Cut Eliminationの方法 (3)

Cut Elimination の方法 (Ⅲ)

深山　　徹*

The method of Cut Elimination (Ⅲ)

Tôru Miyama*

ABSTRACT

Set theory is usually represented by axioms, but we represented it by the formal system SL with the inference rules of Gentzen-type. And we have studied the consistency of set theory by the syntactical method of cut elimination. Gentzen's method in LK is related to the number of connectives and quantifiers occurring in a mixing formula. Our method is related to the number of logical inference rules used to a mixing formula in a proof. In the previous papers, we introduced LK′ and SL. In this paper, we have studied our method of cut elimination in LK′ by modifying Gentzen's method. We can apply our method to GLC and LJ.

Key Words: Consistency of set theory, Cut elimination in a logical system of Gentzen-type.

1. 緒　論

前々稿[1]で述べたように，我々の最終目的は数学を表現する体系として非常に有力な体系である公理的集合論の無矛盾性を考察する方法を研究することである．集合論の無矛盾性の基盤を何拠に置くかという基本的な立場として，我々はGentzenの立場を採用する．つまり，cut elimination の方法によって無矛盾性を考察する．Gentzen-typeの論理システムとしては，LK, LJ, GLC, SL 等がある．これらのシステムに対して，若干の修正によって同様の議論ができる方法を研究することを最終の目的としている．本稿では，我々の方法の原理を理解しやすくするために前々稿[1]で導入したLK′において議論をする．我々の方法はGentzenの方法と似ているが，本質的な相異点は mixing formula にあらわれる論理記号の数についての帰納法によってcut elimination を行うGentzenの方法に対して，mixing formula を作るために使用された論理記号の推論図の数についての帰納法によってcut eliminationを行う我々の方法との差である．我々の方法は，本稿において LK′に対して行う議論と同様の議論を繰り返すことによってGLC, やLJ におけるcut-elimination に適用できる．

平成元年4月10日受理

*一般教養科 (Department of General Education)

2. g(C)Q の予想

本稿における議論は特に断わらない限り，前々稿[1]で導入したLK′における議論である．

mixture は最後の推論においてのみ使用されている次のような証明図 P を考える．

$$\frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi^* \to \Delta^*,\ \Lambda}(M)$$

前々稿[1]の 2.8 で説明したように mixing formula M は Δ, Π の中に各々1つ以上ずつ含まれていて，場所も指定されている．それらの mixing formula の列を $\Delta°$, $\Pi°$ で示すことがある．

P の左にある $\Gamma \to \Delta$ を終式とする P の部分証明図を L で示す．L では mixture は使用されていない．L の終式にある mixing formula の grade の最大値を $\mathbf{g}(\Delta°)\boldsymbol{L}$ であらわす．

$$\begin{aligned} g(\Delta°)L &= \max\{g(M)L : M \text{ in } \Delta°\} \\ &= \max\{g(\Sigma)L : \Delta° \text{に至る血統 } \Sigma\}. \end{aligned}$$

L において，始式の formula から始まって $\Delta°$ に至る血統 Σ が存在するとき $g(\Sigma)L$ の最小値を $\mathbf{m}(\Delta°)\boldsymbol{L}$ であらわす．そのような Σ が存在しないとき0とする．

$$m(\Delta°)L = \begin{cases} \min\{g(\Sigma)L : \text{始式から } \Delta° \text{ に至る血統}\} & (g(\Delta°) \geq 1) \\ 0 & (g(\Delta°) = 0) \end{cases}$$

L における始式について，その両辺の formulaから始まる血統が共に $\Delta°$ に至るとき，その始式を $\Delta°$ に至る**閉じ**

た始式という．L において，$\varDelta^{\circ}$ に至る閉じた始式の個数を $\mathrm{n}(\varDelta^{\circ})L$ であらわす．

同様にして，P の右にある $\Pi\to\Lambda$ を終式とする P の部分証明図を R で示す．そして R において同様に $\mathrm{g}(\Pi^{\circ})R$, $\mathrm{m}(\Pi^{\circ})R$, $\mathrm{n}(\Pi^{\circ})R$ を定義する．

P の終式 $\Gamma, \Pi^{*}\to\varDelta^{*}, \Lambda$ にあらわれる formula C について，C が Γ 又は $\varDelta^{*}$ にあらわれるときは **C in L** であらわす（つまり C の親が L の終式にある）. 同様に C が Π^{*} 又は Λ にあらわれるときは **C in R** であらわす．

任意の証明図 P の終式 $\Gamma\to\varDelta$ のいくつかの formula を指定してできる空でない formula の列 Γ°, $\varDelta^{\circ}$ に対して，同様にして $\mathrm{g}(\Gamma^{\circ}, \varDelta^{\circ})P$, $\mathrm{m}(\Gamma^{\circ}, \varDelta^{\circ})P$ を一般的に拡張して定義する．

以下において，$\mathrm{g}(\varDelta^{\circ})L$, $\mathrm{m}(\varDelta^{\circ})L$, $\mathrm{n}(\varDelta^{\circ})L$ の例を示すと共に，同じ終式をもつ mixture なしの証明図 Q の終式にあらわれる formula C と対比する．

（例１）最後にのみ mixture をもつ証明図 P

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\sim A,A\to A}\quad\dfrac{\dfrac{\sim A\to\sim A}{A,\sim A\to\sim A}}{\sim A,A\to\sim A}}{\sim A,A\to A\wedge\sim A}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A\wedge\sim A\to A}}{\sim A,A\wedge\sim A\to}}{A\wedge\sim A,A\wedge\sim A\to}}{A\wedge\sim A\to}}{\sim A,A\to}\,(A\wedge\sim A)$$

mixing formula $A\wedge\sim A$ について

$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)L=2$	$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)R=3$
$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)L=2$	$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)R=2$
$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)L=0$	$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)R=1$

P の終式の formula について

$\mathrm{g}(\sim A)P=\mathrm{g}(\sim A)L=1$	$\mathrm{g}(A)P=\mathrm{g}(A)L=1$
$\mathrm{m}(\sim A)P=\mathrm{m}(\sim A)L=1$	$\mathrm{m}(A)P=\mathrm{m}(A)L=1$
$\mathrm{n}(\sim A)P=\mathrm{n}(\sim A)L=0$	$\mathrm{n}(A)P=\mathrm{n}(A)L=0$

mixture なしの証明図 Q

$$\dfrac{A\to A}{\sim A,\ A\to}$$

$\mathrm{g}(\sim A)Q=2$	$\mathrm{g}(A)Q=1$
$\mathrm{m}(\sim A)Q=2$	$\mathrm{m}(A)Q=1$
$\mathrm{n}(\sim A)Q=0$	$\mathrm{n}(A)Q=0$

我々は $\sim A$, A について，P の情報から Q の情報を予想したい．次のような数値を考える．

$$\mathrm{g}=\max\{\mathrm{g}(A\wedge\sim A)L,\ \mathrm{g}(A\wedge\sim A)R\}=3$$
$$\mathrm{n}=\mathrm{n}(A\wedge\sim A)L+\mathrm{n}(A\wedge\sim A)R=1$$

このとき，Q の終式の formula $\sim A$ について

$$\mathrm{g}(\sim A)Q\leqq\mathrm{g}(\sim A)P+\mathrm{n}\times\{\mathrm{g}-\mathrm{m}(A\wedge\sim A)L\}=2$$
$$\mathrm{m}(\sim A)Q\geqq\mathrm{m}(\sim A)P=1\qquad(\mathrm{g}(\sim A)P\neq0)$$
$$\mathrm{n}(\sim A)Q\leqq\mathrm{n}(\sim A)P=0$$

がなりたつ．Q の終式の他方の formula A についてもなりたつ．このようにして，帰納法にのせるための尺度を具体例から捜しながら研究する．

3. 補正証明図の応用例

前稿[2)]において補正証明図の概念を導入した．２節の例１に対して補正証明図を例示する．

（例２）R, L のすべての mixing formula を指定し，それらの grade の最大値３を補正数 r として，各々 R, L を補正する場合を示す．ただし A が分解不可能とする．

P の補正証明図 P'

例３のとき分解

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\sim A,A\to A}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\sim A,A\to}}{A,\sim A\to}}{\sim A\to\sim A}}{A,\sim A\to\sim A}}{\sim A,A\to\sim A}}{\sim A,A\to A\wedge\sim A}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A\wedge\sim A\to A}}{\sim A,A\wedge\sim A\to}}{A\wedge\sim A,A\wedge\sim A\to}}{A\wedge\sim A\to}}{\sim A,A\to}\,(A\wedge\sim A)$$

mixing formula $A\wedge\sim A$ について

$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)L'=3^{*}$	$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)R'=3$
$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)L'=2$	$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)R'=2$
$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)L'=0$	$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)R'=1$

補正証明図 P' の終式の formula について

$\mathrm{g}(\sim A)P'=\mathrm{g}(\sim A)L'=2^{*}$	$\mathrm{g}(A)P'=\mathrm{g}(A)L'=1$
$\mathrm{m}(\sim A)P'=\mathrm{m}(\sim A)L'=2^{*}$	$\mathrm{m}(A)P'=\mathrm{m}(A)L'=1$
$\mathrm{n}(\sim A)P'=\mathrm{n}(\sim A)L'=0$	$\mathrm{n}(A)P'=\mathrm{n}(A)L'=0$

（例３）例１において A が分解可能なとき，例２と同じように補正した場合は次のようになる．

mixing formula $A\wedge\sim A$ について

$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)L''=3^{*}$	$\mathrm{g}(A\wedge\sim A)R''=3$
$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)L''=3^{*}$	$\mathrm{m}(A\wedge\sim A)R''=2$
$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)L''=0$	$\mathrm{n}(A\wedge\sim A)R''=1$

補正証明図 P'' の終式の formula について

$\mathrm{g}(\sim A)P''=\mathrm{g}(\sim A)L''=2^{*}$	$\mathrm{g}(A)P''=\mathrm{g}(A)L''=2^{*}$
$\mathrm{m}(\sim A)P''=\mathrm{m}(\sim A)L''=2^{*}$	$\mathrm{m}(A)P''=\mathrm{m}(A)L''=2^{*}$
$\mathrm{n}(\sim A)P''=\mathrm{n}(\sim A)L''=0$	$\mathrm{n}(A)P''=\mathrm{n}(A)L''=0$

例2，例3のいずれの場合でも，mixing formulaのすべてを指定して，それらのgradeの最大値を補正数rとして補正する場合には，次の条件をみたしている．

1）P', P''の mixing formulaの gradeは r以下である．

2）P', P''のいずれの場合も

$$g(\sim A)Q \leqq g(\sim A)P', \quad g(A)Q \leqq g(A)P'$$
$$g(\sim A)Q \leqq g(\sim A)P'', \quad g(A)Q \leqq g(A)P''.$$

3）$0 = r - m(A \wedge \sim A)L'' \leqq r - m(A \wedge \sim A)L$

1)は前稿[2]の2.43により保証されている．例1のPから，mixtureなしの証明図Qが作れることは Gentzen によるLKの基本定理であるが，Qにおける各formulaの gradeをPから予想する定理は今の所ない．例1～3はその予想法としての案である．我々はGLCにも適用し得るような方法を考えている．3)は後に重要になる．

4. Rank

証明図Pの血統Σについて，Σの最後にあるformulaの形をMとする．Σの最後から逆に上へ登ぼるとき，初めてMの形のformulaでなくなるところまでのMの形のformulaの個数を$\mathbf{r}(\Sigma)\boldsymbol{P}$であらわし，**血統$\Sigma$の rank** と呼ぶ．証明図$P$の終式にあるformula Aについて，Aに至る血統のrankの最大値を$\mathbf{r}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$であらわし，**formula A の rank** と呼ぶ．あきらかに$r(A)P \geqq 1$.

以下においては，前節の初めに述べられたような証明図L, Rについて，その mixing formulaの列Δ°, Π°の rank $r(\Delta^\circ)L$, $r(\Pi^\circ)R$を考える．一般に証明図Pの終式にある指定された空でないformulaの列Δ°について，Δ°に至る血統のrankの最大値を$r(\Delta^\circ)P$であらわす．

5. 補正証明図のための Rank

4節において，Gentzenによって定義されたrankを血統を用いて述べた．しかし，この定義では元の証明図Pのrankと補正証明図のrankとが一致するとは限らない．この難点を避けるには次のように定義すればよい．

5.1. 証明図Pの血統Σについて，Σの最後にある formulaの形をMとする．Σの最後から逆に上へ登るとき，初めてMの形のformulaでなくなるところまでのMの形のformulaの個数，もしくは，Mの形のformula をもつsequentの形が$M \to M$の形であって，その両辺のformulaの grade が等しくなる初めての所までのMの形のformulaの個数の最小値を$r'(\Sigma)P$であらわし，**血統Σの（補正証明図のための）rank** と呼ぶ．証明図Pの終式にあるformula Aについて，Aに至る血統のrankの最大値を$\mathbf{r}'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$であらわし，**formula A の(補正証明図のための）rank** と呼ぶ．$r'(\Delta^\circ)P$も同様に定義する．次の定理がなりたつ．

5.2. 証明図Pの補正証明図をP'とする．Pの終式にある任意のformula Aと対応するP'の終式にある formula A'の（補正証明図のための）rankは一致する．

（証明）Aに至る血統でrankが最大のものをΣとすると，対応するΣ'がP'にあってA'に至る．逆にA'に至る血統でrankが最大のものをΠ'とする．Π'の下部に対応するPの血統でAに至るものは必ずあるが，Π'の上部に対応するPの血統がなければ，Π'の途中において$M \to M$の形のsequentで両辺のgradeの等しい所が途中にあることになり，定義に反する．故にΠ'全体に対応する血統Πが必ずPにあってAに至る．前稿[2]の2.24を参照すればよい．

例えば例1のLと，その補正証明図である例2のL'で考えると次のようになる．4節で定義されたrankではLの終式にある$\sim A$については$r(\sim A)L = 4$, L'の終式にある対応する$\sim A$については$r(\sim A)L' = 6$となり一致しない．ところが，この節で定義された（補正証明図のための）rankでは$r'(\sim A)L = 4$, $r'(\sim A)L' = 4$となり一致する．

このように元の証明図Pと，その補正証明図P'の関係を考えてrankを使用するときには，この節で導入された（補正証明図のための）rankは便利である．

しかしながら，単にrankと呼ぶときは4節で定義されたものを意味することにして混同を避けることにする．尚，元のGentzenによるrankは血統を重視しない．

6. 代入についての補題

前々稿[1]において証明した補題を帰納法にのせるために修正し，成立することを再確認する．

6.1. LK′において$\Gamma \to \Delta$を終式とする証明図をPとする．aは$\Gamma \to \Delta$に含まれる任意のfree variable とする．このとき，$\Gamma \to \Delta$にあらわれるすべてのaに任意のterm tを代入してできる sequent $\Gamma(t) \to \Delta(t)$を終式とする証明図P'が存在する．またPにおける血統Σ，終式における空でないformulaの列Γ°, Δ°の各々に対して，P'において対応する血統Σ'，空でない formulaの列$\Gamma^{\circ\prime}$, $\Delta^{\circ\prime}$が存在して，次の等式がなりたつ．

$$g(\Sigma)P = g(\Sigma')P', \quad g(\Gamma^\circ, \Delta^\circ)P = g(\Gamma^{\circ\prime}, \Delta^{\circ\prime})P'$$
$$m(\Gamma^\circ, \Delta^\circ)P = m(\Gamma^{\circ\prime}, \Delta^{\circ\prime})P'$$
$$n(\Gamma^\circ, \Delta^\circ)P = n(\Gamma^{\circ\prime}, \Delta^{\circ\prime})P'.$$

（証明）前稿[2]の注6に注意した上で，前々稿[1]の3.53と同様に証明すればよい．等式についての考察は使用

する推論図の種類を変えていないことに注意すればよい．ただし必要ならば．前もって前々稿[1]の3.51， 3.52も修正すればよい．

7. $g(A)P=0$ となるformura A の消去

前々稿[1]において証明した補題を帰納法にのせるために修正し，成立することを再確認する．

7.1. LK′において，証明図 P の終式にある formula を A とする．また $g(A)P=0$ とする．このとき P の終式から A を消去して得られる sequent を終式とする証明図 P^* がある．しかも P^* の終式にある任意の空でない formula の列 $\varDelta°$ について P の終式にある対応する同じ形の formula の列 $\varDelta°$ を考えるとき，次の条件が成立する．

1) P^* の推論図の個数は P の推論図の個数以下である．
2) P^* の各種の推論図は，P における同種の推論図の個数以下である．
3) $g(\varDelta°)P^* \leqq g(\varDelta°)P$， $r(\varDelta°)P^* \leqq r(\varDelta°)P$，
$g(\varDelta°)P^* \neq 0$ のとき， $m(\varDelta°)P^* \geqq m(\varDelta°)P$.

（証明）前々稿[1]の3.61と同様に証明すればよい．

尚，以降において我々が実際に必要になるものは，6.1，7.1の補題であるが，P が mixture を含む必要はないし，formula の列である必要はなく任意のformula で充分である．2節の $g(\varDelta°)L$, $m(\varDelta°)L$ の定義自身が，まず formula について定義してから拡張する意味である．

8. 純正証明図

我々は既に LK の基本定理の別証明を与える準備が整った．まず純正証明図と呼ばれる証明図についてのみ，cut-elimination が行えることを示す．この節では発想の概略と定義を述べる．

2節，3節で述べたように mixture なしの証明図 Q の終式の任意の formula C の grade を予想する方法を考えた．それらの方法は有力ではあるが帰納法に乗らないので完全ではない．3節で例示したように P を1回補正する毎に L の終式 formula A について一般に下式になる．

$$g(A)L' \leqq g(A)L+\{g-m(M)L\}$$

GLC にも適用するときには，補正は何回も必要になる．そこで補正をする必要のない証明図の条件として非常に分かりやすいものは下式である．

$$\{g-m(M)L\}=0, \quad \{g-m(M)R\}=0$$

この例としては例3の L'' である．しかしながら残念なことには，この条件を満たす証明図は非常に少ない．例1の L, R, 例2の L', R', 例3の R'' はこの条件を満たさない．

8.1. LK′において mixture は最後の推論においてのみ使用されている次のような証明図 P を考える．$\varDelta$, $\varPi$ にある mixing formula の列を $\varDelta°$, $\varPi°$ であらわす．このとき，次の条件をみたす証明図 P を**純正証明図**という．

$$\frac{\Gamma \rightarrow \varDelta \qquad \varPi \rightarrow \varLambda}{\Gamma,\ \varPi^* \rightarrow \varDelta^*,\ \varLambda}\ (M)$$

（純正条件）

$$m(\varDelta°)L = m(\varPi°)R = \max\{g(\varDelta°)L,\ g(\varPi°)R\}$$

9. 純正証明図における cut-elimination の定理

我々は非常に特殊な条件を満たす証明図のグループについて cut-elimination を証明する．したがって純正証明図においては，2節の $g(C)Q$ の予想が可能になる．

〔純正証明図における cut-elimination の定理〕

純正証明図 P に対して，次の条件をみたすLK′の証明図 Q が存在する．

Ⅰ: Q は mixture を含まない．
Ⅱ: P の終式と Q の終式は一致する．
Ⅲ: P の終式の formula C と対応する Q の終式の formula C について，$g(C)Q \leqq g(C)P$
Ⅳ: 同じく対応する C について
$g(C)Q \neq 0$ のとき， $m(C)Q \geqq m(C)P$.

（証明）一致，対応とは図形的にも考えることである．$g(\varDelta°)L+g(\varPi°)R=g$, $r(\varDelta°)L+r(\varPi°)R=r$ とするときがある．g と r についての二重帰納法つまり $\omega\cdot g+r$ についての超限帰納法で証明する．場合分けは Gentzen の方法と殆んど同じであるが，条件Ⅰ～Ⅳの確認を要する．また $g(C)P$, $m(C)P$ は，C の親が L にあるか R にあるかを考えてその値を評価する，（2節の記号を参照）

9.1. **$g(\varDelta°)L=0$ のとき**，L のすべての mixing formula M について $g(M)L=0$. 従って7.1を何回か繰り返し適用すると，$\Gamma \rightarrow \varDelta^*$ が mixture なしで得られる．その後 $\Gamma, \varPi^* \rightarrow \varDelta^*, \varLambda$ になるように適当に換，増を適用すればよい．条件Ⅰ～Ⅳは明らか．C in R については，$g(C)Q=0$ なのでⅣは明らか．C in L については，7.1の3)より明らか．$g(\Pi°)R=0$ のときも同様．

9.2. **$g(\varDelta°)L \neq 0$, $g(\varPi°)R \neq 0$ のときを考える**．定義より $m(\varDelta°)L \geqq 1$, $m(\varPi°)R \geqq 1$. 場合別けを明瞭にするために次の略号を採用する；

$\boldsymbol{gL}=g(\varDelta°)L$, $\boldsymbol{mL}=m(\varDelta°)L$, $\boldsymbol{rL}=r(\varDelta°)L$
$\boldsymbol{gR}=g(\varPi°)R$, $\boldsymbol{mR}=m(\varPi°)R$, $\boldsymbol{rR}=r(\varPi°)R$.

〔1, 1 − 1, 1〕: $gL=1$, $rL=1$, $gR=1$, $rR=1$ のとき，P は次の形である．明らかに R を Q として採用す

ればよい．

$$\frac{M \to M \qquad M \to M}{M \to M}(M)$$

LK′では，この形の mixture も存在して純正である．

〔1, 1 ー ＊, 2〕: $gL=1$, $rL=1$, $rR \geqq 2$ で gR が任意のとき，P は次の形である．

$$\frac{M \to M \qquad \Pi \to \Lambda}{M, \Pi^* \to \Lambda}(M)$$

P が純正証明図なので，$gR=1$ となることが下記の注意より分かる．R に何回か換，減を適用すれば Q が作れる．M in L は条件をみたす．C in R はあきらか．

注1：純正条件は次の等式でもある．

$$mL = mR = gL = gR$$

理由は定義より，$mL \leqq gL$, $mR \leqq gR$ が成立．

〔＊, ＊ー 1, 1〕: $gR=1$, $rR=1$ で gL, rL が任意のとき，〔1, 1 ー ＊, ＊〕と同様．

〔＊, 1 ー ＊, 1〕: $rL=rR=1$ で gL, $gR \geqq 2$ で任意のとき，注1の等式が成り立っているので，$\Gamma \to \Delta$ は論理記号の推論図 I_1 の下式であり，$\Pi \to \Lambda$ も論理記号の推論図 I_2 の下式である．$rL=rR=1$ より，L, R 共に mixing formula はただ1つであり，しかも各々 $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ の chief formula でなければならない．M の形から I_1, I_2 は同種の推論図である．場合分けする：

1)　I_1, I_2 が～の推論図のとき，P は次の形である．

$$L_1: \frac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta_0}{\Gamma \to \Delta_0, \sim A} \qquad \dfrac{\Pi_0 \to \Lambda, A}{\sim A, \Pi_0 \to \Lambda} : R_1}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}(\sim A)$$

I_1, I_2 の上式までの部分証明図 L_1, R_1 を使って次の証明図 P_1 を作る．

$$\frac{\Pi_0 \to \Lambda, A \qquad A, \Gamma \to \Delta_0}{\Pi_0, \Gamma \to \Lambda, \Delta_0}(A)$$

ただし我々の mixture は前々稿[1]の 2.8 で定義したように mixing formula を指定できる．我々は I_1, I_2 の sub formula のみを mixing formula として指定する．（他の場合も同様なので以後省略）

ところで P は純正なので注1より下式が成立している．

$m(\sim A)L = m(\sim A)R = g(\sim A)L = g(\sim A)R$
$= m(A)L_1+1 = m(A)R_1+1 = g(A)L_1+1 = g(A)R_1+1.$

故に P_1 が純正証明図であり，$g(A)L+g(A)R<gL+gR$ より，帰納法の仮定が使えることが分かる．（他の場合も同様なので以後省略）．

帰納法の仮定より，Π_0, $\Gamma \to \Lambda$, Δ_0 に至る mixture なしの証明図 Q_1 が存在して，条件Ⅲ，Ⅳをみたす．Q_1 に何回か換を適用すれば Q が得られる．

Q が条件Ⅲ，Ⅳをみたすことは，Q_1 の条件が保証する．

2)　I_1, I_2 が∀の推論図のとき，P は次の形である．

$$L_1: \frac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, A(a)}{\Gamma \to \Delta_0, \forall x A(x)} \qquad \dfrac{A(t), \Pi_0 \to \Lambda}{\forall x A(x), \Pi_0 \to \Lambda} : R_1}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}(\forall x A(x))$$

まず I_1 についての eigen variable の条件から，Γ, Δ_0, $A(x)$ には a が入っていない．故に L_1 の終式の a に対して t を代入してできる $\Gamma \to \Delta_0$, $A(t)$ を終式とする mixture なしの証明図 L_2 が存在することが 6.1 より分かる．また 6.1 より grade 等の性質については，L_1 と L_2 は同一視してよい．

L_2 と R_1 を使って次の証明図 P_1 を作る．

$$\frac{\Gamma \to \Delta_0, A(t) \qquad A(t), \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}(A(t))$$

mixing formula の指定，P_1 が純正であること，帰納法の仮定が使えることは，1)と同様である．

帰納法の仮定より，Γ, $\Pi_0 \to \Delta_0$, Λ に至る mixture なしの証明図 Q_1 が存在して条件Ⅲ，Ⅳをみたす．Q_1 をそのまま Q として採用すればよい．あきらかに条件をみたす．

3)　I_1, I_2 が∧の推論図のとき，P は次の形である．

$$L_1: \frac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, A \quad \Gamma \to \Delta_0, B}{\Gamma \to \Delta_0, A \wedge B} \qquad \dfrac{A, \Pi_0 \to \Lambda}{A \wedge B, \Pi_0 \to \Lambda} : R_1}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}(A \wedge B)$$

P は純正だから，$m(A\wedge B)L = g(A\wedge B)L = gL \geqq 2$．故に L の終式の mixiing formula $A\wedge B$ に至る血統の中で，始式から始まる血統の grade は必ず gL である．故に $g(A)L_1 \neq 0$（つまり1個でも始式から始まって A に至る血統が存在する）ときには $g(A)L_1 = gL-1$ となる．従って $g(A)L_1=0$ の場合と $g(A)L_1=gL-1$ の場合を考えればよい．

3) ー 1 : $g(A)L_1=0$ の場合．

このとき，L_1 の終式から A を消去できることが 7.1 より分かる．消去して得られる $\Gamma \to \Delta_0$ に何回か換，増を適用すれば Q が作れる．C in L は 7.1 により条件Ⅲ，Ⅳをみたすことが保証される．C in R が条件Ⅲ，Ⅳをみたすことは明らか．

3) ー 2 : $g(A)L_1=gL-1$ の場合．

このとき，前述したことから $m(A)L_1=gL-1$ も分かる．故に L_1 と R_1 を使って次の証明図 P_1 を作る．

$$\frac{\Gamma \to \Delta_0, A \qquad A, \Pi_0 \to \Lambda}{\Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}(A)$$

mixing formula の指定，P_1 が純正であること，帰納法の仮定が使えることは1)と同様である．

帰納法の仮定より，そのまま Q が得られることは明らか．

〔＊, ＊ー ＊, 2〕: $rR \geqq 2$ で rL, gL, gR は任意．ただし，gL, $gR \geqq 2$ で純正条件の成立している場合を考え

る．$\Pi \to \Lambda$ は推論図 I_2 の下式である．Π に含まれる mixing formula が I_2 の chief formula かどうかで場合分けする．

1)　Π の mixing formula が I_2 の chief formula でないとき，P は次の形である．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Phi \to \Psi}{\Pi \to \Lambda}\ :R_1}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (M)$$

L と R_1 を使って次の証明図 P_1 を作る．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Phi \to \Psi}{\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi}\ (M)$$

mixing formula の指定は $\Gamma \to \Delta$ については P の時と同じ，$\Phi \to \Psi$ については P の I_2 における下式 $\Pi \to \Lambda$ の中の mixing formula の親になる formula 全部を指定する．従って mixing formula は I_2 の chief formula ではないので $\mathrm{g}(\Phi^\circ)R_1 = \mathrm{m}(\Phi^\circ)R_1 = \mathrm{g}R = \mathrm{m}R$. ただし，$\Phi^\circ$ は R_1 における mixing formula の列をあらわす．故に P_1 は純正となる．また $\mathrm{r}(\Phi^\circ)R_1 < \mathrm{r}R$. 故に帰納法の仮定が使える．帰納法の仮定より P_1 の終式と同じ終式をもつ mixture なしの証明図 Q_1 が得られる．Q_1 に対して，次のような推論を適用してできる証明図を Q とすればよい．2重線は何度かの換をあらわす．

$$\left.\begin{array}{c}\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi \quad :Q_1\\ \hline\hline \Phi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Psi \\ \hline \Pi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda \\ \hline\hline \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda\end{array}\right. \ \mathrm{I}_3$$

I_3 が I_2 と同種の推論図であること，あるいは Q が条件Ⅲ，Ⅳをみたしていることは，I_2 を具体的に各推論図として考えてみればあきらかである．以上で I_2 が1つの上式をもつ場合を一般的にあらわした証明になる．

つぎに I_2 が2つの上式をもつ場合を考える．

P は次の形である．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\overset{R_1}{\Pi \to \Lambda_0, A} \qquad \overset{R_2}{\Pi \to \Lambda_0, B}}{\Pi \to \Lambda_0, A \wedge B}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda_0, A \wedge B}\ (M)$$

I_2 の左の上式である $\Pi \to \Lambda_0, A$ を終式とする P の部分証明図を R_1 とする．同様に $\Pi \to \Lambda_0, B$ に至る証明図を R_2 とする．R_1, R_2 の各々の終式の Π の formula で，I_2 に関して mixing formula の親にあたる formula 全部を各々 Π° であらわす．P の純正条件より，$\mathrm{g}(\Pi^\circ)R_1 = 0$ または $\mathrm{g}(\Pi^\circ)R_1 = \mathrm{g}R$. $\mathrm{g}(\Pi^\circ)R_1 = 0$ のときは7.1より $\Pi^* \to \Lambda_0, A$ を終式とする mixture なしの証明図 R_3 が存在し，また必ず $\mathrm{g}(\Pi^\circ)R_2 = \mathrm{g}R$ となる．従って L と R_2 から次の純正証明図 P_1 が作れて，帰納法の仮定が使える．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda_0, B}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda_0, B}\ (M)$$

P_1 の終式と同じ形になる mixture なしの証明図 Q_1 が帰納法の仮定により存在する．R_3 と Q_1 から次の証明図 Q が作れる．ただし2重線は増，換の何回かの適用をあらわす．

$$\dfrac{\dfrac{R_3:\ \Pi^* \to \Lambda_0, A}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda_0, A}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!=\!\!= \qquad \Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda_0, B\ :Q_1}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda_0, A \wedge B}$$

Q が条件Ⅲ，Ⅳをみたすことについては，順に元をたどればよい．

他の場合も同様．

2)　Π の mixing formula が，I_2 の chief formula のとき

2)－1：I_2 が構造についての推論図の場合．

1)の場合の I_2 の上式が1つのときの証明と同様である．ただし，P_1 が純正になる理由が異なることと，Q_1 自身が Q になることに注意すればよい．

2)－2：I_2 が～左の推論図の場合．

P は次の形である．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Pi_0 \to \Lambda, A\ :R_1}{\sim A, \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\sim A)$$

R の Π_0 にある mixing formula の列を Π_0° とする．P の純正条件より $\mathrm{g}(\Pi_0^\circ)R = 0$ または $\mathrm{g}(\Pi_0^\circ)R = \mathrm{g}R$.

まず $\mathrm{g}(\Pi_0^\circ)R = 0$ の場合を考える．故に P の純正条件より $\mathrm{g}(\sim A)R = \mathrm{g}(A)R_1 + 1 = \mathrm{g}R$. まず $\mathrm{g}(\Pi_0^\circ)R = 0$ だから，R_1 の終式 $\Pi_0 \to \Lambda, A$ から7.1より Π_0° を消去してできる $\Pi_0^* \to \Lambda, A$ を終式とする mixture なしの証明図 R_2 が存在する．7.1の3)より $\mathrm{g}(A)R_2 = 0$ または $\mathrm{g}(A)R_2 = \mathrm{g}R - 1$. 故に $\mathrm{g}(A)R_2 = 0$ のときは，7.1より $\Pi_0^* \to \Lambda, A$ から A を消去してできる $\Pi_0^* \to \Lambda$ を終式とする mixture なしの証明図 R_3 が存在するので，適当に R_3 の終式に換，増を適用すれば目的の Q が得られる．その Q が条件のⅢ，Ⅳをみたすことは7.1より明らか．

次に $\mathrm{g}(A)R_2 = \mathrm{g}R - 1$ のときは次のような証明図 P_1 を L と R_2 から作る．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Pi_0^* \to \Lambda, A\ :R_2}{\sim A, \Pi_0^* \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\sim A)$$

ところで $\mathrm{g}(A)R_2 = \mathrm{g}R - 1$ のときは，R_2 の作り方から $\mathrm{g}(A)R_2 = \mathrm{m}(A)R_2 = \mathrm{g}R - 1$ が7.1の3)より保証されている．故に $\mathrm{g}(\sim A)R_4 = \mathrm{m}(\sim A)R_4 = \mathrm{g}R = \mathrm{g}L$. ただし R_4 は P_1 の右にある $\sim A, \Pi_0^* \to \Lambda$ を終式とする証明図を意味する．故に P_1 は純正であり，$\mathrm{r}(\sim A)R_4 = 1$

$<\mathrm{r}R$ より，帰納法の仮定が使える．帰納法の仮定により存在を保証された mixture なしの証明図を Q とすればよい．Q が条件Ⅲ，Ⅳを満たすことは，逆に元をたどればよい．

次に $\mathrm{g}(\Pi_0^\circ)R=\mathrm{g}R$ の場合を考える．上記と同様の議論から $\mathrm{g}(A)R_1=0$ と $\mathrm{g}(A)R_1=\mathrm{g}R-1=\mathrm{m}R-1$ の場合があるが，いずれの場合も，L, R_1 より次の P_2 を作る．

$$\frac{\Gamma\to\Delta \qquad \Pi_0\to\Lambda,\ A}{\Gamma,\ \Pi_0^*\to\Delta^*,\ \Lambda,\ A}\ (\sim A)$$

P_2 は純正で，rank が下がるので，$\Gamma,\ \Pi_0^*\to\Delta^*,\ \Lambda,\ A$ を終式とする Q_1 が存在する．帰納法の仮定より $\mathrm{g}(A)Q_1=0$ または $\mathrm{g}(A)Q_1=\mathrm{g}L-1=\mathrm{m}(A)Q_1$ の2つの場合がある．$\mathrm{g}(A)Q_1=0$ のとき，7.1 より Q が作れる．もう一方の場合こそが Gentzen の方法により，Q が作れる．条件Ⅲ，Ⅳは 7.1 又は帰納法の仮定より明らか．

2)－3：I_2 が∀左の推論図の場合．

P は次の形である．

$$\frac{\Gamma\to\Delta \qquad \dfrac{A(t),\ \Pi_0\to\Lambda}{\forall xA(x),\ \Pi_0\to\Lambda}}{\Gamma,\ \Pi_0^*\to\Delta^*,\ \Lambda}\ (\forall xA(x))$$

2)－2 と同様にすればよい．要するに P の純正条件があるので，grade が 0 のときは 7.1 を適用し，他方では grade は同じだが rank の下がった純正証明図が作れて帰納法の仮定が使える．場合分けを 4 通りすれば明らか．

2)－4：I_2 が∧左の推論図の場合．

P は次の形と考えてよい．

$$\frac{\Gamma\to\Delta \qquad \dfrac{A,\ \Pi_0\to\Lambda}{A\wedge B,\ \Pi_0\to\Lambda}}{\Gamma,\ \Pi_0^*\to\Delta_0^*,\ \Lambda}\ (A\wedge B)$$

2)－3 と同様．

〔＊, 2 －＊＊〕：$\mathrm{r}L\geqq 2$ で $\mathrm{r}R$, $\mathrm{g}L$, $\mathrm{g}R$ は任意．ただし，$\mathrm{g}L$, $\mathrm{g}R\geqq 2$ の場合を考える．場合分けの仕方や各場合の証明は，前述の〔＊, ＊－＊, 2〕と同様である．次の場合のみを注意するにとどめる．

I_1 が∀右の推論図で，mixing formula が I_1 の chief formula の場合，P は次の形である．

$$L_1:\ \frac{\dfrac{\Gamma\to\Delta_0,\ A(a)}{\Gamma\to\Delta_0,\ \forall xA(x)} \qquad \Pi\to\Lambda}{\Gamma,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ \Lambda}\ (\forall xA(x))$$

L の終式の Δ_0 に含まれる全部の mixing formula の列を Δ_0° とする．$\mathrm{g}(\Delta_0^\circ)L=\mathrm{g}L$ のとき，2 回の帰納法をする可能性があるので，前もって eigen variable の条件をみたすように準備をしておく．つまり P の証明図の中に一度も表われない自由変数 b をとっておく．そして，$\Gamma\to\Delta_0^\circ,\ A(a)$ を終式とする L_1 に対して 6.1を適用する．L_1 にあらわれるすべての a に b を代入してできる mixture を含まない証明図を L_2 とする．L の終式の Δ_0° の親全部を L_1 の Δ_0 においても，同じ記号 Δ_0° を用いることにする．さらに L_1 の Δ_0° に対応する L_2 の formula 全部をあらわすためにも同じ Δ_0° を用いることにする．このようにして L_2 における mixing formula の指定と，そのあらわす記号を確認した上で，次の形の証明図を L_2 と R から作る．（通常の場合，当然な mixing formula の指定は言及しない．）

$$\frac{\Gamma\to\Delta_0,\ A(b) \qquad \Pi\to\Lambda}{\Gamma,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ A(b),\ \Lambda}\ (\forall xA(x))$$

この証明図を P_1 とする．P_1 は純正であり，grade は同じだが，rankが下がっているので，帰納法の仮定が使えて，P_1 と同じ終式をもつ mixture なしの証明図 Q_1 が存在する．そして $\mathrm{g}(A(b))Q_1=0$ または $\mathrm{g}L-1$.

その中の $\mathrm{g}(A(b))Q_1=\mathrm{g}L-1$ についてのみ考える．このとき $\mathrm{g}(A(b))Q_1=\mathrm{m}(A(b))Q_1=\mathrm{g}L-1$ になる．次の証明図 P_2 を Q_1 と R から作るが，このとき自由変数 b が eigen variable であることが必要になる．

$$Q_1:\ \frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ A(b),\ \Lambda}{\Gamma,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ \Lambda,\ A(b)}}{\Gamma,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ \Lambda,\ \forall xA(x)} \qquad \Pi\to\Lambda}{\Gamma,\ \Pi^*,\ \Pi^*\to\Delta_0^*,\ \Lambda,\ \Lambda}\ (\forall xA(x))$$

P_2 は grade は同じだが $\mathrm{r}(\forall xA(x))=1<\mathrm{r}L$ となって帰納法が使える．P_2 が純正であることは明らか．故に P_2 の終式と同じ終式をもつ mixture なしの証明図 Q_2 が存在する．Q_2 の終式に適当に換，減を適用すると求める Q が得られる．Q が条件Ⅲ，Ⅳをみたすことを確かめるには，帰納法の仮定を用いて逆にもどっていけばよい．

10．純正証明図にすることの可能性

以上のようにして，我々は純正証明図のグループに対しては cut-elimination ができることが分かった．その証明は純正条件が仮定されているだけに非常に美しいものになり，また Gentzen の場合分けをそのまま利用できることになった．しかしながら，純正証明図のグループが非常に小さいことが難点である．我々の方法は現在の定義のままでは，GLC や LJ にも適用できる反面において，例１のようなものにさえ cut elimination の保証を与えていない．我々に残された課題は２つある．その課題は純正証明図の範囲を拡大することと，９節の証明をより一層簡単にすることである．これらの課題について述べる．そのために我々の議論を振り返えって，外から眺めてみる．

前々稿[1]から本稿までにおいて我々は我々の方法の発想をも説明するという趣旨をもって構成されているが，cut-elimination の証明だけを考えるならば前稿の諸定理は不要であり，9節の証明には用いていない．我々にとって重要な手順は次の通りである．

1) mixture の新しい定義の導入．
2) LK を LK′ に拡張し．その間の関係を証明．
3) LK′ における，親と子，血統の定義．
4) LK′ における，rank の血統に関係した定義．
5) LK′ における，血統の grade $g(\Sigma)P$ の定義．
6) LK′ における，$g(\varDelta^\circ)P$, $m(\varDelta^\circ)P$ の定義．
7) LK′ における，$g(C)P$, $m(C)P$ についての条件がついた代入についての補題の証明．
8) LK′ における，$g(C)P$, $m(C)P$, $r(C)P$についての条件がついた $g(A)=0$ となる formula A の消去についての補題の証明．
9) 純正条件 $m(\Delta^\circ)L=g(\varDelta^\circ)L=g(\Pi^\circ)R=m(\Pi^\circ)R$ をみたす純正証明図における cut-elimination の定理の証明．

1)〜3)，5) は前々稿[1]に，その他は本稿にある．

主たる課題としての純正証明図の範囲を拡大するためには5)以降が問題である．$g(C)P$に相当する$v(C)P$，そして，$m(C)P$ に相当する $u(C)P$が存在して5)〜9)をみたすとともに，最後の推論図のみが mixtureである証明図が常に純正条件をみたすならば9節の証明が本質的であることになる．故に5)の定義を吟味する．

11. weight の定義の例

我々は始式の各辺にあらわれる formulaの gradeが常に1の場合を考えてきた．しかし1である必要性は増の chief formula との区別だけである．1以上であれば区別はできるはずである．

11. 1. mixture を含まない証明図Pの終式を $\Gamma\rightarrow\varDelta$ とする，Γ, $\varDelta$ の指定された formulaの列をΓ°, $\varDelta^\circ$とする．$\max\{g(\Gamma^\circ)P, g(\varDelta^\circ)P\}\leqq r$をみたす1以上の自然数を r とする．Pの血統Σの最初の formula Aについて，**$P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$における$A$の weight $w(A)P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$**を次のように定義し，混乱のないときは$w(A)P$または$w(A)$と略記する．または，$w(\Sigma)P$, $w(\Sigma)$ と略記する．

1) Aが始式の formulaで，ΣがΓ°, $\varDelta^\circ$に至る血統のときは $w(A)=r-(g(\Sigma)P-1)$.
2) Aが始式の formulaで，ΣがΓ°, $\varDelta^\circ$のいずれにも至らず，その始式の他辺から出る血統Σ'についても，Σ'がΓ°, $\varDelta^\circ$に至らないときは，$w(A)=1$
3) Aが始式の formulaで，ΣはΓ°, $\varDelta^\circ$のいずれにも至らないが，その始式の他辺から出るΣ'がΓ°, $\varDelta^\circ$に至るときは $w(A)=r-(g(\Sigma')P-1)$.
4) Aが増の chief formula のとき，$w(A)=0$.
5) Γ°, $\varDelta^\circ$ともに空の列のときは，Aが始式にあるときは $w(A)=1$, Aが4)のとき $w(A)=0$.

12. value の定義の例

11節において始式の formula A に1以上の weight を定義した．次の定義は前述の11. 1に続くものである．

12. 1. $\Gamma\rightarrow\varDelta$ に至る mixture を含まない証明図 P について，$P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$を考える．$P$ の血統 Σ について **$v(\Sigma)P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$ を $P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$ における Σ の value** と呼び，つぎのように定義し，$v(\Sigma)P$, $v(\Sigma)$ と略記する．

1) Σが始式の formula Aから始まるとき．
$v(\Sigma)=w(A)+(g(\Sigma)P-1)$
2) Σが増の chief formula から始まるとき，
$v(\Sigma)=0$

12. 2. $P(\Gamma^\circ\rightarrow\varDelta^\circ:r)$ の終式の空でない formula の列Φについて，$v(\Phi)$, $u(\Phi)$ を定義する．

$$v(\Phi)=\max\{v(\Sigma):\Phi\text{ に至る血統 }\Sigma\}.$$

$$u(\Phi)=\begin{cases}\min\{v(\Sigma):\text{始式から }\Phi\text{ に至る血統}\} & [v(\Phi)\geqq 1]\\ 0 & [v(\Phi)=0]\end{cases}$$

13. 基本定理への展開

以上のようにu, vを定義すると，6節以降においてm, gのかわりにu, v でおきかえた議論ができる．そして最後の推論図だけが mixture である証明図PにおけるL, Rの mixing formula の列を$\varDelta^\circ$, Π° と考える．また，$\max\{g(\varDelta^\circ)L, g(\Pi^\circ)R\}=r$ として，L, R に対して $L(\ \rightarrow\varDelta^\circ:r)$, $R(\Pi^\circ\rightarrow\ :r)$を考えることにすると任意の$P$は，$u$, v に関する純正証明図になる．またL, Rの weight の最大値をwとすると9節は$w=1$ の場合であることが分かる．

参 考 文 献

1) 深山 徹 : Cut Elimination の方法(Ⅰ), 本校紀要，第21巻，p. 91－100，1987.
2) 深山 徹 : Cut Elimination の方法(Ⅱ), 本校紀要，第22巻，p. 69－74，1988.