Mathematicaを利用した数学教育

Mathematica を利用した数学教育

湯谷 博 *

Mathematical Education Using *Mathematica*

Hiroshi YUTANI *

ABSTRACT

We report our projects to educate mathematics and applied mathematics by making use of *Mathematica*, which is a general computer software system, in our college of technology. We single out major difficulties on applying *Mathematica* to mathematical education, and present possible ways to resolve them.

Key Words: *Mathematica* - Fourier series - CAI - mathematical education

1 はじめに

Wolfram Research 社が１９８８年６月に，数学とその応用のための汎用ソフトウェア *Mathematica* を発表して以来，このシステムは数学とその応用に関する多くの分野に急速に浸透した．現在では数学，計算機科学は勿論のこと，一般の工学，自然科学から，経済学，心理学といった分野の研究や実務にまで幅広く活用されている．このシステムの特長は，グラフィックスの機能が強力であると共に，グラフィックス，数式処理，数値解析の３つの機能が相互に有機的に統合されているところにある．この特長の故に，*Mathematica* は諸分野における研究のみならず，教育に利用できる可能性を秘めている．

数学教育においては，D.Brown et al.[1] が，大学初年級程度の解析学についてのコースウェアを試作している．このシステムは現在，イリノイ大学等，米国の複数の大学でテストされている．

Mathematica は，その強力なグラフィックスの機能により，数学における様々な概念を視覚的に提示する事ができる．また，数式処理機能を利用して，機械的な単純計算に費やされる時間と労力を最小限に押さえ，問題のより本質的な部分に重点を置いて教えることを可能にする．

大阪府立工業高等専門学校では，１９９３年９月に情報処理センターに ＣＡＩ ルームが新設された．ＣＡＩ ルームには１クラス分の Macintosh に，*Mathematica* がインストールされている．このＣＡＩルームを利用して，本校の４学年の電気工学科，工業化学科，土木工学科３クラスを対象に，応用数学のフーリエ級数の単元で講義と演習を行った．また３学年建設工学科の解析学の授業でも *Mathematica* を利用した．これらの教育実践の結果を報告し，*Mathematica* を数学教育へ応用する際の可能な利用形態とその効果および問題点を分析し，将来の利用に向けての方向性を探ることとする．

教材のプログラム作成にあたっては，*Mathematica* のマニュアル[2] と，N.Blackman による解説書[3] を参考にした．

2 システム構成

今回使用したＣＡＩルームのパソコンの仕様を **表１** に示す．

	教師用	学生用
機種 (Macintosh)	Centris 650	ＬＣ III
台数	１台	４６台
ＣＰＵ	68040	68030
クロック	25 MHz	25 MHz
メモリ	24 Mbyte	8 Mbyte

表１　パソコンの仕様

本論文の概要は，１９９４年１月開催のコンピュータ利用工業教育研究会（ＣＡＩ学会関西支部主催）で口頭発表している．

１９９４年4月１１日受理

*) 一般教養科 (Department of Liberal Arts)

すべてのコンピュータには，*Mathematica* ver 2.2 (standard type) がインストールされている．レーザプリンターが，教師用に1台 (400DPI)，学生用に6台 (300DPI) 用意されている．各コンピュータは，ネットワーク (Apple Talk) で結ばれ，教師側のコンピュータの映像を学生側で見ること，教師側から学生側にプログラムやデーターを転送することができる．また，教卓には8 mm ビデオカメラが設置され，教師側で撮影した画像は学生側で見ることが出来る．

3　3学年での授業

本校の3学年建設工学科を対象にした解析学の授業では，*Mathematica* を使って様々な概念を説明した．時間的な制約のため，学生にプログラミングさせることはせず，もっぱら教師が作成したプログラムを実行させながら説明することにした．それらの教材の内，*Mathematica* の機能を比較的有効に生かし，授業に使用して効果的であったと思われる3つの項目について，プログラムの解説と使用例を示し，プログラムリストを 付録に書く．

この他に作成したプログラムには，——平面上の領域の面積や曲線の長さを区分求積法により求めグラフと共に表示するもの，——広義積分について，積分区間を広げるとともに積分値が収束する様子をグラフ表示するもの等がある．

もし時間的な余裕があれば，学生自身がこれらのプログラムを様々な関数とパラメータについて実行してみる事により，数学の諸概念がなお一層良く理解されるものと期待される．

3.1　2変数関数の極値

showminmax3D[f_,mpoints_List]

2変数関数 f(x,y) の定義と $f_x = f_y = 0$ となる点 (x,y) のリスト mpoints を与えると，関数がそれらの点で極値を持つかどうかを判定し，それらの点を含む適当な領域で，関数の表す曲面と曲面上の極大点，極小点，鞍点を表示する．(方程式 $f_x = f_y = 0$ を解いて mpoints を求める計算は，実数解を選び出す操作と，解を簡単な形にまとめる事を一般的に行う事が難しいのでプログラムには含めなかった．)

図 1 は，$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ の極値と鞍点を表示したものである．この関数は，領域　$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$　では，5点 $(\pi/3,\pi/3)$, (π,π),$(0,0)$,$(0,\pi)$,$(\pi,0)$ で $f_x = f_y = 0$ となる．

```
Clear[f];
f[x_,y_]:=Cos[x]+Cos[y]-Cos[x+y];
showminmax3D[f,{{Pi/3,Pi/3},{Pi,Pi},{0,0},{0,Pi},{Pi,0}}]

Min-Max of f[x,y] = Cos[x] + Cos[y] - Cos[x + y]:

              Pi Pi
  At (x,y)=(--,--):   fxx = -Cos[x] + Cos[x + y] = -1
              3  3
                     fyy = -Cos[y] + Cos[x + y] = -1
                                          1
                     fxy = Cos[x + y] = -(-)
                                          2

                       3                      Pi Pi    3
        D=fxx*fyy-fxy^2= - > 0  ==> ( MAX : f[--,--] = - )
                       4                      3  3     2

  At (x,y)=(Pi,Pi):   fxx = -Cos[x] + Cos[x + y] = 2
                     fyy = -Cos[y] + Cos[x + y] = 2
                     fxy = Cos[x + y] = 1

        D=fxx*fyy-fxy^2= 3 > 0  ==> ( MIN : f[Pi,Pi] = -3 )

  At (x,y)=(0,0):    fxx = -Cos[x] + Cos[x + y] = 0
                     fyy = -Cos[y] + Cos[x + y] = 0
                     fxy = Cos[x + y] = 1

        D=fxx*fyy-fxy^2= -1 < 0  ==> ( NOT MIN-MAX : f[0,0] = 1 )

  At (x,y)=(0,Pi):    fxx = -Cos[x] + Cos[x + y] = -2
                     fyy = -Cos[y] + Cos[x + y] = 0
                     fxy = Cos[x + y] = -1

        D=fxx*fyy-fxy^2= -1 < 0  ==> ( NOT MIN-MAX : f[0,Pi] = 1 )

  At (x,y)=(Pi,0):    fxx = -Cos[x] + Cos[x + y] = 0
                     fyy = -Cos[y] + Cos[x + y] = -2
                     fxy = Cos[x + y] = -1

        D=fxx*fyy-fxy^2= -1 < 0  ==> ( NOT MIN-MAX : f[Pi,0] = 1 )
```

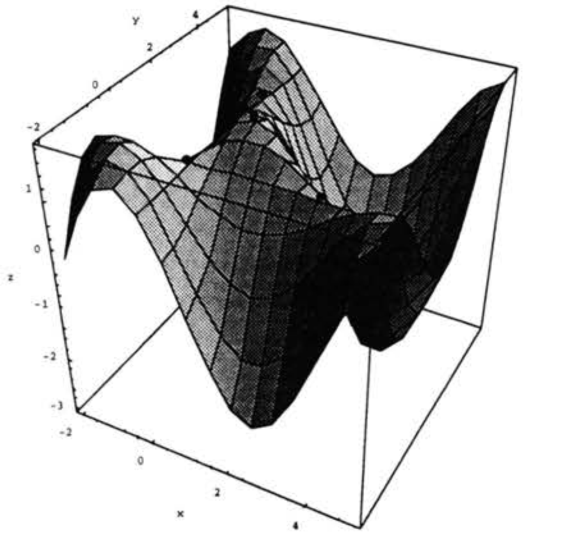


図 1　関数 $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ の極値

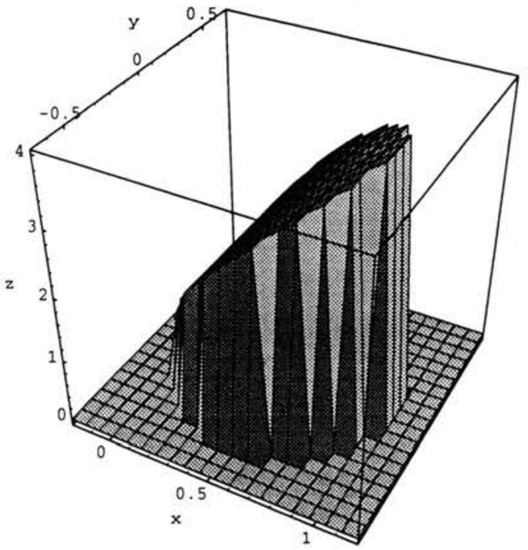
3.2　2重積分の表示

showDoubleInt[{x,a_,b_},{y,ymin_,ymax_},f_]

2重積分 $\int_{a}^{b}\int_{ymin(x)}^{ymax(x)} f(x,y)\,dydx$ について，積分領域上の被積分関数 f(x,y) の表す曲面と，積分領域の境界を通り xy 平面に垂直な柱面を表示する．次に，xy 平面上の積分領域と y についての積分区間を示す線分を表示する．

図 2 は，$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} 4\sqrt{x}\, dy dx$ の場合である．なお，積分順序が逆の場合に対応したプログラムは紙数の制約で省略したが，このプログラムと同様にして作成出来る．

```
Clear[f,ymin,ymax];

f[x_,y_]:=4*Sqrt[x];
ymin[x_]:=-Sqrt[x-x^2];
ymax[x_]:= Sqrt[x-x^2];

showDoubleInt[{x,0,1},{y,ymin,ymax},f]
```



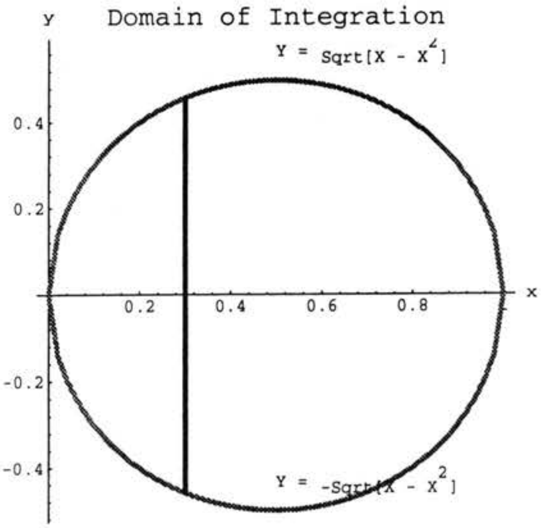


図 2　$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} 4\sqrt{x}\, dy dx$ の積分領域と被積分関数

3.3　テイラー展開

taylorPlot[f_,center_,terms_]

関数 f(x) と center, terms が与えられたとき，f(x) の center を中心とするテイラー展開の最初の terms 項の式を出力する．また，その関数と f(x) のグラフを同時に表示する．

図 3 は e^x の $x=2$ を中心とするテイラー展開の最初の 4 項を求めたものである．

```
Clear[f];

f[x_]:= Exp[x];
taylorPlot[f,2,4]
```

```
                     x
Taylor Expansion of E   around x = 2
                             (first 4 terms)

                          2          2    2          3
  2    2                 E  (-2 + x)     E  (-2 + x)
 E  + E  (-2 + x) + ------------- + -------------
                          2                6
```

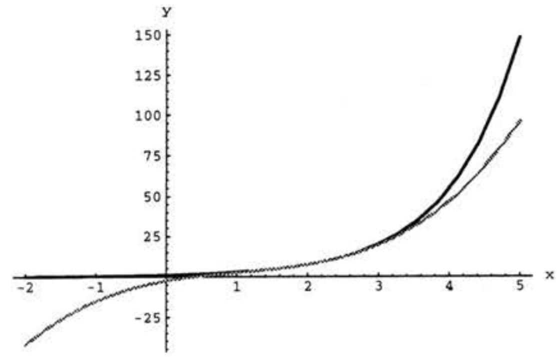


図 3　関数 e^x の $x=2$ を中心とするテイラー展開（最初の 4 項）

4　4 学年での授業

従来の授業では，フーリエ級数の単元で，学生はフーリエ係数を求める際の積分計算に多くの労力と時間を割かれている．このため，フーリエ級数の幾何学的なイメージを作り，収束性を理解するといった本来の重要な事項の学習が不十分になることが多かった．今回，*Mathematica* の持つ多彩な機能を生かして，豊富なグラフィックスを提示し，サウンド出力等も利用して，フーリエ級数の性質をより具体的に深く理解させることとした．

今回の授業に先立って，学生はフーリエ級数の基本的な概念と計算方法について，あらかじめ通常の講義を受けている．ＣＡＩルームが新設された直後なので，殆ど大部分の学生は Macintosh を操作した経験はな

い．コンピュータ言語については，それまでの学年で，FORTRAN と BASIC を1年半から2年程度学習している．(電気工学科は C 言語も習っている)

最初に準備として，Macintosh の基本操作及び，簡易ワープロソフト Teach Text を用いた文書編集と印刷出力の演習を行った．*Mathematica* の基本機能については，因数分解，微積分演算，グラフィックス等を教師側のコンピュータを使って実演した．*Mathematica* の基本文法は，B5で3ページ程度の簡単なマニュアルを配布し説明した．これらの演習に2時間程度，次のフーリエ級数に関する講義，演習に4時間程度費やした．

4.1 ビデオによる実演

区間 $[-2,2)$ で $f(x)=x$ である周期 4 の周期関数 $f(x)$ について，そのフーリエ級数展開を求める計算（筆算）を教師が実演する．この説明には，黒板の代わりにビデオ装置を利用することとした．教卓上で教師が筆算で計算し，その様子をビデオカメラで撮る．その画像を画像転送ソフトにより学生側に転送する．学生は，それを見ながら講義を聴き，ノートを取る．

4.2 コンピュータによる実演

次に教師側のコンピュータで，*Mathematica* により以下の順に計算を実演する．教師側の画面は学生側に転送されている．これらの画面を図 4 に示す．

1. $f(x)$ のフーリエ係数の積分を，*Mathematica* の数式処理機能を利用して計算し，筆算の結果を確かめる．

2. 関数 $f(x)$ をプログラム上で定義し，この関数のグラフを Plot 関数により表示する．

3. フーリエ級数の最初の3項，及び10項の式を出力し，それらの関数のグラフを $f(x)$ のグラフに重ねて表示し比較する．項数の多いグラフが，$f(x)$ をより良く近似することを確かめる．x の範囲を短くして，グラフの様子をさらに詳しく調べる．

4. フーリエ級数のグラフを，項数が1項から10項まで順次増やして表示し，それらのグラフをまとめてアニメーションに編集する．編集したアニメーションを改めて流し，項数が増えるとともにフーリエ級数が元の関数に収束して行く様子を確認させる．$f(x)$ が連続な領域で一様に収束する様子や，不連続点の近傍で鋭いピークが現れる”ギッブスの現象”も同時に説明する．

5. 関数 $f(t)$ と，そのフーリエ級数の最初の2項および5項の関数の表すサウンドを出力し聴き比べる．この場合，t を秒単位に取ると $f(t)$ では，周期が長過ぎて聞こえないので周期を縮めて関数 $f(263\times 2\pi t)$ を考える．この関数と同じ周期を持つ正弦波形はハ音であるが，波形が尖っているため，”荒々しく”聞こえる．フーリエ級数の項数が増えるとともに，滑らかな音色が次第に元の関数の音色に似てくる様子を耳で確認させる．

6. 教師側のコンピュータを使い，教科書で以前に学習した各種の周期関数について，そのフーリエ級数のグラフを表示し，収束の様子を説明する．連続な関数に比べて不連続な関数については収束が悪く，元の関数を近似するためにはより多くの項が必要なこと等を確認させる．

4.3 演習

以上の説明が終わった後，学生側のコンピュータを使って次の**課題 1, 2** を学生に行わせた．*Mathematica* では，”Notebook” というファイルを通じて，コンピュータと応答する．プログラムを Notebook に書き実行させると，計算された数式やグラフがその Notebook に出力される．学生が解答を入力する Notebook と，**4.2** で教師が説明した例題の書かれた Notebook を，ネットワークを通して学生側のファイルに転送する．学生は，教師の例題を参考にしてコーディングするが，転送された例題のプログラムの一部をコピーしてそれを書き直してもよい事とした．レポートとして，筆算の結果とコンピュータのプリンタ出力を提出させたが，時間上の制約で**課題 2** まで出来た学生は少数であった．

課題 1) 区間 [-2,2] で次のように定義された周期 4 の周期関数について，$f(x)$ のフーリエ級数を筆算によって求めよ．次に *Mathematica* を使って $f(x)$ とそのフーリエ級数のグラフを作成し，プリンタに出力せよ．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-1\leqq x\leqq 1 \quad) \\ 0 & \begin{pmatrix} -2\leqq x<-1, \\ 1<x\leqq 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

課題 2) 各自で任意の周期関数を考え，その関数について **課題 1** の作業を行え．

この他演習としては，一定の波形を持った音をマイクロホンを通じてコンピュータに取り込み，*Mathematica* を利用してフーリエ級数で表現させる事も計画していたが，時間とハード上の制約で今回は断念した．

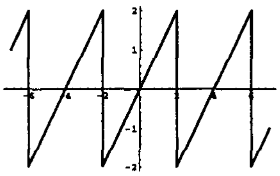
```
========================================================
< 例題 1 >.

 区間 [-2,2) で f[x] = x である 周期 4の 関数 f[x] のフーリエ級数を求め
 その収束の様子を調べよ。

  作業内容

  (1)      f[x] のフーリエ級数 s[x] を計算 (筆算)
  (2)      Mathematicaによる検算
  (3, 4)   f[x]とs[x] のグラフを表示
  (5)      アニメーション
  (6)      サウンド
========================================================
(*  <  (2)  積分の検算  >   *)

bn=(1/2)*Integrate[x*Sin[n*Pi*x/2], {x,-2,2}]
```

$$\frac{-4\ (n\ Pi\ Cos[n\ Pi] - Sin[n\ Pi])}{n^2\ Pi^2}$$

```
bn /. {Sin[n*Pi]->0,Cos[n*Pi]->(-1)^n}
```

$$\frac{-4\ (-1)^n}{n\ Pi}$$

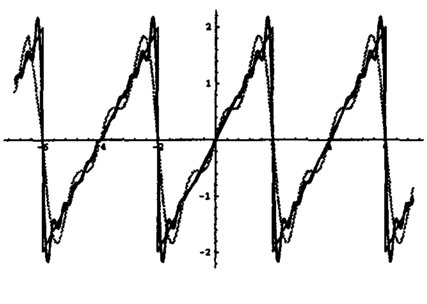
```
(*  < (3)  f[x],s[x] のグラフ >      *)

Clear[f,s];                          (* 関数の初期化  *)

f[x_/;  -L<= x <L  ]:=x;             (* f[x]の定義: -L <= x <  L   *)
f[x_/;x>= L]:=f[x-2L];               (*                  x >= L *)
f[x_/;x< -L]:=f[x+2L];               (*                  x < -L *)

L=2;                                 (*     周期 2 L = 4          *)

Plot[f[x],                           (*  f[x] のグラフ            *)
      {x,-3.5L,3.5L},                (*  x の範囲 [-3.5L,3.5L]    *)
      PlotStyle->Thickness[.006]     (* Thickness;   線の太さ     *)
]
```



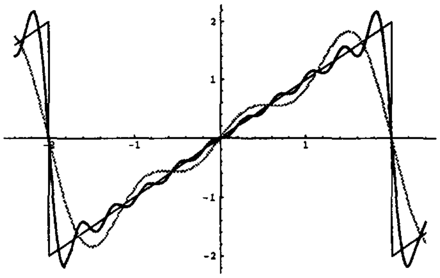
```
s[x_,terms_]:= (4/Pi)*                                    (*  f[x]のフーリエ級数の定義 *)
      Sum[((-1)^(n+1)/n)*Sin[n*Pi*x/2],                  (* 項数:  terms             *)
             {n,1,terms}
      ];

s3  =s[x,3]                          (* f[x]のフーリエ級数(  3項) *)
s10=s[x,10]                          (* f[x]のフーリエ級数(10項) *)

Plot[{f[x],s3,s10},                  (* f[x]と そのフーリエ級数 のグラフ *)
      {x,-3.5L,3.5L},                (*  x の範囲 [-3.5L,3.5L]            *)
      PlotPoints->30,                (* PlotPoints; プロットする点の数 *)
      PlotStyle->{ Thickness[.002],
                   {Thickness[.004],RGBColor[0,1,0]},
                   {Thickness[.004],RGBColor[0,0,1]}
                 }
]                                    (* RGBColor:  線の色 [赤、緑、青] *)
```

$$\frac{4\ (Sin[\frac{Pi\ x}{2}] - \frac{Sin[Pi\ x]}{2} + \frac{Sin[\frac{3\ Pi\ x}{2}]}{3})}{Pi}$$

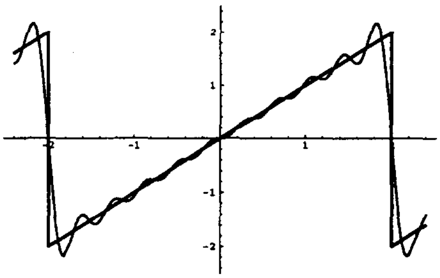
$$(4\ (Sin[\frac{Pi\ x}{2}] - \frac{Sin[Pi\ x]}{2} + \frac{Sin[\frac{3\ Pi\ x}{2}]}{3} - \frac{Sin[2\ Pi\ x]}{4} + \frac{Sin[\frac{5\ Pi\ x}{2}]}{5} - \frac{Sin[3\ Pi\ x]}{6} + \frac{Sin[\frac{7\ Pi\ x}{2}]}{7} - \frac{Sin[4\ Pi\ x]}{8} + \frac{Sin[\frac{9\ Pi\ x}{2}]}{9} - \frac{Sin[5\ Pi\ x]}{10}))\ /\ Pi$$



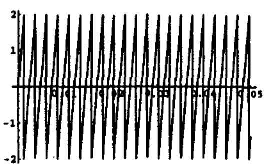
```
(*  < (4)  f[x] とs[x] のグラフ ;  区間[-1.2L,1.2L]  >  *)

Plot[{f[x],s3,s10},
      {x,-1.2L,1.2L},
      PlotPoints->30,
       PlotStyle->{  Thickness[.002],
                    {Thickness[.004],RGBColor[0,1,0]},
                    {Thickness[.004],RGBColor[0,0,1]}
                  }
]
```



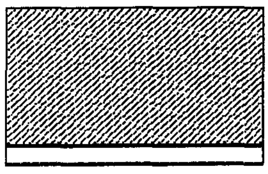
```
(* < (5) アニメーション > *)

Needs["Graphics`Animation`"];
Animate[
 Plot[{f[x],s[x,i]},
      {x,-1.2L,1.2L},
      PlotPoints->30,
      PlotRange->{-2.5,2.5},
       PlotStyle-> {Thickness[.006],
                   {Thickness[.004],RGBColor[0,0,1]},
                  }
 ],{i,1,10,1}
]
```



```
(* < (6)  サウンド出力 > *)

(*  [ f のサウンド]          *)
Plot[f[263*2Pi*t],{t,0,0.05},
      PlotPoints->60, PlotStyle->Thickness[.004]
]

Play[f[263*2Pi*t],{t,0,0.5}]
```



-Graphics-



-Sound-

図 4　フーリエ級数のコンピュータによる実演 (後半の一部は省略)

4.4　学生からの評価

授業の終了後，その印象について4学年の学生を対象にアンケート調査を行った．その結果を以下に要約する．(表2の数字は3クラスの合計人数)

	はい	いいえ	どちらとも言えない
ビデオを用いた説明は，黒板での説明と比べて分かり易かったですか？	20	24	57
コンピュータを使った実演により，教室で授業を受けるよりも			
フーリエ級数についての理解がより深まったか？	29	31	41
より興味を引かれたか？	56	7	39

興味を引かれた項目は？

数式処理による積分	グラフ表示	アニメーション	サウンド出力
18	48	40	14

Mathematica のプログラミングの難易度は

	簡単	難しい	わからない
BASICと比べて	17	52	32
FORTRANと比べて	27	29	45

表2　アンケート結果

以下の質問について，記述された意見を要約すると

1. プログラミングで戸惑った点は？
   - 3種類のカッコ [　] (　) {　} を目的に応じて使い分けなければならない事
   - コマンドで大文字と小文字の区別がある事
2. 計算実行上の問題点は？
   - 計算とハングアップ後の再起動に時間がかかりすぎてデバッグが円滑に出来ない．
   - システム関係の障害が多い．
   - 文法上のエラーや，システムのハングアップへの，対処の仕方がわからない．

5　考察

アンケートの結果に見られるように，4年生に対する授業では，*Mathematica* によって多くの学生の興味を引くことは出来た．実際，この授業の後では学生にとってともすれば難解と敬遠される応用数学への興味が幾分増し，取り組みの姿勢が積極的になった印象は感じ取ることが出来た．しかし，この試みが学生にフーリエ級数に関する諸概念の理解を促す上で，評価に値する効果があったとは必ずしも言えない．今回の授業を分析し，*Mathematica* を教育に利用するに際して考慮すべき点を以下で議論する．

5.1　基本操作と文法の教育

今回は，ＣＡＩルームが新設された直後の授業であったので，殆どの学生にとって，Macintosh を操作するのはこの時が初めての経験であった．その上，Macintosh のウィンドウ操作，カット＆ペーストによる編集や，*Mathematica* の基本的な文法等に習熟させる時間が余り取れなかった．また，*Mathematica* のコマンドには MS-DOS の様な字数の制限がないため，字数の多いコマンドが多く，タイプ入力に慣れない学生には特に負担になった様だ．

これらのことから，多くの学生は，パソコンの操作と *Mathematica* による計算処理に追われ，本来意図した数学の内容の理解が不十分に終わってしまったと思われる．*Mathematica* を数学の道具として使いこなす為には，

1　計算機本体の基本操作に習熟すること
2　*Mathematica* の基本文法を修得すること

の2点が必要である．これらをより短期間に効果的に教育することが出来るかどうかが，*Mathematica* を使った数学教育の成否を決めることになる．

1 については，*Mathematica* を使う数学の授業に限らず，他の教科でＣＡＩ教材を使う場合にも共通する必要事項である．従って，低学年の出来るだけ早い時期に,「情報処理」の教科の中で Macintosh のウィンドウ操作や，文書の入力編集の基本を訓練することが望まれる．特に，キーボードの入力操作の練習は不可欠である．

2 については，今回の授業で学生に簡単な操作説明と文法の解説のマニュアルを配布し説明した．しかし，演習中の様子から判断して，余り活用されなかった様だ．エラーの対処法も含めたより分かり易いマニュアルの作成が必要だろう．*Mathematica* の入門コースを，Notebook に入力してコースウェアを作成しておき，それを利用させるのも有効な方法と思われる．当面の取り組むべき課題としたい．

Mathematica がシステムに用意している関数やコマンド類は，膨大な量にのぼる．学生を数学的な内容に集中させるためには，演習の際に使用するコマンド類は，出来るだけ基本的なものに限定することが必要である．

Mathematica のプログラミングの難易度については，アンケートの結果からは，FORTRAN と比較して学生の評価は分かれている．しかし，*Mathematica* の文法の構造や，学生の演習の状況から判断して，時間をかければ FORTRAN よりも（おそらくまた BASIC よりも）容易に受け入れられるものと推測される．

5.2　ハードウェア上の制約

ネットワークに関するシステムの障害で，プリント出力が出来ないケースがしばしば発生し，学生にはかなり負担になった様だ．これは，ＣＡＩルームの構築直後に起こりうる一時的な初期故障であろう．

Mathematica は多量のメモリを必要とする．学生用のコンピュータは，メモリ不足のため計算途中でハングアップするケースが多く見られた．ハングアップの後再起動する際にも，システムが大き過ぎて再起動に数分かかるので作業効率が悪かった．また，学生の演習に際してフーリエ係数の積分計算を数式処理により計算させ，筆算の結果と照合させたかったが，今回はメモリ上の制約で断念した．CPU の能力についても，計算の実行に時間がかかりすぎて，デバッグが円滑に行かないといった意見が学生から多く出された．

こういった問題点はハードウェアの進歩と共に次第に解決されるであろう．しかし，当面の利用については，学生の演習にはあまりコンピュータに負担のかかる教材は避けなければならない．具体的には，学生用のコンピュータでは，殆どの積分計算は無理だが，微分演算，２次元グラフィックス，行列やベクトルの代数演算，関数のべき級数展開等は十分可能である．

5.3　出力形式について

Mathematica はグラフィックスは優秀だが，数式の出力が見づらく，慣れない学生にとっては読み取るのは簡単ではない．アウトプットが TEX の出力のような形式に改良される事が望まれる．これに関しては，*Mathematica* の次のバージョンでは，入力形式が一部通常の数学記号の形式に改良される事が予定されている．例えば，$\int_{\square}^{\square} \square dx$ や $\frac{\partial \square}{\partial x}$ の □ の中に関数や変数を書くだけで，積分や微分の命令を実行することができる．この様な入力形式になれば，基本的な計算に関しては，殆どコマンドを憶える必要が無くなり，学生への負担は大幅に軽減されることになる．

5.4　日本語への対応

Mathematica では，コマンド類からプルダウンメニュー，エラーメッセージに至るまで，すべての表示は英語でなされる．オンラインヘルプ機能は充実しているが，残念ながらこれも英語で出力されるので学生には余り役に立たない．逆に，拒否反応を引き起こす可能性がある．また，Notebook に漢字は書けるが，実行結果を漢字で出力することが出来ないので，教師が学生対象に分かり易いソフトを作る事が難しい．

Mathematica を使用する際には，これらの表示の問題が大きな障害になっている．これらを日本語化する事が，学生が使用する際の教育効果を高め，教師が優れた教材を作成する上で必要となる．

5.5　教材の作成方針

Mathematica は，人間にとって極めて複雑な計算であっても，一瞬にして結果を出力できる能力を持っている．しかし，その結果を学生に了解させ納得させるためには，計算の逐一のプロセスを学生に了解できる形で提示しなければならない．与えられた課題に対して，その最終回答だけを与えるのでなく，課題の問いかけている状況を様々な側面から提示し，学生が思考を深めイメージを豊かにする手助けをしてくれるシステムが教育には必要である．

例えば，**3.2** では，２重積分の表す立体を表示した．２重積分の計算についても，積分値を直接求めるのでなく，累次積分を順に実行する形で，計算の過程を表示するプログラムが出来れば価値ある教材と思われる．その様なプログラムも作成したが，**5.3** の出力形式の問題で，計算の過程を学生に一見して理解できる形で表示することが困難なため今回は紹介を割愛した．

Mathematica の提供するパッケージには，与えられた関数のフーリエ級数を直接求めるプログラムが組み込まれている．これを利用すれば，関数のフーリエ級数を直ちに得る事が可能である．残念ながら，学生側のコンピュータはメモリ上の制約でこのパッケージは使えない．しかし例え利用できたとしても，学生がフーリエ級数を直接求める事により，フーリエ級数の概念を理解する様になるとは考えにくい．むしろ，*Mathematica* のより受け入れやすい簡単なコマンドを使って，フーリエ級数の様々な側面を解説し，実際に学生にプログラムを組んでその性質を調べさせる方が，より学生の理解の助けになると思われる．

Mathematica の他の数式処理ソフトに比べて優れている長所は，グラフィックス，数式処理，数値解析の３つの機能が有機的に統合されているところにある．*Mathematica* を教育に応用する際に，この特質を最大限に生かせば，効果的な教材を作成することが出来る．例えば **3.1** や **3.3** の教材では，数式とその式の表す図形を同時に表示させて理解を促している．数式とその幾何学的なイメージを重ね合わせながら思考することは，通常の数学の授業で強調しているところであるが，*Mathematica* はまさにそういった形態の教材を作ることを可能にしてくれる．

5.6 教材提示装置として

学生が直接 *Mathematica* を使う際にはかなりの制約があるが，教師が一斉授業の中で教材提示装置として使用する場合には，日本語に関する問題を除けば，現在のシステムでも満足な機能を発揮する．*Mathematica* は，他のどのようなプログラミング言語よりも短期間に，より効果的な教材を開発することを可能にする．使用するテーマについては，例えば３次元の正確な図形を，必要に応じて適宜条件を変えて表示しながら説明するといったことは，従来の授業では不可能であった事であり顕著な教育効果が期待出来る．この場合，学生はノートに詳細を記録できないので，表示した図形の一部は印刷物にして配布するといった配慮も必要だろう．説明の際の黒板との連携も工夫を要する．ビデオ装置は視野が狭いため，多量の数式を書く説明には不適当である．

6 まとめ

機械的な計算を機械が処理するようになれば，学生は対象としている数学の概念にとっては本質的でない計算から自由になり，対象とする概念そのものに思考を集中できる．しかし残念ながら，現在の *Mathematica* のシステムでは必ずしもこのシステムを使用することによって，学生が機械的な計算から解放される状況にはない．パソコンのハード面での制約は，可能な計算の内容を限定する．*Mathematica* の入出力の形式は，現存の数学のシステムの中では最も優れたものではあるが，必ずしも学生にとってたやすく受け入られるものではない．そのコマンド体系には，ある程度時間をかけて習熟する事が要求される．

しかし，ハード面での制約は，テクノロジーの進歩とともに緩和されるであろうし，*Mathematica* の持つインターフェスも次第に改良され，いずれは高専での教育に必要な計算程度については予備知識なしで電卓のように使いこなせる時代が来るであろう．その様な時代に対応した数学のカリキュラムの内容は，今後検討すべき重要な課題である．

現在のシステムを，学生自身が使用する形態で数学教育に利用するためには，前節で議論したように，実施するテーマを精選して教材を工夫し，システムのハード・ソフト両面のガイダンスを効果的に行う事が必要である．しかし，こういった点を考慮に入れて，授業を行えば学生にとって楽しくて効果的な教育を展開する事は十分可能である．

４学年では一斉授業の形式で教師が講義し，その後学生が演習するといった授業形態を取った．しかし，D.Brown et al. による解析学のコース[1) のように，１つの単元を講義，演習まとめて，Notebook の形式で構成し，学生がコンピュータを相手にしながら自習できるコースウェアを作る事も可能である．そのような教育上のシステムを様々な単元で作成し，その有効性と限界を見きわめることも今後の新たなテーマになる．

本校の情報処理センターＣＡＩルーム担当の下氏には，今回の授業に際してご協力を頂いた事を感謝します．

参考文献

1) D. Brown, H. Porta J. Uhl "Calculus & *Mathematica*" Addison-Wesley, California 1991

2) S. Wolfram "*Mathematica*": A System for doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley, Reading, MA (2nd edition) 1991

3) N.Blackman 著 榊原進 訳 "*Mathematica* 実践的アプローチ" トッパン 1993

付録　Mathematica　プログラムリスト

```
(*************** showminmax3D ***************)

showminmax3D[f_,mpoints_List]:=

   Module[{},
       h=2;
       coxy =Transpose[mpoints];
       maxco=Map[Max,coxy]+h;
       minco=Map[Min,coxy]-h;
       co=Transpose[{minco,maxco}];

       showminmax3D[f,mpoints,
                        {x,co[[1,1]],co[[1,2]]},
                        {y,co[[2,1]],co[[2,2]]}
      ]
   ]

showminmax3D[f_,mpoints_List,{x,xmin_,xmax_},{y,ymin_,ymax_}]:=
   Module[{},

       graph=Plot3D[f[x,y],{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},
                   BoxRatios->{1,1,1},
                   AxesLabel->{"x","y","z"},
                   DisplayFunction->Identity
             ];

       edgeptxy={{xmin,ymin},{xmax,ymin},{xmin,ymax},{xmax,ymax}};
       edgeptxyz=Table[
                   Append[edgeptxy[[i]],
                      f[edgeptxy[[i,1]],edgeptxy[[i,2]] ]
                 ],
                   {i,1,Length[edgeptxy]}
               ];
       mnptxyz=Table[
                 Append[mpoints[[i]],
                    f[ mpoints[[i,1]],mpoints[[i,2]] ]
                 ],
                   {i,1,Length[mpoints]}
               ];

       extptxyz=Join[edgeptxyz,mnptxyz];
       maxVariation=Max[extptxyz]-Min[extptxyz];

       coord=Table[mnptxyz[[i]]+
             {0,0,maxVariation*0.01},
                   {i,1,Length[mpoints]}
             ];
       points=Map[Point,coord];

         fxx=D[f[x,y],{x,2}];
         fyy=D[f[x,y],{y,2}];
         fxy=D[f[x,y],x,y] ;
          d =fxx*fyy-fxy^2;

       fders=Table[
               {fxx,fyy,fxy,d} /.
                  {x->mpoints[[i,1]],y->mpoints[[i,2]]}
              ,{i,1,Length[mpoints]}
             ];
       mm={};

       Do[{ch="         ",
          If[fders[[i,4]]==0,ch="  ==> ( Unable to Judge :"],
```

```
        If[N[fders[[i,4]]]< 0,ch=" < 0  ==> ( NOT MIN-MAX :"],
        If[N[fders[[i,4]]]> 0 && fders[[i,1]]>0,ch=" > 0  ==> ( MIN :"],
        If[N[fders[[i,4]]]> 0 && fders[[i,1]]<0,ch=" > 0  ==> ( MAX :"],
        mm=Append[mm,ch]},
        {i,1,Length[mpoints]}
    ];

    Print["Min-Max of f[x,y] = ",f[x,y],":"];
    Print[" "];
    Do[{Print["   At (x,y)=(",mnptxyz[[i,1]],",",mnptxyz[[i,2]],"):",
            "   fxx = ",fxx," = ",fders[[i,1]]
       ],
       Print["                        fyy = ",fyy," = ",fders[[i,2]]
       ],
       Print["                        fxy = ",fxy," = ",fders[[i,3]]
       ],
       Print[" "],
       Print["          D=fxx*fyy-fxy^2= ",
            fders[[i,4]],
            mm[[i]],
            " f[",
            mnptxyz[[i,1]],
            ",",
            mnptxyz[[i,2]],
            "] = ",
            mnptxyz[[i,3]],
            " )"
       ],
       Print[" "]},
      {i,1,Length[mpoints]}
    ];
    Print[" "];

    Show[graph,
         Graphics3D[{RGBColor[1,0,0],
                     PointSize[0.02],
                     points
         }],
         DisplayFunction->$DisplayFunction
    ]
  ]

(***************   showDoubleInt   ***************)

showDoubleInt[{x,a_,b_},{y,ymin_,ymax_},f_]:=

  Module[{h,domain,fun,object,projection,p,path},
      h=0.2;
      xi=Table[a+((b-a)/50)*i,{i,0,50}];
      yminmin=Min[Map[ymin,xi]];
      ymaxmax=Max[Map[ymax,xi]];
      domain[x_,y_]:=((  a    <= x <=    b   ) &&
                       (ymin[x] <= y <= ymax[x])
                      );

      fun[x_,y_]:= f[x,y] /;  domain[x,y];
      fun[x_,y_]:= 0          /; !domain[x,y];
      object3D=Plot3D[fun[x,y],{x,a-h,b+h},
                      {y,yminmin-h,ymaxmax+h},
                      AxesLabel->{"x","y","z"},
                      PlotPoints->20,

                      Mesh->True,
                      PlotRange->All,
                      BoxRatios->{1,1,1},
                      DisplayFunction->Identity
               ];
```

```
        lowerPoints=Transpose[{xi,Map[ymin,xi]}];
        upperPoints=Transpose[{Reverse[xi],Map[ymax,Reverse[xi]]}];

        boundaryPoints=Join[lowerPoints,upperPoints,
                                {lowerPoints[[1]]}
                       ];

        projection=ListPlot[boundaryPoints,
                       PlotJoined->True,
                       AxesLabel->{"x","y"},
                       AspectRatio->1,
                       PlotStyle->{Thickness[0.01],
                                   GrayLevel[.5]},
                       DisplayFunction->Identity
                   ];

        p=a+0.3(b-a);
        q=a+0.5(b-a);
        epsx=(b-a)/10;
        epsy=(ymaxmax-yminmin)/15;

        path=Line[{{p,ymin[p]},{p,ymax[p]}}];

       Show[object3D,DisplayFunction->$DisplayFunction];

       Show[projection,
            Graphics[{Thickness[0.01],RGBColor[0,0,1],path}],
            Graphics[Text["Y =",  {      q,ymin[q]+epsy},{-1,0}]],
            Graphics[Text[ymin[X],{q+epsx,ymin[q]+epsy},{-1,0}]],
            Graphics[Text["Y =",  {      q,ymax[q]+epsy},{-1,0}]],
            Graphics[Text[ymax[X],{q+epsx,ymax[q]+epsy},{-1,0}]],
            PlotLabel->FontForm["Domain of Integration",
                                {"Bold",15}],
            DisplayFunction->$DisplayFunction
      ]
    ]

(***************   taylorPlot   ***************)

taylorPlot[f_,center_,terms_]:=

  Module[{expansion},
    expansion=Normal[
                 Series[
                   f[x],{x,center,terms-1}
                 ]
               ];
    Print["Taylor Expansion of ", f[x],
          " around x = ", center];
    Print["
       (first ", terms," terms)\n"
    ];
    Print["      ",expansion," \n"];

    Plot[{f[x],expansion},{x,-2,5},
         PlotStyle->{Thickness[.005],
                     {Thickness[.005],
                      RGBColor[0,0,1]}
                    },
         AxesLabel->{"x","y"}
    ]
  ]
```