

確率過程を利用したロバストトポロジー最適設計⁺

植田 圭一* 乙守 正樹** 小木 曾 望* 山田 崇恭*** 西脇 眞二**

Robust Topology Optimization Using Stochastic Process Model

by

Keiichi UEDA* Masaki OTOMORI** Nozomu KOGISO*

Takayuki YAMADA*** and Shinji NISHIWAKI**

A robust topology optimization approach in consideration with random field uncertainty in loading condition is proposed in this paper. The proposed method integrates the topology optimization and the robust optimization methods using stochastic process model. The stochastic process model is able to describe an uncertainty of design parameters with nonuniform distribution in space with a reduced set of random variables based on Wiener-Khinchine theorem. The robust optimization is formulated to minimize a weighted sum of the expected value and the standard deviation of mean compliance under volume constraint. As a topology optimization, a level set-based approach incorporating a fictitious interface energy is applied. The method has several advantages to make it possible to control the geometrical complexity of the optimum configuration qualitatively. Through numerical examples, the efficiency of the proposed robust topology optimization approach is demonstrated by comparing between the deterministic and robust optimum configurations.

Key Words: Robust Optimization, Stochastic Process, Level Set-Based Topology Optimization

1. 緒言

ロバスト最適化法の対象は非常に多岐に渡る (例えば, 1,2) が, 本研究ではその一種として, 定められた領域に作用する空間的な変動を有する分布荷重に対して, その平均値と分散が既知である場合に, 剛性およびその変動を最大化する構造形態を求める問題を考える. ここで, ロバスト最適設計問題としては, 体積制約のもとで, コンプライアンス (作用荷重による仕事) の平均値および分散の重み付き加重和を最小化する.

著者らがこれまでに提案してきたロバストトポロジー最適設計³⁾は, 設計パラメータの不確定性に対して空間的な変動を考慮せず, 空間に対して一様に変動する場合を考えてきた. 本研究では, 空間的な変動を考慮することで, 実際の不確定現象により近いモデル化をめざす. そのような変動に対して, 有限要素モデルの要素 (節点) ごと, あるいは区分ごとに乱数を用いて独立な不確定性を与えるモデル化も考えられる. しかし, このモデル化は, 確率変数が増大する問題のほかに, 隣り合う領域でパラメータが極端に変化することがあり, モデル化としての妥当性に疑問が残る.

そこで, 本研究では, 荷重の空間的な不確定性を表すために確率過程^{4,5)}を適用する. 確率過程は空間的な変動を少ない確率変数でモデル化できる利点があり, 中桐らが開発した確率有限要素法⁶⁾でその有効性が示されている. また, 確率過程によるモデル化に特化したスペクトル確率有限要素法^{7,8)}も広く用いられている.

なお, 構造形態を求めるトポロジー最適設計としては, 山田らが提案している境界移動と形態変更とを可能としたレベルセット法に基づくトポロジー最適設計法⁹⁾を用いる. 従来の手法^{10,11)}には, グレイスケールを含まない明確な境界が得られる利点があるが, 設計領域に穴が創出されるような形態変更が許容されない問題があった. これに対して, 山田らの

提案した手法⁹⁾は, フェーズフィールド法^{12,13)}の考え方を導入し, 仮想的な表面張力項を含むエネルギー汎関数の最小化問題に帰着させることにより, 穴の創出を可能とし, さらに構造形態の幾何学的な複雑さを定性的に表すことも可能である. すなわち, 従来の手法で必要であった穴を多数あけた初期設計形態が不要となり, 設計領域すべてを材料領域としても合理的な最適形態が得られる. また, 最適形態が初期設計形態への依存性が小さい利点もある.

なお, 近年, Chen らが, 不確定性表現に確率過程を利用したレベルセット法に基づくロバストトポロジー最適設計に関する研究を発表している¹⁴⁾. この研究のトポロジー最適設計法は従来のレベルセット法を用いているのに対し, 本研究では山田らの提案した手法を用いているため, ロバスト最適形態への収束性, 最適形態の妥当性の面で異なっている.

以下 2 章ではトポロジー最適設計について概説し, その後, 3 章でロバスト最適設計について説明するとともに, 確率過程を利用した確率変数の表現法について説明する. 4 章でロバストトポロジー最適設計の定式化を行うし, アルゴリズムを示す. 5 章において簡単な数値計算例により, 本論文で提案する手法の妥当性を検証する.

2. トポロジー最適化

2.1 レベルセット法による形状表現

定められた固体設計領域 D において, 物体により占められる領域 Ω (以下, 物体領域) を決定する構造形態最適化問題を考える. すなわち, 目的汎関数を F , 体積制約を制約汎関数 G で表す構造最適化問題を次式で定義する.

$$\inf_{\phi} : F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \quad (1)$$

$$\text{subject to} : G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (2)$$

⁺ 原稿受理 2011 年 4 月 30 日 Received

* 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野 〒599-8531 堺市中区学園町 1-1, Dept. Aerospace Eng., Osaka Pref. Univ., Sakai

** 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻 〒606-8501 京都市左京区吉田本町, Dept. Mech. Eng. Sci., Kyoto Univ., Kyoto

*** 名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻 〒464-8603 名古屋市中区千種区不老町, Dept. Mech. Sci. Eng., Nagoya Univ., Nagoya

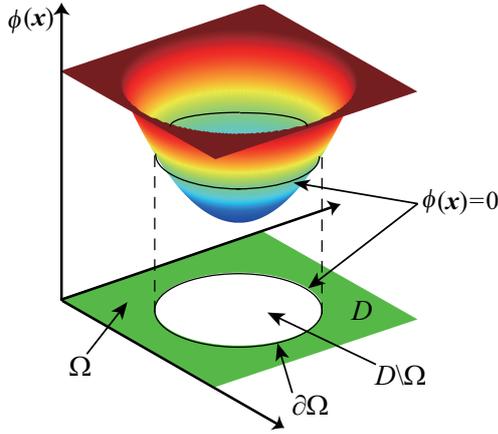


Fig. 1: Fixed design domain D and level set function ϕ

ここで、 $f(x)$ は目的汎関数の被積分関数で、 V_{\max} は許容される体積の上限値である。

レベルセット法では、Fig. 1 に示すように、レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数 $\phi(x)$ を用いて、そのゼロ等位面によって物体境界を陰的に表現する。すなわち次式に示すように、物体領域において正、空洞領域において負、物体の境界ではゼロとなるレベルセット関数を用いて物体の形状表現を行う。

$$\begin{cases} 0 < \phi(x) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(x) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(x) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{x} は固定設計領域の座標である。なお、式 (3) において、レベルセット関数に上限値と下限値を導入しているが、これは後述の目的汎関数に付加する仮想的な界面エネルギーをレベルセット関数により表現するためである。

このレベルセット関数 $\phi(x)$ は固定設計領域 D 内の至る所で不連続性を持つことを許容している。その結果、得られる最適構造がいたるところで不連続となる解を許容する、いわゆる不適切な (ill-posed) 問題となるため、何らかの方法で最適化問題を適切な (well-posed) 問題にする正則化を必要とする。この問題を解決する正則化法として、従来は均質化法^{15,16}が利用されてきた。しかしながら、形状を表現する関数が異なるため、本手法には適用することができない。

そこで、本研究では、フェーズフィールド理論^{12,13}の定式化で利用されている界面エネルギーを導入することで、問題の正則化を行う。この方法の基本的な考え方は、次式に示すように、目的汎関数にレベルセット関数の勾配の大きさによって表現される仮想的な界面エネルギーを加え、それを正則化された目的汎関数 F_R とする。

$$F_R(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(x) \, d\Omega + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 \, d\Omega \quad (4)$$

ここで、 τ は仮想的な界面エネルギーの寄与度を表すパラメータであり、正則化係数と呼ぶ。界面エネルギーは周囲長が短いほど小さな値をとるため、正規化係数が大きいほど、周囲長の短い単純な構造形態が得られる。逆に正規化係数が小さいほど界面エネルギーの影響が効かなくなるため、周囲長の

長い複雑な構造形態が得られる。つまり、式 (4) 第 2 項は陰的な周長制約とみなすことができる。したがって、正則化係数の設定値により、最適構造の幾何学的な複雑さを定性的に設定することが可能となる。詳細は文献⁹を参照されたい。

次に、ラグランジュ未定乗数法を用いて、最適設計問題を無制約問題に置き換える。すなわち、ラグランジュアンを \bar{F} 、式 (2) に関するラグランジュ乗数を λ として次式に変換する。

$$\inf_{\phi} : \bar{F}(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} (f(x) + \lambda) \, d\Omega - \lambda V_{\max} + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 \, d\Omega \quad (5)$$

本研究では上式を解くことにより最適構造を得る。

2.2 レベルセット関数の更新

本研究では、最適化問題を時間発展方程式を解く問題へと置き換えることにより、設計変数であるレベルセット関数を更新する。まず、仮想的な時間 t を導入し、レベルセット関数を更新させる駆動力は、次式に示すように、ラグランジュアン \bar{F} の勾配に比例するものと仮定する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{\delta \bar{F}}{\delta \phi} \quad (6)$$

ここで、 $K(\phi) (> 0)$ は比例定数、 $\delta \bar{F} / \delta \phi$ はラグランジュアン \bar{F} の汎関数微分を表す。式 (6) に式 (5) を代入し、境界条件として、物体領域境界であることが指定されている境界 ∂D_N (以下、非設計境界) においてはディリクレ境界条件、その他の境界においてはノイマン境界条件を与え、固定設計領域外部からの影響がないことを表現する。以上より、時間発展方程式系は反応拡散方程式系として、次式で表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left(\frac{\delta \bar{F}}{\delta \phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (7)$$

3. ロバスト設計

3.1 ロバスト設計の定式化

ロバスト設計は、設計変数や設計パラメータの不確実性が目的関数や制約条件におよぼす影響を考慮した設計法である。そして、設計パラメータ等の変動が目的関数や制約条件におよぼす影響をそれらの分散として表し、一般的には、目的関数および制約条件をそれぞれの期待値および分散の重み付き加重和として、最適設計問題を定式化する。本研究では、ロバスト設計法として、感度解析に基づく手法¹⁷を用いる。これは、目的関数および制約条件の平均値まわりの変動を、設計変数および設計パラメータの一次近似として表し、その分散を感度解析によって評価する方法である。

本研究においては負荷荷重などの設計パラメータの変動を考慮するだけであり、設計変数は構造境界を表すレベルセット関数の変動は考慮しない。また、制約条件は構造の体積制約のみであり、これは構造形態のみに関係するため、その変動は考慮しない。

設計変数を $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_{n_d}]^T$ (n_d は設計変数の数)、設計パラメータを $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_{n_z}]^T$ (n_z は設計パラメータの数) と表

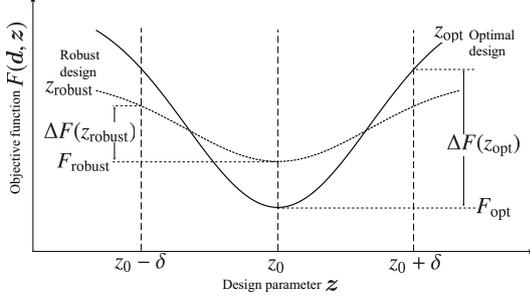


Fig. 2: Concept of robust optimization

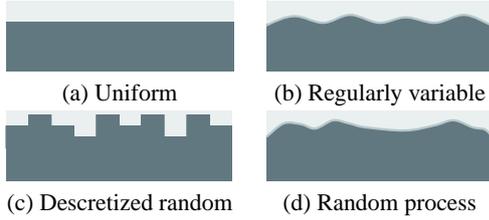


Fig. 3: Spatial variability model

し、目的関数の平均値を $E[\cdot]$ 、その分散を $\text{Var}[\cdot]$ とすると、ロバスト性を考慮した目的関数は次式で定式化できる。

$$\text{Minimize: } F_{\text{robust}}(\mathbf{d}) = E[F(\mathbf{d}, \mathbf{z})] + \alpha \sqrt{\text{Var}[F(\mathbf{d}, \mathbf{z})]} \quad (8)$$

このロバスト性を考慮した目的関数を最小化することで、目的関数の平均値および標準偏差の加重和を最小化することをめざす。Fig. 2 にその概念図を示す。ここで、 α は正の重み係数であり、 α の値を大きくするほど、目的関数の標準偏差の影響を考慮することになる。 z_{opt} と z_{robust} はそれぞれ確定的手法とロバスト設計で得られた目的関数の値を示している。設計パラメータ \mathbf{d} が δ だけ変化したとき、 z_{opt} と z_{robust} を比較すると、 z_{robust} の方が目的関数の変化が小さい。このように、ロバスト性を考慮した目的関数を用いることで、設計パラメータの変動に対して頑強な設計解を求めることをめざす。

また、一次近似を用いると目的関数の平均値と分散は次式で近似できる³⁾。

$$E[F(\mathbf{d}, \mathbf{z})] \approx F(E[\mathbf{d}], E[\mathbf{z}]) \quad (9)$$

$$\text{Var}[F(\mathbf{d}, \mathbf{z})] \approx \sum_{i=1}^{n_z} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)^2 \text{Var}[z_i] \quad (10)$$

この一次近似は感度解析を用いるために計算コストを低く抑えられる利点があるが、分散が大き場合は近似精度が悪化する可能性がある。

3.2 確率過程を用いた不確定性のモデル化

設計パラメータの空間的な変動を表すモデルには、いくつかの種類がある。最も単純なモデル化として、一様に変化させる方法 (Fig. 3(a)) や規則的に変化させる方法 (Fig. 3(b)) がある。これは少ない変数でモデル化できるが、空間的な変動を扱う場合には不十分である。また、離散化した要素ごとに変化を与える方法 (Fig. 3(c)) は、実装が容易であるが、多くの変数を要することと空間的な相関を表現できない点で問題がある。これに対して、空間的な変動に対する統計的性質

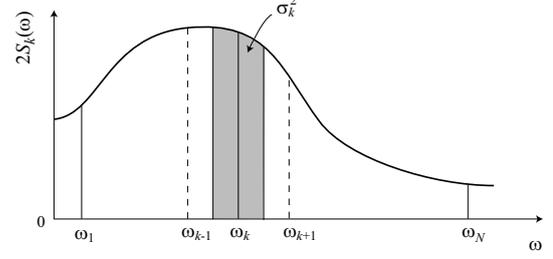


Fig. 4: Power spectrum

(パワースペクトルや自己相関関数など⁴⁾) がわかっている場合は、Fig. 3(d) に示すように、その不規則現象を確率過程⁵⁾を用いてモデル化することにより、隣接部との相関を考慮した現実性の高いモデルを比較的少ない変数で実現できる利点がある。そのため、確率過程は、地震荷重や波浪荷重のような時系列における不確定性のモデル化ばかりでなく、鋼板の腐食による板厚摩耗など空間的な不確定性のモデル化にも用いられている^{7,8)}。

空間変動の確率過程 $P(x)$ が定常過程であるとき、Wiener-Khinchine の定理⁴⁾より、自己相関関数 $R_{pp}(\rho)$ とパワースペクトル密度 (両側スペクトル) $S(\omega)$ はフーリエ変換を通して、次式で関連付けられる。

$$R_{pp}(\xi) = E[P(x)P(x+\xi)] = E[P(0)X(\xi)] \quad (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\xi) d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{pp}(\xi) \exp(-i\omega\xi) d\xi \quad (12)$$

ここで、 ω は角振動数である。また、Wiener-Khinchine の定理⁴⁾より、確率過程とパワースペクトルの関係は次式で表される。

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{S(\omega)} \exp(-i\omega x + i\theta) d\omega \quad (13)$$

ここで、 θ は位相角であり、任意の値をとる。これより、パワースペクトルが等しくても、異なる位相角 θ をもつ確率過程 ($i=1, 2, \dots, \infty$) は無限に存在する。また、式 (11) より、 $P(x)$ の 2 乗平均 $E[P(x)^2]$ は次式で表される。

$$E[P(x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R_{pp}(0) \quad (14)$$

これより、 $P(x)$ の分散は自己相関関数から求めることができる。

3.3 不確定性を有する分布荷重のモデル

本研究では、空間的な変動を有する分布荷重を確率過程を用いてモデル化するために、周波数領域で離散化 ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$) する。このとき、 $P(x)$ の分散 σ^2 は、両側スペクトル $S(\omega_k)$ を用いて、次式で表すことができる。

$$\sigma_1^2 = 2 \int_0^{(\omega_1+\omega_2)/2} S_1(\omega) d\omega \quad (15)$$

$$\sigma_k^2 = 2 \int_{(\omega_{k-1}+\omega_k)/2}^{(\omega_k+\omega_{k+1})/2} S_k(\omega) d\omega, \quad (k=2, \dots, N-1) \quad (16)$$

$$\sigma_N^2 = 2 \int_{(\omega_{N-1}+\omega_N)/2}^{\infty} S_N(\omega) d\omega \quad (17)$$

確率過程の分散 σ^2 はこれらの分散の和として表される.

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \quad (18)$$

これを用いると, 確率過程は標準偏差 σ_i を用いて, 次式で表すことができる.

$$P(x) = \sum_{k=1}^N \sigma_k \cos(\omega_k x + \theta_k) \quad (19)$$

各振動数に対して任意の位相角 θ_k を有する実現波は, 同一の確率過程として表される. 表面力の空間分布は, 式 (19) にその平均値を加えることで得られる.

4. 剛性最大化ロバスト設計の定式化

4.1 剛性最大化問題

線形弾性体で構成される物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域 D に対し, 境界 Γ_u を完全拘束し, 境界 Γ_t に表面力 \mathbf{t} , 物体領域 Ω に物体力 \mathbf{b} を作用させる構造問題を考える. ただし, 境界 Γ_u は, 固定設計領域境界 ∂D に固定されているものとする. このとき, 体積制約の下で平均コンプライアンスを最小化させる構造最適化問題は次式のように定式化される.

$$\inf_{\Omega} F(\Omega) = l(\mathbf{u}) \quad (20)$$

$$\text{subject to } \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \text{for } \forall \mathbf{u} \in U \quad \mathbf{v} \in U \quad (21)$$

$$G(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (22)$$

ここで, $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ はひずみエネルギー, $l(\mathbf{v})$ は平均コンプライアンスであり, それぞれ次式で定義される.

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (23)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (24)$$

なお, $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル, \mathbf{E} は弾性テンソルを表し, U は以下の式にて定義される変位関数空間である.

$$U = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D)\} \quad \text{with } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_u \quad (25)$$

表面力 $\mathbf{t}(x)$ の空間変動は, 確率過程を用いて次式のパワースペクトルで表現する.

$$\mathbf{t}(x) = \boldsymbol{\mu}(x) + \sum_{k=1}^N \sigma_k \cos(\omega_k x + \theta_k) \quad (26)$$

ここで, $\boldsymbol{\mu}(x)$ は平均荷重である.

次に, 上の最適化問題に関する KKT 条件を導く.

$$\delta \bar{F}(\Omega) = 0, \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) = 0, \quad (27)$$

$$\lambda G(\Omega) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

$$G(\Omega) \leq 0$$

この結果と随伴変数法を用いて, レベルセット関数 ϕ の更新に必要な関数 $f(x)$ を与える. 上述の定式化より, ラグランジュアン $\bar{F}(\Omega)$ を以下のように表す.

$$\begin{aligned} \bar{F}(\Omega) &= l(\mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) + \lambda G(\Omega) \\ &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda) \, d\Omega - \lambda V_{\max} \end{aligned} \quad (28)$$

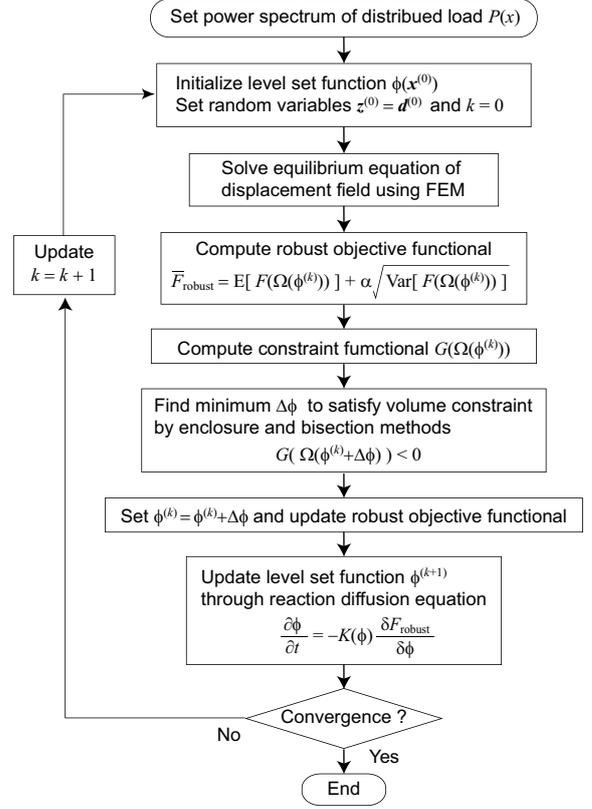


Fig. 5: Flowchart of robust topology optimization

ここで, 随伴変数場は次式で表される.

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) \quad \text{for } \forall \mathbf{u} \in U \quad \mathbf{v} \in U \quad (29)$$

式 (8) で示したロバスト最適設計の目的関数に対して, 式 (28) で示した剛性最大化問題のラグランジュアンの平均および標準偏差を用いて, ロバスト最適設計問題におけるラグランジュアンを次式で定義する.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\text{robust}}(\Omega) &= [\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda G(\Omega)] + \alpha \sqrt{\text{Var}[\bar{F}]} \\ &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda) \, d\Omega - \lambda V_{\max} \\ &\quad + \alpha \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{t}}\right)^2 \text{Var}[\mathbf{t}]} \end{aligned} \quad (30)$$

なお, 本研究では, 荷重の変動のみを考慮し, 体積制約における設計変数の変動を考慮しないため, ラグランジュアン \bar{F} の分散は目的関数 F の分散と等しい.

4.2 実装

数値実装上, 体積制約に対する各ステップの数値誤差は微小であるものの, 繰り返し計算を行うことにより, その数値誤差が累積されることがある. これを修正するために, 次式を満たす微小値 $\Delta \phi(x)$ の最小値を求め, 新たに $\phi(x) + \Delta \phi(x)$ をレベルセット関数の値とするように修正する.

$$G(\Omega(\phi(x) + \Delta \phi(x))) \leq 0 \quad (31)$$

本研究では, ロバストトポロジー最適設計における性能比較のために, 実質的には体積がその上限値 V_{\max} に等しくなる

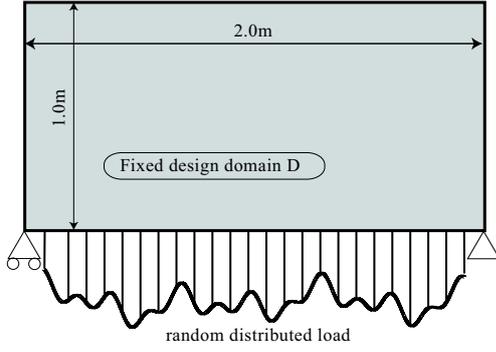


Fig. 6: Design domain and boundary conditions

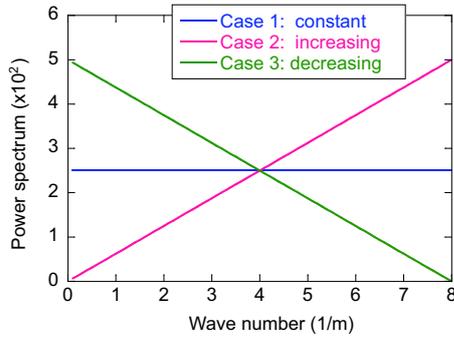


Fig. 7: Load cases described by power spectrum

こと、つまり、体積制約が活性化することが望まれる。そのために、本研究では式 (31) が等式成立するように、囲い込み法と二分法を利用する。これを考慮したトポロジーロバスト設計のフローを Fig. 5 に示す。

5. 数値数値例

Fig. 6 で表される板厚 $1.0 \times 10^{-2} \text{m}$ で一定の $2.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ の長方形設計領域 D (ヤング率 210GPa, ポアソン比 0.33) に対して、両端を変位固定 (境界 Γ_u) し、長方形の底辺 (境界 Γ_f) から空間変動を有する平均 $1 \times 10^5 \text{N/m}$ の下向き分布荷重が負荷されているものとする。解析においては固定設計領域を 12800 要素 (80×160) に離散化し、最適設計においては体積上限値を 1m^3 (固定設計領域の 50%), 正規化係数 τ を 1.0×10^{-5} に設定する。

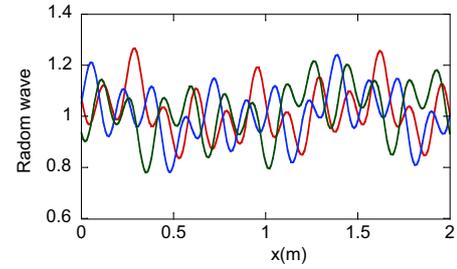
分布荷重の空間変動として、単位長さあたりの波数が 8 までを考慮し、Fig. 7 に示す 3 つの荷重ケース (i) スペクトルが一定の場合、(ii) 周波数に対して増加する場合、(iii) 周波数に対して減少する場合) を考える。いずれの場合も、荷重の標準偏差が $0.1 \times 10^5 \text{N/m}$ 、つまり、変動係数は 0.1 となるように設定する。そして、波数を $0 \sim 0.125 \sim 0.25 \sim 0.50 \sim 1.0 \sim 2.0 \sim 4.0 \sim 8.0 \text{ m/m}$ の 7 区間で分割し、7 つの確率変数で表すことにする。このときの荷重確率過程モデルの波数および各波数に対する変動係数 ($= \sigma/\mu$) を Table I に示す。各ケースに対して、異なる位相角を有する荷重の実現波の例を Fig. 8 に示す。

最適形態の比較のために、まずは、境界 Γ_f において一様分布荷重が負荷している場合の確定的な最適設計で得られた最適形態を Fig. 9 に示す。この形態は、同一条件のもとでの確定的な最適設計例 (例えば、¹⁸⁾) でも見られる。ロバスト設計に

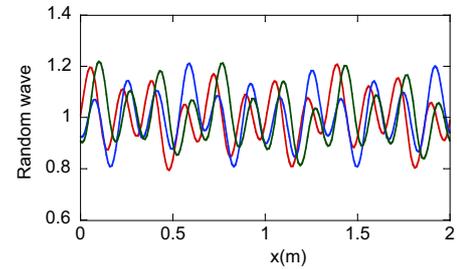
Table I: Spacial distribution of distributed load

Wave number (m/m)		Coefficient of variation			
			Case 1	Case 2	Case 3
f_1	0.0625	σ_1/μ	0.0125	0.001561	0.01761
f_2	0.1875	σ_2/μ	0.0125	0.002704	0.01746
f_3	0.375	σ_3/μ	0.01768	0.005408	0.02439
f_4	0.75	σ_4/μ	0.250	0.01082	0.03365
f_5	1.5	σ_5/μ	0.03536	0.02165	0.04506
f_6	3.0	σ_6/μ	0.050	0.04324	0.05586
f_7	6.0	σ_7/μ	0.07071	0.08660	0.050

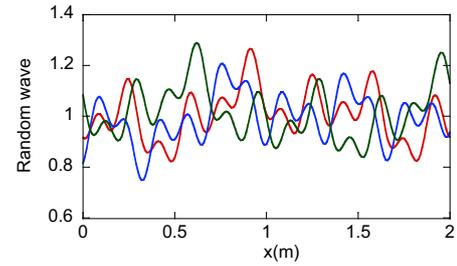
*: $f_i = 2\pi\omega_i$



(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3

Fig. 8: Example of spatial variation in distributed load

においては、重み係数を $\alpha = 25$ として、各ケースに対して得られた最適形態を Fig. 10 に示す。

ケース 1 では、確定解 (Fig. 9) と比べ、アーチは低くなり、柱の本数が増えるとともに柱の間隔が狭くなっていることがわかる。これにより、分布荷重の変動に対してロバストな形状と考えることができる。これに比べ、ケース 2 は確定的な最適形態とよく似た形態となる。このケースでは、比較的波数の多い荷重が支配的になるために、等分布荷重の場合との差異が少なくなるためと考えられる。ケース 3 は、ケース 1 よりもアーチが高いが、柱の間隔、柱の本数ともにケース 1 とよく似た形態となっている。

各ケースにおける目的関数値を Table II で比較する。いずれの場合においても、目的関数値に大きな差は見られない。



Fig. 9: Deterministic optimum configuration under uniformly distributed load condition



(a) Case 1: constant



(b) Case 2: increasing



(c) Case 3: decreasing

Fig. 10: Robust optimum configurations

Table II: Comparison of objective and constraint functions.

	Objective function (J)	Volume constraint (%)
Deterministic design	3.4430×10^{-4}	49.996
Robust design: case 1	3.6672×10^{-4}	50.003
Robust design: case 2	3.4438×10^{-4}	49.996
Robust design: case 3	3.5117×10^{-4}	49.996

一方、体積制約は5桁の精度で有効制約条件として機能していることがわかる。

最後に、確定的な最適形態とケース1のロバスト形態に対して、荷重のばらつきを大きくした場合の目的関数値の変

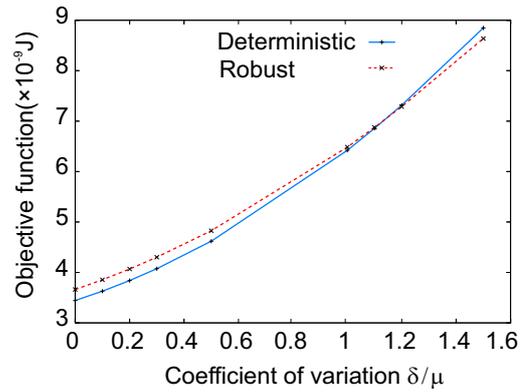


Fig. 11: Change of objective function in coefficient of variation.

化を比較する。変動係数 δ を大きくした場合のそれぞれの目的関数の変化を Fig. 11 で比較する。荷重の変動が大きくなるにつれて、ロバスト形態の方が、確定的最適形態に比べて悪化が小さい。これより、本論文の提案手法で得られたロバスト形態が荷重の変動に対するロバスト性を有していると言える。

6. 結言

本研究では、荷重の空間的な変動に対してロバストな構造形態を求めるために、確率過程を用いて確率変数をモデル化するロバスト最適設計とトポロジー最適設計を統合するロバストトポロジー最適設計法を提案した。ロバスト最適設計問題においては、設計パラメータの空間的変動を確率過程を用いてモデル化し、体積制約のもとでコンプライアンスの平均値および分散の重み付き加重和を最小化する問題を定式化した。一方、トポロジー最適設計法には、フェーズフィールド法の考えに基づいた仮想的な界面エネルギーを導入することで境界移動と形態変更とを可能としたレベルセット法に基づくトポロジー最適設計法を採用した。そして、数値計算例により、確定的な最適形態とロバスト最適形態を比較することで、提案手法の妥当性を明らかにした。

今後の課題としては、荷重以外の設計パラメータの空間的な変動にこの手法を拡張することがあげられる。

謝辞

本研究の一部に、科研費(22560784)の助成を受けた。

参考文献

- 1) A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton, (2009)
- 2) H. G. Beyer and B. Sendhoff, "Robust optimization – a comprehensive survey", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 196, No. 33-34 (2007), pp. 3190-3218.
- 3) Y. Hirano, T. Yamada, N. Kogiso, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Iga, "Level set-based robust topology optimization for coupled thermal and structural problems considering uncertainty", *Trans. JSME-C*, Vol. 77, No. 773 (2011), pp. 1-13 (in Japanese).
- 4) 日野幹雄, *スペクトル解析* (1977), 朝倉書店
- 5) 小倉久直, *確率過程入門* (2000), 森北出版
- 6) 中桐滋, 久田俊明, *確率有限要素法 - 不確定構造の解析* (1985), 培風館
- 7) R. G. Ghanem and P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements, A Spectral Approach*, Revised ed. (2003), Dover Publishers

- 8) C. A. Schenk, and G. I. Shuëller, *Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems* (2005), Springer-Verlag
- 9) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa, “A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 199, No. 45-48 (2010), pp. 2876-2891.
- 10) M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo, “A level set method for structural topology optimization”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, No. 1-2 (2003), pp. 227-246.
- 11) G. Allaire, F. Jouve, and A. Toader, “Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method”, *J. Comp. Phys.*, Vol. 194, No. 1 (2004), pp. 363-393.
- 12) J. W. Cahn and J. E. Hilliard, “Free energy of a nonuniform system, I. interfacial free energy”, *J. Comp. Phys.*, Vol. 28, No. 2 (1958), pp. 258-267.
- 13) S. M. Allen and J. W. Cahn, “A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening”, *Acta Metal.*, Vol. 27, No. 6 (1979), pp. 1085-1095.
- 14) S. Chen, W. Chen, and S. Lee, “Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainties”, *Str. Multidiscip. Opt.*, Vol. 41, No. 4 (2010), pp. 507-524.
- 15) Cherkaev, A., *Variational Methods for Structural Optimization*, (2000), pp. 117-141, Springer-Verlag.
- 16) Allaire, G., *Shape Optimization by The Homogenization Method*, (2002), pp. 189-257, Springer-Verlag.
- 17) S. Sundaresan, K. Ishii, and D. R. Houser, “A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints”, *Eng. Opt.*, Vol. 24, No. 2 (1995), pp. 101-117.
- 18) A. Takezawa, S. Nii, M. Kitamura, and N. Kogiso, “Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 200, No. 25-28, (2011), pp. 2268-2281.