfrac{\bar{p}^T b_{(j)}}{\bar{p}^T a_{(j)}}$　$(j=1,2\ldots)$

ただし、以下添字 t を省略する。㉓は g が実物タームでの各財の増加率のうちの最小のものにひとしく、㉔は r が貨幣価格のタームでの各プロセスの利潤率の最大のものにひとしいことを示す。

$$\phi(x,y)=\frac{y^T Bx}{y^T Ax},\quad x\geqq o,\ y\geqq o$$

と定義すれば、㉑、㉒より

$$\phi(\lambda,y)=\frac{\sum_i y_i \bar{b}^T_{(i)}\lambda}{\sum_i \lambda_i \bar{a}^T_{(i)} y}\geqq 1+g$$

$$\phi(x,\bar{p})=\frac{\sum_j \bar{p}^T b_{(j)} x_j}{\sum_j \bar{p}^T a_{(j)} x_j}\leqq 1+r$$

また、線型計画の問題でよく知られているように、㉓の等号がなりたつとき p_i は正、不等号のなりたつとき p_i はゼロ、㉔の等号がなりたつとき λ_j は正、不等号がなりたつとき λ_j はゼロであるから、

(25)　$\phi(\lambda,\bar{p})=1+g=1+r$

そして

(26)　$\phi(x,\bar{p})\leqq\phi(\lambda,\bar{p})\leqq\phi(\lambda,y)$

すなわち $(\lambda,\bar{p})$ は ϕ のサドル点であり、この解において成長率 g と利子率 r は相等しい。なお $\phi(\lambda,\bar{p})$ はこの場合の粗利潤率である。(2)

〔注〕

(1) $\lambda(t)=0$, $p(t)=0$ なるトリビアルな場合を除く。

(2) 特殊な場合にはϕは不定になる。しかしここではこの問題に立入らないでおく。なお、このモデルについての立ち入った考察はノイマンの前掲の論文の入手をまつておこなうつもりである。