



## 造波抵抗の船体表面積分表示について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-02-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 坪郷, 尚 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10466/15736">http://hdl.handle.net/10466/15736</a>

# 造波抵抗の船体表面積分表示について

正会員 坪郷 尚\*

A new near-field expression of the ship wave resistance

by Takashi Tsubogo, Member

**Key Words :** Ship Wave Resistance, Pressure Integration, Havelock, Wigley, KCS, KVLCC2

## 1. 緒言

一定速度で前進する船の造波抵抗は、対応する境界値問題が解かれた後、大きく2つの方法で算出される。1つは運動量定理から導かれた Havelock の式を用いる Far Field Method で、もう1つは浸水表面上での圧力積分による Near Field Method である。前者には Havelock 式の他に下流域での数値波形から波形抵抗<sup>1)</sup>を計算するものがあり、また後者については、圧力の線形項のみを考慮するものや流速の2乗の項を含めるもの、水面の盛り上がり影響を考慮するもの、さらに Nakos と Sclavounos による水面の盛り上がり影響(線積分)項の符号が逆転した圧力積分表示<sup>1)</sup>,

$$R_w = \iint_{S_B} p n_x dS - \frac{\rho g}{2} \oint_{WL} \zeta^2 n_x \frac{ds}{\sin \alpha} \quad (1)$$

等がある。式(1)で、 $S_B$ は静止水面下の船体浸水表面積、 $p$ は水圧、 $n_x$ は船体表面の単位法線ベクトル(流体から外向き)の $x$ 方向成分、 $WL$ は静止時の船体表面上の水線、 $\zeta$ は水面変位、 $\alpha$ は静止水面とのフレア角、を表している。

本来、前者の Far Field Method による結果と後者の Near Field Method による結果は数値的に一致するはずであるが、水上船の場合、薄い船の理論を除いて、これらの結果の一致度は悪いことが報告されている<sup>1)</sup>。これを究明するために、Nakos と Sclavounos は運動量定理から Havelock の式と整合性のある船体表面積分表示(1)を導いたわけであるが、依然として、Far Field Method による結果との大きな差が確認される<sup>1)</sup>。

他方、薄い船の理論の場合、抵抗値そのものに問題があるものの、よく知られているように、Far Field Method による結果と Near Field Method による結果は、数値的に一致する。Figure 1 は、Wigley 船型の船体中心面上に強さ  $\sigma = -2Un_x$  なる吸込みを分布させたときの、Havelock 式による造波抵抗値と圧力の線形項の積分結果とを比べたものである。これらは線が重なるレベルで一致している。著者は、低  $F_n$  域での抵抗値を改善するため、船長方向および水深方向の勾配を考慮した

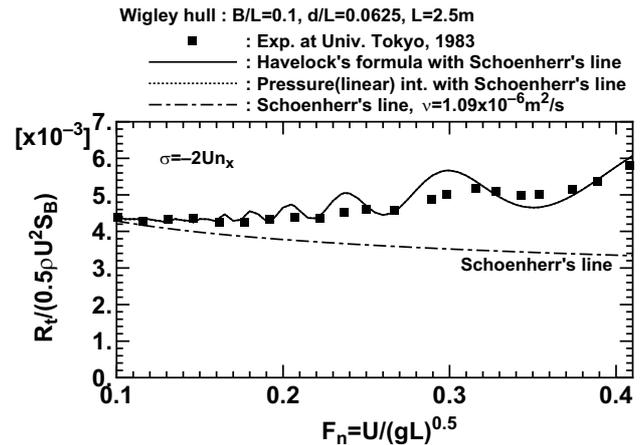


Fig. 1 Wave resistance of a standard Wigley hull, calculated by Havelock's formula and by linear pressure integration with the sink  $-2Un_x$  distributed on the centerplane.

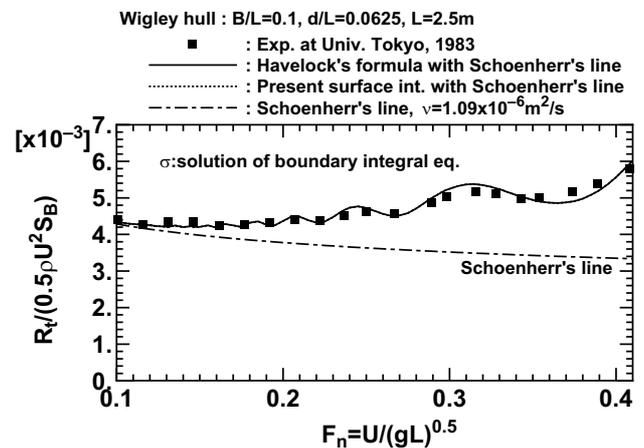


Fig. 2 Wave resistance of a standard Wigley hull, calculated by Havelock's formula and by a new near field expression with the sink solution distributed on the centerplane.

\* 大阪府立大学大学院工学研究科

原稿受付 平成 28 年 9 月 23 日

秋季講演会において講演 平成 28 年 11 月 21, 22 日

©日本船舶海洋工学会

薄い船の理論を提案している<sup>2)</sup>が、Havelock 式による結果と圧力積分による結果の一致度は十分とは言えない。このように、完全な Thin Ship Theory にわずかな補正を加えただけで、他の方法と同様 Far Field Method による結果と Near Field

Method による結果との間に無視できない差が発生する。ところが、境界値問題を解いて得られた船体中心面上の吸込み分布  $\sigma$  を用いて、

$$R_w = \rho \iint_{S_C} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sigma dS \quad (2)$$

なる量を計算したところ、Fig. 2 に示すようにこの値は Havelock 式による造波抵抗値と数値的に一致した。ここで、 $S_C$  は船体中心面、 $\phi$  は速度ポテンシャルの攪乱成分である。

さて、Yeung らはカタマラン等のハル間相互干渉による造波抵抗を薄い船の理論を用いて導いている<sup>3)</sup>が、そこでは Havelock の Green 関数の対称性が決定的な役割を果たしていた。本報告では、船体中心面上に吸込みを分布させる薄い船の理論の枠組みの中ではあるが、Yeung らの手法をヒントに式 (2) を導出すると共に、Havelock 式による計算結果との比較例をいくつか示す。

## 2. 造波抵抗の計算法

### 2.1 問題の設定<sup>4)</sup>

一定速度で前進している薄い船の定常自由表面流れについて考える。水深は無無限大である。Figure 3 は船体に固定された直交座標系  $o-xyz$  を示す。 $x$  軸は下流方向、 $z$  軸は攪乱の無いときの自由表面から鉛直上方に設定している。また、 $y=0$  上に船体中心面がある。船体固定座標系では、船は  $x$  軸方向に進む速度  $U$  の一様流を受けることになる。流体は非圧縮、非粘性そして流れは非回転であると仮定する。よって速度ポテンシャル  $\Phi(x, y, z) = Ux + \phi(x, y, z)$  を導入する。ここで、 $\phi$  は薄い船の存在に起因する攪乱成分の速度ポテンシャルを表す。流体の支配方程式は以下の質量保存則である。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

自由表面の変位  $z = \zeta(x, y)$  は、 $\phi$  に起因するため小さいと仮定し、自由表面条件を以下のように線形化する。すなわち運動学的条件は、

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{on } z = 0 \quad (4)$$

力学的条件は、

$$\zeta = -\frac{U}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{on } z = 0 \quad (5)$$

また船体浸水表面での運動学的条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -Un_x \quad \text{on } S_B \quad (6)$$

ここで、 $S_B$  は  $z=0$  以下の浸水表面、 $n$  は単位法線ベクトル(流体から外向き)を表す。遠方の条件は Rayleigh の仮想摩擦を用いて適切に処理する<sup>5)</sup>。

### 2.2 問題の解法<sup>2)</sup>

攪乱速度ポテンシャル  $\phi$  が、船体中心面  $S_C$  上に分布させた強さ  $\sigma(Q)$  のケルビンソース(厳密には吸い込み)、 $G(P, Q)$  によって表せると仮定する。

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_C} \sigma(Q) G(P, Q) dx_Q dz_Q \quad (7)$$

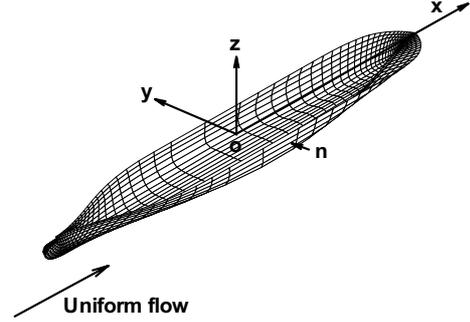


Fig. 3 Coordinate system fixed in advancing thin ship.

ここで、点  $Q$  は sink point を表し、 $G(P, Q)$  は線形化された自由表面条件 (4)(5) および sink 点以外で支配方程式 (3) を満足している。 $G(P, Q)$  の具体的な表示<sup>5)</sup> は付録に示す。吸込み分布  $\sigma(P)$  は、船体表面条件 (6) に式 (7) を代入した以下の境界積分方程式を解いて決定する。

$$-Un_x(P) = \frac{\sigma(P')}{2} + \frac{n_x(P)}{4\pi} \iint_{S_C} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial x_P} \Big|_{y_P=y_Q=0} dx_Q dz_Q + \frac{n_z(P)}{4\pi} \iint_{S_C} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_P} \Big|_{y_P=y_Q=0} dx_Q dz_Q \quad (8)$$

ここで、 $P'$  は点  $P$  の  $y$  座標をゼロとした点で、また 2 つの積分項はそれぞれ、

$$|n_x(P)| \geq \beta \cdot \epsilon \quad (9)$$

$$|n_z(P)| \geq \beta \cdot \epsilon \quad (10)$$

の条件を満足したときに限り、無視できない項として考慮する。ここで、 $\epsilon = B/L$ 、 $B$ : 船の幅、 $L$ : 船の長さ、であり、 $\beta$  の値は経験的に以下のように設定した。

$$\beta = \frac{4\pi^2}{K^2 S_C} C_B, \quad K = \frac{g}{U^2}, \quad C_B = \frac{\forall}{LBd} \quad (11)$$

ここで、 $\forall$  は排水体積、 $d$  は喫水である。ひとたび sink 分布  $\sigma$  が決定されれば、Havelock の式や船体表面上圧力の流れ方向成分を積分することにより、造波抵抗を計算することができる。 $\partial G/\partial x$ 、 $\partial G/\partial z$  の数値計算やパネル上数値積分の方法は、以前著者が報告したもの<sup>5)</sup>と同じであるので省略する。

### 2.3 造波抵抗の遠場表示、Havelock の式

造波抵抗  $R_w$  は、運動量定理により無限下流の横切り面上の積分表示として表されるが、これに  $\phi$  の漸近表示を代入して得られる以下の Havelock の式により算出することができる<sup>4)(6)(7)</sup>。

$$R_w = \frac{\rho K^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |H(\theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta \quad (12)$$

ここで、 $H(\theta)$  は Kochin 関数で、前節の取り扱いでは以下のように定義される。

$$H(\theta) = \iint_{S_C} \sigma(Q) e^{Kz_Q \sec^2 \theta + iKx_Q \sec \theta} dx_Q dz_Q \quad (13)$$

## 2.4 造波抵抗の船体表面積分表示 (その1)

次に Yeung らの手法<sup>3)</sup>を応用して式(2)を変形し, Havelock の式(12)に一致することを示す. 式(2)中の攪乱流速の部分は式(7)を微分して,

$$\frac{\partial \phi(P)}{\partial x_P} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_C} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial x_P} dx_Q dz_Q \quad (14)$$

これを用いて式(2)を以下のように表示しておく.

$$R_w = \frac{\rho}{4\pi} \iint_{S_C} \sigma(P) dx_P dz_P \iint_{S_C} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial x_P} dx_Q dz_Q \quad (15)$$

Green 関数の  $P$  点と  $Q$  点に関する対称性を利用するために, 付録の表示ではなく, 以下の表示<sup>4)</sup>の式(2.11)7)の式(13.36),

$$\begin{aligned} G(P, Q) &= \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{2K}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2 \theta d\theta \int_0^\infty e^{k(z_P+z_Q)} \\ &\times \frac{\cos(k(x_P-x_Q)\cos\theta)\cos(k(y_P-y_Q)\sin\theta)}{k-K\sec^2\theta} dk \\ &+ 2K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2 \theta e^{K(z_P+z_Q)\sec^2\theta} \\ &\times \sin(K(x_P-x_Q)\sec\theta)\cos(K(y_P-y_Q)\sec^2\theta\sin\theta) d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

を用いる<sup>3)</sup>. この  $G(P, Q)$  の  $P$  点の  $x$  座標で微分した量を,  $P$  点と  $Q$  点の交換によって符号が変わる部分  $G_{x,odd}(P, Q)$  と符号が変わらない部分  $G_{x,even}(P, Q)$  とに分ける.

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial x_P} = G_{x,odd}(P, Q) + G_{x,even}(P, Q) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_{x,odd}(P, Q) &= -\frac{x_P-x_Q}{r^3} + \frac{x_P-x_Q}{r_1^3} \\ &+ \frac{2K}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec \theta d\theta \int_0^\infty k e^{k(z_P+z_Q)} \\ &\times \frac{\sin(k(x_P-x_Q)\cos\theta)\cos(k(y_P-y_Q)\sin\theta)}{k-K\sec^2\theta} dk \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} G_{x,even}(P, Q) &= 2K^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta e^{K(z_P+z_Q)\sec^2\theta} \\ &\times \cos(K(x_P-x_Q)\sec\theta)\cos(K(y_P-y_Q)\sec^2\theta\sin\theta) d\theta \end{aligned} \quad (19)$$

$$G_{x,odd}(P, Q) = -G_{x,odd}(Q, P) \quad (20)$$

$$G_{x,even}(P, Q) = G_{x,even}(Q, P) \quad (21)$$

対称行列と交代行列の縮約がゼロになると同様に式(15)中の  $\sigma(P)\sigma(Q)$  と  $G_{x,odd}(P, Q)$  の積の積分は  $G_{x,odd}(P, Q)$  の第1項を含めて積分結果に寄与しない. よって, 式(15)の  $\partial G/\partial x$  は  $G_{x,even}$  に置き換わる. また, 船体中心面上  $y_P = y_Q = 0$  での積分であるので, 以下の表示,

$$e^{K(z_P+z_Q)\sec^2\theta}\cos(K(x_P-x_Q)\sec\theta) = \frac{e^{v_P+v_Q^*} + (e^{v_P+v_Q^*})^*}{2} \quad (22)$$

$$v_P = K\sec^2\theta \cdot z_P + iK\sec\theta \cdot x_P \quad (23)$$

$$v_Q = K\sec^2\theta \cdot z_Q + iK\sec\theta \cdot x_Q \quad (24)$$

を導入し, 式(15)を以下のように置き換える.

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{\rho K^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta d\theta \iint_{S_C} \sigma(P) dx_P dz_P \iint_{S_C} \sigma(Q) \\ &\times \frac{e^{v_P+v_Q^*} + e^{v_P^*+v_Q}}{2} dx_Q dz_Q \\ &= \frac{\rho K^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta d\theta \times \frac{1}{2} \times \\ &\left\{ \iint_{S_C} \sigma(P) e^{v_P} dx_P dz_P \iint_{S_C} \sigma(Q) e^{v_Q^*} dx_Q dz_Q \right. \\ &\left. + \iint_{S_C} \sigma(P) e^{v_P^*} dx_P dz_P \iint_{S_C} \sigma(Q) e^{v_Q} dx_Q dz_Q \right\} \\ &= \frac{\rho K^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta d\theta \times \frac{H(\theta)H(\theta)^* + H(\theta)^*H(\theta)}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, Kochin 関数の定義式(13)を用いた. 式(25)は Havelock の式(12)に他ならない. 式(2)はその物理的な意味が明確でないものの, Havelock 式と完全に等価な Near Field Expression である.

## 2.5 造波抵抗の船体表面積分表示 (その2)

著者が提案している, 船長方向および水深方向の勾配を考慮した薄い船の理論<sup>2)</sup>では, 船体表面条件(6)は, 特殊な条件(9)(10)を課した(8)あるいは書き換えて,

$$-Un_x = \frac{\sigma}{2} + n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (26)$$

であった. これを用いて式(2)を  $\sigma$  を陽に含まない形に書き換えると,

$$R_w = 2\rho \iint_{S_C} \left\{ -U \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \right\} dS \quad (27)$$

ここで, 被積分項の第2項目は条件(9)を満足したときのみ考慮し, 第3項目は条件(10)を満足したときのみ考慮する.

被積分項の第1項は圧力の線形項であるが, 2項目および3項目と圧力の関係は不明である. Havelock 式(12)と Nakos と Sclavounos の表示(1)は線形自由表面条件の下では等価<sup>2)</sup>なはずなので, さらに“船は薄いが表面の勾配は一部考慮する”とした式(27)は, Nakos らの表示の一部になっていると考えられる. しかし今回は, 式(1)と式(27)の関係について, 圧力の線形項以外, 明らかにできなかった.

## 3. 造波抵抗値の比較例

KRISO Container Ship(KCS) および KRISO VLCC ver.2(KVLCC2)<sup>8)</sup>について2.2節の方法<sup>2)</sup>で問題を解いた後, Havelock 式(12), 船体表面積分式(2)および(27), 圧力の線形項による圧力抵抗,

$$R_w = 2\rho \iint_{S_C} -U \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x dS \quad (28)$$

をそれぞれ算出しそれらの値を比較する.

### 3.1 KCS

$L = 7.2786\text{m}$  の KCS 模型船について, Ukon らの実験値<sup>9)</sup> との比較のため, 粘性抵抗 ( $1.1C_f$ , 平板摩擦係数  $C_f$  は ITTC1957 式, 動粘性係数  $\nu = 1.139 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  とした) を加算し, 全抵抗係数の形で比較する. 造波抵抗の計算に用いたパネル数は  $80 \times 30$  である.

Figs. 4,5,6 はそれぞれ, 式 (28),(2),(27) を Havelock 式 (12) による結果と比較したものである. KCS の場合は圧力の線形項のみの評価でも悪くないことがわかる. 提案式 (2) と (27) による計算値の差は殆ど無く, Havelock 式による結果により近いことが確認できる.  $F_n = 0.1$  近傍で造波抵抗が発生しているのはパネル数不足が原因と考えられる. パネル数を  $158 \times 60$  に増やすとほぼゼロになることが確認されている<sup>2)</sup>.

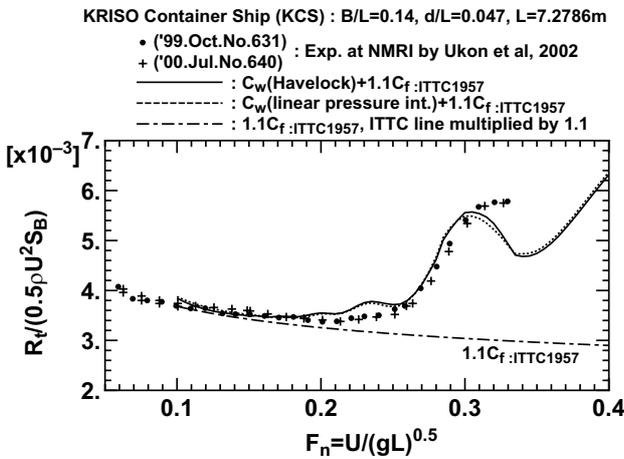


Fig. 4 Wave resistance of a KCS model, calculated by Havelock's formula and by linear pressure integration.

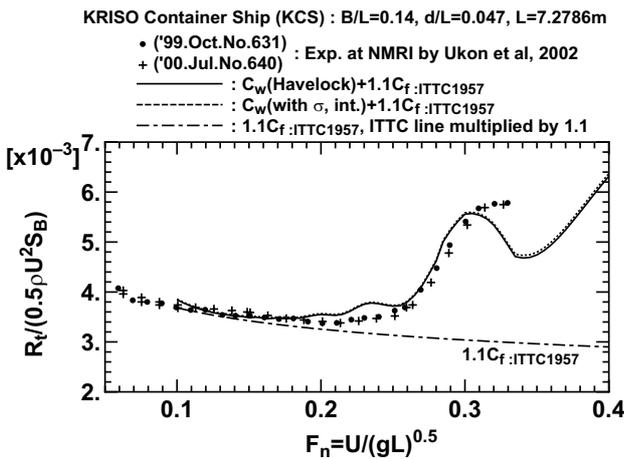


Fig. 5 Wave resistance of a KCS model, calculated by Havelock's formula and by a new near field expression with the sink solution distributed on the centerplane.

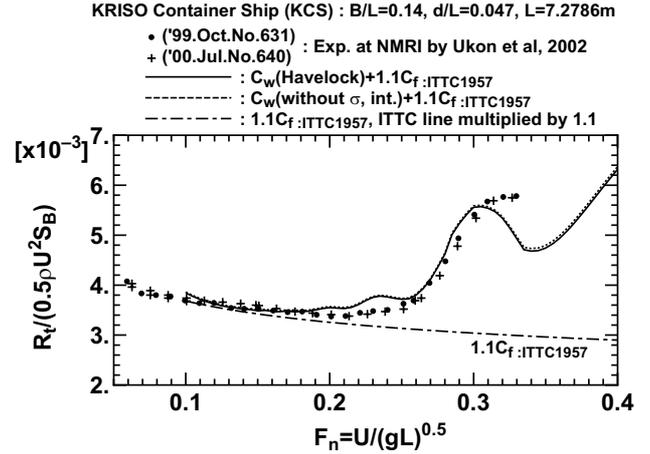


Fig. 6 Wave resistance of a KCS model, calculated by Havelock's formula and by a new near field expression without the sink solution explicitly.

### 3.2 KVLCC2

$L = 5.5172\text{m}$  の KVLCC2 模型船について, Kim らの実験値<sup>8)</sup> との比較のため, 粘性抵抗 ( $1.2C_f$ , 平板摩擦係数  $C_f$  は ITTC1957 式, 動粘性係数  $\nu = 1.256 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  とした) を加算し, 全抵抗係数の形で比較する. 造波抵抗の計算に用いたパネル数は  $80 \times 30$  である.

Figs. 7,8,9 はそれぞれ, 式 (28),(2),(27) を Havelock 式 (12) による結果と比較したものである. KVLCC2 の場合, 圧力の線形項のみの積分結果と Havelock 式による結果の間に非常に大きな差があることがわかる. 提案式 (2) と (27) による計算値の差は殆ど無く, Havelock 式による結果にほぼ一致している.  $F_n = 0.08$  近傍で造波抵抗がわずかではあるが発生しているのはパネル数不足が原因と考えられる. パネル数を  $158 \times 60$  に増やすとほぼゼロになることが確認されている<sup>2)</sup>.

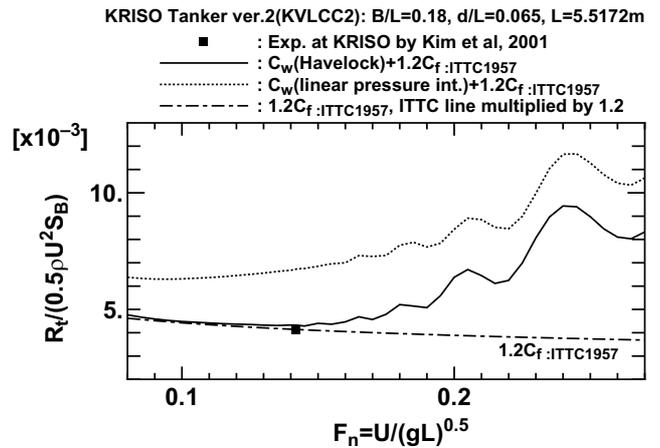


Fig. 7 Wave resistance of a KVLCC2 model, calculated by Havelock's formula and by linear pressure integration.

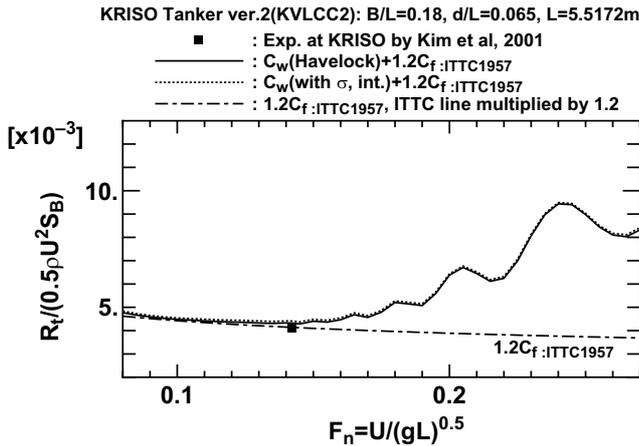


Fig. 8 Wave resistance of a KVLCC2 model, calculated by Havelock's formula and by a new near field expression with the sink solution distributed on the centerplane.

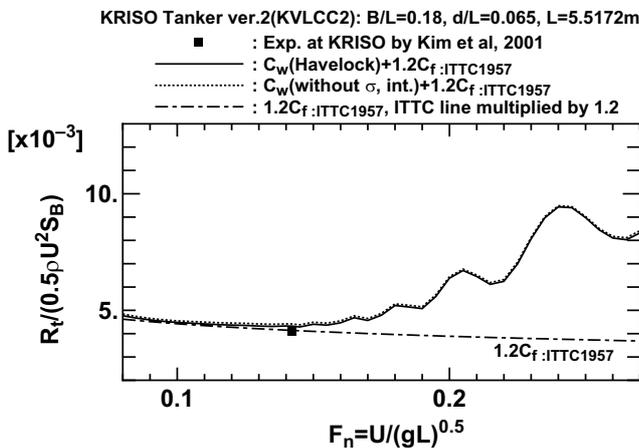


Fig. 9 Wave resistance of a KVLCC2 model, calculated by Havelock's formula and by a new near field expression without the sink solution explicitly.

#### 4. 結 言

本報告では、船体中心面上に吸込みを分布させる薄い船の理論の枠組みの中ではあるが、Havelock の式と等価な造波抵抗の船体表面積分表示 (2) および (27) を導いた。そして、Wigley 船型、KCS(コンテナ) 船型、KVLCC2(タンカー) 船型のそれぞれの船型で、船体表面積分表示 (2)(27) から算出される造波抵抗値と Havelock 式 (12) から算出される造波抵抗値を比べ、各表示の造波抵抗値はフルード数の広い範囲にわたり数値的にも一致する、ことを確認した。ただし、船体中心面上の吸込み分布を“船は薄い表面の勾配は一部考慮する”解法により求めていることに注意しておく。

Nakos と Scлавounos は運動量定理より造波抵抗の表示 (1) を導き、著者は Green の恒等式から Nakos らの式を再導出している<sup>2)</sup> が、今回は、Nakos らの式 (1) と式 (27) の関係につい

て、圧力の線形項以外、明らかにすることができなかった。また、表示 (2) の物理的な意味が明確ではないことや、 $2 \int_{S_C} \approx \int_{S_B}$  として、船体中心面ではなく船体表面上に吸込みを配置する方法や、さらに自由表面にも配置するランキンソース法などでも使用可能なのかなど、検討すべき課題も多い。

#### 謝 辞

本研究の一部は、大阪府立大学大学院工学研究科 FI 推進研究奨励研究費の補助を受け実施したことを付記し、関係各位に御礼申し上げます。

#### 参 考 文 献

- 1) Nakos, D. E. and Scлавounos, P. D., “Kelvin Wakes and Wave Resistance of Cruiser- and Transom-Stern Ships”. *J. Ship Research*, **38**(1), March, pp. 9–29, 1994.
- 2) Tsubogo, T., “Near Field Expression of Ship Wave Resistance by Green's Theorem”. *Proc ASME 2016 35th Int Conf on Ocean, Offshore and Arctic Eng*, OMAE2016-54896, 2016.
- 3) Yeung, R. W., Poupard, G., and Toilliez, J. O., “Interference-Resistance Prediction and Its Applications to Optimal Multi-Hull Configuration Design”. *SNAME Trans.*, 112, pp. 142–169, 2004.
- 4) 丸尾孟: 造波抵抗理論概説, 造波抵抗シンポジウム, 造船協会, pp. 1–17, 1965.
- 5) 坪郷尚: 水深方向の船型勾配を考慮した Michell 近似について, 日本船舶海洋工学会論文集, 19, pp. 19–30, 2014.
- 6) Havelock, T. H.: The Calculation of Wave Resistance, *Proc. Royal Soc. London, A*, 144, pp. 514–521, 1934.
- 7) Wehausen, J. V. and Laitone, E. V.: *Surface Waves*, *Handbuch der Physik*, Springer-Verlag, pp. 483–484, 579–581, 1960.
- 8) Kim, W. J., Van, S. H., and Kim, D. H., “Measurement of Flows Around Modern Commercial Ship Models”. *Experiments in Fluids*, 31, Springer-Verlag, pp. 567–578, 2001.
- 9) Ukon, Y., Fujisawa, J., Yanagihara, T., Takeshi, H. and Kume, K.: *Manufacture Accuracy of Three KCS Models and Resistance Test Results*, The 23rd ITTC Group Discussion on Model Manufacturing and Accuracy, Proc. 23rd ITTC, III, 2002.
- 10) 17th ITTC Resistance Committee Report, “Cooperative Experiments on Wigley Parabolic Models in Japan”. ITTC, 1983.

付 録

A1. 数値計算に使った Green 関数の表示 <sup>5)</sup>

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + D + W \quad (\text{A1})$$

$$r = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \quad (\text{A2})$$

$$r_1 = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P + z_Q)^2} \quad (\text{A3})$$

$$D = -\frac{2K}{\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2+\Theta}^{\pi/2+\Theta} \sec^2 \theta \cdot e^v E_1(v) d\theta \quad (\text{A4})$$

$$E_1(v) = \int_v^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{A5})$$

$$v = K \sec^2 \theta \cdot z_1 + iK \sec^2 \theta \cdot (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) \quad (\text{A6})$$

$$x_1 = x_P - x_Q, \quad y_1 = y_P - y_Q, \quad z_1 = z_P + z_Q < 0 \quad (\text{A7})$$

$$\tan \Theta = \frac{y_1}{x_1} \quad (\text{A8})$$

$$K = \frac{g}{U^2} \quad (\text{A9})$$

$$W = 4K \cdot \text{Im} \int_{-\pi/2+\Theta}^{\pi/2} \sec^2 \theta \cdot e^v d\theta, \quad y_1 \geq 0 \quad (\text{A10})$$