角運動量保存の破れに関する一考察

角運動量保存の破れに関する一考察

有末宏明*

A Study of the Violation of the Angular Momentum Conservation

Hiroaki ARISUE*

要旨

力学における角運動量保存則の適用例としてよく用いられる，十分細いポールに糸でつながれたおもりの滑らかな台上での円運動，および十分細い鉛直ポールにつながれた単振り子のポールまわりの円運動について考察する．この２つの系はともにおもりの円運動によって糸がポールに巻き付きその結果円運動の半径が徐々に減少する．糸の張力は中心力と考えられるので角運動量は保存し，おもりの速度は円運動の半径に反比例して増大するはずである．後者の実験では摩擦力がほぼ無視できるので角運動量保存則が確認しやすいとの期待の下，実験を行ったところ，おもりの速度は円運動の半径に反比例して増大するどころか逆に減少した．この小論ではこの角運動量保存の破れの原因を明らかにし，前者の例では例え台からの摩擦力が無視できる極限でも角運動量保存は破れ，その極限でおもりの速度は円運動の半径が減少しても不変であることを示す．また，後者の例についても，角運動量保存の破れを正しく考慮すれば，円運動の半径の減少に対する速度の減少の様子についての実験結果を理論的に精確に再現することができることを示す．

キーワード: 角運動量, 保存則, 単振り子，円運動，巻き付き

１．はじめに

角運動量は力学において極めて重要な概念である．中心力の下での質点の運動においては角運動量保存則が問題を解くことを大いに手助けしてくれる．また剛体の回転運動は角運動量にもとづいた考察抜きにはほとんど不可能である．電子や原子のスピンはそれぞれの粒子がもつ重心まわりの角運動量である．

さて中心力の下での質点の角運動量保存則の例として力学の教科書や授業でよく採用されるのは以下の問題である (例えば文献 [1] を見よ).
「問題：摩擦のない滑らかな台の上に細いポールが立っている．質量の無視できる糸の一端をポールに固定して，他端におもりをつける．台上でおもりをポールのまわりに円運動させる (図 1)．おもりの大きさは無視して質点とみなす．円運動にともなって糸がポールに巻き付いて円運動の半径 r は徐々に小さくなる．円運動の半径の減少とともにおもりの速度はどの様に変化するか.」実際，有末は工業高等専門学校 (高専) の応用物理 (理工系大学の物理に相当する) の授業において毎年取り上げ，定期試験でも出題してきた．学生に対して示してきた模範解答は以下のとおりである.「おもりの角運動量は保存するので，おもりの速度は半径に反比例して増大する.」

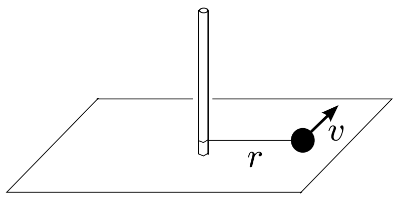

図１ 台上でのポールのまわりの円運動

この解答の真偽を直接実験で調べるのはかなり難しい．摩擦のない滑らかな台を用意するのが難しいからである．台からの摩擦力のモーメントによって角運動量が変化してしまう．そこで，有末が高専で担当する機械系学生対象の卒業研究において，以下のような実験を行った.「実験：細く十分長いポールを鉛直に立て，その上部に糸の一端を固定して，他端におもりをつける．糸が張った状態で糸とポールが適当な角をなすように一旦静止させ，その後おもりがちょうどポールのまわりを円運動するように水平面内で糸と垂直におもりに適切な初速度を与える．おもりの円運動とともに糸はポールに巻き付き，その結果円運動の半径は徐々に小さくなる (図 2).そこで円運動の半径の減少にともなうおもりの速度の

2012 年 8 月 20 日 受理
* 総合工学システム学科　機械システムコース
(Dept. of Industrial Systems Engineering : Mechanical Systems Course)

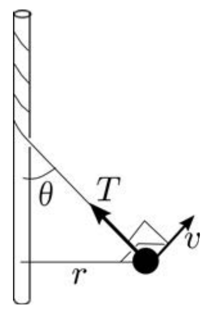

図 2　鉛直ポールに巻き付く単振り子の運動

変化を測定する.」台の上を円運動させる場合と異なり，このときにはおもりに摩擦力が働かない (空気抵抗はほとんど無視できる)．したがっておもりの水平面内での運動については角運動量が保存することが期待できる．そこで実際に円運動の半径 r と速度 v の関係を測定してみると，予想外なことに，図 3 の結果が得られた．なんと，半径の減少とともに，速度は増加するどころか逆に減少していったのである．最初は学生の測定ミスに違いないと高をくくっていたものの，測定データを詳細に確認してもデータの取り扱いにおかしなところは見あたらなかった．

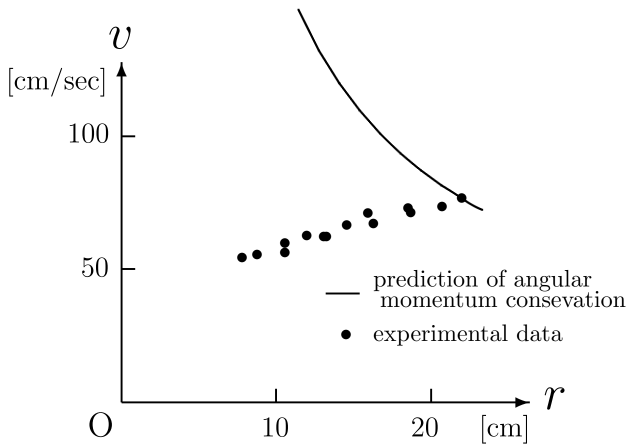

図 3　円運動の半径と速度の変化の実験結果

これはいったいどういう事であろうか．この小論では，この鉛直ポールに巻き付く単振り子の問題に対する角運動量保存則の適用の当否を吟味し，理論的に 2 つの点で大きな見落としがあることを明らかにする．またこの 2 点を正しく考慮すると，実験結果が定量的に正しく再現できることを示す．

2．滑らかな台上でのポールまわりの円運動

まず前節の「問題」を考察する．多くの力学の授業でのこの問題の取り扱い方は以下のとおりであろう．少なくとも有末の授業ではそのように取り扱ってきた．おもりが運動する水平面内でポールの中心を原点とする．ポールは十分細いのでその半径を無視する．おもりが水平面内で受ける力は糸の張力だけである．糸はポールの方向，すなわち原点の方向を向いている，すなわち糸の張力は中心力である．したがっておもりに働く原点まわりの力のモーメントは 0 である．力のモーメントが 0 であれば，原点まわりのおもりの角運動量は保存する．おもりの質量を m，おもりの原点からの距離を r，おもりの速度の糸と垂直な成分を v とすると，原点まわりのおもりの角運動量は

$$L = mrv \tag{1}$$

である．糸がポールに巻き付いて r が小さくなっていくときに，この角運動量は保存するので，速度 v は $\dfrac{1}{r}$ に比例して大きくなる．また回転の角速度 $\omega = \dfrac{v}{r}$ は $\dfrac{1}{r^2}$ に比例して大きくなる．

前節の「実験」で提示した，台のない状態で糸がポールに巻き付きながらおもりが円運動するときの水平面内での運動も，これと同じ取り扱いをして問題がないように一見思われる．しかしながら，この場合の実際のおもりの水平面内での運動では速度は半径の減少にともなって増加せずむしろ減少したのである．角運動量保存則は明らかに成り立っていないように見える．その理由はどこにあるのだろうか．

「問題」に戻って考えてみる．糸がポールに巻き付くためにはポールの半径が 0 でない値をもつ必要がある．そうすると図 4 のように糸の張力は中心力ではなく，糸の張力のモーメントがおもりの角運動量を減ずる方向に働くのである．定量的には以下のとおりである．水平面内でのおもりの回転の運動方程式は，

$$\frac{dL}{dt} = N \tag{2}$$

である．ここで L はおもりの角運動量で $L = mrv$，また N はおもりに働く張力の原点 (ポールの中心) まわりのモーメントで，ポールの半径を b として $N = -bT$ である (図 4 参照)．これらを代入して

$$m\frac{dr}{dt}v + mr\frac{dv}{dt} = -bT \tag{3}$$

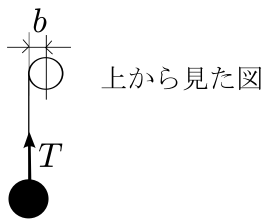

図 4　ポールの半径と張力のモーメント

である．おもりの円運動の方程式 (運動方程式の動径方向の成分) は糸の張力を T として，

$$m\frac{v^2}{r}=T \tag{4}$$

である．ところで，円運動の半径 r の減少率は単位時間あたりにポールに巻き付く糸の長さに等しいので，

$$\frac{dr}{dt}=-b\frac{d\phi}{dt}=-b\frac{v}{r} \tag{5}$$

である．ここで ϕ は水平面内でのおもりの円運動の回転角である．式 (4) と式 (5) を式 (3) に代入して，

$$\frac{dv}{dt}=0 \tag{6}$$

が得られる．すなわち，この考察によれば速度 v は，r の減少とともに $\frac{1}{r}$ に比例して増加するのではなく，一定の値を保つことになる．この結論は，ポールの半径が十分小さい (したがって半径の変化は十分ゆっくりでおもりの軌道はほぼ円軌道とみなして差し支えない) という条件の下で，ポールの半径 b の大きさにはよらない，つまり $b\to 0$ の極限でも成り立つ，ということは強調しておくべきである．

3．鉛直ポールに巻き付く単振り子の円運動

前節の考察のとおり，ポールの半径が 0 でないことにともなう糸の張力のモーメントを考慮することで，おもりの速度が増加ではなく一定になるところまで説明できたが，第 1 節の「実験」で提示した，台がない鉛直ポールに巻き付く単振り子の場合の実際のおもりの水平面内の運動では，速度は円運動の半径の減少にともなって一定ではなく，むしろ減少した．これはどのようにして説明が付くであろうか．今度はこの場合について考察する．

おもりの質量を m，おもりの水平面内での円運動の半径を r，おもりの水平面内での円運動の速度を v とする (図 2)．水平面内での円運動によるおもりの角運動量は $L=mrv$ である．糸の張力を T，糸と鉛直軸がなす角を θ とすると，糸の張力の水平成分 F_x は

$$F_x=T\sin\theta \tag{7}$$

で，水平面内でのおもりの円運動の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r}=F_x \tag{8}$$

である．また，糸の張力の鉛直成分 F_z は

$$F_z=T\cos\theta \tag{9}$$

で，鉛直方向の力のつり合いから

$$F_z=mg \tag{10}$$

が成り立つ．式 (7)，(9)，(10) より

$$F_x=mg\tan\theta \tag{11}$$

である．また，式 (8) と式 (11) より以下が成り立つことが分かる．

$$v^2=gr\tan\theta \tag{12}$$

おもりに働くポールまわりの力のモーメント N は

$$N=-bF_x=-bT\sin\theta \tag{13}$$

である．これを水平面内でのおもりの回転の運動方程式 (2) に代入して，

$$m\frac{dr}{dt}v+mr\frac{dv}{dt}=-bF_x \tag{14}$$

を得る．

さて r の変化率は台上で運動する場合と異なり

$$\frac{dr}{dt}=-b\frac{v}{r}+\frac{r}{\tan\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{15}$$

である．ここで，右辺の第 1 項は，式 (5) と同様に，ϕ を水平面内でのおもりの円運動の回転角として，糸がポールに巻きつくことによる r の変化率である．他方，第 2 項 $\frac{r}{\tan\theta}\frac{d\theta}{dt}$ は θ の変化にともなう r の変化率である．これは図 5 で $dr=\overline{\mathrm{PP'}}\cos\theta$，$\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{QP}}d\theta$，$\overline{\mathrm{QP}}=\frac{r}{\sin\theta}$ から理解できる．

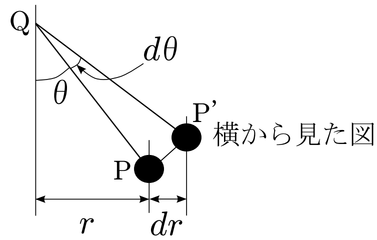

図 5 θ の変化に伴う r の変化

式 (14) に式 (8) と式 (15) を代入すると

$$m\left(-b\frac{v}{r}+\frac{r}{\tan\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)v+mr\frac{dv}{dt}=-mb\frac{v^2}{r} \tag{16}$$

となり，これを整理して以下を得る．

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{v}{\tan\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{17}$$

式 (12) の両辺を t で微分して

$$2v\frac{dv}{dt}=g\frac{dr}{dt}\tan\theta+\frac{gr}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{18}$$

を得る．式 (18) に式 (17) を代入して整理すると以下を得る．

$$\left(2v + \frac{gr\tan\theta}{v\cos^2\theta}\right)\frac{dv}{dt} = g\frac{dr}{dt}\tan\theta \tag{19}$$

この式より

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{g\tan\theta}{2v + \frac{gr\tan\theta}{v\cos^2\theta}} = \frac{\frac{g\tan\theta}{v}}{\left(2 + \frac{gr\tan\theta}{v^2\cos^2\theta}\right)} \tag{20}$$

を得る．式 (20) の 2 番目の等式は式 (19) から導かれる．式 (20) に式 (12) を代入して以下を得る．

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\frac{v}{r}}{\left(2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)} \tag{21}$$

式 (21) の右辺の値は正なので，この式は r が減少するとそれに連れて v も減少することを示している．

その変化の定量的な様子は微分方程式 (21) を式 (12) の条件の下で積分すれば知ることができるが，$\theta \ll 1$ のときに限れば，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ より，式 (21) は

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{3r} \tag{22}$$

となる．この微分方程式の解は，C を定数として以下のとおりである．

$$v = Cr^{\frac{1}{3}} \tag{23}$$

最初の節で紹介した実験は角 θ が 10 数$^\circ$ 以下でのものであり，対応する $\cos\theta$ はほとんど 1 である $(1 - \cos\theta \lesssim 0.03)$ ので，上記の $\cos\theta \fallingdotseq 1$ という条件をよく満たしている．図 6 は図 3 の実験データに式 (23) に従う理論曲線を書き加えたものである．r が減少するとそれに連れて v も減少する様子が，式 (23) により非常に精確に再現されていることが分かる．

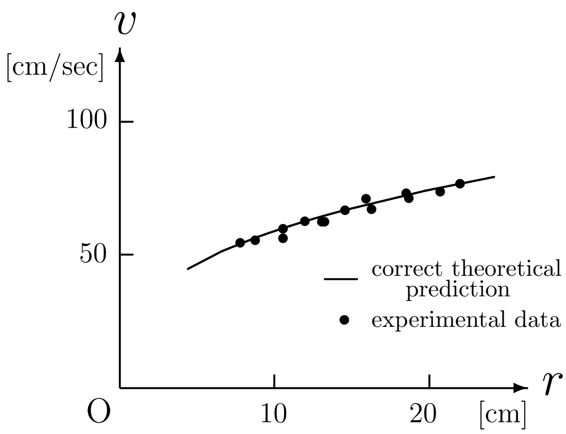

図 6　円運動の半径と速度の変化の実験結果と理論曲線

4．まとめ

この小論では，摩擦のない台上の鉛直ポールにつながれたおもりの円運動，および台なしの鉛直ポールに巻き付く単振り子の問題に対する角運動量保存則の適用の当否を吟味し，理論的に 2 つの点で角運動量保存則が適用できないことを明らかにした．1 点目は，ポールの半径が 0 でないことによる効果で，そのために糸の張力がポールの中心を向かず，ポールの表面すなわちポールの半径分だけポールの中心からずれた位置に向いており，したがって糸の張力のモーメントは 0 でない．このため，糸がポールに巻き付いておもりの円運動の半径が減少するにつれておもりの角運動量は保存せずに減少する．なおこの効果は，台の有無にかかわらず生じるが，その結果として摩擦のない台上の運動では，おもりの円運動の半径が減少しても速度は変化しない．2 点目は，台なしの鉛直ポールに巻き付く単振り子のときには，糸が鉛直方向に対して傾いており，その角度は円運動の半径に応じて変化し，半径が小さくなるほど鉛直線からの角度が大きくなる．その結果，おもりとポールの中心の距離 (すなわち円運動の半径) が大きくなる効果がある．これは角運動量の考察においては速度を減ずる方向に作用する．この 2 点を正しく考慮すると，台なしの鉛直ポールに巻き付く単振り子のときの実験結果が定量的に精確に再現できることが示された．

参考文献

[1] 小暮陽三，潮秀樹，中岡鑑一郎，他：高専の応用物理 (第 2 版)，森北出版（1995）P.42