離散力学系から得られる閉軌道性をもつ力学系

離散力学系から得られる閉軌道性をもつ力学系

片山登揚 *

Dynamical Systems with Closed Orbit Property Derived from Discrete Dynamical Systems

Noriaki KATAYAMA*

ABSTRACT

Recently, as a generalization of a discrete Kepler motion, a discrete Kepler motion in a monopole field has been constructed. The discrete system admits a closed orbit property. The point of technique for discretizing time-continuous systems is that the Kepler motion is derived from the harmonic oscillator with Kustaanheimo-Stiefel transformation. In this short paper, we study an extended central potential dynamical system with two unknown functions. By making use of the discretization, we will find discrete central potential dynamical systems with closed orbit property. As a result, we get time-continuous extended central potential dynamical systems with closed orbit property.

Key Words: discretization, discrete dynamical systems, closed orbit property, central potential systems

1．はじめに

微分方程式を数値的に解析するために，ルンゲクッタ法に代表されるような様々な差分化の方法が研究されている．一般に，与えられた微分方程式の時間変数を差分化する際は，得られた差分方程式の差分幅を無限小の極限とするときもとの微分方程式に一致するように差分化が行われる．差分化にあたって，連続力学系のもつ性質は差分化された離散力学系には一般に継承されない．そこで，たとえばハミルトン力学系の差分化については，エネルギーの保存，第一積分の保存，シンプレクティック２-形式の保存などの観点から，シンプレクティック数値積分法の研究開発が盛んに行われている [1,2]．

他方，中心力系において，有界な軌道がすべて閉じる力学系はケプラー運動と調和振動子のみであることは Bertrand の定理としてよく知られている．この性質を，閉軌道性と呼ぶ．非線形力学系であるケプラー運動の閉軌道性を継承する離散化方法として，峰崎らは非線形の微分方程式で記述されるケプラー運動がレビ-チビタ変換により調和振動子に帰着されることに着目した．そこで，運動方程式のもつ非線形性を時間発展に置き換え，線形系である調和振動子の差分化を適用することで，閉軌道性を有する離散ケプラー運動を導いている [3]．

筆者は，前報 [4] にてケプラー運動の一つの拡張として知られている単極子場のケプラー運動について，閉軌道性を継承する離散化を示した．本小論では，運動エネルギとポテンシャル関数にそれぞれ原点からの距離の関数を含む拡張された２次元の中心力系を考える．このとき，閉軌道性を有する連続力学系を構成することが目的である．しかし，ここでは運動方程式を差分化し，差分化された離散力学系が閉軌道性を有する条件を考察することで未知関数を決定し，閉軌道性を有する連続力学系を見い出すこととする．その結果，見い出された力学系は筆者らが既に多重ケプラー運動 [5,6] として報告している力学系に含まれることがわかる．

2．拡張された中心力系と差分化

本節では，本小論で考察する２次元の拡張された中心力系の定義と差分化について述べる．

2.1 拡張された中心力系

本項では，通常の２次元の中心力系を回転対称性を保持したままで拡張した中心力系を考える．まず，一般化座標としてデカルト座標 (x, y) を考える．運動エネルギ T は以下の式で与えられるとする．

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}f(r)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad \text{ただし，} r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

ここで，$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ などとし，正値関数 $f(r) > 0$ は力学系の配位空間の微小距離 ds の平方を

$$ds^2 = f(r)(dx^2 + dy^2), \tag{2}$$

で定義することに対応している．ポテンシャル関数は半径 r の関数である中心ポテンシャル $U(r)$ とする．一般

2012 年 8 月 20 日 受理
* 総合工学システム学科　電子情報コース
（Dept. of Industrial Systems Engineering : Electronics and Information Course）

化座標 (x,y) に正準共役な運動量を (p_x,p_y) とすると，2次元の中心力系のハミルトニアン H_C は

$$H_C(x,y,p_x,p_y)=\frac{1}{2f(r)}\left(p_x^2+p_y^2\right)+U(r), \qquad (3)$$

となる．

ここで，配位空間の次元, つまり力学系の自由度について注意しておく．式 (2) の拡張として n 次元のデカルト座標 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ をもちいて，配位空間の計量が

$$ds^2=f(r)\sum_{j=1}^{n}dx_j{}^2, \qquad (4)$$

で定義されているとする．ただし， $r=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j{}^2}$ とする．ハミルトニアンは式（3）の拡張として

$$H_{Cn}(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=\frac{1}{2f(r)}\sum_{j=1}^{n}p_j{}^2+U(r) \quad (5)$$

となり n 次元の拡張された中心力系となる．このとき，角運動量

$$L_{jk}=x_jp_k-x_kp_j \qquad (j,k=1,2,\ldots,n) \qquad (6)$$

が保存され，これらの角運動量と n 次元球面座標をもちいると自由度 n の拡張された中心力系 H_{Cn} は自由度 2 の拡張された中心力系 H_C に簡約されることは容易に示される．したがって，今後は自由度 2 の力学系 H_C を考察対象とする．

もちろん力学系 H_C は

$$f(r)=1,\ U(r)=k_1r^2 \quad \text{ただし，} k_1 \text{ は定数} \qquad (7)$$

のときは，調和振動子となり

$$f(r)=1,\ U(r)=\frac{-k_2}{r} \quad \text{ただし，} k_2>0 \text{ は定数} \qquad (8)$$

のときは，ケプラー運動となる．

ここで, 前報 [4] と同様に次の正準変換を考える．

$$x=q^1q^2, \qquad y=\frac{1}{2}((q^1)^2-(q^2)^2), \qquad (9)$$

$$p_x=\frac{q^1p_2+q^2p_1}{(q^1)^2+(q^2)^2}, \qquad p_y=\frac{q^1p_1-q^2p_2}{(q^1)^2+(q^2)^2}. \qquad (10)$$

上記の変換式 (9) (10) は，レビ-チビタ変換とよばれる．変数 (q^1,q^2,p_1,p_2) を用いてハミルトニアン H_C は次の $H_{LC}(q^1,q^2,p_1,p_2)$ となる．

$$H_{LC}=\frac{p_1^2+p_2^2}{4rf(r)}+U(r), \text{ただし}, r=\frac{(q^1)^2+(q^2)^2}{2}. \qquad (11)$$

したがって，変換後の正準方程式は $j=1,2$ として，

$$\frac{dq^j}{dt}=\frac{p_j}{2rf(r)}, \qquad (12)$$

$$\frac{dp_j}{dt}=\left(\frac{p_1^2+p_2^2}{4r^2(f(r))^2}\frac{d(rf(r))}{dr}-\frac{dU(r)}{dr}\right)q^j \qquad (13)$$

となる．いま，ハミルトニアン H_{LC} を用いると

$$p_1^2+p_2^2=4rf(r)(H_{LC}-U(r)) \qquad (14)$$

だから，式 (13) は

$$\frac{dp_j}{dt}=\left(\frac{H_{LC}-U(r)}{rf(r)}\frac{d(rf(r))}{dr}-\frac{dU(r)}{dr}\right)q^j \qquad (15)$$

となる．ここで，定数 c_0 を用いた次の条件を仮定する．

$$\frac{H_{LC}-U(r)}{rf(r)}\frac{d(rf(r))}{dr}-\frac{dU(r)}{dr}=-c_0\frac{1}{rf(r)} \qquad (16)$$

以上まとめて，正準方程式 (12) (13) は，条件 (16) のもとで，次のようになる．

$$\frac{dq^j}{dt}=\frac{p_j}{2rf(r)},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{c_0q^j}{rf(r)} \quad (j=1,2) \qquad (17)$$

方程式 (17) において時間変数 t をあたらめて変数 u に変換する．

$$du=\frac{dt}{rf(r)} \qquad (18)$$

このとき，独立変数 u に関して正準方程式 (17) は

$$\frac{dq^j}{du}=\frac{p_j}{2},\quad \frac{dp_j}{du}=-c_0q^j \qquad (j=1,\ 2) \qquad (19)$$

となる．この微分方程式 (19) は，ハミルトニアン

$$H_h=\frac{1}{4}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\frac{c_0}{2}\left((q^1)^2+(q^2)^2\right) \qquad (20)$$

をもつ調和振動子の運動方程式とみなすことができることを注意しておく．したがって，式 (19) の解軌道は定数 $c_0>0$ のもと必ず有界な軌道は閉軌道となる．

2.2 離散力学系の導出

本項では，前項で導いた正準方程式 (19) の差分化をおこなうが，基本的な考え方は前報 [4] と同じである．

まず，時間変数 u の差分化として非負整数 k に対して，離散時間を $u^{(k)}$ とかく．つまり，$u^{(0)}=0$ でかつ $u^{(k)}<u^{(k+1)}$ ($k=0,1,2,\cdots$) とする．さらに，離散時間 $u^{(k)}$ における変数 q^j,p_j の値を

$$Q^j(k)=q^j(u^{(k)}) \qquad P_j(k)=p_j(u^{(k)}),\quad (j=1,2) \quad (21)$$

とおく．前項の微分方程式 (19) に対して次の差分式

$$\frac{Q^j(k+1)-Q^j(k)}{u^{(k+1)}-u^{(k)}}=\frac{1}{4}\left(P_j(k)+P_j(k+1)\right), \qquad (22)$$

$$\frac{P_j(k+1)-P_j(k)}{u^{(k+1)}-u^{(k)}}=-\frac{c_0}{2}\left(Q^j(k)+Q^j(k+1)\right), \quad (23)$$

を考える． ここで，$\Delta u^{(k)}=u^{(k+1)}-u^{(k)}$ とおき，$\Delta u^{(k)}\to 0$ の極限を考えると, 差分式 (22)，(23) は, 微

分方程式 (19) に対応することは明らかである．さて, 式 (22)，(23) を $Q^j(k+1), P_j(k+1)$ について解くと差分方程式系は

$$Q^j(k+1) = \frac{A_1\,P^j(k) + A_2\,Q^j(k)}{8 + c_0(\Delta u^{(k)})^2}, \tag{24}$$

$$P_j(k+1) = \frac{A_3\,P^j(k) + A_1\,Q^j(k)}{8 + c_0(\Delta u^{(k)})^2} \tag{25}$$

となる．ただし，定数 A_1, A_2, A_3 は

$$A_1 = 8 - c_0(\Delta u^{(k)})^2, A_2 = -8c_0\Delta u^{(k)}, A_3 = 4\Delta u^{(k)} \tag{26}$$

である．ここで，離散時間 $u^{(k)}$ に対して次の量 $E_{i\,j}(k)$ を定義する．

$$E_{i\,j}(k) = \frac{P_i(k)P_j(k)}{4} + \frac{c_0}{2}Q^i(k)Q^j(k) \;\; (i,\, j = 1, 2) \tag{27}$$

差分方程式 (24)，(25) を用いて，直接計算することより任意の非負整数 k に対して

$$E_{i\,j}(k+1) = E_{i\,j}(k) \quad\;\; (k = 0, 1, 2. \cdots) \tag{28}$$

が成立することが示される．つまり，差分式 (24)，(25) は，$E_{1\,1}(k), E_{1\,2}(k) = E_{2\,1}(k), E_{2\,2}(k)$ を保存するアルゴリズムとなっている．これら 3 個の離散保存量は関数的独立であることがわかる．式 (20) のハミルトニアンからも，有界な離散軌道はかならず閉曲線の上に存在することがわかる．しかも，式 (20) の全エネルギと

$$H_h = E_{1\,1} + E_{2\,2} \tag{29}$$

が任意の離散時間 $u^{(k)}$ で成立することがわかる．つまり，差分式 (24)，(25) はエネルギ保存の離散力学系でもある．

次に，連続力学系 (17) に対する時間変数 t の離散化について注意する．離散時間 $t^{(k)}$ を $u^{(k)}$ を用いて式 (18) より次のように定義する．

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} + g^{(k)}f(g^{(k)})\Delta u^{(k)} \;\; (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{30}$$

ただし

$$t^{(0)} = u^{(0)}, \quad g^{(k)} = \frac{(Q^1(k))^2 + (Q^2(k))^2}{2} \tag{31}$$

である．

以上まとめると，初期条件 $x(0), y(0), p_x(0), p_y(0)$ が与えられたときレビ-チビタ変換 (9)(10) の逆変換から導かれる

$$q^1(0) = \sqrt{\sqrt{y(0)^2 + x(0)^2} + y(0)}, \tag{32}$$

$$q^2(0) = \sqrt{\sqrt{y(0)^2 + x(0)^2} - y(0)} \tag{33}$$

および, 上式 (32)(33) の結果を用いた

$$p_1(0) = p_x(0)q^2(0) + p_y(0)q^1(0), \tag{34}$$

$$p_2(0) = p_x(0)q^1(0) - P_y(0)q^2(0) \tag{35}$$

で $Q^1(0), Q^2(0), P_1(0), P_2(0)$ の値が決定される．ただし，$x(0) < 0$ のときは，上式の $q^2(0)$ を $-q^2(0)$ に置き換えるものとする．さらに，差分式 (24)，(25) より求められる $Q^1(k), Q^2(k), P_1(k), P_2(k)$ をレビ-チビタ変換 (9)，(10) に代入することで，離散時間 $t^{(k)}$ における $x(t^{(k)}), y(t^{(k)}), p_x(t^{(k)}), p_y(t^{(k)})$ が求められる．$Q^1(k), Q^2(k)$ の軌道が閉曲線上に存在することより $x(t^{(k)}), y(t^{(k)})$ の離散軌道も閉曲線上に存在することがわかる．

3 閉軌道性を有する拡張された中心力系

本節では，前節で示された閉軌道性を有する離散系に対する拡張された連続中心力系について述べる．

3.1 閉軌道性を有する条件

本項では前節 1 項で仮定された条件式 (16) について考察し, 未知関数 $f(r), U(r)$ を決定する．条件式 (16) より H_{LC} を定数とみなすと

$$H_{LC}\frac{d}{dr}(rf(r)) - \frac{d}{dr}(U(r)rf(r)) + c_0 = 0 \tag{36}$$

となる．r で積分して，積分定数を c_1 とおき，さらに $H_{LC} = c_2$(定数) とおくと，関数 $U(r)$ は

$$U(r) = \frac{c_0 r + c_1 + c_2 rf(r)}{rf(r)} \tag{37}$$

となる．ここで，改めて条件式 (16) を調べるために, 式 (37) を用いて ハミルトニアン（3）を書き下すと

$$H_C = \frac{1}{2f(r)}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{c_0 r + c_1 + c_2 rf(r)}{rf(r)} \tag{38}$$

となる．したがって，ハミルトニアン（11）は

$$H_{LC} = \frac{1}{4rf(r)}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{c_0 r + c_1 + c_2 rf(r)}{rf(r)} \tag{39}$$

となる．このハミルトニアン H_{LC} を用いると，p_j についての正準方程式 (15) は

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{1}{rf(r)}\left((H_{LC} - c_2)\frac{d}{dr}(rf(r)) - c_0\right)q^j \tag{40}$$

となる．もちろん，$H_{LC} = c_2$ ならば，式 (17) の第 2 式に一致するが，$q^j/(rf(r))$ の係数が定数ならば，第 2 節の差分化の議論がそのまま成立する．したがって，定数 β を用いて

$$\frac{d}{dr}\,(rf(r)) = \beta \tag{41}$$

の条件をおくことができる．つまり，閉軌道性を有するための十分条件として，２つの未知関数 $f(r)$ と $U(r)$ は定数 α, β, c_0, c_1 を用いて 次の形をとることが示された．

$$f(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta, \quad U(r) = \frac{c_0 r + c_1}{\alpha + \beta r} \tag{42}$$

ただし，ポテンシャル関数 $U(r)$ の定数部分は除いている．特に，

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = -k_1 \tag{43}$$

のとき，式 (8) で与えられるケプラー運動に一致する．

3.2 閉軌道性を有する拡張された中心力系

前項 3.1 で求まった閉軌道性を有する拡張された中心力系のハミルトニアンは

$$H_C = \frac{r}{2(\alpha + \beta r)}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{c_0 r + c_1}{\alpha + \beta r} \tag{44}$$

となる．本項では第一積分を陽にもとめて閉軌道性を有することを示す．運動方程式は２次元ベクトル $\boldsymbol{r} = {}^t(x, y)$ と $\boldsymbol{p} = {}^t(p_x, p_y)$ を用いると

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{r}{\alpha + \beta r}\ \boldsymbol{p}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = A(r)\ \boldsymbol{r} \tag{45}$$

となる．ただし，

$$A(r) = -\frac{\alpha}{2r(\alpha + \beta r)^2}\ \boldsymbol{p}^2 - \frac{c_0\alpha - c_1\beta}{r(\alpha + \beta r)^2} \tag{46}$$

である．次の角運動量

$$J = xp_y - yp_x \tag{47}$$

に対して，運動方程式 (45) を用いて $\frac{dJ}{dt} = 0$ が直接計算により示され，第一積分であることがわかる．回転対称性の帰結である．さらに，２次元ベクトル $\boldsymbol{R} = {}^t(R_x, R_y)$ を未知定数 α_0 を用いて次の式で定義する．

$$R_x = p_y J - \alpha_0 \frac{x}{r},\ \ R_y = -p_x J - \alpha_0 \frac{y}{r}, \tag{48}$$

このとき，運動方程式 (45) を用いて $\boldsymbol{R}$ の時間微分を求めると

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \left(\alpha_0 + (\alpha r^2 + \beta r^3)A(r)\right)\left(\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}}{\alpha r^2 + \beta r^3}\right) \tag{49}$$

となる．２つのベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ は独立であるので，$\boldsymbol{R}$ が保存ベクトルとなるためには，

$$\alpha_0 + (\alpha r^2 + \beta r^3)A(r) = 0 \tag{50}$$

であることが必要十分である．式 (50) よりハミルトニアン (44) を用いると未知定数 α_0 は

$$\alpha_0 = \alpha H_C - c_1 \tag{51}$$

となる．つまり，ルンゲ-レンツベクトルの拡張として次の成分をもつ保存ベクトル $\boldsymbol{R}$ が見出された．

$$R_x = p_y J - (\alpha H_C - c_1)\frac{x}{r},\ R_y = -p_x J - (\alpha H_C - c_1)\frac{y}{r}, \tag{52}$$

また, ベクトル $\boldsymbol{R}$ の大きさ $R = |\boldsymbol{R}|$ と全エネルギ H_C には

$$R^2 = {R_x}^2 + {R_y}^2 = \alpha_0^2 + 2J^2(\beta H_C - c_0) \tag{53}$$

の関係が成立することが示される．位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と保存ベクトル $\boldsymbol{R}$ のなす角度を θ として内積計算から

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{R} = Rr\cos(\theta) = J^2 - \alpha_0 r \tag{54}$$

となる．したがって，軌道の式として次の式が成立する．

$$r = \frac{J^2/\alpha_0}{1 + (R/\alpha_0)\cos(\theta)}, \quad \text{ただし，}\alpha_0 \neq 0 \tag{55}$$

楕円軌道となるためには，$|R/\alpha_0| < 1$ でなければならない．式 (53) より閉軌道となるための条件は，$\beta H_C - c_0 < 0$ となり，この結果は通常のケプラー運動の拡張になっている．見出された中心力系は，すでに多重ケプラー運動として筆者らが報告している力学系に含まれる [5,6]．

４．まとめ

これまでは，与えられた連続力学系を如何にしてその性質を継承した離散系を構成できるかとの観点で調べられてきた． 本研究では逆に未知関数を含む連続力学系に対して対応する離散系が閉軌道をなす条件から，未知関数を決定し閉軌道性を有する中心力系を見出した． その結果は多重ケプラー運動の一部であることがわかった．

参考文献

[1]H.Yoshida, Non-existence of the modefied first integrals by symplectic integration methods, Phys. Lett. A. **282** 276-283(2002).

[2] 前田茂, シンプレクテック写像の応用について-ハミルトン系の離散版, 応用数理,Vol**18** No.3 30-39(1998).

[3]Y.Minesaki and Y.Nakamura, A new discretization of the Kepler motion which conserves the Runge-Lenz vector, Phys. Lett. A. **306** 127-133(2002).

[4] 片山登揚, 単極子場における離散ケプラー運動, 大阪府立大学工業高等専門学校研究紀要,**45** 巻,23-28(2011).

[5]T.Iwai and N. Katayama, Two classes of dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed. J. Math. Phys. **35**,2914-2933(1994).

[6]T.Iwai and N. Katayama, Multifold Kepler systems - Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed. J. Math. Phys. **36**,1790-1811(1995).