液体の圧縮性評価に体積弾性係数を用いた単一気泡の運動方程式

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2013-11-22
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 藤原, 徳一, 柳井田, 勝哉, 島, 章
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007848

液体の圧縮性評価に体積弾性係数を用いた単一気泡の運動方程式

藤原徳一* 柳井田勝哉* 島　章**

The Equation of Motion for a Single Bubble Using Bulk Modulus to Estimate Liquid Compressibility

Tokuichi FUJIWARA* Katsuya YANAIDA* Akira SHIMA**

ABSTRACT

In this paper, the bulk modulus is used to estimate the effect of the liquid compressibility on the bubble behavior in hydraulic oils. An approximate solution for the velocity potential can be obtained by means of the Poincare-Lighthill-Kuo coordinate perturbation method (PLK method). Then the equation of motion for a single bubble in a viscous infinite liquid is derived from the velocity potential thus obtained. Numerical simulation is taken for petroleum base MIL-H-5606A and the effect of the liquid compressibility on the bubble behavior is discussed.

Key Words: Bulk Modulus, Ratio of Specific Heat, Liquid Compressibility, Hydraulic Oil, Cavitation, Single Bubble, PLK Method.

1. 緒　言

近年，油圧機器の高速化・高圧化に伴って油圧作動油の使用条件が過酷なものとなり，キャビテーション発生及びそれに伴う材料損傷が油圧機器における障害のひとつとして重要視され，その対策が大きな問題となってきている．

キャビテーション気泡の崩壊の最終段階において，液体の圧縮性が重要な役割を示すことは，Rayleigh[1] が圧縮性の影響を論じた中で指摘している．Herring[2]，Trilling[3] は，液体の圧縮性が比較的小さい場合について，音響理論を用い，かつ圧縮性を考慮した理論を展開している．さらに Gilmore[4] は Kirkwood-Bethe の仮定[5] を導入し，音速の 2 次のオーダーまで厳密な気泡の運動方程式を導いている．島・辻野[6] は，油圧作動油中の気泡の非線形振動を理論的に取り扱っており，島・冨田[7] は，油圧作動油中の気泡が崩壊する際に生じる衝撃圧力を理論的に求めている．また，油圧作動油中の上昇気泡の抵抗係数を実験的に求めた井田・臼井の論文[8] や，圧力変化を伴う油圧作動油中の気泡の挙動を取り扱った井田・杉谷の論文[9,10] などもある．

本報では，油圧作動油中の気泡の挙動に及ぼす液体の圧縮性の影響について検討している．油圧作動油に対して豊富なデータが得られる体積弾性係数に着目し，油圧作動油の比熱比及び Klaus-O'brien[11] に従って，断熱正接体積弾性係数を等温平均体積弾性係数と圧力で表わし，圧縮性を評価している．得たる式を用いて，PLK 法に従って速度ポテンシャル ϕ の近似式を求め，気泡の運動方程式を導いた．数値計算結果についても示した．

2. 油圧作動油の体積弾性係数

油圧作動油の断熱正接体積弾性係数 K_S と等温正接体積弾性係数 K_T の関係は，比熱比 κ を用いて次のように表わされる：

$$K_S = \kappa K_T. \tag{1}$$

1991年4月10日受理

* 機械工学科(Department of Mechanical Engineering)
** 東北大学　流体科学研究所(Institute of Fluid Science, Tohoku University)

Klaus-O'brien[11] によると，等温平均体積弾性係数 $\overline{K_T}$ は規準圧力 p_0 における等温平均体積弾性係数 $\overline{K_{TO}}$ を用いて次式のように示される.

$$\overline{K_T} = \overline{K_{TO}} + ap, \tag{2}$$

ここで，p は任意圧力，a は定数を表わす.

また，K_T と $\overline{K_T}$ の関係は次式で与えられる[12]：

$$K_T\Big|_{p} = \overline{K_T}\Big|_{2p}. \tag{3}$$

式(1)～(3)より，次式を得る：

$$K_S = k(\overline{K_{TO}}+2ap). \tag{4}$$

よって，油圧作動油中の音速 c は次式のようになる：

$$c^2 = K_S/\rho = \kappa(\overline{K_{TO}}+2ap)/\rho, \tag{5}$$

$$c_\infty^2 = \kappa(\overline{K_{TO}}+2ap_\infty)/\rho_\infty, \tag{6}$$

ここで，ρ は液体の密度，添字 ∞ は無限遠方の状態を表わす.

3.　気泡の運動方程式

Fig.1 に示すように，無限に広がる粘性・圧縮性液体中に，初期半径 R_O の一個の球状ガス気泡を考える．この気泡が，気泡内外の圧力差によって運動する場合，液体の運動を支配する連続の式及び運動方程式は次のように表わされる．ただし，重力・熱伝達・ガス拡散の影響は無視し，外力は作用しないものとする.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{4}{3}\mu\right)\left(\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}\right), \tag{8}$$

ここで，t は時間，$\boldsymbol{V}$ は速度ベクトル，ζ は体積粘性係数，μ は粘性係数を表わす.

速度ポテンシャルを ϕ とすると，

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}\,\phi, \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = \nabla^2\phi. \tag{10}$$

式(8)の右辺第２項は，粘性と圧縮性の相互作用を表わし，液体運動の全般にわたって他の項に比較して無視できるほど小さい．よって，

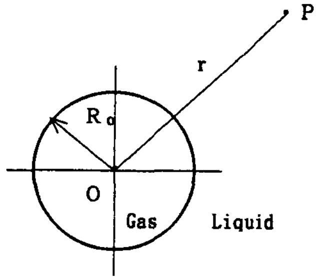

Fig.1　Single gas bubble in a viscous compressible liquid.

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p. \tag{11}$$

球対称運動を考えると，

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{12}$$

ここで，r は気泡の半径方向座標，u_r は r 方向速度を表わす.

式(12)を ϕ を用いて書き直すと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{13}$$

式(13)を r で積分して次式を得る：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + \int\frac{dp}{\rho} = k, \tag{14}$$

ここで，k は定数を示す.

式(13)より，ϕ の満足すべき微分方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t}\right), \tag{16}$$

式(7)を球対称運動を考慮して書き直すと，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{2}{r}\rho\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0. \tag{17}$$

式(15)，(16)を式(17)に代入して次式を得る：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right]. \tag{18}$$

式(5)及び $c^2 = dp/d\rho$ より，

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{\overline{K_{TO}}+2ap}{\overline{K_{TO}}+2ap_\infty}\right)^{\frac{1}{2a\kappa}} \tag{19}$$

よって，

$$\int\frac{dp}{\rho} = \frac{c_\infty^2}{2a\kappa-1}\left(\frac{\overline{K_{TO}}+2ap}{\overline{K_{TO}}+2ap_\infty}\right)^{1-\frac{1}{2a\kappa}} \tag{20}$$

式(14)，(20)及び $r\to\infty$ で $\phi=0$，$p=p_\infty$ を考慮して，式(14)中の定数が次のように求まる：

$$k = \frac{c_\infty^2}{2a\kappa-1}. \tag{21}$$

よって，式(14)は次式のようになる：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 = \frac{c_\infty^2}{2a\kappa-1}\left[1-\left(\frac{\overline{K_{TO}}+2ap}{\overline{K_{TO}}+2ap_\infty}\right)^{1-\frac{1}{2a\kappa}}\right]. \tag{22}$$

式(5)，(6)，(22)より，次式を得る：

$$c^2 = c_\infty^2-(2a\kappa-1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\right]. \tag{23}$$

式(23)を式(18)に代入して，ϕ の満足すべき微分方程式として次式を得る：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}&+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{1}{c_\infty^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\\ &=\frac{1}{c_\infty^2}\Big[2\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial t}+(2a\kappa-1)\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\\ &\quad+(2a\kappa-1)\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2a\kappa+1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\\ &\quad+\frac{2a\kappa-1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^3\Big].\end{aligned} \tag{24}$$

式(24)の境界条件は，

1) $r\to\infty$ で $\phi=0$，　(25)

2) $[\partial\phi/\partial r]_{r=R} = \dot{R}$，　(26)

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\right]_{r=R} = \frac{c_\infty^2}{2a\kappa-1}\left[1-\left(\frac{\overline{K_{TO}}+2ap_{r=R}}{\overline{K_{TO}}+2ap_\infty}\right)^{1-\frac{1}{2a\kappa}}\right]. \tag{27}$$

ここで，Rは気泡半径，・は時間微分を表わす．

式(24)の初期条件は，$t=0$ で，

1) $R = R_O$，　(28)

2) $\dot{R} = \dfrac{2c_\infty}{2a\kappa-1}\left[\left(\dfrac{\overline{K_{TO}}+2ap_{r=R}}{\overline{K_{TO}}+2ap_\infty}\right)^{\frac{2a\kappa-1}{4a\kappa}}-1\right]$，　(29)

ここで，R_O は初期気泡半径を表わす．

式(24)を与えられた境界条件・初期条件の下に厳密に解くことは困難であるので，A. Shima and Y. Tomita[13] に従って近似解法を行う．

式(24)は，二階双曲型偏微分方程式であり，解領域で二つの特性方向が存在するが，本論のように無限に広がる液体中に一個の気泡が存在する場合には，外向き特性曲線 $\eta(r, t) = \mathrm{const.}$ に沿って問題を考えればよい．

外向き特性曲線の満足する微分方程式は，次式で示される：

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{\eta=\mathrm{const.}} = \frac{1}{u_r+c}. \tag{30}$$

PLK法に従い，次のようにおく：

$$\left.\begin{aligned}\phi(r,\eta) &= \phi_0(r,\eta)+\frac{\phi_1(r,\eta)}{c_\infty}+\frac{\phi_2(r,\eta)}{c_\infty^2},\\ t &= \eta+\frac{t_1(r,\eta)}{c_\infty}+\frac{t_2(r,\eta)}{c_\infty^2}.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ここで，η は気泡表面からの遅れ時間を意味するもので $r=R$ で $\eta=t$ を満足する．

式(24)を変換座標（r, η）で表わすと，次のようになる：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+2\frac{\partial\eta}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\eta}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\\ &+\left(\frac{\phi\eta}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}-\frac{1}{c_\infty^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right]\\ &=\frac{1}{c_\infty^2}\Big\{2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial r\partial t}\right)+(2a\kappa-1)\frac{2}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\\ &\quad+(2a\kappa-1)\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right]\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\frac{2a\kappa+1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\\ &\quad\cdot\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right]\\ &\quad+\frac{2a\kappa-1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^3\Big\}.\end{aligned} \tag{32}$$

第1近似に対する ϕ の解 ϕ_1 は，波動方程式の解と一致する．前進波のみを考えて，

$$\phi_1 = \frac{-f(\eta)}{r} \tag{33}$$

線形理論の場合，式(30)より，

$$t=\eta+\frac{r-R}{c_\infty} \tag{34}$$

式(26)，(33)より未知関数 $f(\eta)$ が決定でき，速度ポテンシャル ϕ の第1近似解 ϕ_1 が次のように求まる：

$$\phi_1=\frac{1}{r}\Big\{-R^2(\eta)\dot{R}(\eta)+\frac{1}{c_\infty}\left[R^3(\eta)\ddot{R}(\eta)+2R^2(\eta)\dot{R}^2(\eta)\right]\Big\}. \tag{35}$$

式(26)，(27)，(35)より，圧縮性を考慮した気泡の運動方程式の第1近似解として次式を得る：

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{p_\infty-p_{r=R}}{\rho_\infty}-\left[\frac{\kappa(\overline{K_{TO}}+2ap_\infty)}{\rho_\infty}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(2R\dot{R}\ddot{R}+2\dot{R}^3+\frac{R\dot{p}_{r=R}}{\rho_\infty}\right)=0, \tag{36}$$

ここで，p_∞ は無限遠方圧力を表わす．$p_{r=R}$ は気泡表面の液体内圧力で，次式で示される：

$$p_{r=R}=-\frac{2\sigma}{R}+p_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}-4\mu\frac{\dot{R}}{R}, \tag{37}$$

ただし，p_0 は気泡内初期ガス圧力，σ は表面張力，γ は気泡内ガスのポリトロープ指数を示す．

式(23)，(26)，(30)を考慮して逐次近似法を用い，式(31)における $\phi_0, \phi_1, \phi_2, t_1, t_2$ を決定することにより，速度ポテンシャル ϕ の第2近似解 ϕ_2 が次のように求まる：

$$\phi_2=\frac{1}{r}\Big\{-R^2(\eta)\dot{R}(\eta)+\frac{1}{c_\infty}\left[R^3(\eta)\ddot{R}(\eta)+2R^2(\eta)\dot{R}^2(\eta)\right]-\frac{1}{c_\infty^2}\Big[R^4(\eta)\dddot{R}(\eta)+7R^3(\eta)\dot{R}(\eta)\ddot{R}(\eta)+\frac{7}{2}R^2(\eta)\dot{R}^3(\eta)+\frac{R^6(\eta)\dot{R}^3(\eta)}{10r^4}\Big]\Big\}. \tag{38}$$

式(26)，(27)，(38)より，圧縮性を考慮した気泡の運動方程式の第2近似解として次式を得る：

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{p_\infty-p_{r=R}}{\rho_\infty}-\left[\frac{\kappa(\overline{K_{TO}}+2ap_\infty)}{\rho_\infty}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(2R\dot{R}\ddot{R}+2\dot{R}^3+\frac{R\dot{p}_{r=R}}{\rho_\infty}\right)+\left[\frac{\kappa(\overline{K_{TO}}+2ap_\infty)}{\rho_\infty}\right]^{-1}\Big\{\frac{39}{5}R\dot{R}^2\ddot{R}+\frac{207}{20}\dot{R}^4+\frac{1}{\rho_\infty}\left[2R\dot{R}\dot{p}_{r=R}+6\dot{R}^2(p_\infty-p_{r=R})\right]+\frac{\frac{3}{2}(p_\infty-p_{r=R})^2+\frac{4}{3}\mu\dot{p}_{r=R}}{\rho_\infty}\Big\}=0. \tag{39}$$

4. 数値シミュレーション結果と考察

式(28)，(29)，(39)，により，気泡の挙動を数値的に調べる．気泡内初期ガス圧力 p_0 と液体内圧力 p_∞ との比 m $(=p_0/p_\infty)$ が，$t<0$ で $m=1$，$t\geqq 0$ において急激にある一定値（$0<m<1$）まで変化するというステップ状圧力変化を考える．油圧作動油として 310.95 Kの石油系MIL－H－5606Aを用い，数値シミュレーションを行う．無限遠方の液体内圧力を $p_\infty=101.3$ kPa, 気泡内ガスは断熱変化をする乾燥空気と考えて $\gamma=1.4$ とする．また，$\kappa=1.23$，$a=5.3$，$\mu=1.186\times10^{-2}$ Ns/m^2，$\rho_\infty=8.350\times10^2$ kg/m^3，$\overline{K_{TO}}=(1.261\times10^6-ap_\infty)$ kPaとする．表面張力については，データが得られなかったため，$\sigma=0$ とした．

Fig.2 は，気泡初期半径 $R_0=1$ mm，初期の気泡内外圧力差 $m=p_0/p_\infty=0.1$，0.01 の場合について，気泡半径の時間的変化を示している．図中の実線は，音速の2次のオーダーまで圧縮性を考慮した場合（Comp.）を，破線は非圧縮の場合（Incomp.）を示している．1回目の気泡のリバウンド時及びその後，液体の圧縮性が大きく影響していることがわかる．非圧縮の場合においても，リバウンドを繰り返す度に，その後の気泡の到達最大半径は小さくなっているが，これは粘性による影響である．

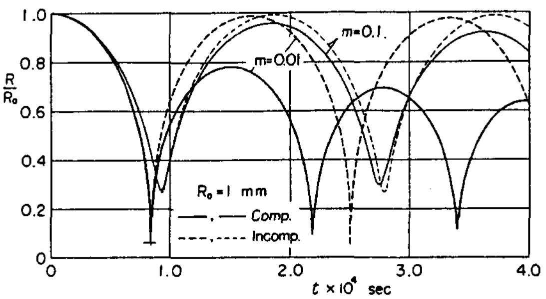

Fig.2 Variation with time of the bubble radius in petroleum base MIL-H-5606A.

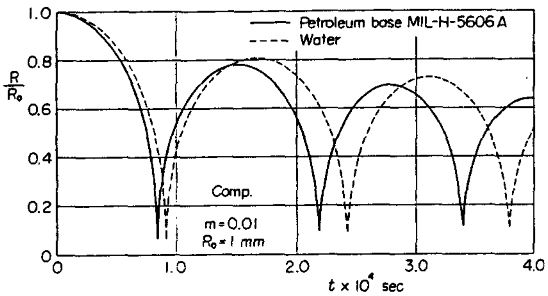

Fig.3 Comparison between the variation with time of the bubble radius in petroleum base MIL-H-5606A and water.

Fig.3 は，$R_0 = 1$mm, m = 0.01 の場合に対し，気泡の挙動を水[13] と比較した図である．油圧作動油と水の体積弾性係数値の違いによる影響が，気泡崩壊時から表われていることがわかる．

水中の気泡に対する運動方程式においては，水の状態方程式（Tait の式）が用いられている．油圧作動油においては体積弾性係数を用いたが，両者には相関があることが，**Fig.3** の結果及び運動方程式の形の比較からわかる．即ち，Tait 式中の係数を修正することにより，油圧作動油に対しても拡張された Tait 式を適用できることがわかる[14]．この係数の違いが **Fig.3** における作動油と水の差異として表われているといえる．

5. 結　言

油圧作動油中の気泡の挙動に及ぼす液体の圧縮性の影響を取り扱った．本報で得たる結果を要約すると次のようになる．

1) 各種の油圧作動油に対して豊富なデータが得られる体積弾性係数に着目して圧縮性を評価し，油圧作動油中の気泡の運動方程式を導いた．

2) 油圧作動油中では水中に比べて，液体の圧縮性が気泡挙動に対し大きく影響する．

3) 水の状態方程式である Tait 式中の係数を修正することにより，油圧作動油に対しても拡張された Tait 式が適用できる．このことより，油圧作動油中および水中において，気泡の運動を一括して取り扱える．

参　考　文　献

1) L.Rayleigh, Phil.Mag., Vol.34 (1917), pp.94-98.
2) C.Herring, OSRD Rep., No.236 (1941).
3) L.Trilling, J.Appl.Phys., Vol.23 (1952), pp.14-17.
4) F.R.Gilmore, Hydro.Lab., Cal.Inst.of Technol Rep., No.26-4 (1952).
5) J.G.Kirkwood and H.A.Bethe, OSRD Rep., No.588 (1942).
6) 島・辻野，速研報告，第35巻(1974)，1-28頁．
7) 島・冨田，速研報告，第34巻(1974)，125-161頁．
8) 井田・臼井，昭和51年春季油空圧講演会講演論文集，(1976)，29-34頁．
9) 井田・杉谷，昭和51年春季油空圧講演会講演論文集，(1976)，35-40頁．
10) 杉谷・井田，機講論，No.774-10 (1977)，71-76頁．
11) E.E.Klaus and J.A.O'brien, J.Basic Engng., Trans.ASME, Ser.D, Vol.86 (1964), pp.469-474.
12) 竹中，油圧化設計，第11巻第1号(1973)，83頁．
13) A.Shima and Y.Tomita, Proc.1975 Joint JSME-ASME Appl.Mech.Western Conf.,(1975), pp.185-192.
14) A.Shima and T.Fujiwara, J.Acoust.Soc.Am., Vol.68 (1980), pp.1509-1515.