



単極子場における離散ケプラー運動

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2013-12-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 片山, 登揚 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007580

単極子場における離散ケプラー運動

片山登揚 *

Discrete Kepler Motion in a Monopole Field

Norikai KATAYAMA *

ABSTRACT

Recently, a discrete Kepler motion is defined so that the periodicity of the motion is satisfied. The key of the discretization is that the usual time-continuous Kepler motion is related to the harmonic oscillator. Regularization is very useful to analyze them. In this paper, we study the Kepler motion in a monopole field. Any bounded orbit for the dynamical system is also closed. We construct a discrete Kepler motion in a monopole field so that this property can be admitted.

Key Words: discrete Kepler motion, discrete harmonic oscillator, reduction, a monopole field

1. はじめに

一般に、微分方程式で記述される連続力学系から時間変数を差分化して離散力学系を構成するとき、連続系のもつ特徴をできるだけ継承した差分化が、優れた差分化と考えられる。特に、ハミルトン力学系の差分化つまり数値積分スキームの開発においては、エネルギーの保存、第一積分の保存、シンプレクティック 2-形式の保存などの観点から、例えばシンプレクティック数値積分法の研究開発が盛んに行われてきた [1,2,3]。

他方、中心力系の代表的な力学系であるケプラー運動と調和振動子は、ハミルトン力学系の中でも優れた対称性をもつ力学系として古典力学および量子力学の立場から詳細に研究されてきた。これらの力学系のもつ特徴のひとつとして、すべての有界軌道は閉軌道となることが知られている。峰崎らは、非線形の微分方程式で記述されるケプラー運動が閉軌道性を保つように差分化し、離散ケプラー運動を構成した [4]。そこでは、連続ケプラー運動をレビ-チビタ変換により調和振動子に帰着させて、さらに運動方程式のもつ非線形性を時間変数に置き換え、線形系である調和振動子の差分化を適用することで、離散ケプラー運動を導いている。

また、ケプラー運動の一般化としては、特に幾何学的な観点から多くの研究がある。たとえば、閉軌道性を有するケプラー運動の拡張として、単極子場のケプラー運動が考察されてきた [5,6]。さらに、高次元の測地線を

力学系の軌道とみなして、力学系の簡約化の手法を適用することにより、多重ケプラー運動と呼ばれる力学系も見出されている [7,8]。本小論では、単極子場のケプラー運動の離散化について調べる。単極子場のケプラー運動もやはり非線形の微分方程式で記述される力学系であるが、峰崎らの手法とはことなり、高次元の調和振動子の差分化を用いることで、閉軌道性を有する単極子場の離散ケプラー運動を導く。

2. 離散ケプラー運動と離散調和振動子

本節では、文献 [4] に従って離散ケプラー運動の導出について簡単に述べる。

2.1 ケプラー運動と調和振動子

本項では、2次元のケプラー運動が正準変換により2次元調和振動子に対応づけられることを示す。まず、一般化座標としてデカルト座標 (x, y) と正準共役な運動量として (p_x, p_y) を用いて、2次元のケプラー運動のハミルトニアン H_{K1} は

$$H_{K1}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{b}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + a \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 a, b は定数である。ここで、次のような正準変換を考える。

$$x = q^1 q^2, \quad y = \frac{1}{2}((q^1)^2 - (q^2)^2), \quad (2)$$

$$p_x = \frac{q^1 p_2 + q^2 p_1}{(q^1)^2 + (q^2)^2}, \quad p_y = \frac{q^1 p_1 - q^2 p_2}{(q^1)^2 + (q^2)^2}, \quad (3)$$

上記の変換式 (2), (3) は、レビ-チビタ変換とよばれる。変数 (q^1, q^2, p_1, p_2) を用いてハミルトニアン H_{K1} は以下の

2011年8月22日 受理

* 総合工学システム学科 電子情報コース

(Dept. of Industrial Systems Engineering : Electronics and Information Course)

$H_{K2}(q^1, q^2, p_1, p_2)$ となる.

$$H_{K2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2((q^1)^2 + (q^2)^2)} + \frac{b}{(q^1)^2 + (q^2)^2} + a \quad (4)$$

したがって、変換後の正準方程式は $k = 1, 2$ として、

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{p_k}{(q^1)^2 + (q^2)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + 2b)q^k}{((q^1)^2 + (q^2)^2)^2} \quad (6)$$

となる. さて、式 (4) より定数 a を初期条件 $p_k(0), q^k(0), (k = 1, 2)$ を用いて

$$a = -\frac{p_1(0)^2 + p_2(0)^2 + 2b}{2((q^1(0))^2 + (q^2(0))^2)} \quad (7)$$

とおくと、全エネルギー H_{K2} は

$$H_{K2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2((q^1)^2 + (q^2)^2)} + \frac{b}{(q^1)^2 + (q^2)^2} + a = 0 \quad (8)$$

となる. つまり、

$$p_1^2 + p_2^2 + 2b = -2a((q^1)^2 + (q^2)^2) \quad (9)$$

が成立する. したがって、運動方程式 (5), (6) は $k = 1, 2$ として次のようになる.

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{p_k}{(q^1)^2 + (q^2)^2}, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{-2aq^k}{(q^1)^2 + (q^2)^2} \quad (10)$$

ここで、独立変数 t に対して改めて時間変数 s を、

$$ds = \frac{dt}{(q^1)^2 + (q^2)^2} \quad (11)$$

で定義すると、運動方程式 (10) は

$$\frac{dq^k}{ds} = p_k, \quad \frac{dp_k}{ds} = -2aq^k \quad (k = 1, 2) \quad (12)$$

となる. 運動方程式 (12) は、以下のハミルトニアン $H_{OS}(q^1, q^2, p_1, p_2)$ をもつ調和振動子に対する運動方程式であることが分かる.

$$H_{OS} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + a((q^1)^2 + (q^2)^2) + b \quad (13)$$

ここで、ハミルトニアン H_{K2} と H_{OS} には、以下の関係が成立する.

$$H_{OS} = ((q^1)^2 + (q^2)^2) H_{K2} \quad (14)$$

もちろん、ケプラー運動の軌道は定数 a の符号に応じて、それぞれ、 $a > 0$ のときは楕円 $a = 0$ のときは放物線、 $a < 0$ のときは双曲線となる.

2次元ケプラー運動においては、全エネルギー H_{K1} 以外に、次の量が第一積分となることは直接計算により示すことができる.

$$h = xp_y - yp_x \quad (15)$$

$$e_1 = p_y(xp_y - yp_x) + \frac{bx}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (16)$$

$$e_2 = -p_x(xp_y - yp_x) + \frac{by}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (17)$$

ここで、 h は角運動量であり、 e_1, e_2 は、ルンゲ-レンツベクトルの成分である. 変数 (q^1, q^2, p_1, p_2) で、これらの第一積分を表すと、全エネルギーは H_{K2} であり、

$$h = \frac{1}{2}(p_1q^2 - p_2q^1) \quad (18)$$

$$e_1 = -\frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{q^1q^2(p_1^2 + p_2^2) + 2bq^1q^2}{2((q^1)^2 + (q^2)^2)} \quad (19)$$

$$e_2 = \frac{(p_2q^1 - p_1q^2)(p_2q^1 + p_1q^2) + b((q^1)^2 - (q^2)^2)}{2((q^1)^2 + (q^2)^2)} \quad (20)$$

となる.

2.2 離散 ケプラー運動の導出

本項では、式 (13) のハミルトニアン H_{OS} から導かれる調和振動子の運動方程式 (12) を離散化することにより、2次元離散ケプラー運動を導く.

まず、時間変数 s の差分化として、整数 $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して、離散時間を $s^{(j)}$ とかく. つまり、 $s^{(0)} < s^{(1)}, \dots, < s^{(j)} < s^{(j+1)} < \dots$ である. さらに、離散時間 $s^{(j)}$ における変数 q^k, p_k の値を

$$Q^k(j) = q^k(s^{(j)}) \quad P_k(j) = p_k(s^{(j)}), \quad k = 1, 2 \quad (21)$$

とおく. 式 (12) に対して次の差分式を考える.

$$\frac{Q^k(j+1) - Q^k(j)}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} = \frac{1}{2}(P_k(j) + P_k(j+1)) \quad (22)$$

$$\frac{P^k(j+1) - P^k(j)}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} = -a(Q^k(j) + Q^k(j+1)) \quad (23)$$

ここで、 $\Delta s^{(j)} = s^{(j+1)} - s^{(j)}$ とおき、 $\Delta s^{(j)} \rightarrow 0$ の極限を考えると、差分式 (22)(23) は、微分方程式 (12) に対応することは明らかである. さて、式 (22)(23) を $Q^k(j+1), P_k(j+1)$ について解くと

$$Q^k(j+1) = \frac{\Delta s^{(j)} P_k(j) + (1 - \frac{a}{2}(\Delta s^{(j)})^2) Q^k(j)}{1 + \frac{a}{2}(\Delta s^{(j)})^2} \quad (24)$$

$$P_k(j+1) = \frac{(1 - \frac{a}{2}(\Delta s^{(j)})^2) P_k(j) - 2a\Delta s^{(j)} Q^k(j)}{1 + \frac{a}{2}(\Delta s^{(j)})^2} \quad (25)$$

となる. ここで, 離散時間 $s^{(j)}$ における全エネルギーを $E_{Os}(j) = H_{Os}(Q^1(j), Q^2(j), P_1(j), P_2(j))$ とおくと差分式 (24), (25) より,

$$E_{Os}(j) = E_{Os}(j+1) \quad (26)$$

が成立することが容易に示される. つまり, 差分式 (24)(25) はエネルギー保存の差分式となっていることが分かる.

次に, ケプラー運動における時間変数 t の離散時間を定義する. $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して離散時間 $t^{(j)}$ として, $s^{(j)}$ を用いて式 (11) より次のように定義する.

$$t^{(j+1)} = t^{(j)} + ((Q^1(j))^2 + Q^2(j))^2 \Delta s^{(j)} \quad (27)$$

ただし,

$$t^{(0)} = s^{(0)}, \quad \Delta s^{(j)} = s^{(j+1)} - s^{(j)} \quad (28)$$

である. このとき, 離散時間 $t^{(j)}$ を用いて差分式 (22)(23) を書き直すと

$$\frac{Q^k(j+1) - Q^k(j)}{t^{(j+1)} - t^{(j)}} = \frac{P_k(j) + P_k(j+1)}{2((Q^1(j))^2 + (Q^2(j))^2)} \quad (29)$$

$$\frac{P^k(j+1) - P^k(j)}{t^{(j+1)} - t^{(j)}} = -a \frac{Q^k(j) + Q^k(j+1)}{(Q^1(j))^2 + (Q^2(j))^2} \quad (30)$$

となる. 式 (29)(30) は, ケプラー運動の微分方程式 (10) の離散化である. 式 (29)(30) より $Q^k(j+1), P_k(j+1)$ について解くと

$$Q^k(j+1) = \frac{2\Delta t^{(j)} Q_0^2 P_k(j) + (2Q_0^4 - a(\Delta t^{(j)})^2) Q^k(j)}{2Q_0^4 + a(\Delta t^{(j)})^2} \quad (31)$$

$$P_k(j+1) = \frac{(2Q_0^4 - a(\Delta t^{(j)})^2) P_k(j) - 4aQ_0^2 \Delta t^{(j)} Q^k(j)}{2Q_0^4 + a(\Delta t^{(j)})^2} \quad (32)$$

となる. ただし,

$$\Delta t^{(j)} = t^{(j+1)} - t^{(j)}, \quad Q_0 = \sqrt{(Q^1(j))^2 + (Q^2(j))^2} \quad (33)$$

である.

式 (7) と同様に離散系においても定数 a を

$$a = -\frac{P_1(0)^2 + P_2(0)^2 + 2b}{2((Q^1(0))^2 + (Q^2(0))^2)} \quad (34)$$

とおくと, 任意の離散時間における全エネルギーは $H_{K2} = 0$ となり保存される. また, 同時に式 (18)(19)(20) の連続系での第一積分である角運動量 h , ルンゲ-レンツベクトル e_1, e_2 も保存されることが示される.

以上より, 式 (31)(32) が離散ケプラー運動の差分式となる. しかも, 離散ケプラー運動の解軌道は連続系での

第一積分をすべて保存することより, 連続系と同様に有界軌道はすべて閉軌道となることが分かる. もちろん, 変数 (x, y, p_x, p_y) での差分式の記述は, 式 (2)(3) に代入することで得られる.

3 単極子場の離散ケプラー運動

本節では, 前節での離散調和振動子の導出方法と力学系の簡約化の結果をもちいて, 単極子場の離散ケプラー運動の構成について述べる.

3.1 単極子場の連続ケプラー運動

本項では連続時間系における単極子のケプラー運動について述べる. 単極子場のケプラー運動は, MIC-ケプラー運動ともよばれる力学系である. 3次元ベクトルを \mathbf{r} と表すとき運動方程式が

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (35)$$

で表される力学系が単極子場のケプラー運動である. ただし,

$$\mathbf{B} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu^2}{2r^2} \quad (36)$$

であり, $r = |\mathbf{r}|$ でしかも μ と k は定数, さらに \mathbf{B} は単極子場を表しその強さが μ である. 容易に分かるように, 単極子場の強さ μ が $\mu = 0$ のときは, 運動方程式 (35) は通常の3次元ケプラー運動の運動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (37)$$

となる. 単極子場のケプラー運動には, 全エネルギー以外に以下の2つの保存ベクトル \mathbf{J} と \mathbf{R} が存在する.

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (38)$$

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{J} - k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (39)$$

\mathbf{J} は角運動量ベクトル, \mathbf{R} はルンゲ-レンツベクトルとよばれる保存ベクトルである. 第一積分である保存ベクトル \mathbf{J} と単位位置ベクトル \mathbf{r}/r との内積を計算すると

$$\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \mu \quad (40)$$

が成立することから, 角運動量ベクトル \mathbf{J} を軸とする円錐上に解軌道はのっていることが分かる. また, あらたに定数ベクトル \mathbf{N} を

$$\mathbf{N} = \mu \mathbf{R} + k \mathbf{J} \quad (41)$$

と定義すると, 次の関係式が成立することが示される.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = \mu(|\mathbf{J}|^2 - \mu^2) \quad (42)$$

式(42)より, 解軌道は平面曲線をなすことが分かる. つまり, 円錐上でかつ平面曲線であることから, 解軌道は円錐曲線となり, 有界な軌道はすべて閉軌道となることが分かる.

以上が, 単極子場のケプラー運動の解軌道のもつ特徴である. 次に, 本力学系をハミルトン形式で考察する. まず, 4次元のデカルト座標を $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ とし, 正準共役な運動量を $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ とする. このとき, 調和振動子のハミルトニアンを修正した以下の H_{4MH} をハミルトニアンとする力学系を考える.

$$H_{4MH} = \frac{1}{4r} \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \eta_l^2 + a_0 \sum_{k=1}^4 (\xi^k)^2 + a_1 \right) \quad (43)$$

ここで, a_0, a_1 は定数であり, $r = \sum_{j=1}^4 (\xi^j)^2$ であるが, この r は式(35)(36)の r と一致することは後ほど分かる. ハミルトニアン H_{4MH} に対する正準方程式は, $k = 1, 2, 3, 4$ として

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \left(2H_{4MH} - \frac{a_0}{2} \right) \frac{\xi^k}{r} \quad (44)$$

$$\frac{d\xi^k}{dt} = \frac{\eta^k}{4r} \quad (45)$$

となる. この運動方程式において全エネルギー H_{4MH} 以外に次の量が第一積分であることは, 容易に示される.

$$L_{km} = \xi^k \eta_m - \eta^k \xi_m \quad (46)$$

$$I_{km} = \frac{1}{8} \eta_k \eta_m - \left(H_{4MH} - \frac{a_0}{4} \right) \xi^k \xi^m \quad (47)$$

ただし, $k, m = 1, 2, 3, 4$ である.

さて, 次に力学系の簡約化を行う. ハミルトニアンを H_{4MH} とする力学系は,

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_2 - \xi^2 \eta_1 + \xi^3 \eta_4 - \xi^4 \eta_3) \quad (48)$$

を用いた運動量写像を $\Phi(\xi, \eta) = \mu$ (定数) とする $U(1)$ 不変な力学系であることから, 力学系の簡約化を可能としている. その結果, 自由度3の力学系が以下のように求められる. つまり, 4次元の位置ベクトルの成分 $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ と運動量ベクトルの成分 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ は次の KS 変換により,

$$q^1 = 2(\xi^1 \xi^3 + \xi^2 \xi^4) \quad (49)$$

$$q^2 = 2(-\xi^1 \xi^4 + \xi^2 \xi^3) \quad (50)$$

$$q^3 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 \quad (51)$$

および

$$p_1 = \frac{1}{2r} (\xi^3 \eta_1 + \xi^4 \eta_2 + \xi^1 \eta_3 + \xi^2 \eta_4) \quad (52)$$

$$p_2 = \frac{1}{2r} (-\xi^4 \eta_1 + \xi^3 \eta_2 + \xi^2 \eta_3 - \xi^1 \eta_4) \quad (53)$$

$$p_3 = \frac{1}{2r} (\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2 - \xi^3 \eta_3 - \xi^4 \eta_4) \quad (54)$$

の関係で3次元ベクトル $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$ と3次元運動量ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ に写される. ただし,

$$r = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (q^j)^2} = \sum_{k=1}^4 (\xi^k)^2 \quad (55)$$

である. 簡約化ハミルトニアン H_μ は, H_{4MH} から \mathbf{q} と \mathbf{p} を用いて

$$H_\mu = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 p_j^2 + \frac{\mu^2}{2r^2} + \frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{4r} \quad (56)$$

となる. また, 簡約化まえの標準的なシンプレクティック形式 $\sum_{k=1}^4 d\eta_k \wedge d\xi^k$ は以下の ω_μ に簡約化される.

$$\omega_\mu = \sum_{j=1}^3 dp_j \wedge dq^j - \frac{\mu}{2r^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} q^i dq^j \wedge dq^k \quad (57)$$

ここで, ε_{ijk} はレヴィチビタの記号である.

ハミルトニアン H_μ と簡約化シンプレクティック形式 ω_μ より, 簡約力学系の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{p} \quad (58)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \times \left(\frac{-\mu}{r^3} \mathbf{q} \right) + \frac{\mu^2}{r^4} \mathbf{q} + \frac{a_1}{4r^3} \mathbf{q} \quad (59)$$

となる. ここで, 定数 a_1 を $a_1 = -4k$ とおき, 3次元ベクトル \mathbf{q} を \mathbf{r} とおくと, 上記の運動方程式は式(35)(36)の単極子場のケプラー運動と一致することが分かる. 以下, 3.1項における3次元ベクトル \mathbf{r} は \mathbf{q} とみなすこととする.

本項の最後に, 4次元の簡約化前の力学系における全エネルギー以外の第一積分 L_{km}, I_{km} と単極子場のケプラー運動の第一積分 $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3), \mathbf{R} = (R_1, R_2, R_2)$ との対応をまとめると, 以下の関係が成立する.

$$J_1 = \frac{1}{2} (L_{14} + L_{32}) \quad (60)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (L_{13} + L_{24}) \quad (61)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} (L_{12} + L_{43}) \quad (62)$$

$$R_1 = -2(I_{13} + I_{24}) \quad (63)$$

$$R_2 = -2(I_{23} - I_{14}) \quad (64)$$

$$R_3 = -(I_{11} + I_{22} - I_{33} - I_{44}) \quad (65)$$

3.2 単極子場の離散ケプラー運動

本項では, 単極子場の連続ケプラー運動のもつ閉軌道性を満たすように運動方程式(58)(59)を差分化できることを示し, 離散ケプラー運動を構成する. まず, 4次元の力学

系の離散化を行う. 運動方程式 (44)(45) において式 (43) の係数を初期条件 $\eta_k(0), \xi^k(0), (k = 1, 2, 3, 4)$ から決まる全エネルギー $H_{4MH}^{(0)}$ を用いて定数 a_2 を

$$a_2 = H_{4MH}^{(j)} - \frac{a_0}{4} \quad (j = 0) \quad (66)$$

とおく. さらに, 式 (44)(45) において変数 s を

$$ds = \frac{dt}{r} = \frac{dt}{\sum_{k=1}^4 (\xi^k)^2} \quad (67)$$

とおくと, 式 (44)(45) は次のようになる.

$$\frac{d\eta_k}{ds} = 2a_2\xi^k, \quad \frac{d\xi^k}{ds} = \frac{\eta^k}{4} \quad (68)$$

2.2 項と全く同様に負でない整数 $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して, 任意に $t^{(0)} < t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(j)} < \dots$ となる離散時間 $t^{(j)}$ を考える. このとき, 変数 s に対して, 離散時間 $s^{(j)}$ を式 (67) から

$$s^{(j+1)} = s^{(j)} + \frac{t^{(j+1)} - t^{(j)}}{\left(\sum_{k=1}^4 (\xi^k(t^{(j)}))^2\right)}, \quad s^{(0)} = t^{(0)} \quad (69)$$

で定義する. 離散時間 $s^{(j)}$ における変数 η_k, ξ^k の値を同じ記号の

$$(\eta_k)^{(j)} = \eta_k(s^{(j)}), \quad (\xi^k)^{(j)} = \xi^k(s^{(j)}), \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (70)$$

と書き s の差分幅を $\Delta s^{(j)} = s^{(j+1)} - s^{(j)}$ とおくと, 式 (68) より, 変数 η, ξ に対する差分式を

$$\frac{(\eta_k)^{(j+1)} - (\eta_k)^{(j)}}{\Delta s^{(j)}} = a_2 \left((\xi^k)^{(j+1)} + (\xi^k)^{(j)} \right) \quad (71)$$

$$\frac{(\xi^k)^{(j+1)} - (\xi^k)^{(j)}}{\Delta s^{(j)}} = \frac{1}{8} \left((\eta_k)^{(j+1)} + (\eta_k)^{(j)} \right) \quad (72)$$

とする. 上式を $(\eta_k)^{(j+1)}, (\xi^k)^{(j+1)}$ について解くと

$$-(\eta_k)^{(j+1)} = A(\eta_k)^{(j)} + B(\xi^k)^{(j)} \quad (73)$$

$$(\xi^k)^{(j+1)} = C(\eta_k)^{(j)} + A(\xi^k)^{(j)} \quad (74)$$

とまとめられる. ただし, 各係数は

$$A = \frac{8 + a_2(\Delta s^{(j)})^2}{8 - a_2(\Delta s^{(j)})^2} \quad (75)$$

$$B = \frac{16a_2\Delta s^{(j)}}{8 - a_2(\Delta s^{(j)})^2} \quad (76)$$

$$C = \frac{2\Delta s^{(j)}}{8 - a_2(\Delta s^{(j)})^2} \quad (77)$$

となり, $B = 8a_2C, A^2 - BC = 1$ の関係が成立する. 離散時間 $s^{(j)}$ でのハミルトニアンを

$$H_{4MH}^{(j)} = \frac{1}{4r^{(j)}} \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 (\eta_l^{(j)})^2 + a_0 \sum_{k=1}^4 ((\xi^k)^{(j)})^2 + a_1 \right) \quad (78)$$

で定義する. ここで, $r^{(j)} = \sum_{k=1}^4 ((\xi^k)^{(j)})^2$ である. いま, a_2 を式 (66) で定義した定数として差分式 (73)(74) を用いて以下の式が成立することが示される.

$$H_{4MH}^{(j+1)} = H_{4MH}^{(j)} \quad (79)$$

つまり, 差分式 (73)(74) はエネルギー保存の差分式である. したがって, $j = 1, 2, 3, \dots$ においても a_2 を定数として用いることができる.

次に, 連続系における全エネルギー H_{4MH} 以外の第一積分 L_{km} と I_{km} の離散系における保存性について調べる. まず,

$$L_{km}^{(j)} = (\xi^k)^{(j)}(\eta_m)^{(j)} - (\eta_k)^{(j)}(\xi^m)^{(j)} \quad (80)$$

$$I_{km}^{(j)} = \frac{1}{8}(\eta_k)^{(j)}(\eta_m)^{(j)} - \left(H_{4MH}^{(j)} - \frac{a_0}{4}\right) (\xi^k)^{(j)}(\xi^m)^{(j)} \quad (81)$$

とおく. このとき, 式 (80)(81) へ差分式 (73)(74) を代入することで, 以下の式が成立することが示される.

$$L_{km}^{(j+1)} = L_{km}^{(j)} \quad (82)$$

$$I_{km}^{(j+1)} = I_{km}^{(j)} \quad (83)$$

つまり, $(\xi^k, \eta_k) (k = 1, 2, 3, 4)$ であらわされる 4 次元空間における運動方程式の差分式 (73)(74) は, $H_{4MH}^{(j)}, L_{km}^{(j)}, I_{km}^{(j)}$ が保存される差分式であることが示された.

さて, 単極子場のケプラー運動をあらわす 3 次元の位置ベクトル q と運動量ベクトル p の離散時間における値は式 (49) から式 (54) の KS 変換の関係式に代入することから得られる. つまり, 離散時間の値である $\eta_k^{(j)}$ と $(\xi^k)^{(j)}$ を用いて, 以下ののようにまとめられる.

$$(q^1)^{(j)} = 2((\xi^1)^{(j)}(\xi^3)^{(j)} + (\xi^2)^{(j)}(\xi^4)^{(j)}) \quad (84)$$

$$(q^2)^{(j)} = 2(-(\xi^1)^{(j)}(\xi^4)^{(j)} + (\xi^2)^{(j)}(\xi^3)^{(j)}) \quad (85)$$

$$(q^3)^{(j)} = ((\xi^1)^{(j)})^2 + ((\xi^2)^{(j)})^2 - ((\xi^3)^{(j)})^2 - ((\xi^4)^{(j)})^2 \quad (86)$$

および

$$p_1^{(j)} = \frac{1}{2r^{(j)}} ((\xi^3)^{(j)}(\eta_1)^{(j)} + (\xi^4)^{(j)}(\eta_2)^{(j)} + (\xi^1)^{(j)}(\eta_3)^{(j)} + (\xi^2)^{(j)}(\eta_4)^{(j)}) \quad (87)$$

$$p_2^{(j)} = \frac{1}{2r^{(j)}} (-(\xi^4)^{(j)}(\eta_1)^{(j)} + (\xi^3)^{(j)}(\eta_2)^{(j)} + (\xi^2)^{(j)}(\eta_3)^{(j)} - (\xi^1)^{(j)}(\eta_4)^{(j)}) \quad (88)$$

$$p_3(j) = \frac{1}{2r^{(j)}} ((\xi^1)^{(j)}(\eta_1)^{(j)} + (\xi^2)^{(j)}(\eta_2)^{(j)} - (\xi^3)^{(j)}(\eta_3)^{(j)} - (\xi^4)^{(j)}(\eta_4)^{(j)}) \quad (89)$$

さらに、第一積分については、連続系における関係式 (60) から式 (65) より

$$J_1^{(j)} = \frac{1}{2} (L_{14}^{(j)} + L_{32}^{(j)}) \quad (90)$$

$$J_2^{(j)} = \frac{1}{2} (L_{13}^{(j)} + L_{24}^{(j)}) \quad (91)$$

$$J_3^{(j)} = \frac{1}{2} (L_{12}^{(j)} + L_{43}^{(j)}) \quad (92)$$

$$R_1^{(j)} = -2 (I_{13}^{(j)} + I_{24}^{(j)}) \quad (93)$$

$$R_2^{(j)} = -2 (I_{23}^{(j)} - I_{14}^{(j)}) \quad (94)$$

$$R_3^{(j)} = - (I_{11}^{(j)} + I_{22}^{(j)} - I_{33}^{(j)} - I_{44}^{(j)}) \quad (95)$$

で、離散系における角運動量 $J^{(j)} = (J_1^{(j)}, J_2^{(j)}, J_3^{(j)})$ とルンゲレンツベクトル $R^{(j)} = (R_1^{(j)}, R_2^{(j)}, R_3^{(j)})$ が定義される。 $L_{km}^{(j)}, I_{km}^{(j)}$ が保存されることから、直ちに $J^{(j)}$ と $R^{(j)}$ が保存されることが分かる。つまり、離散系にお

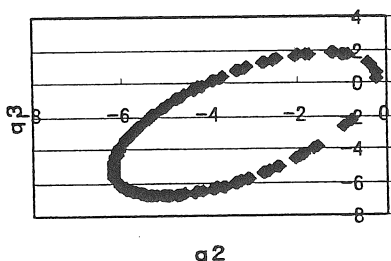


図1 (q2,q3)平面への射影

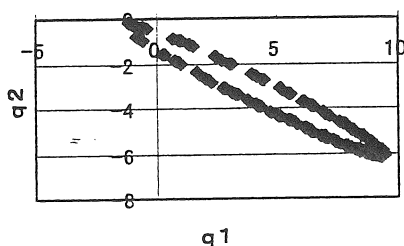


図2 (q1,q2)平面への射影

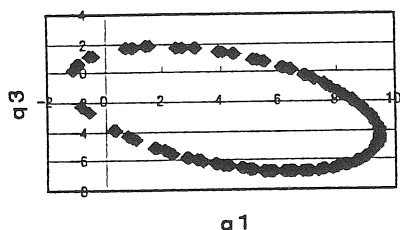


図3 (q1,q3)平面への射影

ける $(q^k)^{(j)}$ ($k = 1, 2, 3$) は、保存ベクトル $J^{(j)}$ と $R^{(j)}$

を用いて連続系の場合と同様に円錐曲線上にあることが分かる。以上より、離散系の軌道も有界軌道は全て閉軌道となることが示され、閉軌道性を有する単極子場の離散ケプラー運動が導出できた。数値例として図1から図3に、時間差分幅を $\Delta t = 1.8$ としたとき、解軌道を各 $(q^2, q^3), (q^1, q^2), (q^1, q^3)$ 平面へ正射影した様子を示す。これらの結果より離散化された軌道は閉軌道上に存在することが分かる。

4. まとめ

2次元の離散ケプラー運動の導出方法では、2節で示したようにLC変換と力学系のもつ非線系性を時間変数に組み込み、等方的調和振動子の差分式を応用した。自由度3の力学系である単極子場のケプラー運動では、4次元のハミルトン力学系から力学系の簡約化の方法を用いて導かれることに着目し、4次元での等方的調和振動子の差分式を応用した。閉軌道性を有するように差分化するために、連続系での第一積分の保存性に注目して、離散系を調べた。ここでは、与えられた力学系の離散化を調べたが、本手法は閉軌道性を有する未知の力学系の導出に応用することができると思われる。

参考文献

- [1]H.Yoshida, Non-existence of the modified first integrals by symplectic integration methods, Phys. Lett. A. 282 276-283(2002).
- [2] 前田茂, シンプレクテック写像の応用について-ハミルトン系の離散版, 応用数理, Vol18 No.3 30-39(1998).
- [3] 片山登揚, 森岡純也, ハミルトン系の数値計算について, 大阪府立工業高等専門学校研究紀要, 33 巻, 7-14(1999).
- [4]Y.Minesaki and Y.Nakamura, A new discretization of the Kepler motion which conserves the Runge-Lenz vector, Phys. Lett. A. 306 127-133(2002).
- [5]H.V.McIntosh and A.Cisneros, Degeneracy in the presence of a magnetic monopole, J. Math. Phys. 11, 896-916(1970).
- [6]T.Iwai and Y.Uwano, The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three-dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory, J. Math. Phys. 27,1523-1529(1986).
- [7]T.Iwai and N. Katayama, Two classes of dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed. J. Math. Phys. 35,2914-2933(1994).
- [8]T.Iwai and N. Katayama, Multifold Kepler systems - Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed. J. Math. Phys. 36,1790-1811(1995).