



## レベルセット法による形状表現を用いた信頼性に基づくトポロジー最適化

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-11-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 平野, 佑享, 山田, 崇恭, 小木曾, 望, 西脇, 眞二 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15660">http://hdl.handle.net/10466/15660</a>

# レベルセット法による形状表現を用いた 信頼性に基づくトポロジー最適化\*

平野佑享\*<sup>1</sup>, 山田崇恭\*<sup>2</sup>, 小木曾望\*<sup>1</sup>, 西脇眞二\*<sup>2</sup>,

## Reliability-Based Topology Optimization Incorporating Level Set Boundary Expressions

Yutaka HIRANO\*<sup>1</sup> Takayuki YAMADA\*<sup>2</sup> Nozomu KOGISO\*<sup>1</sup>  
and Shinji NISHIWAKI\*<sup>2</sup>

\*<sup>1</sup> Department of Aerospace Engineering, Osaka Prefecture University  
1-1 Gakuen-Cho, Naka-ku, Sakai, Osaka, 599-8531, JAPAN

\*<sup>2</sup> Department of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University  
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

This research proposes reliability-based topology optimization (RBTO) method using an approximate single-loop reliability-based design method with the topology optimization incorporating level set boundary expressions based on the concept of the phase field method. The design problem is formulated to minimize the structural volume subject to the reliability constraint concerning mean compliance under variations on Young's modulus and applied loads. The reliability-based optimization is formulated as a single loop algorithm by using Single Loop Single Variable (SLSV) method to reduce computational time. The structural model is described by using level set boundary expressions based on the concept of the phase field method for topology optimization. Through numerical examples, difference between the optimum configurations on deterministic method and reliability-based method is demonstrated and the effectiveness of this method is discussed.

**Key Words** : Structural Reliability, Optimum Design, Finite Element Method, Reliability-Based Topology Optimization, SLSV Method, Level Set Method, Phase Field Method

### 1. 緒 言

近年、市販の最適設計ツールや CAE ツールの発展に伴い、最適設計手法は機械システムの高度化、高性能化の一翼を担うようになってきている。その一方で、高度化、複雑化したシステムがひとたび破損すると、社会生活など広い範囲に大きな影響をおよぼす。そのため、機械システムの信頼性、安全性への要求が高くなってきている。機械の信頼度は、材料特性や製造条件、負荷荷重などの使用環境などのバラツキを確率変数としてモデル化し、構造応答量が規定値を超えない確率として評価される<sup>(1)</sup>。信頼性解析と最適設計を組み合わせることで、信頼度に対する制約のもとで重量最小化する設計や、重量制約のもとでの信頼度を最大化する設計を行うことができる。この手法を、信頼性に

基づく最適設計 (Reliability-Based Design Optimization: RBDO)<sup>(2)</sup>とよぶ。

しかし、大規模で複雑な構造へ RBDO を適用することは困難である。これは、信頼性解析として広く用いられている一次信頼性法 (First-Order Reliability Method (FORM)) が Rackwitz-Fiessler 法<sup>(3)</sup>のような繰り返し計算を必要とするために、RBDO が二重ループ問題として定式化されるためである。

この問題を解決するために、近年、計算効率向上を目的としたいくつかの手法が提案されている。Chen ら<sup>(4)</sup>は単一ループ手法として、SLSV (Single Loop Single Variable) 法を提案している。これは、最適化の繰り返し過程において、信頼性制約を等価な確定的制約条件として近似することで、二重ループを解消している。また、Wu ら<sup>(5)</sup>は SFA (Safety-Factor Approach)、Du ら<sup>(6)</sup>は SORA (Sequential Optimization and Reliability Assessment) を提案している。この手法は信頼性解析で得られた情報から信頼性制約を確定制約に変換し、確定的な最適化問題を解くことを繰り返すことで、二

\* 原稿受付 2009 年??月??日

\*<sup>1</sup> 大阪府立大学大学院 工学研究科 航空宇宙海洋系専攻  
大阪府堺市中央区学園町 1-1

\*<sup>2</sup> 京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻  
京都府京都市左京区吉田本町  
Email: y-hirano@aero.osakafu-u.ac.jp

重ループを解消している。Yang ら<sup>(7)(8)</sup>はいくつかの問題に対してこれらの手法の計算効率を比較し、多くの場合で SLSV が SFA や SORA に比べて、収束性能が高く、計算効率が高いことを示している。

さらに、著者の一部は機械構造物の構想設計への適用を目的に、フレーム構造に対する信頼性に基づくトポロジー最適化 (Reliability-Based Topology Optimization (RBTO)) の方法を構築し<sup>(9)(10)</sup>、その方法に、SLSV を適用した場合、計算効率が大幅に改善できることを示した<sup>(11)</sup>。一方、連続体力学に基づくトポロジー最適設計法<sup>(12)</sup>に対して、不確定性を考慮した RBTO が報告され<sup>(13)~(15)</sup>、さらに、Min ら<sup>(16)</sup>は計算効率向上のために SLSV を適用し、その効果を明らかにしている。また、MEMS(Micro Electro Mechanical System)におけるコンプライアントメカニズムの最適設計に RBTO を適用した事例<sup>(17)</sup>も報告されている。

他方、新しい構造最適化の方法として、レベルセット法に基づく構造最適化が提案されている<sup>(18)(19)</sup>。従来のトポロジー最適化<sup>(12)</sup>においては、明確な外形形状を表現できないグレースケールを含む構造を最適解として許容しているがゆえ、工学的に意味のある構造を得るのに難しさがあった。しかし、この方法においては、レベルセット関数の等位面を用いて、物体境界を表現しているため、明瞭な外形形状が得られる。例えば、Wang ら<sup>(18)</sup>と Allaire ら<sup>(19)</sup>は、境界の外形形状感度に基づいて、レベルセット関数を更新する方法を提案している。この方法は、基本的には形状最適化の方法であるため、初期形状などのパラメータ設定や、レベルセット関数に対する境界条件設定が難しい問題を持つ<sup>(20)</sup>。これに対し、山田ら<sup>(21)</sup>は物体形状の変動に対する感度に基づいて、レベルセット関数を更新することにより、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化を提案している。

本研究では、このレベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適設計を、荷重条件や材料特性が不確定性を有する場合に適用するために、信頼性に基づくトポロジー最適設計の新しい手法を構築する。信頼性に基づく最適設計法として、SLSV 法の単一ループ法を適用することで、従来の確定的最適設計と同程度の計算時間で、明瞭な形状を有する構造形態を求めることができる。

以下、2章では、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化の考え方について簡単に述べる。3章では、信頼性に基づく最適設計について概説するとともに、SLSV 法を用いた信頼性に基づく最適設計法の定式化を行う。次に、レベルセット法による

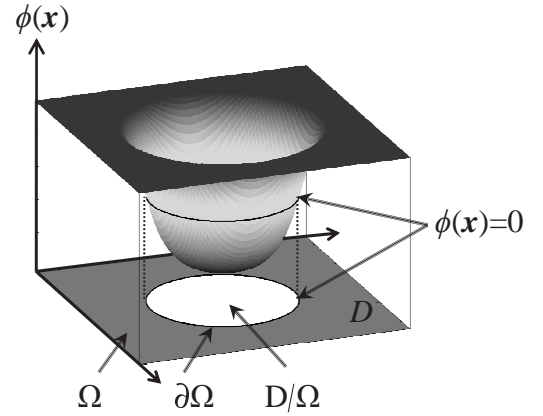


Fig. 1 Fixed design domain  $D$  and level set function  $\phi$

形状表現を用いたトポロジー最適化と SLSV 法に基づいて、平均コンプライアンスに対する信頼性制約問題の定式化を行う。最後に4章では、数値計算例により、確定的手法による最適構造と、信頼性に基づく手法による最適構造を比較することにより、本研究において提案する手法の有効性と妥当性の検証を行う。

## 2. レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化

**2.1 レベルセット法に基づく構造最適化問題** 物体が占めている領域を物体領域  $\Omega$ 、物体領域が存在することが許容される固定領域を固定設計領域  $D$  と定義し、物体領域の構造最適化について考える。最初に、図1に示すように、物体領域で正、物体の境界で0、空洞領域で負をとるスカラー場  $\phi(\mathbf{x})$  を、レベルセット関数として次式で定義する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}$  は固定設計領域の座標である。なお、上式において、レベルセット関数に上限値と下限値をそれぞれ、1 と -1 に設定しているが、これは後述の目的汎関数に付加する界面エネルギーをレベルセット関数により表現するために必要とする。これにより、レベルセット関数は通常設定される符号付き距離関数の性質をもち、図1に示すように、空洞領域では -1、物体領域では 1 をとり、境界近傍において滑らかに分布する関数となる。

次に、式(1)で定義されるレベルセット法による形状表現を用いて、目的汎関数を  $F$ 、体積制約に対する制約汎関数を  $G$  で表す構造最適化問題を次式で定義

する.

$$\text{Minimize}_{\phi} : F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega \quad (2)$$

$$\text{subject to} : G(\Omega(\phi)) \leq 0 \quad (3)$$

ここで、 $f(\mathbf{x})$  は目的汎関数の被積分関数である. 上式の構造最適化問題においては、レベルセット関数  $\phi$  は固定設計領域  $D$  内の至る所で不連続性を持つことを許容している. その結果、得られる最適構造が、至るところで不連続となる解を許容する、いわゆる不適切な (ill-posed) 問題となるため、何らかの方法で最適化問題を適切な (well-posed) 問題にする正則化 (regularization) を必要とする.

他方、通常のトポロジー最適化においては、最適構造を、固定設計領域内  $D$  において、0 あるいは 1 の値をとる特性関数により表現するため、得られる最適構造が、至るところで不連続となる解を許容する不適切な問題となる. この問題を解決し、最適化問題を適切な問題にする正則化の方法として、均質化法<sup>(22)~(24)</sup>が利用されている. しかし、最適構造を表現する関数の相違により、本最適化問題に、この正則化の方法を適用することは難しい.

そこで、本研究では、フェーズフィールド理論<sup>(25) (26)</sup>の定式化で利用されている界面エネルギーの導入により、問題の正則化を行う. この方法の基本的な考え方は、次式に示すように、目的汎関数を、目的汎関数とレベルセット関数の勾配の大きさによって表現される仮想的な界面エネルギーとの和への置き換えである.

$$F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \quad (4)$$

ここで、 $\tau$  は、仮想的な界面エネルギーの大きさの寄与度を決定するパラメータである. このパラメータは、正則化の度合いを決定するだけではなく、構造の複雑性を定性的に決定するため、ここでは複雑度係数と呼ぶ. この値の設定により、工学的に有効な最適設計解を創成することを可能としている. 詳細は文献<sup>(21)</sup>を参照されたい.

次に、この構造最適設計問題にラグランジュ未定乗数法を適用し、次の無制約問題に置き換える.

$$\bar{F}(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega + \lambda G(\Omega(\phi)) + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \quad (5)$$

ここで、 $\bar{F}$  はラグランジュアン、 $\lambda$  はラグランジュ未定乗数である. 本研究では、上式を解くことにより、最適構造を得る.

**2.2 設計変数の更新** 本研究では、設計変数の更新はフェーズフィールド法にの考え方にに基づき得られる拡散反応方程式により行う. すなわち、仮想的な時間  $t$  を導入し、レベルセット関数を変動させる駆動力は、ラグランジュアンの勾配に比例するものと仮定し、次式に示すように、最適化問題をレベルセット関数  $\phi$  の時間発展問題の更新により解く.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{\delta \bar{F}}{\delta \phi} \quad (6)$$

ただし、 $K(\phi) (> 0)$  は比例定数、 $\delta \bar{F} / \delta \phi$  はラグランジュアン  $\bar{F}$  の変分を表す. 式(6)に式(5)を代入すると、次式に示す反応拡散方程式が得られる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left( f(\mathbf{x}) \frac{\delta \Omega}{\delta \phi} H(\phi) + \lambda \frac{\delta G}{\delta \phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \quad (7)$$

ここで、 $H(\phi)$  はヘビサイド関数である. 境界条件として、物体領域境界であることが指定されている境界  $\partial D_N$  はディリクレ境界条件、それ以外の境界はノイマン境界条件を与え、固定設計領域外部からの干渉がないことを表現する. 以上をまとめると、設計変数の更新で用いる時間発展方程式は次式となる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left( f(\mathbf{x}) \frac{\delta \Omega}{\delta \phi} H(\phi) + \lambda \frac{\delta G}{\delta \phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (8)$$

### 3. 信頼性に基づく最適化

設計変数を  $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_n]^T$ 、確率変数を  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_l]^T$  とする. 破損を定義する限界状態関数を  $g(\mathbf{d}, \mathbf{z})$  とおくと、破損確率  $P_f$  は限界状態関数が負の値をとる確率  $P(g(\mathbf{d}, \mathbf{z}) < 0)$  として定義できる. この限界状態関数に対して、破損確率をある基準値以下にするという制約条件のもとで、目的関数  $F(\mathbf{d})$  を最小化する信頼性に基づく最適化問題は次式で定式化できる.

$$\text{Minimize} : F(\mathbf{d}) \quad (9)$$

$$\text{subject to} : P_f = P(g(\mathbf{d}, \mathbf{z}) < 0) \leq \Phi(-\beta_1) \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_U$$

ただし、 $\Phi()$  は標準正規確率分布関数、 $\beta_1$  は目標とする信頼性指標、 $\mathbf{d}_L$  と  $\mathbf{d}_U$  は設計変数  $\mathbf{d}$  の下限値と上限値を表す.

**3.1 SLSV 法による信頼性解析** 信頼性に基づく最適設計問題は、最適化ループ内で FORM によって信頼度を評価するために、最適設計問題は二重ループ構造となり、多大な計算時間が必要となる<sup>(2)</sup>.

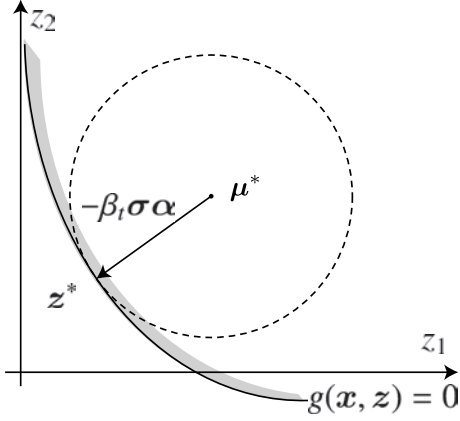


Fig. 2 Design point in  $\mathbf{Z}$ -space

この計算コストを削減する解決策として SLSV 法<sup>(4)</sup>が提案されている。SLSV 法は、設計点の近似を用いることで信頼性制約を確定的制約条件に置き換える単一ループ法であり、信頼性評価のための繰り返し計算を省くことができる。確率変数  $\mathbf{z}$  が正規分布  $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$  に従うとき、平均値  $\boldsymbol{\mu}$  と設計点  $\mathbf{z}^*$  との間には図 2 に示す次式の関係が成り立つ。

$$\mathbf{z}^* = \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}^* \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\nabla g(\mathbf{d}, \mathbf{z}^*)}{|\nabla g(\mathbf{d}, \mathbf{z}^*)|} \quad (12)$$

ただし、 $\boldsymbol{\alpha}$  は確率変数に対する限界状態関数の単位勾配ベクトルである。設計点が限界状態曲面上に存在することを考慮して、信頼性制約を次式で表す確定的制約に置き換えることができる。

$$g(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) \geq 0 \quad (13)$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}$  は設計点  $\mathbf{z}^*$  で評価すべき値である。式 (11), (12) を満足する設計点  $\mathbf{z}^*$  を求めるには繰り返し計算が必要であるが、SLSV 法では  $\boldsymbol{\alpha}$  を最適化ループにおける前の繰り返し過程の値を用いて、近似的に評価することにより、単一ループを実現している。

その手順を以下に示す。

1.  $k=0$  とし、初期設計  $\mathbf{z}^{(k)}$  を設定する。
2. 限界状態関数  $g(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})$  を評価するとともに、その感度  $\nabla g(\mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})$  を求め、 $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$  を求める。
3. 次式で示す最適設計問題を定式化し、直線探索により、 $\mathbf{d}^{(k+1)}$  を求める。

$$\text{Minimize} : F(\mathbf{d}^{(k+1)}) \quad (14)$$

$$\text{subject to} : g(\mathbf{d}^{(k+1)}, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}^{(k)}) \geq 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{d}_L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_U$$

4. 収束判定条件を満足していれば  $\mathbf{d}^{(k+1)}$  を最適解として最適化を終了する。そうでなければ、 $k=k+1$  として、2に戻る。

### 3.2 平均コンプライアンスに対する信頼性制約問題

境界  $\Gamma_u$  を完全固定した弾性変形する物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域  $D$  を考える。弾性体の境界  $\Gamma_t$  に表面力  $\mathbf{t}$  を作用させたときの弾性体の変位場を  $\mathbf{u}$  とすると、剛性の尺度となる平均コンプライアンスは次式で表される。

$$l(\mathbf{u}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{t}, E)) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (16)$$

この平均コンプライアンスを基準値以下に抑えることで構造物が基準となる剛性を満たすことができる。表面力  $\mathbf{t}$  およびヤング率  $E$  が変動すると、平均コンプライアンスが変動するため、基準値を超える可能性がある。その確率を評価するために、限界状態関数を次式で定義する。

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{t}, E) &= l_u - l(\mathbf{u}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{t}, E)) \\ &= l_u - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $l_u$  は平均コンプライアンスの上限値である。この限界状態関数を式 (10) に代入し、目標信頼性指標を  $\beta_t$  とする信頼性制約を定義する。

これらから、信頼性制約のものと体積最小化問題は次のようにまとめられる。

$$\text{Minimize} : F(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\Omega} d \Omega \quad (18)$$

$$\text{subject to} : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{u}) \quad (19)$$

$$\text{for } \forall \mathbf{v} \in U \quad \mathbf{u} \in U$$

$$P(g(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{z}) < 0) \leq \Phi(-\beta_t) \quad (20)$$

$$\text{where} : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (21)$$

ただし、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  はひずみテンソル、 $\mathbf{E}$  は弾性テンソル、 $U$  は以下の式にて定義される変位関数空間である。

$$U = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_u\} \quad (22)$$

この問題に SLSV 法を適用すると、式 (20) は次のように表される。なお、レベルセット法による最適設計問題の制約条件 (式 (2)) の符号に合わせるために、限界状態関数の符号を変えている。

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) &= -g(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) \\ &= l(\mathbf{u}) - l_u \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

次に、上の最適化問題に対する KKT 条件を導き、レベルセット関数  $\phi$  の更新に必要な関数  $f(\mathbf{x})$  を与える。

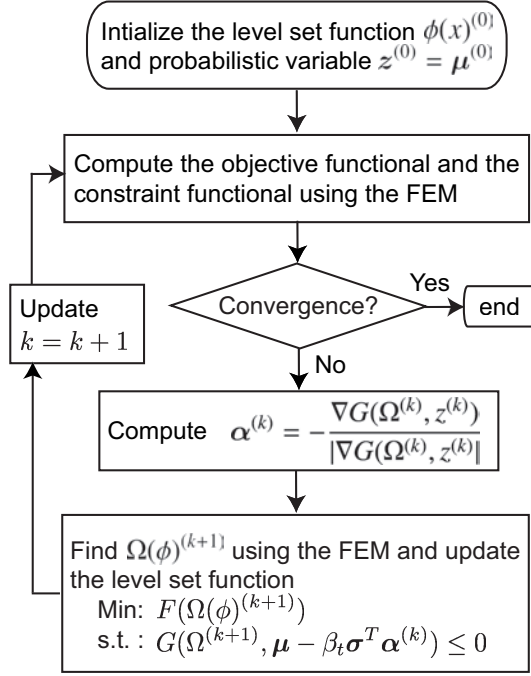


Fig. 3 Flowchart of optimization procedure

式 (5) より, ラグラジュアン  $\bar{F}(\Omega)$  は, 随伴変位場  $\mathbf{v}$  を用いて以下のように表される.

$$\bar{F}(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{u}) + \lambda G(\Omega, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) \quad (24)$$

この式に対する, KKT 条件は次式で表される.

$$\delta \bar{F} = 0 \quad (25)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{u}) = 0 \quad (26)$$

$$\lambda G(\Omega, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (27)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (28)$$

$$G(\Omega, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad (29)$$

ここで, レベルセット関数を更新する際に必要となるラグラジュアンの被積分関数  $\bar{f}(\mathbf{x})$  を導出する. 随伴変位場  $\mathbf{v}$  を次式で定義し, 最適化問題を自己随伴問題とする.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{u}) \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in U \quad \mathbf{u} \in U \quad (30)$$

式 (30) を式 (24) に代入し, 平衡方程式 (19) を用いると, ラグラジュアン  $\bar{F}(\Omega)$  は次式となる.

$$\begin{aligned} \bar{F}(\Omega) &= \int_{\Omega} d\Omega + \lambda G(\Omega, \boldsymbol{\mu} - \beta_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \int_{\Omega} d\Omega + \lambda (l_u - a(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \\ &= \int_{\Omega} \{1 - \lambda (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\} d\Omega \quad (31) \end{aligned}$$

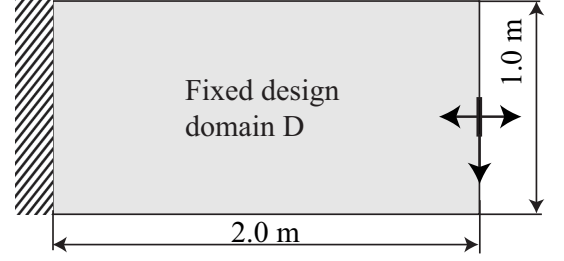


Fig. 4 Design domain and boundary conditions

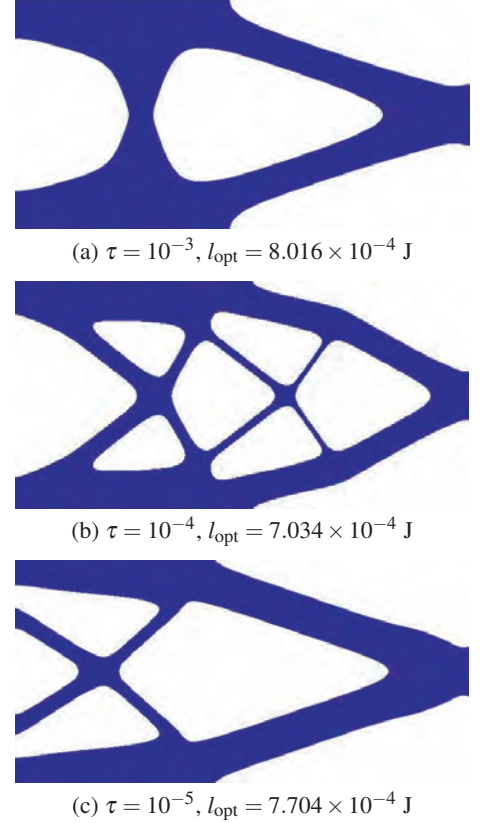


Fig. 5 Deterministic optimum configuration under 40% of volume constraint

よって, ラグラジュアン  $\bar{F}(\Omega)$  を与える被積分関数  $\bar{f}(\mathbf{x})$  は次式となる.

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = 1 - \lambda (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad (32)$$

図 3 に, レベルセット法を用いた信頼性に基づくトポロジー最適化のフローチャートを示す.

#### 4. 数値例

数値計算例を用いて, 確定的手法と信頼性に基づく手法の最適構造の比較を行う.

図 4 に設計問題の設計領域と境界条件を示す. 固定設計領域は 2.0m × 1.0m の長方形領域で, 要素の一边の長さを  $1 \times 10^{-2}$ m (20000 要素) とした. なお, 板厚

Table 1 Optimal results of example 1

$\tau$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Volume ( $\times 10^{-2} \text{m}^3$ )	0.9371	0.9334	0.9261
Reliability index	3.004	2.990	3.000

は  $1.0 \times 10^{-2} \text{m}$  で一定としている。

まず、確定的手法を用いて、基準とする平均コンプライアンスの上限値を算出する。図4に示すように、設計領域の右端の中心に曲げ荷重  $1000\text{N}$  を加える。固定設定領域の  $40\%$  ( $8.0 \times 10^{-3} \text{m}^3$ ) を体積制約とし、平均コンプライアンス最小化問題を考える。ここで、フェーズフィールド法の考えに基づくレベルセット法を用いたトポロジー最適化では、複雑度  $\tau$  の値によって最適構造の形態の複雑さを変えることができる<sup>(21)</sup>。ここで、複雑度の値を  $\tau = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  の三つの場合に対して得られた最適構造を図5に示す。

以下では、 $\tau = 10^{-3}$  のときに得られた平均コンプライアンスの値  $8.016 \times 10^{-4} \text{J}$  を、信頼性に基づく最適化における平均コンプライアンスの上限値  $l_u$  と設定する。また、目標信頼性指標  $\beta_t$  は  $3.0$  とする。数値例として、荷重の大きさと荷重方向を確率変数とする場合を計算例1とし、これに加えてヤング率も確率変数とする場合を計算例2とする。なお、確率変数は正規分布にしたがうものとする。

**4.1 計算例1** 計算例1では、荷重の大きさと荷重方向を確率変数として扱う。上述の確定的な問題に対して、図4に示すように、設計領域の右端の中心に平均値  $\mu_{F_y} = 1000\text{N}$ 、標準偏差  $\sigma_{F_y} = 50\text{N}$  の正規分布にしたがう曲げ荷重と平均値  $\mu_{F_x} = 0\text{N}$ 、標準偏差  $\sigma_{F_x} = 50\text{N}$  の正規分布にしたがう圧縮・引張荷重を加える。圧縮・引張荷重を加えることにより、荷重方向にバラツキを与える。

それぞれの複雑度に対して得られた体積と信頼性指標の値を表1に、最適構造を図6に示す。 $\tau = 10^{-3}$  の場合には、確定的手法のときよりも太い構造となった。また、 $\tau = 10^{-4}$  の場合には、最適構造の形態は確定的手法のそれよりも太く、さらに単純な形態となった。これは、基準の剛性を満たすために構造部材を太くすることが必要となり、その結果、確定的手法で見られた細い部材が消滅したものと考える。 $\tau = 10^{-5}$  の場合は、 $\tau = 10^{-4}$  の最適形態に近いものとなった。これらの最適形態は確定的な場合と比べて体積が約  $1.15$  倍に増加していることから、平均コンプライアンスの値は、荷重のバラツキに大きく影響されることがわかる。

表1から、複雑度の値が小さくなるにつれて体積が減少していることがわかる。複雑度を小さくすること

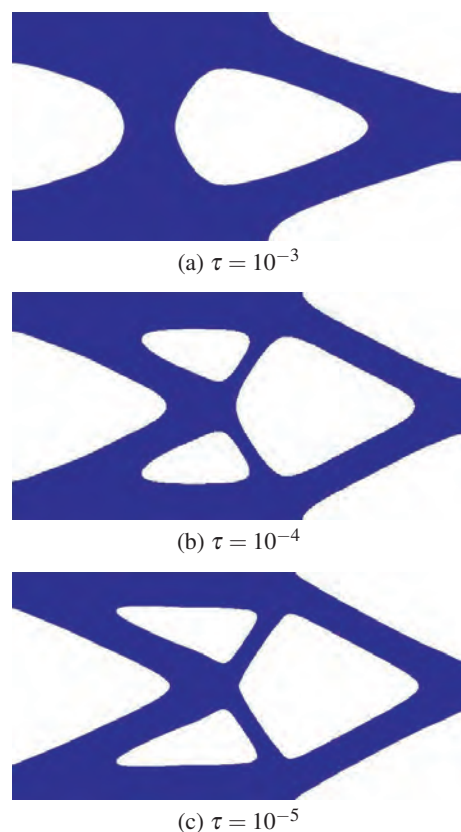


Fig. 6 Reliability-based optimum configuration of example 1 by using SLSV

で、より細かな設計が可能になり、目的関数である体積を減少させることができるためであると考えられる。なお、表1に示した信頼性指標は、最適形態に対して、Rackwitz-Fiessler法で求めた値である。 $\beta_t = 3.0$  との誤差が小さいことから、SLSV法の近似精度が十分に高いことがわかる。

**4.2 計算例2** 計算例2では、計算例1の確率変数に加えて、さらにヤング率を確率変数とする。物体領域におけるヤング率を平均値  $\mu_E = 210\text{GPa}$ 、標準偏差  $\sigma_E = 10.5\text{GPa}$  の正規分布にしたがうものとする。

それぞれの複雑度に対して得られた体積と信頼性指標の値を表2に、最適構造を図7に示す。 $\tau = 10^{-3}$ ,  $\tau = 10^{-4}$ ,  $\tau = 10^{-5}$  のそれぞれの場合において、計算例1で得られる最適形態と似たような構造となった。計算例1と体積を比較すると、計算例2の方がさらに体積が増加している。この結果から、荷重に加えて、ヤング率を確率変数に加えると剛性に大きく影響することがわかる。また、計算例2でも、複雑度が小さい方が体積が小さくなることがわかる。

次に、表3に  $\tau = 10^{-3}$  のときの確定的最適設計とRBTOの場合の計算時間を比較する。単一ループ法を用いることで、確定的最適設計の  $1.2$  倍程度の計算時

Table 2 Optimal results of example 2

$\tau$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Volume ( $\times 10^{-2} \text{m}^3$ )	1.027	0.9697	0.9666
Reliability index	2.987	3.012	3.026

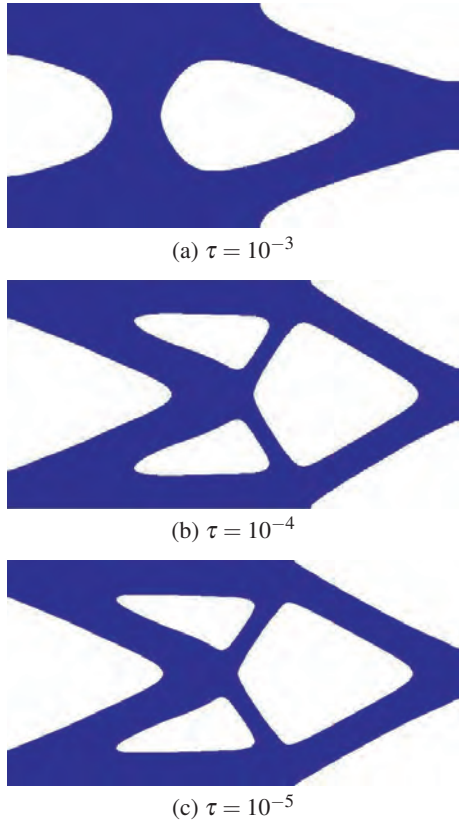


Fig. 7 Reliability-based optimum configuration of example 2 by using SLSV

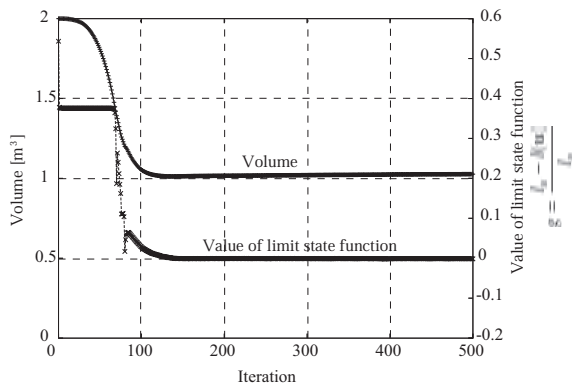


Fig. 8 Convergence history by using SLSV (example 2,  $\tau = 10^{-3}$ )

間に抑えられている。このときの収束履歴を図8に示す。目的関数、限界状態関数ともになめらかに最適解に収束していることから、本提案手法の収束特性が優れていることがわかる。

次に、この計算例において、信頼性解析に Rackwitz-



Fig. 9 Reliability-based optimum configuration of example 2 by using double-loop method ( $\tau = 10^{-3}$ )

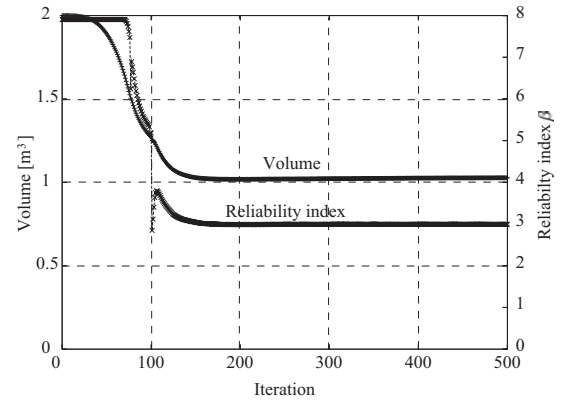


Fig. 10 Convergence history by using double-loop method ( $\tau = 10^{-3}$ )

Table 3 Comparison of CPU time for  $\tau = 10^{-3}$

Method	CPU time [sec]
Deterministic	2084
Reliability-based (SLSV)	2438
Reliability-based (Double-loop)	65015

\*CPU : Intel core 2 Duo 3GHz.

Table 4 Optimal results by using double-loop method for  $\tau = 10^{-3}$

Volume ( $\times 10^{-2} \text{m}^3$ )	1.028
Reliability index	2.994

Fiessler 法を用いた従来の二重ループ法の結果と、本提案手法とを比較する。  $\tau = 10^{-3}$  に対して得られた最適形態を図9に、収束履歴を図10に示す。図7(a)、図8とこれらの結果を比較すると、SLSV法は信頼性を近似計算で求めているにも関わらず、従来の二重ループ法と同等の収束性能を有することがわかる。また、最適解における体積、信頼性指標も、表4に示すようにSLSV法の結果と同等である。ただし、計算時間は表3に示すように、SLSV法の方が約27倍速く、計算効率が高いことがわかる。

最後に、本手法の信頼性解析精度の妥当性を示すた



Table 5 Results of Monte Carlo simulation

$\hat{P}_f$	$\widehat{\text{Var}}[\hat{P}_f]$	$\widehat{\text{Cov}}[\hat{P}_f]$	$\hat{\beta}$
$1.731 \times 10^{-3}$	$4.332 \times 10^{-10}$	$1.196 \times 10^{-2}$	2.923

めに、モンテカルロ法<sup>(1)</sup>と比較する。モンテカルロ法の試行回数  $N$  に対する破損確率の推定値  $\hat{P}_f$ 、分散の推定値  $\widehat{\text{Var}}[\hat{P}_f]$  および変動係数の推定値  $\widehat{\text{Cov}}[\hat{P}_f]$  は次式で表される。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(\mathbf{z}^{(i)}) \quad (33)$$

$$\widehat{\text{Var}}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \{I(\mathbf{z}^{(i)}) - \hat{P}_f\}^2 \quad (34)$$

$$\widehat{\text{Cov}}[\hat{P}_f] = \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}[\hat{P}_f]}}{\hat{P}_f} \quad (35)$$

ただし、 $I(\mathbf{z}^{(i)})$  は  $i$  番目の試行結果を示す状態指標関数である。

$$I(\mathbf{z}^{(i)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(\mathbf{z}^{(i)}) < 0 \\ 0 & \text{if } g(\mathbf{z}^{(i)}) \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

$\tau = 10^{-3}$  に対して、 $N = 4 \times 10^6$  回としてモンテカルロ法を実行した結果を表 5 に示す。破損確率推定値に対応する信頼性指標  $\hat{\beta}$  は、表 2 に示した結果と同程度であり、破損確率推定値に対する変動係数も十分小さな値であることから、本提案手法の信頼性解析は十分な精度を有していると言える。

ただし、従来の二重ループ法と同様、SLSV 法による信頼性解析の精度は、標準正規空間における限界状態関数の非線形度に大きく依存する。つまり、確率変数が非正規分布に従う場合や、限界状態関数の非線形性が強い場合の信頼性解析の精度が十分であるとは言えない。このような場合における信頼性に基づくトポロジー最適設計における効率的な手法の確立は、今後の課題とする。

## 5. 結 言

本研究では、荷重やヤング率に変動がある場合の平均コンプライアンスに対する信頼性制約のもとでの構造体積を最小化する信頼性に基づくトポロジー最適設計問題に対する設計法を提案した。トポロジー最適設計においては、明瞭な境界形状を得るために、フェーズフィールド法の考え方に基づいたレベルセット法を用い、この手法に対して、信頼性制約を展開し、定式化を行った。

そして、確定的な最適設計と同程度の計算量で最適形態を得るために、単一ループ法である SLSV 法を用

いて、信頼性に基づくトポロジー最適設計を構築した。数値計算例では、荷重の大きさ、荷重方向およびヤング率の変動を考慮して、最適形態を求めるとともに、下記の項目を明らかにした。

(1) 確定的な最適設計と同様に、信頼性に基づく最適設計においても、明瞭な境界形状が得られ、また、複雑度  $\tau$  を小さくするにつれて、より複雑な形状が得られる。

(2) SLSV 法における信頼性近似精度が高く、収束特性が優れていて、確定的な最適設計と同程度の計算量で最適形態が得られる。

(3) 同一の信頼性制約に対して、複雑度  $\tau$  を小さくすることで、体積の小さな構造が得られる。

## 文 献

- (1) Murotsu, Y., Yonezawa, M. and Shao, S., *System Reliability Engineering*, Kyoritu-Shuppan (1996), pp. 73-193 (in Japanese).
- (2) Japan Society of Mechanical Engineers Eds., *Optimum Design of Structures and Materials*, Gihodo-Shuppan (1989), pp. 219-268 (in Japanese).
- (3) Rackwitz, R., and Fiessler, B., *Structural Reliability under Combined Random Load Sequences*, *Computer and Structures*, Vol. 9 (1978), pp. 489-494.
- (4) Chen, X., Hasselman, T. K. and Neill, D. J., *Reliability Based Structural Design Optimization for Practical Applications*, *Proceedings of 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA-97-1403 (1997), pp. 2724-2732.
- (5) Wu, Y.-T. and Wang, W., *Efficient Probabilistic Design by Converting Reliability Constraints to Approximately Equivalent Deterministic Constraints*, *Journal of Integrated Design and Process Sciences*, Vol. 2, No. 4 (1998), pp. 13-21.
- (6) Du, X., and Chen, W., *Sequential Optimization and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design*, *Transaction of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 2 (2004), pp. 225-233.
- (7) Yang, R. J. and Gu, L., *Experience with Approximate Reliability-Based Optimization Methods*, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, No. 1/2 (2004), pp. 152-159.
- (8) Yang, R. J. and Gu, L., *Experience with Approximate Reliability-Based Optimization Methods : an Exhaust System Problem*, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 29, No. 6 (2005), pp. 488-497.
- (9) Mogami, K., Nishida, S., Izui, K., Yoshimura, M. and Kogiso, N., *Reliability-Based Structural Optimization of Frame Structures for Multiple Failure Criteria Using Topology Optimization Techniques*, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 32, No. 4 (2006), pp. 299-311.
- (10) Kogiso, N., Nishida, K., Mogami, K., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., *Structural Topology Optimization*

- Considering Multiple Performance Criteria Reliability (For Cases Where Variation of Element Cross-Sectional Property is Considered), *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 74, No. 742 (2008), pp. 1584-1593.
- (11) Kogiso, N., Hirano, Y., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M. and Min, S., Reliability-Based Topology Optimization for Frame Structure Considering Multiple Performance Criteria Using SLSV Method with Improvement of Convergence Property, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 75, No. 751, (2009), pp. 719-726.
- (12) Bendsoe, M. S. and Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2 (1988), pp. 197-224.
- (13) Kharamanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., and Lemaire, M., Reliability-Based Topology Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, No. 5 (2004).
- (14) Bae, K. Y., Wang, S. and Choi, K. K., Reliability-Based Topology Optimization, *Proceedings of 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, AIAA-2002-5530, (2002).
- (15) Kim, C., Wang, S., Bae, K. Y. and Choi, K. K., Reliability-Based Topology Optimization with Uncertainties, *Journal of Mechanical Science and Technology (KSME)*, Vol. 20, No. 4 (2006), pp. 494-504.
- (16) Min, S. and Bang, S., Structural Topology Design Considering Reliability, *Key Engineering Materials*, Vol. 299 (2005), pp. 1901-1906.
- (17) Allen, M., Raulli, M., Maute, K. and Frangopol, D. M., Reliability-Based Analysis and Design Optimization of Electrostatically Actuated MEMS, *Computer and Structures*, Vol. 82, No. 13-14 (2004), pp. 1007-1020.
- (18) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A level Set Method for Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2 (2003), pp. 227-246.
- (19) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A., Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1 (2004), pp. 363-393.
- (20) Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., A Study of Boundary Settings in the Design Domain for Structural Optimization Based on the Level Set Method, *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 18, No. 3 (2008), pp. 487-505.
- (21) Yamada, T., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M. and Takezawa, A., A Structural Optimization Method Incorporating Level Set Boundary Expressions Based on the Concept of Phase Field Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 75, No. 753 (2009), pp. 550-558.
- (22) Cherkaev, A., *Variational Methods for Structural Optimization*, (2000), pp. 117-141, Springer-Verlag.
- (23) Allaire, G., *Shape Optimization by The Homogenization Method*, (2002), pp. 189-257, Springer-Verlag.
- (24) Haslinger, J., Hillebrand, A., Karkkainen, T. and Miettinen, M., Optimization of Conducting Structures by Using The Homogenization Method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24, No. 2 (2002), pp. 125-140.
- (25) Cahn, J. W. and Hilliard, J. E., Free Energy of A Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 28, No. 2 (1958), pp. 258-267.
- (26) Allen, S., M. and Cahn, J. W., A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and its Application to Antiphase Domain Coarsening, *Acta Metallurgica*, Vol. 27, (1979), pp. 1085-1095.
-