幾何学研究への数式処理の応用について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2013-12-11 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 片山, 登揚 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007702

第34巻

幾何学研究への数式処理の応用について

片山登揚 *

On Application of Symbolic and Algebraic Computation to Studies on Geometry

Noriaki KATAYAMA

ABSTRACT

When we investigate some geometrical properties for a given Riemannian metric, it is well known that much tedious and long calculations must be made. In this short note, we consider an application of the Symbolic and Algebraic Computation to study some geometrical properties for four dimensional Riemannian spaces. It has been shown that an extended Taub-NUT metric is an Einstein metric with developed Mathematica program.

Key Words: Riemannian space, Einstein metric, an extended Taub-NUT metric, tensor analysis, symbolic and algebraic computation, Mathematica.

1. はじめに

論文[1,2]において，岩井と筆者は力学系の研究とその背後にある幾何学との関係を Taub-NUT 計量の拡張の観点から議論した．そこでは，力学系の配位空間の幾何学的性質を詳細に調べた．つまり，幾何学の立場として，ある特別な幾何学的性質（たとえば,Einstein 計量）を満たす計量を見いだすことは，大変重要なことである．他方，与えられた計量がどのような幾何学的性質を満たしているかを調べることも，同様に重要なことである．そのためには，基本テンソルから定義される，クリストッフェル記号や曲率テンソルを計算しなければならない．これらの計算はテンソル解析として，非常に複雑で面倒な計算であるが，従来これらの計算は主に手計算で行われてきた．

他方，近年様々なコンピュータによる数式処理システムが開発され，多方面に応用されている．たとえば,MATLAB, Maple などが，数式処理システムとしてよく知られている．そこで，本小論では数式処理システムの一つである Mathematica を用いて，幾何学の諸量を簡単に計算できるプログラムを作成したので報告する．

その結果，これまで手計算による研究で Einstein 計量であると報告された拡張 Taub-NUT 計量を本プログラムにより解析したところ,Einstein 計量であることが確認された．その他,Eguchi-Hanson 計量などのこれまで色々報告されてきた，4次元の計量についてもその幾何学的諸量を計算できることが確認された．

本小論の構成は以下のようである．まず，第2節で幾何学研究に現れる諸量について簡単に説明する．第3節では，プログラムの考え方および実行例を示し，第4節で結言を与える．

2. 幾何学における基本諸量

2.1 基本テンソル

本節では，幾何学研究において現れる諸量について，簡単に説明する[3, 4, 5]．3次元ユークリッド空間のデカルト座標を(x,y,z)とするとき，隣接する2点，点(x,y,z)と点$(x+dx,y+dy,z+dz)$の距

2000年4月12日受理
*システム制御工学科(Department of Systems and Control Eng.)

離 ds は, 三平方の定理より

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.1}$$

で与えられる.これを一般化して,n 次元の空間において,その局所座標を (x^i) とする.ただし,添え字 i は１から n までの値をとるものとする.以下第２節では,特に断らない限り添え字は１から n までの値をとるものとする.隣接する２点間の距離 ds を

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x) dx^i dx^j, \tag{2.2}$$

と定義する空間を n 次元リーマン空間と呼ぶ.(2.2)式における $g_{ij}(x)$ は距離を決める基本的な量であり基本テンソルと呼ばれる.(2.2)式は,以下の(2.3)式のように総和記号が省略されて表されることが多い.

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j. \tag{2.3}$$

つまり,同じ添え字が２度現れているときにはその添え字について１から n まで加えられていることとする.この表記法を,総和記号の規約またはアインシュタインの記法とよぶ.本小論でも以下この記法を用いることにする.さて,基本テンソル $g_{ij}(x)$ は以下の条件を満たすものとする.

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x), \qquad g \equiv \det(g_{ij}) \neq 0. \tag{2.4}$$

すなわち, $g_{ij}(x)$ は対称でその行列式 g は０でないとする.例えば,簡単な例として３次元ユークリッド空間において極座標 (r, θ, ϕ) を用いる.このとき,微小距離 ds は次のようになる.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.5}$$

従って,このとき基本テンソル $g_{ij}(x)$ は次式のようになる.

$$\begin{aligned} g_{ij} &= 0 (i \neq j), \qquad g_{11} = 1, \\ g_{22} &= r^2, \qquad g_{33} = r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

２．２　基本テンソルから導かれる諸量

つぎに, 基本テンソルから導かれる諸量として, クリストッフェル記号と曲率テンソルについて, その定義を与える. まず, 最初に基本テンソル $g_{ij}(x)$ の逆行列の成分 $g^{ij}(x)$ を定義する.つまり,

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}, \tag{2.7}$$

をみたす $g^{ij}(x)$ を考える.ここで, δ_j^i はクロネッカーのデルタとよばれ記号である. $g^{ij}(x)$ と基本テンソル $g_{ij}(x)$ よりクリストッフェルの第２種記号は,

$$\begin{Bmatrix} & i & \\ j & & k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \tag{2.8}$$

で定義される３つの添え字をもった記号である. しかし, クリストッフェル記号はテンソルの成分ではない. さらに, 曲率テンソルはクリストッフェル記号の座標変数 (x^i) による微分で定義される量であり, ４つの添え字を持った次の式で定義されるテンソルである.

$$\begin{aligned} R^i{}_{jkl} = &\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} & i & \\ l & & j \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} & i & \\ j & & k \end{Bmatrix} \\ &- \begin{Bmatrix} & i & \\ l & & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} & h & \\ j & & k \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} & i & \\ k & & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} & h & \\ j & & l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$R^i{}_{jkl}$ は曲率テンソルの成分と呼ばれる.

次に, リッチテンソル R_{ij} の定義を与える.リッチテンソルは曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ の縮約により次の式で定義されるテンソルである.

$$R_{ij} = R^k{}_{ijk}. \tag{2.10}$$

さらに,スカラー曲率 R は, リッチテンソル R_{ij} の縮約により

$$R = g^{ij} R_{ij}, \tag{2.11}$$

で与えられる.

2．3　リーマン空間の幾何学的性質

2．2で定義した諸量により，計量およびリーマン空間の性質が次のように定義される．

定義1．(平坦計量)

$$R^i{}_{jkl}=0,\quad (\text{任意の}\,i,j,k,l) \qquad (2.12)$$

が成立するとき，計量(2.2)は平坦計量(flat metric)であるという．

定義2．(Einstein 計量)

$$R_{ij}=\rho g_{ij},\ (\text{任意の}\,i,j)\ (\rho\text{はスラー関数}) \qquad (2.13)$$

が成立するとき，計量(2.2)は Einstein 計量(Einstein metric)であるという．

定義3．(Ricci 平坦計量)

$$R_{ij}=0,\ (\text{任意の}\,i,j) \qquad (2.14)$$

が成立するとき，計量(2.2)は Ricci 平坦計量(Ricci flat metric)であるという．

定義4．(定曲率空間)

$$R^i{}_{jkl}=K(\delta^i{}_k g_{jl}-\delta^i{}_l g_{jk}),\ (\text{任意の}\,i,j,k,l)\quad (K\text{は定数}) \qquad (2.15)$$

が成立するとき，計量(2.2)をもつリーマン空間は定曲率空間(space of constant curvature)であるという．

以上の諸性質を，与えられた計量が満たすかどうかを調べることは，幾何学研究の一つである．もちろんある仮定のもとで，これらの性質をみたす計量を見出すことも大変重要な問題であるが，(2.8)，(2.9)より分かるように，(2.12)から(2.15)の各条件は一般に基本テンソル $g_{ij}(x)$ を未知関数とする2階の非線形連立偏微分方程式系となり，その解析は非常に難しい．本小論で報告する Mathematica のプログラムは，4次元計量を例にして，与えられた計量がこれらの性質をみたすかどうかを，計算しチェックするものである．もちろん，「Ricci 平坦計量は，Einstein 計量である」とか，「定曲率空間は Einstein 空間である」ことなど，これらの性質は他の性質からも導かれることも示されているが，ここでは定義通り計算して性質が成立しているかどうかを調べる．

3．プログラムの考え方と実行例

3．1　プログラムの考え方

4次元計量の幾何学的性質を調べるため，まず4次元の局所座標系 $(x^i)(i=1,2,3,4)$ と，基本形式 ds^2 を与える．以下第3節では，特に断らない限り添え字は1から4までの値をとるものとする．基本形式から，基本テンソル $g_{ij}(x)$ を求め，その後第2節で定義したクリストッフェル記号 $\left\{\begin{matrix} i \\ j\quad k\end{matrix}\right\}$，曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$，リッチテンソル R_{ij}，スカラー曲率 R を計算する．これらの計算結果を用いて，幾何学的諸性質が成立するか，つまり(2.12)～(2.15)式が成立するかを調べる．

作成した Mathematica のプログラムを付録に示す．なお，曲率テンソルやリッチテンソルなどの具体的な式の出力はプログラム開発段階においておこない，例示したプログラムでは，基本テンソルと幾何学的性質のみを出力するプログラムとなっている．

以下，実行例として，平坦計量，シュワルツシルド計量，拡張 Taub-NUT 計量および Eguchi-Hanson 計量等の8例についての計算結果を示す．

3．2　プログラムの実行例1

最初の例として，4次元平坦計量の例を示す．基本形式は，デカルト座標を $(x^i)(i=1,\cdots 4)$ とするとき，次の式で与えられる．

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2. \qquad (3.1)$$

本プログラムによる計算結果は，次のように求められる．

1．平坦計量である．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量である．
4．定曲率空間である．

これらの結果は，$g_{ij}(x)=\delta_{ij}$ より明らかである．

3．3　プログラムの実行例2

第2の例として，4次元定曲率空間の計量の例を示す．定曲率空間の基本形式の一つは，実行例1と同じくデカルト座標を $(x^i)(i=1,\cdots 4)$ とするとき，次の式で与えられる．

$$ds^2=\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2}{\left(1+\frac{a}{4}\left((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2\right)\right)^2}. \qquad (3.2)$$

ここで，aは定数である．このとき，基本テンソルは，

$$g_{ij}(x)=\frac{\delta_{ij}}{\left(1+\frac{a}{4}\left((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2\right)\right)^2}, \tag{3.3}$$

となり，幾何学的性質は次のように計算される．
1．平坦計量でない．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量でない．
4．定曲率空間である．

3．4　プログラムの実行例3

第3の例として，相対性理論で用いられる，シュワルツシルド計量について調べる[3]．4次元の局所座標系は，空間座標(r,θ,φ)と時間座標tとをあわせた(r,θ,φ,t)で与えられる．(r,θ,φ,t)は4次元時空を表わしているといわれる．また，この計量は，Einstein 方程式を満たす計量としても広く知られている．シュワルツシルド時空の計量は，定数mを用いて次の式で与えられる．

$$ds^2=\frac{-1}{1-2m/r}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+(1-\frac{2m}{r})dt^2. \tag{3.4}$$

このとき，プログラム実行後の出力はつぎのようになる．0でない基本テンソルは，

$$g_{11}=\frac{r}{2m-r},\qquad g_{22}=-r^2,$$
$$g_{33}=-r^2\sin^2(\theta),\qquad g_{44}=\frac{r-2m}{r}, \tag{3.5}$$

と求められる．曲率テンソルなどの計算結果は省略する．また，4次元計量(3.4)の幾何学的性質は，(2.12)～(2.15)から，以下の結果が出力される．
1．平坦計量でない．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量である．
4．定曲率空間でない．

3．5　プログラムの実行例4

第4番目の実行例以降は，4次元曲線座標をもちいた計量について考察する．次の関係式(3.6)で，4次元のデカルト座標$x^i(i=1,2,3,4)$と結ばれる曲線座標(r,θ,φ,ψ)を導入する．

$$\begin{aligned} x^1&=\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)\\ x^2&=\sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)\\ x^3&=\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)\\ x^4&=\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)\end{aligned}. \tag{3.6}$$

このとき，平坦計量を曲線座標で表すと，次式となる．

$$\begin{aligned} ds^2&=\sum_{i=1}^{4}(dx^i)^2\\ &=\frac{1}{4r}(dr^2+r^2((d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\\ &\quad+(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2)).\end{aligned} \tag{3.7}$$

計量(3.7)に対する計算の結果，0でない基本テンソルは，

$$g_{11}=\frac{1}{4r},\quad g_{22}=\frac{r}{4},\quad g_{33}=\frac{r}{4}$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{r}{4}\cos\theta,\quad g_{44}=\frac{r}{4} \tag{3.8}$$

と出力され，幾何学的性質も
1．平坦計量である．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量である．
4．定曲率空間である．
と求められる．

3．6　プログラムの実行例5

実行例5として，上述の曲線座標(r,θ,φ,ψ)を用いて示される Eguchi-Hanson 計量について調べる．その計量形式は，定数aを用いて次式で与えられる[6]．

$$\begin{aligned} ds^2&=\frac{r}{4(r^2-a^4)}dr^2+\frac{r}{4}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\\ &\quad+\frac{r^2-a^4}{4r}(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2,\end{aligned} \tag{3.9}$$

この計量に対する測地流力学系は古典力学及び量子力学的観点から調べられている．基本テンソルおよび幾何学的性質の計算結果は以下のようである．0でない基本テンソルは，

$$g_{11}=\frac{r}{4(r^2-a^4)},$$
$$g_{22}=\frac{r}{4},$$
$$g_{33}=\frac{r}{4}-\frac{a^4}{8r}(1+\cos(2\theta)),\qquad(3.10)$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{r^2-a^4}{4r}\cos\theta,$$
$$g_{44}=\frac{r^2-a^4}{4r},$$

と求められる. さらに, 幾何学的性質は,
1.平坦計量でない.
2.Einstein 計量である.
3.Ricci 平坦計量である.
4.定曲率空間でない.
と計算される.

3.7　プログラムの実行例6

次に第6番目の例としては, 筆者が[1]で考察した, Taub-NUT 計量について調べる. 上述の曲線座標 (r,θ,φ,ψ) を用いて,

$$ds^2=(\frac{a}{r}+1)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2)+\left(\frac{a^2}{1+a/r}\right)(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2,\qquad(3.11)$$

で与えられる計量を Taub-NUT 計量とよぶ. ここで, a は定数である. このとき, この計量に関する測地流を力学的に考察すると, ケプラー型の対称性を示す興味深い計量である[1]. このとき, 本プログラムを用いて基本テンソルを計算した結果, 0でない基本テンソルは以下のようになる.

$$g_{11}=\frac{a}{r}+1,$$
$$g_{22}=ar+r^2,$$
$$g_{33}=(ar+r^2)\sin^2\theta+\frac{a^2}{1+\frac{a}{r}}\cos^2\theta,$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{a^2}{1+\frac{a}{r}}\cos\theta,$$
$$g_{44}=\frac{a^2}{1+\frac{a}{r}}.\qquad(3.12)$$

また, 幾何学的性質は,
1.平坦計量でない.
2.Einstein 計量である.
3.Ricci 平坦計量である.
4.定曲率空間でない.
と求められる.

3.8　プログラムの実行例7

第7例として, 拡張 Taub-NUT 計量について調べる. 計量(3.11)の拡張として, 測地流がケプラー型対称性を示す条件から求められた

$$ds^2=(\frac{a}{r}+b)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2)+(\frac{ar+br^2}{1+cr+dr^2})(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2,\qquad(3.13)$$

の形の計量を, ケプラー型計量とよんだ[2]. ここで, a,b,c,d は定数である. ただし, 以下の条件(3.14)を満たすときは, 計量(3.13)は Einstein 計量となることが示された[1].

$$c=\frac{2b}{a},\qquad d=\left(\frac{b}{a}\right)^2.\qquad(3.14)$$

本プログラムによる, 基本テンソルの計算結果は

$$g_{11}=\frac{a}{r}+b,$$
$$g_{22}=ar+br^2,$$
$$g_{33}=(ar+br^2)\sin^2\theta+\frac{ar+br^2}{1+cr+dr^2}\cos^2\theta,$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{ar+br^2}{1+cr+dr^2}\cos\theta,$$
$$g_{44}=\frac{ar+br^2}{1+cr+dr^2},\qquad(3.15)$$

となる. また, 条件(3.14)を課すと

$$g_{11}=\frac{a}{r}+b,$$
$$g_{22}=ar+br^2,$$
$$g_{33}=(ar+br^2)\sin^2\theta+\frac{a^2r}{a+br}\cos^2\theta,$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{a^2r}{a+br}\cos\theta,$$
$$g_{44}=\frac{a^2r}{a+br}.\qquad(3.16)$$

と求められ, Taub-NUT 計量(3.12)の定数倍の計量となることが分かる. ただし, (3.15)および(3.16)に書

かれていない，基本テンソルの成分は０である．

他方，幾何学的性質の計算結果は，計量(3.13)に対しては，以下のようである．

1．平坦計量でない．
2．Einstein 計量でない．
3．Ricci 平坦計量でない．
4．定曲率空間でない．

また，計量(3.13)に条件(3.14)を課したときの幾何学的性質の計算結果は，

1．平坦計量でない．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量である．
4．定曲率空間でない．

となる．条件(3.14)を課したときの結果は，論文[1]の結果と一致する．

3．9　プログラムの実行例８

最後に，拡張 Taub-NUT 計量の研究に関して導かれた，４次元曲線座標 (r,θ,φ,ψ) で定曲率空間の計量の性質を満たす次の計量について調べる[1]．

$$ds^2=\left(\frac{a}{r(b+cr)^2}\right)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2)+\left(\frac{ar}{(b+cr)^2}\right)(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2. \tag{3.17}$$

ここで，a,b,c は定数である．この計量についての計算した結果，０以外の基本テンソルは，

$$g_{11}=\frac{a}{r(b+cr)^2},\quad g_{22}=\frac{ar}{(b+cr)^2},$$
$$g_{33}=\frac{ar}{(b+cr)^2},$$
$$g_{34}=g_{43}=\frac{ar}{(b+cr)^2}\cos\theta, \tag{3.18}$$
$$g_{44}=\frac{ar}{(b+cr)^2},$$

と計算され，幾何学的性質は

1．平坦計量でない．
2．Einstein 計量である．
3．Ricci 平坦計量でない．
4．定曲率空間である．

となる．

以上，計算例として８例を示したが，いずれも手計算による結果と一致している．また，計算過程で求められる曲率テンソルなどについても，手計算の結果と一致する事が確認される．

4．結言

従来，手計算で行っていたテンソル計算を，数式処理システムを用いることで，自作のプログラムで実行することが出来た．シュワルツシルド計量，拡張 Taub-NUT 計量および Eguchi-Hanson 計量等については，第３節で報告したが，その他のよく知られた，拡張 Eguchi-Hanson 計量等についても，手計算により確認された結果と同じ結果が，本プログラムでも確認された．従って，４次元計量の幾何学的性質の確認に，本プログラムは大変有効であるといえる．

今後は，入力方法の工夫や４次元計量の特徴である双対性の確認のために微分形式による計算方法のプログラム化が必要と考えられる．

謝辞

本研究は，本校システム制御工学科の卒業研究として行われたものであることを付記する．また，本校システム制御工学科卒業生である上野宣氏と池田伸穂氏に深謝の意を表わします．

参考文献

[1]T. Iwai and N. Katayama ; “On extended Taub-NUT metrics”, J. Geom. Phys. 12(1993), 55-75.

[2] T. Iwai and N. Katayama ; “Two kinds of generalized Taub-NUT metrics and the symmetry of associated dynamical systems”, J. Phys. A Math. Gen. 27(1994), 3179-3190.

[3]池田峰夫；現代ベクトル解析とその応用，コロナ社(1975)．

[4]H．フランダース；微分形式の理論およびその物理科学への応用，岩波書店(1963)．

[5]丹野修吉；多様体の微分幾何学，実教出版(1985)

[6]T. Eguchi, P. B. Gillkey and Hanson; “Gravitation, Gauge theories and differential geometry”, Phys. Rep. 66(1980), 213-393.

付録　プログラムと実行例　（拡張 Taub-NUT 計量の場合）

```
(* System of Computer Aided Research on Geometry *)

ClearAll[u, ds2, dse, g, gi, f, rijkl, rij, rik, rr, dlt, ffff, gggg]
u={r, o, q, p};
x={Dt[u[[1]]], Dt[u[[2]]], Dt[u[[3]]], Dt[u[[4]]]};
(* metric input            an extended Taub-NUT metric *)
ffff=(a/u[[1]]+b);
gggg=ffff u[[1]]^2/(1+(2b/a) u[[1]]+(b/a)^2 u[[1]]^2);
ds2=ffff (x[[1]]^2 +r^2 (x[[2]]^2+(Sin[u[[2]]])^2 x[[3]]^2))+gggg (x[[4]]+Cos[u[[2]]] x[[3]])^2;

dse=Expand[ds2];
g=Table[0, {xx, 4}, {yy, 4}];
g[[1, 1]]=Coefficient[dse, x[[1]]^2];
g[[2, 2]]=Coefficient[dse, x[[2]]^2];
g[[3, 3]]=Coefficient[dse, x[[3]]^2];
g[[4, 4]]=Coefficient[dse, x[[4]]^2];
g[[1, 2]]=g[[2, 1]]=Coefficient[dse, x[[1]] x[[2]]]/2;
g[[1, 3]]=g[[3, 1]]=Coefficient[dse, x[[1]] x[[3]]]/2;
g[[1, 4]]=g[[4, 1]]=Coefficient[dse, x[[1]] x[[4]]]/2;
g[[2, 3]]=g[[3, 2]]=Coefficient[dse, x[[2]] x[[3]]]/2;
g[[2, 4]]=g[[4, 2]]=Coefficient[dse, x[[2]] x[[4]]]/2;
g[[3, 4]]=g[[4, 3]]=Coefficient[dse, x[[3]] x[[4]]]/2;
Simplify[g]

gi=Inverse[g];
(* f=Christoffel symbole *)
f=Table[((1/2) Sum[(gi[[i, l]](D[g[[l, j]], u[[k]]]
        +D[g[[l, k]], u[[j]]]-D[g[[j, k]], u[[l]]])), {l, 1, 4}]), {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}];
f=Simplify[f];
(* rijkl=curvature tensor *)
rijkl=Table[D[f[[l, i, k]], u[[j]]]-D[f[[l, i, j]], u[[k]]]
        +Sum[f[[ma, i, k]] f[[l, ma, j]], {ma, 1, 4}]-Sum[f[[mb, i, j]] f[[l, mb, k]], {mb, 1, 4}]
        , {l, 4}, {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}];
rijkl=Simplify[rijkl];
(* rij= Ricci tensor *)
rij=Table[Sum[(rijkl[[k, i, j, k]]), {k, 1, 4}], {i, 4}, {j, 4}];
rij=Simplify[rij];
rik=Table[Sum[gi[[i, l]] rij[[l, k]], {l, 1, 4}], {i, 4}, {k, 4}];
(* rr=scalar curvature *)
rr=Sum[gi[[i, j]] rij[[i, j]], {j, 1, 4}, {i, 1, 4}];
rr=Simplify[rr];

dlt=DiagonalMatrix[{1, 1, 1, 1}];
zero:=Table[0, {4}, {4}, {4}, {4}]
If[MatchQ[rijkl, zero], "Flat", "Non Flat"]
```

プログラムと実行例　（拡張 Taub-NUT 計量の場合）の続き

```
zero:=Table[0, {4}, {4}]
chk:=Position[zero, 0]
pos:=Position[g, 0]
com:=Complement[chk, pos]
rou:=rij[[com[[1, 1]], com[[1, 2]]]]/g[[com[[1, 1]], com[[1, 2]]]]
schek:=Table[rij[[i, j]]-rou g[[i, j]], {i, 4}, {j, 4}]
schek=Simplify[schek];
If[MatchQ[schek, zero], "Einstein Metric", "Non Einstein Metric"]

zero:=Table[0, {4}, {4}]
If[MatchQ[rij, zero], "Ricci Flat", "Non Ricci Flat"]

dg:=Table[dlt[[i, k]] g[[j, l]]-dlt[[i, l]] g[[j, k]], {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}, {l, 4}]
zero:=Table[0, {4}, {4}, {4}, {4}]
che:=Position[zero, 0]
pos:=Position[dg, 0]
com:=Complement[che, pos]
kk:=rijkl[[com[[1, 1]], com[[1, 2]], com[[1, 3]], com[[1, 4]]]]/
        dg[[com[[1, 1]], com[[1, 2]], com[[1, 3]], com[[1, 4]]]]
schek:=Table[rijkl[[i, j, k, l]]-kk dg[[i, j, k, l]], {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}, {l, 4}];
schek=Simplify[schek];
If[MatchQ[schek, zero], "Constant Curvature Space", "Non Constant Curvature Space"]
(*TimeUsed[][Second]*)
```

実行結果

```
       a
{{b + -, 0, 0, 0}, {0, r (a + b r), 0, 0},
       r

            2            2 2                           2 2             2
     r (2 a  + 2 a b r + b  r  - 2 a b r Cos[2 o] - b  r  Cos[2 o])   a  r Cos[o]
 {0, 0, -------------------------------------------------------------, -----------},
                           2 (a + b r)                                    a + b r

      2            2
     a  r Cos[o]  a  r
 {0, 0, -----------, -------}}
       a + b r    a + b r
```

Non Flat

Einstein Metric

Ricci Flat

Non Constant Curvature Space